Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермская государственная сельскохозяйственная академия
имени академика Д. Н. Прянишникова»

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Составители: С. Б. Югова, Н. В. Деменева

Пермь
ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА
2012

УДК 51
ББК 22.1
Ю 152

Рецензент: **Н. К. Шестакова**, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры физики Пермской ГСХА.

Сборник задач по высшей математике / сост. С. Б. Югова, Н. В. Деменева; ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА. – Пермь: Изд-во ФГБОУ ВПО Пермская ГСХА, 2012. – 82 с.

Данный сборник задач разработан в соответствии с рабочей программой по высшей математике факультета заочного обучения направления подготовки 120700 "Землеустройство и кадастры". Сборник включает три контрольные работы по основным разделам высшей математики: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, математический анализ, основы теории вероятностей и математической статистики.

Сборник предназначен как для использования на занятиях, так и для самостоятельной работы студентов факультета заочного обучения направления подготовки "Землеустройство и кадастры" ПГСХА.

Печатается по решению методической комиссии факультета землеустройства и кадастра. Протокол № 4 от 14.02.2012 г.

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера, методом обратной матрицы и методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x+3y+5z=10, \\ 3x+7y+4z=3, \\ x+2y+2z=3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+y=4, \\ x+3z=0, \\ 5y-z=-1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y-z=36, \\ x+z-y=13, \\ y+z-x=7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x-6y+4z=3, \\ 3x-3y+2z=2, \\ 4x-5y+2z=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-3y+2z=-4, \\ 6x-2y+3z=-1, \\ 5x-3y+2z=-3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x+2y+3z=-2, \\ 2x-2y+5z=0, \\ 3x+4y+2z=-10. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 2x+9y-9z=5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y+z=36, \\ 2x-3z=-17, \\ 6x-5z=7. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 7x+2y+3z=15, \\ 5x-3y+2z=15, \\ 10x-11y+5z=36. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-y+z=1, \\ x+y-z=0, \\ y+z-x=-1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x-2y+z=1, \\ -2x+y+3z=0, \\ 2x-2z=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x+5z=2, \\ x+3y+16z=0, \\ -y+10z=-1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x-y+z=-1, \\ x+y-z=2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x+2y=0, \\ y+3z=2, \\ 5x-z=1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ 2x+3y+2z=0, \\ 2y+5z=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} y+3z=0, \\ 2y+x=4, \\ 5x-z=-1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 10z-y=-1, \\ 2y+5z=2, \\ y+3x+16z=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5y+2z=2, \\ 2y+z=0, \\ -x+5z=1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x+y=2, \\ 2y+z=0, \\ -x+5z=1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x-2y+3z=1, \\ -2x+2z=0, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x-y+z=1, \\ x+y-z=-1, \\ -x+y+z=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x+y-z=4, \\ x+y+z=2, \\ x-y+z=-2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ 3y+4z=-6, \\ x+z=1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5x+2y-3z=30, \\ 10x+5y-11z=72, \\ 7x+3y+2z=30. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x+2y=5, \\ 2x+3z=16, \\ 10y-z=10. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+2y+z=8, \\ 3y-2x-3z=-5, \\ 3x-4y+5z=10. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -x+7y+2z=16, \\ x+2y+z=8, \\ 3x-5y+3z=2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+y+2z=1, \\ x+y+3z=2. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x+2y+z=2, \\ -x+2z=-7, \\ 3x+y+2z=-1. \end{cases}$ 32. $\begin{cases} 2x+3y+2z=6, \\ x+3y-z=4, \\ 4x+y+3z=1. \end{cases}$

<u>Пример.</u>

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=9, \\ x+2y-3z=14, \\ 3x+4y+z=16. \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

1. <u>Правило Крамера.</u>

Запишем определитель системы Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, и вычислим его по правилу треугольника:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot2\cdot1+1\cdot4\cdot2+3\cdot(-3)\cdot3-2\cdot2\cdot3-1\cdot3\cdot1-$$

$$-4\cdot(-3)\cdot2=4+8-27-12-3+24=-6\neq0.$$

Система является определённой.

Далее вычисляем определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Определитель Δ_1 получается из Δ заменой первого столбца числами, расположенными в правой части уравнений:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-12.$$

Определитель Δ_2 получается из Δ заменой второго столбца числами, расположенными в правой части уравнений:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix}=-18.$$

И определитель Δ_3 получается из Δ заменой третьего столбца числами, расположенными в правой части уравнений:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 12.$$

По формулам Крамера находим неизвестные системы:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-18}{-6} = 3,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{-6} = -2.$$

Ответ: $x = 2, y = 3, z = -2.$

2. <u>Метод обратной матрицы.</u>

Запишем матрицу системы – матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее запишем матрицу свободных элементов – матрицу-столбец, составленную из чисел, расположенных в правой части уравнений:

$$B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

И запишем матрицу неизвестных:

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда систему можно переписать в виде матричного уравнения: $AX=B$, решение которого находим по формуле $X=A^{-1}B.$

Прежде всего найдём матрицу A^{-1}, обратную матрице A, по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Определитель системы $|A|=-6\neq 0$. Следовательно для матрицы A существует обратная. Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=14, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=5,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=8,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-2, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1.$$

Отсюда $A^{-1}=\dfrac{1}{-6}\begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Тогда:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}B=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14 & 5 & -13\\-10 & -4 & 8\\-2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\14\\16\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}14\cdot 9+5\cdot 14-13\cdot 16\\-10\cdot 9-4\cdot 14+8\cdot 16\\-2\cdot 9+1\cdot 14+1\cdot 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

Итак, $x=2,\quad y=3,\quad z=-2.$

Ответ: $x=2,\quad y=3,\quad z=-2.$

3. <u>Метод Гаусса.</u>

Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 2 & 9\\1 & 2 & -3 & 14\\3 & 4 & 1 & 16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 14\\2 & 3 & 2 & 9\\3 & 4 & 1 & 16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 14\\0 & -1 & 8 & -19\\0 & -2 & 10 & -26\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 14\\0 & -1 & 8 & -19\\0 & 1 & -5 & 13\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 14\\0 & -1 & 8 & -19\\0 & 0 & 3 & -6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -3 & 14\\0 & -1 & 8 & -19\\0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right).$$

Здесь выполнены следующие преобразования:

а) первую и вторую строчки поменяли местами;

б) ко второй строке прибавили первую, умноженную на (–2), к третьей строке прибавили первую, умноженную на (–3);

в) третью строчку разделили на (–2);

г) к третьей строке прибавили вторую;

д) третью строчку разделили на 3.

Последней матрице соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x+2y-3z=14, \\ \quad -y+8z=-19, \\ \qquad\quad z=-2. \end{cases}$$

Из этой системы последовательно находим:

$z=-2, \quad y=8z+19=3, \quad x=-2y+3z+14=2.$

Ответ: $x=2, y=3, z=-2.$

ТЕМА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

<u>Задание 1</u> Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Найти:

1. Периметр треугольника ABC.
2. Уравнения всех сторон треугольника в общем виде.
3. Уравнение высоты CH.
4. Уравнение медианы AM.

№ варианта	A	B	C
1	$(-2;4)$	$(3;1)$	$(10;7)$
2	$(-3;-2)$	$(14;4)$	$(6;8)$
3	$(1;7)$	$(-3;-1)$	$(11;-3)$
4	$(1;0)$	$(-1;4)$	$(9;5)$
5	$(1;-2)$	$(7;1)$	$(3;7)$
6	$(-2;-3)$	$(1;1)$	$(6;1)$
7	$(-4;2)$	$(-6;6)$	$(6;2)$
8	$(4;-3)$	$(7;3)$	$(1;10)$
9	$(4;-4)$	$(8;2)$	$(3;8)$
10	$(-3;-3)$	$(5;27)$	$(7;7)$
11	$(1;-6)$	$(3;4)$	$(-3;3)$

12	$(-4;2)$	$(8;-6)$	$(2;6)$
13	$(5;-2)$	$(0;4)$	$(5;7)$
14	$(4;-4)$	$(6;2)$	$(-1;8)$
15	$(-3;8)$	$(-6;2)$	$(0;5)$
16	$(6;29)$	$(10;-1)$	$(-4;1)$
17	$(4;1)$	$(-3;-1)$	$(7;-3)$
18	$(-4;2)$	$(6;-4)$	$(4;10)$
19	$(3;-1)$	$(11;3)$	$(-6;2)$
20	$(-7;-2)$	$(-7;4)$	$(5;-5)$
21	$(-1;-4)$	$(9;6)$	$(-5;4)$
22	$(10;-2)$	$(4;-5)$	$(-3;1)$
23	$(-3;1)$	$(-4;-5)$	$(8;1)$
24	$(-2;-6)$	$(-3;5)$	$(4;0)$
25	$(-7;-2)$	$(3;-8)$	$(-4;6)$
26	$(0;2)$	$(-7;-4)$	$(3;2)$
27	$(7;0)$	$(1;4)$	$(-8;-4)$
28	$(1;-3)$	$(0;7)$	$(-2;4)$
29	$(-5;10)$	$(8;-2)$	$(1;4)$
30	$(2;5)$	$(-3;1)$	$(0;4)$
31	$(0;8)$	$(-4;-5)$	$(-8;-2)$
32	$(6;5)$	$(-6;0)$	$(10;3)$

Пример. $A(-1;1), B(-7;4), C(-4;5)$.

Решение.

1. Вычислим длины всех сторон треугольника, применяя формулу нахождения расстояния между двумя точками $d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$:

$$AB=\sqrt{(-7-(-1))^2+(4-1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5},\ BC=\sqrt{10},\ AC=5.$$

Следовательно, периметр треугольника ABC равен $P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=3\sqrt{5}+\sqrt{10}+5.$

Ответ: $P_{\Delta ABC} = 3\sqrt{5} + \sqrt{10} + 5.$

2. Составим общее уравнение прямой *AB*. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow$$

$$\frac{x-(-1)}{-7-(-1)} = \frac{y-1}{4-1} \Rightarrow \frac{x+1}{-6} = \frac{y-1}{3}.$$

Преобразуем полученное уравнение к общему уравнению прямой *Ax+By+C=0*. Для этого избавимся от дробей, применив, например, правило пропорции: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc.$ Получаем следующий результат $3(x+1) = -6(y-1) \Rightarrow$ $x + 2y - 1 = 0.$

Аналогично находим уравнения сторон *BC*: $x - 3y + 19 = 0,$ *AC*: $4x + 3y + 1 = 0.$

Ответ: *AB*: $x + 2y - 1 = 0,$ *BC*: $x - 3y + 19 = 0,$ *AC*: $4x + 3y + 1 = 0.$

4. Для нахождения уравнения высоты *CH* воспользуемся уравнением прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку: $y - y_0 = k(x - x_0).$ Известно, что условием перпендикулярности двух прямых является следующее равенство: $k_1 \cdot k_2 = -1.$ Так как прямые *AB* и *CH* перпендикулярны, то $k_{AB} \cdot k_{CH} = -1 \Rightarrow k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}}.$

Для нахождения углового коэффициента k_{AB} прямой *AB* воспользуемся общим уравнением прямой *AB:* $x + 2y - 1 = 0.$ Преобразуем это уравнение к уравнению прямой с угловым коэффициентом: *y=kx+b*. Для этого из общего уравнения прямой *AB* выразим *y*: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Тогда k_{AB} равен коэффициенту перед x в уравнении прямой с угловым коэффициентом, то есть $k_{AB}=-\frac{1}{2}$. И тогда $k_{CH}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=2.$

Используя координаты точки C, получаем уравнение высоты CH: $y-5=2(x-(-4)) \;\Rightarrow\; 2x-y+13=0.$

Ответ: CH: $2x-y+13=0.$

4. Используя формулы для нахождения координат середины отрезка (полусумма соответствующих координат), найдем координаты точки M: $x_M=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{-7+(-4)}{2}=-\frac{11}{2}$, $y_M=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2}$, тогда $M\left(-\frac{11}{2};\frac{9}{2}\right)$. Используя уравнение прямой, проходящей через две точки A и M, получим уравнение медианы AM:

$$\frac{x-(-\frac{11}{2})}{-1-(-\frac{11}{2})}=\frac{y-\frac{9}{2}}{1-\frac{9}{2}} \;\Rightarrow\; 7x+9y-2=0.$$

Ответ: AM: $7x+9y-2=0.$

<u>Задание 2.</u> Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить геометрический образ и построить кривую.

1. $2x^2+5y^2-12x-10y+9=0$
2. $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$
3. $4x^2+9y^2+8x-18y+12=0$
4. $x^2-3y^2+6x-6y=0$
5. $9x^2+25y^2+18x+100y-164=0$
6. $16x^2-9y^2-64x-54y-162=0$
7. $4x^2+16y^2+96y+80=0$

8. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$

9. $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

10. $x^2-6y^2-12x+36y-48=0$

11. $5x^2+2y^2-10x-12y+9=0$

12. $9x^2-16y^2+54x+64y+161=0$

13. $9x^2+4y^2-18x+8y+12=0$

14. $3x^2-y^2+6x-6y=0$

15. $25x^2+9y^2+100x+18y-164=0$

16. $16x^2-9y^2+54x+64y+161=0$

17. $4x^2+y^2+24x+20=0$

18. $9x^2-16y^2+18x+64y+199=0$

19. $x^2+4y^2+6x-4y+4=0$

20. $6x^2-y^2-36x+12y-48=0$

21. $4x^2+25y^2-24x+350y+57=0$

22. $x^2-16y^2-4x+32y-28=0$

23. $x^2+4y^2+4x-16y-18=0$

24. $-x^2+2y^2+2x+4y-3=0$

25. $x^2-4y^2-2x-16y-19=0$

26. $3x^2-2y^2+6x-9=0$

27. $5x^2+6y^2+20x+12y-4=0$

28. $3x^2+2y^2+6x+12y+15=0$

29. $2x^2+3y^2-6x+24y+44=0$

30. $x^2-3y^2-2x-4=0$

31. $x^2+y^2-8x=0$

32. $9x^2+y^2+6x-3=0$

Пример. $9x^2+16y^2-36x+96y+36=0.$

Решение. Сгруппируем слагаемые с одинаковыми неизвестными:

$$(9x^2-36x)+(16y^2+96y)+36=0.$$

Коэффициенты перед x^2 и y^2 вынесем за скобку:

$$9(x^2-4x)+16(y^2+6y)+36=0.$$

Дополним выражения относительно x и y до полного квадрата:

$$9((x^2-4x+4)-4)+16((y^2+6y+9)-9)+36=0.$$

Свернём полный квадрат:

$$9((x-2)^2-4)+16((y+3)^2-9)+36=0.$$

Раскроем внешние скобки:

$$9(x-1)^2-36+16(y+3)^2-144+36=0.$$

Слагаемые с квадратами оставляем в левой части уравнений, остальные переносим в правую часть:

$$9(x-2)^2+16(y+3)^2=144.$$

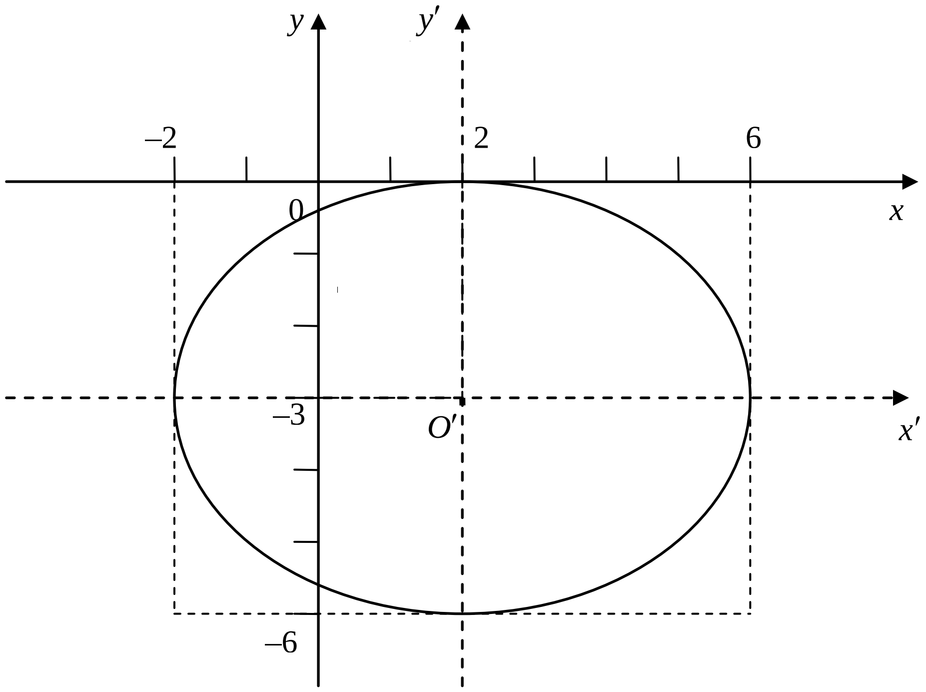
Разделив обе части последнего уравнения на 144, получим:

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1.$$

Далее применяем формулы преобразования координат при параллельном сдвиге осей, то есть переходим к новой системе координат $O'x'y'$: $\begin{cases} x-2=x', \\ y+3=y'. \end{cases}$

Здесь $O'(2;-3)$ – новое начало координат и $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$ – каноническое уравнение.

Полученное уравнение является каноническим уравнением эллипса с центром в точке $O'(2;-3)$ и полуосями $a=4$, $b=3$. Рисунок приведён ниже.



Ответ: $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$. Данное уравнение кривой второго порядка определяет эллипс с центром в точке $O'(2;-3)$ и полуосями $a=4,\ b=3$.

ТЕМА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задание 1. Даны координаты точек: $A(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $B(x_2;\,y_2;\,z_2)$, $C(x_3;\,y_3;\,z_3)$, $D(x_4;\,y_4;\,z_4)$.

Найти:

1. Координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$, их длины, записать разложение этих векторов по ортам координатных осей $\bar{i},\,\bar{j},\,\bar{k}$.

2. Координаты векторов $\overline{AC}+2\overline{BD}$, $\frac{1}{2}\overline{AC}-\overline{BD}$.

3. Косинус внутреннего угла ABC.

Задание 2. Даны координаты вершин пирамиды: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$.

Найти:

1. Площадь основания *ABC* пирамиды.
2. Объем пирамиды *ABCD*.
3. Длину высоты пирамиды *DO*, опущенную из вершины *D* на основание *ABC*.

Задание 3. Даны координаты четырех точек: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$.

1. Составить общее уравнение плоскости *ABC*.
2. Составить канонические и параметрические уравнения прямой *AD*.

№ варианта	*A*	*B*	*C*	*D*
1	$(3;-1;2)$	$(-1;0;1)$	$(1;7;3)$	$(8;5;8)$
2	$(3;1;4)$	$(-1;6;1)$	$(-1;1;6)$	$(0;4;-1)$
3	$(3;5;4)$	$(5;8;3)$	$(1;2;-2)$	$(-1;0;2)$
4	$(2;4;3)$	$(1;1;5)$	$(4;9;3)$	$(3;6;7)$
5	$(9;5;5)$	$(-3;7;1)$	$(5;7;8)$	$(6;9;2)$
6	$(0;7;1)$	$(2;-1;5)$	$(1;6;3)$	$(3;-9;8)$
7	$(5;5;4)$	$(1;-1;4)$	$(3;5;1)$	$(5;8;-1)$
8	$(6;1;1)$	$(4;6;6)$	$(4;2;0)$	$(1;2;6)$
9	$(7;5;3)$	$(9;4;4)$	$(4;5;7)$	$(7;9;6)$
10	$(6;8;2)$	$(5;4;7)$	$(2;4;7)$	$(7;3;7)$
11	$(4;2;5)$	$(0;7;1)$	$(0;2;7)$	$(1;5;0)$
12	$(4;4;10)$	$(7;10;2)$	$(2;8;4)$	$(9;6;9)$
13	$(4;6;5)$	$(6;9;4)$	$(2;10;10)$	$(7;5;9)$
14	$(3;4;5)$	$(8;7;4)$	$(5;10;4)$	$(4;7;8)$
15	$(10;9;6)$	$(2;8;2)$	$(9;8;9)$	$(7;10;3)$
16	$(1;8;2)$	$(5;2;6)$	$(5;7;4)$	$(4;10;9)$

17	$(6;6;5)$	$(4;9;5)$	$(4;6;11)$	$(6;9;3)$
18	$(7;2;2)$	$(-5;7;-7)$	$(5;-3;1)$	$(2;3;7)$
19	$(8;-6;4)$	$(10;5;-5)$	$(5;6;-8)$	$(8;10;7)$
20	$(1;-1;3)$	$(6;5;8)$	$(3;5;8)$	$(8;4;1)$
21	$(1;-2;7)$	$(4;2;10)$	$(2;3;5)$	$(5;3;7)$
22	$(4;2;10)$	$(1;2;0)$	$(3;5;7)$	$(2;-3;5)$
23	$(2;3;5)$	$(5;3;-7)$	$(1;2;7)$	$(4;2;0)$
24	$(5;3;7)$	$(-2;3;5)$	$(4;2;10)$	$(1;2;7)$
25	$(4;3;5)$	$(1;9;7)$	$(0;2;0)$	$(5;3;10)$
26	$(3;2;5)$	$(4;0;6)$	$(2;6;5)$	$(6;4;-1)$
27	$(2;1;6)$	$(1;4;9)$	$(2;-5;8)$	$(5;4;2)$
28	$(2;1;7)$	$(3;3;6)$	$(2;-3;9)$	$(1;2;5)$
29	$(2;-1;7)$	$(6;3;1)$	$(3;2;8)$	$(2;-3;7)$
30	$(0;4;5)$	$(3;-2;1)$	$(4;5;6)$	$(3;3;2)$
31	$(1;3;6)$	$(2;2;1)$	$(-1;0;1)$	$(-4;6;-3)$
32	$(-4;2;6)$	$(2;-3;0)$	$(-10;5;8)$	$(-5;2;-4)$

Пример (к заданию 1). $A(4;2;5)$, $B(0;7;2)$, $C(0;2;7)$, $D(1;5;0)$.

Решение.

1. Для нахождения координат вектора нужно из координат конца вычесть координаты его начала. Тогда $\overline{AB}=(0-4;\,7-2;\,2-5)=(-4;5;-3)$. Аналогично находим координаты остальных векторов: $\overline{BC}=(0;-5;5)$, $\overline{CD}=(1;3;-7)$, $\overline{DA}=(3;-3;5)$.

Найдём длины векторов (*если* $\bar{a}=(x;y;z)$, *то* $|\bar{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$):

$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+5^2+(-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $\left|\overline{BC}\right|=5\sqrt{2}$, $\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{59}$, $\left|\overline{DA}\right|=\sqrt{43}$.

Запишем разложение этих векторов по ортам координатных осей $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (*если* $\bar{a}=(x;y;z)$, *то* $\bar{a}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$):

$\overline{AB}=-4\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$, $\overline{BC}=0\bar{i}-5\bar{j}+5\bar{k}=-5\bar{j}+5\bar{k}$, $\overline{CD}=\bar{i}+3\bar{j}-7\bar{k}$, $\overline{DA}=3\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}$.

Ответ: $\overline{AB}=(-4;5;-3)$, $\overline{BC}=(0;-5;5)$, $\overline{CD}=(1;3;-7)$, $\overline{DA}=(3;-3;5)$;

$\left|\overline{AB}\right|=5\sqrt{2}$, $\left|\overline{BC}\right|=5\sqrt{2}$, $\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{59}$, $\left|\overline{DA}\right|=\sqrt{43}$;

$\overline{AB}=-4\bar{i}+5\bar{j}-3\bar{k}$, $\overline{BC}=-5\bar{j}+5\bar{k}$, $\overline{CD}=\bar{i}+3\bar{j}-7\bar{k}$, $\overline{DA}=3\bar{i}-3\bar{j}+5\bar{k}$.

2. Используя правила сложения, вычитания и умножения вектора на число *(при сложении векторов складывают соответствующие координаты, при вычитании векторов вычитают соответствующие координаты, при умножении вектора на число каждую координату вектора умножают на это число)*, получаем:

$$\overline{AC}+2\overline{BD}=(-4;0;2)+2(1;-2;-2)=(-4+2\cdot 1;0+2\cdot(-2);2+2\cdot(-2))=$$
$$=(-2;-4;-2).$$

$$\frac{1}{2}\overline{AC}-\overline{BD}=\frac{1}{2}(-4;0;2)-(1;-2;-2)=(-3;2;3).$$

Ответ: $\overline{AC}+2\overline{BD}=(-2;-4;-2)$, $\frac{1}{2}\overline{AC}-\overline{BD}=(-3;2;3)$.

3. Внутренний угол *ABC* определяется как угол между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$: $\cos(\angle\overline{BA},\overline{BC})=\dfrac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|}$. Найдём координаты этих векторов: $\overline{BA}=(4;-5;3)$, $\overline{BC}=(0;-5;5)$. Далее найдём длины этих векторов: $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{BA}\right|=5\sqrt{2}$, $\left|\overline{BC}\right|=5\sqrt{2}$ и их скалярное произведение (*если* $\bar{a}=(x_1;y_1;z_1), \bar{b}=(x_2;y_2;z_2)$, *то*

$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$): $\overline{BA}\cdot\overline{BC}=4\cdot 0+(-5)\cdot(-5)+3\cdot 5=40$. Тогда косинус внутреннего угла ABC:

$$\cos(\angle\overline{BA},\overline{BC})=\frac{40}{5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}.$$

Ответ: $\cos(\angle\overline{BA},\overline{BC})=\frac{4}{5}$.

Пример (к заданию 2). $A(4;2;5)$, $B(0;7;2)$, $C(0;2;7)$, $D(1;5;0)$.

Решение.

1. Треугольник ABC построен на векторах $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Для вычисления площади основания ABC применяем формулу $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|$.

Найдём векторное произведение векторов $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$ (*если* $\bar{a}=(x_1;y_1;z_1),\bar{b}=(x_2;y_2;z_2)$, *то* $\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$):

$$\overline{BA}\times\overline{BC}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\4&-5&3\\0&-5&5\end{vmatrix}.$$

Раскрываем определитель разложением по первой строке:

$$\bar{i}\cdot A_{11}+\bar{j}\cdot A_{12}+\bar{k}\cdot A_{13}=$$

$$=\bar{i}\cdot(-1)^{1+1}M_{11}+\bar{j}\cdot(-1)^{1+2}M_{12}+\bar{k}\cdot(-1)^{1+3}M_{13}=$$

$$=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-5&3\\-5&5\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}4&3\\0&5\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}4&-5\\0&-5\end{vmatrix}=-10\bar{i}-20\bar{j}-20\bar{k}.$$

Тогда:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{BA}\times\overline{BC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+(-20)^2+(-20)^2}=15.$$

Ответ: $S_{\Delta ABC}=15$.

2. Пирамида $ABCD$ построена на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$. Объём пирамиды $ABCD$ вычисляется как $\frac{1}{6}$ модуля смешанного произведения этих векторов: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|$. Так как смешанное произведение векторов равно определителю, составленному из координат этих векторов, то $\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{vmatrix}=-70$. Тогда $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\left|-70\right|=\frac{35}{3}$.

Ответ: $V_{ABCD}=\frac{35}{3}$.

2. Известно, что объём пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту: $V_{пир}=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot DO$. Тогда $DO=\frac{3\cdot V_{пир}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3\cdot\frac{35}{3}}{15}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$.

Ответ: $DO=\frac{7}{3}$.

<u>Пример</u> (к заданию 3). $A(4;2;5)$, $B(0;7;2)$, $C(0;2;7)$, $D(1;5;0)$.

<u>Решение.</u>

1. Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ 0-4 & 7-2 & 2-5 \\ 0-4 & 2-2 & 7-5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-5 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель разложением по первой строке:

$$(x-4)\cdot A_{11} + (y-2)\cdot A_{12} + (z-5)\cdot A_{13} = 0$$

$$(x-4)\cdot(-1)^{1+1}M_{11} + (y-2)\cdot(-1)^{1+2}M_{12} + (z-5)\cdot(-1)^{1+3}M_{13} = 0$$

$$(x-4)\cdot\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + (z-5)\cdot\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Получаем следующее общее уравнение плоскости:

x+2y+2z–18=0.

Ответ: *ABC: x+2y+2z–18=0.*

2. Воспользуемся формулами канонических уравнений прямой:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$

и параметрических

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

где x_0, y_0, z_0 – координаты известной точки прямой, *l, m, n* – координаты направляющего вектора прямой.

Для составления канонических и параметрических уравнений прямой *AD* нам понадобится точка, лежащая на этой прямой (можно взять точку *A* или *D*), и направляющий вектор этой прямой. В качестве направляющего вектора прямой *AD* можно взять вектор $\overline{AD} = (-3; 3; -5)$. Тогда канонические уравнения прямой *AD* имеют вид:

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{-5}$$

и параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 4 - 3t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 5 - 5t. \end{cases}$$

Ответ:

канонические уравнения прямой AD: $\dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-5}{-5}$;

параметрические уравнения прямой AD: $\begin{cases} x = 4 - 3t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 5 - 5t. \end{cases}$

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ТЕМА 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задание 1. Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 8x^2 - 11x + 18}{x^2 - 3x + 2}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 10x + 9}$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 7x^2 - 10x + 16}{x^2 - 4x + 3}$

4. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - x - 2}$

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 6x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4}$

6. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 2x - 3}$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 5x^2 - 8x + 12}{x^2 - 6x + 5}$

8. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{x^2 - 3x - 4}$

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}{x^2 - 7x + 6}$

10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 7x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4x - 5}$

11. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x^2-6x+8}{x^2-8x+7}$ 12. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3-8x^2+5x+14}{x^2-5x-6}$

13. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2-9x+8}$ 14. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3-9x^2+6x+16}{x^2-6x-7}$

15. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3-10x^2+7x+18}{x^2-7x-8}$ 16. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^2-11x+18}$

17. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2-8x-9}$ 18. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+7x^2+14x+8}{x^2+x-2}$

19. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2+2x-3}$ 20. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^2-x-6}$

21. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-7x^2+14x-8}{x^2-5x+6}$ 22. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3-2x^2-x-2}{x^2-2x-8}$

23. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-8x^2+17x-10}{x^2-6x+8}$ 24. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8x^2+17x+10}{x^2-3x-10}$

25. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-9x^2+20x-12}{x^2-7x+10}$ 26. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^2-4x-12}$

27. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-10x^2+23x-14}{x^2-8x+12}$ 28. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-5x-14}$

29. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-11x^2+26x-16}{x^2-9x+14}$ 30. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x^2-6x-16}$

31. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-12x^2+29x-18}{x^2-10x+16}$ 32. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+7x^2+4x-12}{x^2-7x-18}$

Пример. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-2x-3}$.

Решение. Здесь имеет место неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби. Для этого найдём корни числителя и знаменателя. Корни знаменателя можно подобрать по теореме Виетта. Один из корней известен: $x=3$, тогда другой корень будет $x=-1$ и $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

Один из корней числителя: $x=3$, тогда, разделив столбиком выражение числителя на $x-3$, получаем в частном x^2-3x+2 и записываем следующее разложение числителя на множители: $x^3-6x^2+11x-6=(x-3)\left(x^2-3x+2\right)$. Разложим на множители выражение x^2-3x+2: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Тогда: $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$.

Возвращаемся к вычислению предела:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)(x-2)}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-2x-3}=\frac{1}{2}$.

Задание 2. Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^2+(3+x)^2}{(3-x)^2-(3+x)^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^4-(2-x)^4}{(1-x)^4-(1+x)^4}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^4-(2-x)^4}{(1-x)^3-(1+x)^3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-x)^4+(1+x)^4}{(1+x)^4-(1-x)^3}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(6-x)^2-(6+x)^2}{(6+x)^2-(1-x)^2}$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x+1)^2}{(x-1)^3-(x+1)^3}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1+2x)^3-8x^3}{(1+2x)^2+4x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-4x)^2}{(x-3)^3-(x+3)^3}$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-x)^3}{(x+1)^2-(x+1)^3}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2-(x+2)^3}{(4-x)^3}$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(x+1)^3-(x-2)^3}{x^2+2x-3}$

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3+(x+2)^3}{(x+4)^3+(x+5)^3}$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)^3+(x+4)^3}{(x+3)^4-(x-4)^4}$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-2x}{(x+1)^4-(x-1)^4}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+6)^3-(x+1)^3}{(2x+3)^2+(x+4)^2}$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^3-(x+5)^3}{(3x-1)^3+(2x+3)^3}$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+10)^2+(3x+1)^2}{(x+6)^3-(x+1)^3}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3+(3x+1)^3}{(2x+3)^3-(x-7)^3}$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+7)^3-(x+2)^3}{(3x+2)^2+(4x+1)^2}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3-(2x+3)^3}{(2x+1)^2+(2x+3)^2}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-(x-1)^3}{(x+1)^4-x^4}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^4-(x-2)^4}{(x+5)^2+(x-2)^2}$

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^4-(x-1)^4}{(x+1)^3+(x-1)^3}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}$

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2+(x-1)^2}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^3+(x-2)^3}{x^4+2x^2-1}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+3x}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{(x+3)^2}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^2-(x+1)^2}{x^2+x+1}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x+2)^3}{x^3-2x}$

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3+x)^3-(3-x)^3}{(3-x)^3-(2-x)^3}$.

Решение. Здесь имеет место неопределённость вида $(\infty-\infty)$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, воспользовавшись формулой разности кубов $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3+x)^3-(3-x)^3}{(3-x)^3-(2-x)^3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{((3+x)-(3-x))\cdot((3+x)^2+(3+x)(3-x)+(3-x)^2)}{((3-x)-(2-x))\cdot((3-x)^2+(3-x)(2-x)+(2-x)^2)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot(x^2+27)}{1\cdot(3x^2-15x+19)}=2\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+27x}{3x^2-15x+19}$$. Здесь возникает неопределённость вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Для её раскрытия разделим числитель и знаменатель на старшую степень x^3:

$$2\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+27x}{3x^2-15x+19}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{27}{x^2}}{\frac{3}{x}-\frac{15}{x^2}+\frac{19}{x^3}}=2\cdot\infty=\infty.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3+x)^3-(3-x)^3}{(3-x)^3-(2-x)^3}=\infty.$

<u>Задание 3.</u> Найти производную y' от заданной функции y.

1. $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1-x^2}}$
2. $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$
3. $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2\sqrt{(x^2-4)^3}}$
4. $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$
5. $y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$
6. $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$
7. $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{4+x^2}}{120x^5}$
8. $y=\dfrac{\sqrt{(x^2-8)^3}}{6x^3}$
9. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$
10. $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$

11 $y=\dfrac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$

12. $y=\dfrac{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}{\sqrt{x^3}}$

13. $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$

14. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}\,(3x+2)}{4x^2}$

15. $y=\dfrac{\sqrt{(1+x)^3}}{3x^3}$

16. $y=\dfrac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$

17. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$

18. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^2+\dfrac{1}{x}}$

19. $y=\dfrac{(2x^2+3)\sqrt{x^2+2}}{9x^3}$

20. $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$

21. $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$

22. $y=\dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$

23. $y=\dfrac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$

24. $y=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$

25. $y=3\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^2}}$

26. $y=\dfrac{x+7}{6\sqrt{x^2+2x+7}}$

27. $y=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+x+1}$

28. $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$

29. $y=\dfrac{(x+3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$

30. $y=\dfrac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}$

31. $y=\dfrac{3x^6+4x^4-x^2-2}{\sqrt{1+x^2}}$

32. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$

Пример. $y=\dfrac{(3x^4-2x)\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2+5}$.

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования произведения $\left(\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\right)$, дроби (

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$) и сложной функции ($f(g(x))' = f'(g)\cdot g'(x)$):

$$y' = \left(\frac{3x^4-2x}{x^2+5}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x}\right)' = \left(\frac{3x^4-2x}{x^2+5}\right)'\cdot\sqrt[3]{x^2+2x}+$$

$$+\left(\frac{3x^4-2x}{x^2+5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2+2x}\right)' =$$

$$=\frac{(3x^4-2x)'\cdot(x^2+5)-(3x^4-2x)\cdot(x^2+5)'}{(x^2+5)^2}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x}+$$

$$+\frac{3x^4-2x}{x^2+5}\cdot\frac{1}{3}\left(x^2+2x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^2+2x)' =$$

$$=\frac{(12x^3-2)(x^2+5)-(3x^4-2x)\cdot 2x}{(x^2+5)^2}\cdot\sqrt[3]{x^2+2x}+\frac{2(3x^4-2x)(x+1)}{3(x^2+5)\cdot\sqrt[3]{(x^2+2x)^2}}.$$

<u>Задание 4.</u> Найти производную y' от заданной функции y.

1. $y = x - \ln(e^x)$	2. $y = 2\sqrt{e^x+1}$
3. $y = 2 - \sin 2x - \cos 2x$	4. $y = \frac{2}{3}arctg(e^x)$
5. $y = arctg\frac{e^x-3}{2}$	6. $y = \frac{1}{1-2^x}$
7. $y = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)$	8. $y = \sqrt{2^x-1}$
9. $y = \ln(e^x+1)$	10. $y = -\ln(1+e^x)$
11. $y = 2arctg(e^x)$	12. $y = \sqrt{e^{2x}-1}$
13. $y = \frac{8}{1+\sqrt[4]{e^x}}$	14. $y = \arcsin(e^x)$
15. $y = (arctge^x)^2$	16. $y = \frac{e^{x^3}}{1+x^5}$

17. $y = arctg(e^{x} - e^{-x})$

18. $y = arcctg(e^{x} - e^{-x})$

19. $y = \sqrt{1 - e^{2x}}$

20. $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$

21. $y = \dfrac{e^{x^2}}{1 + x^2}$

22. $y = \ln\sqrt{1 - e^{2x}}$

23. $y = \arccos(\ln x)$

24. $y = \sqrt{1 + 2tg^2 x}$

25. $y = \arccos\sqrt{1 - e^{4x}}$

26. $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$

27. $y = \ln\sqrt{1 + e^{2x}}$

28. $y = \ln(1 + \cos x)$

29. $y = \sin\dfrac{2x+4}{x+1}$

30. $y = \arcsin\sqrt{x}$

31. $y = \cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$

32. $y = arctg\sqrt{1 + x^2}$

Пример. $y = \sqrt{arctg(e^{2x})}$.

Решение. Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции:

$$y' = \left(\sqrt{arctg(e^{2x})}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{arctg(e^{2x})}} \cdot \left(arctg(e^{2x})\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{arctg(e^{2x})}} \cdot \frac{1}{1 + \left(e^{2x}\right)^2} \cdot (e^{2x})' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{arctg(e^{2x})}} \cdot \frac{1}{1 + \left(e^{2x}\right)^2} \cdot e^{2x} \cdot (2x)' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{arctg(e^{2x})} \cdot (1 + e^{4x})}.$$

Задание 5. Вычислить предел функции, используя правило Лопиталя (функции взять из задания №1).

Пример. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 2x - 3}$.

Решение. Здесь имеет место неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

В этом случае по правилу Лопиталя, если существует предел отношения производных числителя и знаменателя, то существует и предел отношения исходных бесконечно малых функций, и эти пределы равны между собой. Тогда получаем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^3-6x^2+11x-6)'}{(x^2-2x-3)'}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-12x+11}{2x-2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-2x-3}=\dfrac{1}{2}.$

<u>Задание 6.</u> Провести полное исследование функции и построить ее график.

1. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$
2. $y=\dfrac{x^3-x+1}{x-1}$
3. $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$
4. $y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$
5. $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$
6. $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$
7. $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$
8. $y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$
9. $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$
10. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$
11. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$
12. $y=(1+\dfrac{1}{x})^2$
13. $y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$
14. $y=\dfrac{3(3+2x-x^2)}{x^2-2x+13}$
15. $y=-\dfrac{8x}{x^2+4}$
16. $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$
17. $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$
18. $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$
19. $y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$
20. $y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$
21. $y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$
22. $y=\dfrac{4}{3-2x-x^2}$
23. $y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$
24. $y=\dfrac{1}{x^4-1}$
25. $y=-\dfrac{x^2}{(x+2)^2}$
26. $y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$
27. $y=\dfrac{4(x+1)^2}{x^2+2x+4}$

28. $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$ 29. $y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$ 30. $y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$

31. $y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$ 32. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

Пример. $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

Решение.

1. Исследование по виду функции.

а) $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, так как функция определена всюду, кроме точки *x=1*. В своей области определения функция непрерывна, $x_0=1$ является точкой разрыва графика функции; поведение функции в окрестности этой точки будет рассмотрено ниже.

б) Функция не является периодической.

в) Так как область определения не симметрична относительно точки *x=0*, то проверка на чётность и нечётность не проводится. График функции симметрией не обладает.

г) Найдём точки пересечения с осями координат. При *x=0* получаем: $y=\dfrac{(0+1)^3}{(0-1)^2}=1,$ то есть *(0; 1)* – точка пересечения с осью *Oy*. При *y=0* получаем $\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=0 \;\Rightarrow\; x=-1$, то есть *(–1; 0)* – точка пересечения с осью *Ox*.

д) Найдём асимптоты графика функции.

Вертикальные асимптоты.

Так как $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\infty$, то $x=1$ – вертикальная асимптота.

Горизонтальные асимптоты.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty$, то горизонтальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты.

Так как $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2 x} = 1$,

$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} = 5$,

то $y = x + 5$ – наклонная асимптота.

<u>2. Исследование по первой производной.</u>

а) Найдём первую производную данной функции, применяя формулу производной частного и формулу производной сложной функции:

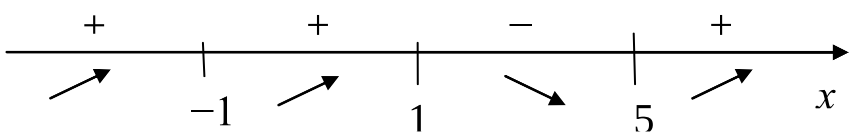
$$y' = \left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} \right)' = \frac{\left((x+1)^3\right)'(x-1)^2 - (x+1)^3\left((x-1)^2\right)'}{\left((x-1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{3(x+1)^2(x+1)'(x-1)^2 - (x+1)^3 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{3(x+1)^2 \cdot 1 \cdot (x-1)^2 - 2(x+1)^3(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-1)[3(x-1) - 2(x+1)]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(x+1)^2 \cdot (x-5)}{(x-1)^3}.$$

б) Найдём точки, в которых первая производная обращается в ноль: $x_1 = -1, x_2 = 5$ и не существует: $x_3 = 1$. Для исследования функции на экстремум применяем метод интервалов:



Результаты можно отразить в таблице:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;5)$	5	$(5;\infty)$
y'	+	0	+	не сущест-вует	–	0	+
y	$\nearrow$	нет экс-тремума	$\nearrow$	нет экс-тремума	$\searrow$	точка ми-нимума	$\nearrow$

Таким образом, при $x \in (-\infty;1) \cup (5;\infty)$ функция возрастает, при $x \in (1;5)$ – убывает. Точка $x = 5$ – точка минимума, значение функции в точке минимума $y_{\min} = f(5) = \dfrac{27}{2}$.

<u>3. Исследование по второй производной.</u>

а) Найдём вторую производную данной функции, применяя формулу производной частного, произведения и формулу производной сложной функции:

$$y'' = \left(\frac{(x+1)^2 \cdot (x-5)}{(x-1)^3} \right)' =$$

$$= \frac{\left((x+1)^2 \cdot (x-5)\right)' (x-1)^3 - (x+1)^2 \cdot (x-5)\left((x-1)^3\right)'}{\left((x-1)^3\right)^2} =$$

$$=\frac{\left[\left((x+1)^2\right)'(x-5)+(x+1)^2(x-5)'\right](x-1)^3-(x+1)^2\cdot(x-5)3(x-1)^2\cdot 1}{\left((x-1)^3\right)^2}=$$

$$=\frac{\left[2(x+1)(x-5)+(x+1)^2\cdot 1\right](x-1)^3-(x+1)^2\cdot(x-5)3(x-1)^2\cdot 1}{\left((x-1)^3\right)^2}=$$

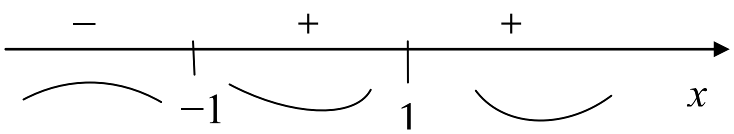
$$=\frac{(x+1)[2(x-5)+(x+1)\cdot 1](x-1)^3-3(x+1)^2\cdot(x-5)(x-1)^2}{\left((x-1)^3\right)^2}=$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)^2[[2(x-5)+(x+1)](x-1)-3(x+1)(x-5)]}{(x-1)^6}=$$

$$=\frac{(x+1)[(3x-9)(x-1)-3(x+1)(x-5)]}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)[3(x-3)(x-1)-3(x+1)(x-5)]}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{3(x+1)\left[x^2-4x+3-x^2+4x+5\right]}{(x-1)^4}=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

б) Найдём точки, в которых вторая производная обращается в ноль: $x_1=-1$ и не существует: $x_2=1$. Для нахождения промежутков выпуклости и вогнутости графика функции, а также точек перегиба воспользуемся методом интервалов:

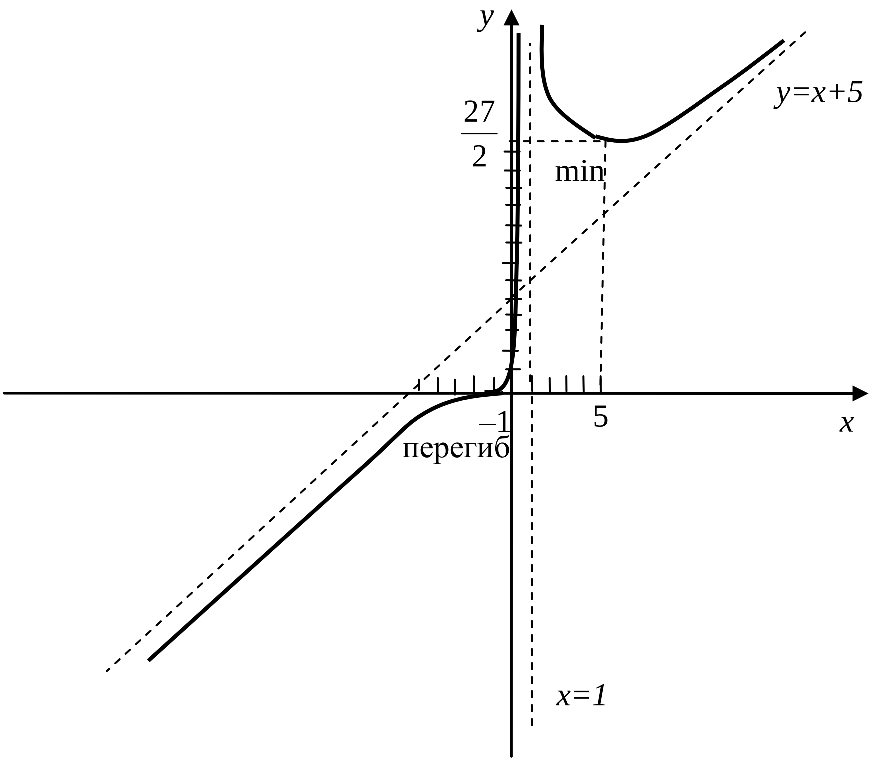


Результаты можно отразить в таблице:

x	$(-\infty;-1)$	*–1*	$(-1;1)$	*1*	$(1;\infty)$
y''	–	0	+	не существует	+
y		перегиб		не существует	

Таким образом, при $x \in (-\infty; -1)$ – функция имеет выпуклость вверх, при $x \in (-1; 1) \cup (1; \infty)$ – функция имеет выпуклость вниз. Точка $x = -1$ – точка перегиба, $y(-1) = 0$.

Нули функции, точки экстремума и точки перегиба наносим на координатную плоскость и на основании проведённого исследования строим график данной функции.



ТЕМА 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задание 1. Применяя метод замены переменной, найти неопределенные интегралы.

1. $\int e^{4\sin x - 3} \cos x dx$ 2. $\int e^{3\cos x + 1} \sin x dx$

3. $\int e^{7\sin x + 2} \cos x dx$ 4. $\int 2^{-\cos x} \sin x dx$

5. $\int e^{-\cos x + 2} \sin x dx$ 6. $\int e^{4 - \cos x} \sin x dx$

7. $\int \frac{e^{tgx}}{3\cos^2 x}dx$

8. $\int \frac{e^{3ctgx}}{5\sin^2 x}dx$

9. $\int 3\cos x \cdot e^{2\sin x}dx$

10. $\int \frac{e^{2tgx-1}}{\cos^2 x}dx$

11. $\int \frac{e^{tgx+4}}{\cos^2 x}dx$

12. $\int \frac{e^{tgx-12}}{7\cos^2 x}dx$

13. $\int \frac{e^{3ctgx+3}}{\sin^2 x}dx$

14. $\int \frac{e^{4tgx+1}}{3\cos^2 x}dx$

15. $\int \cos x \cdot e^{\frac{\sin x}{3}}dx$

16. $\int \sin x \cdot e^{5\cos x+10}dx$

17. $\int 2^{5\cos x-3}\sin xdx$

18. $\int 4^{2\cos x+3}\sin xdx$

19. $\int 5^{7\sin x+1}\cos xdx$

20. $\int 3^{4\cos x+5}\sin xdx$

21. $\int \frac{2^{5tgx-4}}{\cos^2 x}dx$

22. $\int 2^{3\sin x+2}\cos xdx$

23. $\int 2^{2\cos x-5}\sin xdx$

24. $\int 7^{3\cos x-1}\sin xdx$

25. $\int \cos x \cdot e^{\sin x-7}dx$

26. $\int \sin x \cdot e^{\frac{\cos x}{2}}dx$

27. $\int \cos x \cdot e^{3\sin x-7}dx$

28. $\int \frac{3^{tgx-1}}{\cos^2 x}dx$

29. $\int \frac{2^{ctgx-3}}{\sin^2 x}dx$

30. $\int \frac{2^{2tgx}}{\cos^2 x}dx$

31. $\int \frac{e^{1-ctgx}}{\sin^2 x}dx$

32. $\int \sin x \cdot e^{0,5\cos x-5}dx$

Пример. $\int e^{-4\sin x+5} \cdot \cos xdx$.

Решение. Применяя к данному интегралу правило внесения под знак дифференциала, получаем: $\int e^{-4\sin x+5} \cdot \cos xdx =$

$$\int e^{-4\sin x+5} \cdot d(\sin x) = -\frac{1}{4}\int e^{-4\sin x+5} \cdot d(-4\sin x+5) =$$

$$= (-4\sin x+5=t) = -\frac{1}{4}\int e^t \cdot dt = -\frac{1}{4}e^t + C = -\frac{1}{4}e^{-4\sin x+5} + C.$$

Ответ: $\int e^{-4\sin x+5}\cdot\cos x dx = -\frac{1}{4}e^{-4\sin x+5}+C.$

Задание 2. Применяя метод замены переменной, найти неопределенные интегралы.

1. $\int\frac{(4-7x)dx}{(4x-3{,}5x^2)^2}$
2. $\int\frac{(3x^2-2)dx}{x^3-2x+3}$
3. $\int\frac{(10x+1)dx}{5x^2+x-1}$
4. $\int\frac{(7-2x)dx}{x^2-7x}$
5. $\int\frac{6x-7x^6}{x^7-3x^2}dx$
6. $\int\frac{5x^4+6x^2}{x^5+2x^3+10}dx$
7. $\int\frac{(6x-3x^2)dx}{x^3-3x^2+18}$
8. $\int\frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$
9. $\int\frac{(x^3-x)dx}{(x^4-2x^2+7)}$
10. $\int\frac{x^3dx}{(x^4+1)^8}$
11. $\int\frac{(6x^5-3)dx}{x^6-3x+4}$
12. $\int\frac{(5x^4-12)dx}{x^5-12x-5}$
13. $\int\frac{(10x^4-3)dx}{(2x^5-3x+1)^2}$
14. $\int\frac{(5x^4-4x)dx}{(x^5-2x^2+1)^2}$
15. $\int\frac{(x^2+1)dx}{5x^3+15x-13}$
16. $\int\frac{(x^4-2)dx}{(x^5-10x+8)^3}$
17. $\int\frac{(x^3+1)dx}{(8x^4+32x-7)^3}$
18. $\int\frac{(3x+2)dx}{(1{,}5x^2+2x+5)^4}$
19. $\int\frac{(15x^2-8)dx}{(5x^3-8x)^5}$
20. $\int\frac{(42x+3)dx}{(21x^2+3x-1)^3}$
21. $\int\frac{(x^3+x)dx}{x^4+2x^2-8}$
22. $\int\frac{(4x^3+9x^2)dx}{(x^4+3x^3-7)^3}$
23. $\int\frac{(x^4-x+1)dx}{4x^5-10x^2+20x-1}$
24. $\int\frac{(1+x)dx}{10+3x+1{,}5x^2}$

25. $\int\frac{(x^4-x)dx}{2x^5-5x^2+3}$ 26. $\int\frac{(3x^2+20x)dx}{(x^3+10x^2-9)^2}$

27. $\int\frac{(x^2-1)dx}{(3x^3-9x+4)^5}$ 28. $\int\frac{(x-1)dx}{4x^2-8x+9}$

29. $\int\frac{(10x-1)dx}{(5x^2-x-7)^2}$ 30. $\int\frac{(7x^6-3x^2)dx}{(x^7-x^3+5)^2}$

31. $\int\frac{(9x^2-7)dx}{(3x^3-7x)^3}$ 32. $\int\frac{(6x^2-3)dx}{(2x^3-3x+4)^3}$

Пример. $\int\frac{(6x^2-7)dx}{(2x^3-7x+5)^7}$

Решение.

Применяя к данному интегралу правило внесения под знак дифференциала, получаем:

$$\int\frac{(6x^2-7)dx}{(2x^3-7x+5)^7}=\int\frac{d\left(2x^3-7x+5\right)}{(2x^3-7x+5)^7}=\left(2x^3-7x+5=t\right)=\int\frac{dt}{t^7}=$$

$$=\int t^{-7}dt=\frac{t^{-6}}{-6}+C=-\frac{1}{6t^6}+C=-\frac{1}{6(2x^3-7x+5)^6}+C.$$

Ответ: $\int\frac{(6x^2-7)dx}{(2x^3-7x+5)^7}=-\frac{1}{6(2x^3-7x+5)^7}+C.$

Задание 3. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям.

1. $\int x\cdot e^{-x}dx$ 2. $\int x\sin 2x dx$ 3. $\int x\cdot e^{3x}dx$

4. $\int x\cos 2x dx$ 5. $\int x\sin 4x dx$ 6. $\int x\cdot e^{2x}dx$

7. $\int x\cdot e^{-2x}dx$ 8. $\int x\cos 3x dx$ 9. $\int x\sin 4x dx$

10. $\int x\sin 3x dx$ 11. $\int x\cos 4x dx$ 12. $\int x\cdot e^{3x}dx$

13. $\int x\cdot e^{-3x}dx$ 14. $\int x\sin 5x dx$ 15. $\int x\cos 5x dx$

16. $\int x\cdot e^{4x}dx$ 17. $\int x\cos 6x dx$ 18. $\int x\sin 6x dx$

19. $\int x\cos 7x dx$ 20. $\int x\sin 7x dx$ 21. $\int x\cos 8x dx$

22. $\int x\sin 8x dx$ 23. $\int x\sin 9x dx$ 24. $\int x\sin 10x dx$

25. $\int x\sin 11x dx$ 26. $\int x\cos 11x dx$ 27. $\int x\cdot e^{-4x} dx$

28. $\int x\cdot e^{-5x} dx$ 29. $\int x\cdot e^{5x} dx$ 30. $\int x\cdot e^{6x} dx$

31. $\int x\cdot e^{-6x} dx$ 32. $\int x\cdot e^{7x} dx$

Пример. $\int (1-2x)\cos 4x dx$.

Решение. Применяя формулу интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$ и внося $\cos 4x$ под знак дифференциала, получаем:

$$\int (1-2x)\cos 4x dx = \frac{1}{4}\int (1-2x) d\sin 4x = \begin{pmatrix} u = 1-2x \\ v = \sin 4x \\ du = d(1-2x) = \\ = (1-2x)' dx = -2dx \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\left((1-2x)\sin 4x - \int \sin 4x \cdot (-2dx)\right) = \frac{1}{4}\left((1-2x)\sin 4x + 2\int \sin 4x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((1-2x)\sin 4x + 2\cdot\frac{1}{4}\int \sin 4x \, d4x\right) = (4x = t) =$$

$$= \frac{1}{4}\left((1-2x)\sin 4x + \frac{1}{2}\int \sin t \, dt\right) = \frac{1}{4}\left((1-2x)\sin 4x - \frac{1}{2}\cos t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left((1-2x)\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x\right) + C.$$

Ответ: $\int (1-2x)\cos 4x dx = \frac{1}{4}\left((1-2x)\sin 4x - \frac{1}{2}\cos 4x\right) + C.$

Задание 4. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками заданных функций.

1. $y = (x-2)^2$ $y = 4x - 8$
2. $y = 4 - x^2$ $y = 4x^2 - 2x$
3. $y = (x+1)^2$ $y^2 = x + 1$

4. $y = x^2 - x + 4$ $\quad y = 3x - x^2 + 4$

5. $y = x^2 - 4x + 3$ $\quad y = 2x - x^2 + 3$

6. $y = x^2 - 2x + 1$ $\quad y = 2x - x^2 + 1$

7. $y = x^2 - 3x + 2$ $\quad y = 3x - x^2 + 2$

8. $y = x^2 - 2x + 2$ $\quad y = 2x - x^2 + 2$

9. $y = x^2 - 4x + 1$ $\quad y = 2x - x^2 + 1$

10. $y = x^2 - x + 3$ $\quad y = x - x^2 + 3$

11. $y = x^2 - 3x + 4$ $\quad y = 3x - x^2 + 4$

12. $y = x^2 - 4x + 6$ $\quad y = 2x - x^2 + 6$

13. $y = (x-1)^2$ $\quad y = 2x - 2$

14. $y = (x-1)^2$ $\quad y^2 = x - 1$

15. $y = x^2 - 4x + 2$ $\quad y = 2x - x^2 + 2$

16. $y = x^2 - 3x + 3$ $\quad y = x - x^2 + 3$

17. $y = x^2 - x + 1$ $\quad y = 5x - x^2 + 1$

18. $y = x^2 - 4x + 7$ $\quad y = 2x - x^2 + 7$

19. $y = (x-3)^2$ $\quad y = 3x - 9$

20. $y = (x+2)^2$ $\quad y^2 = x + 2$

21. $y = x^2 - x + 4$ $\quad y = 3x - x^2 + 4$

22. $y = x^2 - 4x + 1$ $\quad y = 4x - x^2 + 1$

23. $y = x^2 - 2x + 4$ $\quad y = 2x - x^2 + 4$

24. $y = x^2 - x + 3$ $\quad y = 5x - x^2 + 3$

25. $y = x^2 - 3x + 5$ $\quad y = 3x - x^2 + 3$

26. $y = (x+2)^2$ $\quad y = 4x + 8$

27. $y = (x-2)^2$ $\quad y^2 = x - 2$

28. $y = x^2 - 2x + 1$ $\quad y = 4x - x^2 + 1$

29. $y = x^2 - x + 3$ $\quad y = 3x - x^2 + 3$

30. $y = x^2 - 4x$ $\qquad$ $y = 2x - x^2$

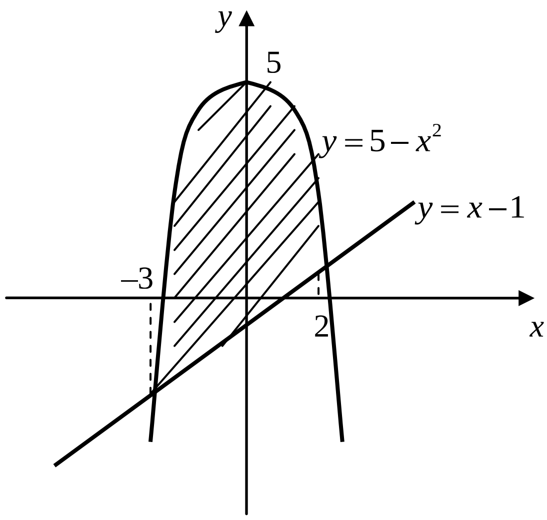
31. $y = (x+3)^2$ $\qquad$ $y = 3x + 9$

32. $y = (x-3)^2$ $\qquad$ $y^2 = x - 3$

Пример. $y = 5 - x^2, y = x - 1.$

Решение. Данная криволинейная трапеция получается при пересечении параболы и прямой. Найдем точки пересечения их графиков. Для этого решим совместно два уравнения: $y = 5 - x^2, y = x - 1$: $5 - x^2 = x - 1$, откуда $x_1 = -3, x_2 = 2$.

Сделаем схематический чертеж:



Для вычисления площади криволинейной трапеции используем формулу: $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx.$

Тогда искомая площадь будет равна: $S = \int\limits_{-3}^{2} \left(6 - x^2 - x \right) dx = \left(6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{2} = 20\frac{5}{6} \left(\text{ед}^2. \right).$

Ответ: $S = 20\frac{5}{6} \left(\text{ед}^2. \right).$

ТЕМА 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

***Задание 1*. Исследовать функцию на экстремум.**

1. $z = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3$ 2
2. $z = 10 + 2xy - x^2$
3. $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4x + 4y$
4. $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$
5. $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$
6. $z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6$
7. $z = 4xy - 3x^2 - 12y^2 + 4x + 8y - 5$
8. $z = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y$
9. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$
10. $z = 2x^2 + y^2 - xy + 3x - 2$
11. $z = 3x^2 - y^2 + 8xy + 4y - 5$
12. $z = x^2 + 4y^2 + 2x + 4y + 6$
13. $z = 2x^2 - 3y^2 - xy + 5x + y$
14. $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 6$
15. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4x - 4y - 4$
16. $z = 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 18x + 18y$
17. $z = 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 6y$
18. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x - 2$
19. $z = 3 + 4x + 6y - 4x^2 - 9y^2$
20. $z = x^2 + y^2 - 2y + 5$
21. $z = 9x^2 + 4y^2 - 6x - 4y + 3$
22. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
23. $z = 4xy - 12x^2 - 3y^2 + 8x + 4y$

24. $z=x^2-2xy+y^2+2x-2y$

25. $z=3x^2+12y^2-4xy-4x+8y-5$

26. $z=8x^2-3xy-3y^2-y+x$

27. $z=x^2-3xy+5y^2+4$

28. $z=2x^2+xy+5x+y^2$

29. $z=3xy-5x^2-y^2-4$

30. $z=y^2-xy+8x$

31. $z=x^2-2xy-10$

32. $z=3x^2-2xy+2y^2-10$

Пример. $z=x^2+xy+y^2-2x-3y$.

Решение. Находим частные производные первого порядка: $z'_x=2x+y-2$, $z'_y=x+2y-3$. Находим точки возможного экстремума, для этого применяем необходимое условие экстремума, то есть решаем систему уравнений: $\begin{cases} 2x+y-2=0, \\ x+2y-3=0 \end{cases}$, откуда: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{4}{3} \end{cases}$. Таким образом, точка $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ – это точка, в которой может быть экстремум функции.

Далее выясним, существует ли в полученной точке экстремум. Для этого проверим достаточное условие экстремума. Находим: $A=z''_{xx}\big|_M=2$, $B=z''_{yy}\big|_M=2$ и $C=z''_{xy}\big|_M=1$. Составляем определитель $\Delta=\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix}=AB-C^2=2\cdot 2-1^2=3>0$, следовательно в точке M есть экстремум. Так как при этом $A=z''_{xx}\big|_M=2>0$, то в точке $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ функция имеет минимум: $z_{\min}=z\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{7}{3}$.

Ответ: $z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{3}$.

<u>Задание 2.</u> (Задача о площади лесовосстановления).

Имеются данные по лесовосстановлению (тыс. га) в субъектах РФ с 1990 по 2005 годы (www.sci.aha.ru/map/rus/index.htm). а) Предполагая, что между площадью S лесовосстановления и временем t существует линейная зависимость вида $S = at + b$, найти значения параметров a и b методом наименьших квадратов; б) сравнить полученную зависимость с квадратичной $S = at^2 + bt + c$ и определить, какая из них лучше соответствует экспериментальным данным; в) определить площадь лесовосстановления в 2020 году.

№ варианта	Субъект РФ	1990	1995	2000	2001
1	Амурская область	47,2	64,7	37,0	33,8
2	Белгородская область	0,7	0,4	0,2	0,2
3	Брянская область	5,1	4,3	3,4	3,4
4	Владимирская область	8,6	7,3	4,7	4,7
5	Воронежская область	1,3	1,7	1,6	1,2
6	Ивановская область	6,4	6,1	3,3	2,6
7	Иркутская область	134,2	114,4	91,3	91,6
8	Калужская область	4,4	3,4	2,7	2,6

9	Республика Карелия	57,0	55,9	26,9	27,3
10	Кемеровская область	32,6	29,2	20,3	20,0
11	Кировская область	60,7	38,7	22,7	24,9
12	Костромская область	28,0	22,8	13,9	13,6
13	Красноярский край	96,5	91,6	55,4	56,2
14	Курганская область	6,3	5,5	3,8	2,7
15	Курская область	0,8	0,6	0,5	0,5
16	Ленинградская область	21	12	14,2	15,2
17	Липецкая область	0,8	0,6	0,5	0,5
18	Московская область	5,6	5,5	4,2	5,1
19	Орловская область	0,7	0,6	0,6	0,4
20	Пермский край	74,6	50,6	23,4	25,2
21	Республика Бурятия	33,3	24	20,2	22,8
22	Ростовская область	3,2	2,0	2,1	2,0
23	Рязанская область	4,1	3,6	2,8	2,4
24	Свердловская	74,5	60,6	23,2	23,5

	область				
25	Смоленская область	6,2	5,4	3,0	3,6
26	Тамбовская область	2,6	1,9	1,4	0,8
27	Тверская область	16,2	16,5	13,2	13,0
28	Томская область	48,3	28,6	23,9	21,0
29	Тюменская область	79,0	17,5	7,9	6,4
30	Удмуртская республика	18,4	12,9	9,6	6,9
31	Хабаровский край	113,5	105,9	125,1	125,5
32	Ярославская область	6,5	4,1	3,3	3,9

№ варианта	Субъект РФ	2002	2003	2004	2005
1	Амурская область	30,7	30,9	29,6	33,3
2	Белгородская область	0,2	0,3	0,3	0,4
3	Брянская область	3,6	2,8	2,7	2,9
4	Владимирская область	4,5	4,4	4,4	4,4
5	Воронежская область	1,1	1,1	1,1	1,1
6	Ивановская область	3,1	2,2	2,2	2,1

7	Иркутская область	72,3	60,8	57,4	67,1
8	Калужская область	2,7	2,2	2,2	2,2
9	Республика Карелия	21,5	21,8	22,5	27,7
10	Кемеровская область	12,3	12,0	13,0	9,7
11	Кировская область	25,0	23,2	23,0	18,9
12	Костромская область	11,2	10,8	10,5	10,0
13	Красноярский край	48,8	51,1	50,7	54,1
14	Курганская область	2,8	2,5	2,1	6,0
15	Курская область	0,4	0,4	0,4	0,5
16	Ленинградская область	16,4	16,8	17,9	17,4
17	Липецкая область	0,3	0,3	0,4	0,4
18	Московская область	5,2	5,7	5,9	6,7
19	Орловская область	0,4	0,4	0,3	0,2
20	Пермский край	24,9	25,3	25,9	26,4
21	Республика Бурятия	23,3	22,9	23	22,6
22	Ростовская	1,5	0,8	0,6	1,0

	область				
23	Рязанская область	2,2	1,9	2,3	2,1
24	Свердловская область	23,0	22,1	20,0	17,7
25	Смоленская область	3,2	3,1	3,2	2,8
26	Тамбовская область	0,8	0,8	0,6	0,6
27	Тверская область	13,8	13,9	13,1	13,0
28	Томская область	21,0	20,8	13,4	10,3
29	Тюменская область	7,7	6,6	6,2	6,4
30	Удмуртская республика	7,4	6,9	5,3	4,5
31	Хабаровский край	101,1	86,4	85,6	107,2
32	Ярославская область	3,9	3,3	3,2	2,9

Пример.

Субъект РФ	1990	1995	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Республика Саха (Якутия)	49,4	43,2	45,6	43,6	43,7	43,4	40,5	43,7

Решение.

а) Для линейной функции $S = at + b$ параметры a и b определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i\right)b = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i S_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i\right)a + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i. \end{cases}$$

Для квадратичной функции $S = at^2 + bt + c$ параметры a, b и c определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^4\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^3\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2\right)c = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 S_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^3\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2\right)b + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i\right)c = \sum\limits_{i=1}^{n} t_i S_i, \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2\right)a + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i\right)b + nc = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i. \end{cases}$$

Найдём необходимые для решения суммы: $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^3$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^4$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i S_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^2 S_i$. Промежуточные вычисления представим в таблице. Для упрощения вычислений отсчёт лет начнём с 1990 года.

i	t_i	S_i	t_i^2	t_i^3	t_i^4	$t_i S_i$
1	0	49,4	0	0	0	0
2	5	43,2	25	125	625	216
3	10	45,6	100	1000	10000	456
4	11	43,6	121	1331	14641	479,6
5	12	43,7	144	1728	20736	524,4
6	13	43,4	169	2197	28561	564,2
7	14	40,5	196	2744	38416	567

8	15	43,7	225	3375	50624	655,5
∑	80	353,1	980	12500	163604	3462,7

i	$t_i^2 S_i$
1	0
2	1080
3	4560
4	5275,6
5	6292,8
6	7334,6
7	7938
8	9832,5
∑	42313,5

Система уравнений для линейной зависимости имеет вид:

$$\begin{cases} 980a + 80b = 3\,462{,}7, \\ 80a + 8b = 353{,}1. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 980 & 80 \\ 80 & 8 \end{vmatrix} = 1\,440\,.$$

Вычислим определители Δ_a и Δ_b:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 3\,462{,}7 & 80 \\ 353{,}1 & 8 \end{vmatrix} = -546{,}4 \quad \Delta_b = \begin{vmatrix} 980 & 34\,62{,}7 \\ 80 & 353{,}1 \end{vmatrix} = 69\,022\,.$$

Тогда значения неизвестных параметров:

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{-546{,}4}{1\,440} \approx -0{,}379 \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{69\,022}{1\,440} \approx 47{,}932\,.$$

Линейная зависимость имеет следующий вид:

$S = -0{,}379t + 47{,}932\,.$

Система уравнений для квадратичной зависимости имеет вид:

$$\begin{cases} 163604a+12\,500b+980c=42\,313{,}5, \\ 12\,500a+980b+80c=3462{,}7, \\ 980a+80b+8c=353{,}1. \end{cases}$$

Для упрощения дальнейших вычислений разделим каждое уравнение системы на 10:

$$\begin{cases} 16\,360{,}4a+1\,250b+98c=4\,231{,}35, \\ 1\,250a+98b+8c=346{,}27, \\ 98a+8b+0{,}8c=35{,}31. \end{cases}$$

Решим систему по правилу Крамера.

Вычислим определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 16\,360{,}4 & 1\,250 & 98 \\ 1\,250 & 98 & 8 \\ 98 & 8 & 0{,}8 \end{vmatrix}=4\,397{,}76\,.$$

Вычислим определители Δ_a, Δ_b и Δ_c:

$$\Delta_a=\begin{vmatrix} 4\,231{,}35 & 1\,250 & 98 \\ 346{,}27 & 98 & 8 \\ 35{,}31 & 8 & 0{,}8 \end{vmatrix}=119{,}88$$

$$\Delta_b=\begin{vmatrix} 16\,360{,}4 & 4\,231{,}35 & 98 \\ 1\,250 & 346{,}27 & 8 \\ 98 & 35{,}31 & 0{,}8 \end{vmatrix}=-3\,466{,}906$$

$$\Delta_c=\begin{vmatrix} 16\,360{,}4 & 1\,250 & 4\,231{,}35 \\ 1\,250 & 98 & 346{,}27 \\ 98 & 8 & 35{,}31 \end{vmatrix}=214\,089{,}89$$

Тогда значения неизвестных параметров:

$$a=\frac{\Delta_a}{\Delta}=\frac{119{,}88}{4\,397{,}76}\approx-0{,}027 \quad b=\frac{\Delta_b}{\Delta}=\frac{-3\,466{,}906}{4\,397{,}76}\approx-0{,}788$$

$$c = \frac{\Delta_c}{\Delta} = \frac{214\,089{,}89}{4\,397{,}76} \approx 48{,}682\ .$$

Квадратичная зависимость имеет следующий вид:

$$S = 0{,}027t^2 - 0{,}788t + 48{,}682\ .$$

б) Для сравнения линейной и квадратичной зависимости необходимо для каждой вычислить сумму квадратов отклонений теоретических и экспериментальных значений.

Для линейной зависимости:

$$\sum_{i=1}^{8}\left(at_i + b - S_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{8}\left(-0{,}379t_i + 47{,}932 - S_i\right)^2 = 19{,}243\,.$$

Для квадратичной зависимости:

$$\sum_{i=1}^{8}\left(at_i^2 + bt_i + c - S_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{8}\left(0{,}027t_i^2 - 0{,}788t_i + 48{,}682 - S_i\right)^2 = 16{,}973.$$

Наилучшей является та зависимость, для которой сумма квадратов отклонений меньше. В нашем примере лучшей является квадратичная зависимость.

в) Определим площадь лесовосстановления в 2020 году. Так как отсчёт лет начат с 1990 года, то 2020 году в нашей задаче будет соответствовать 30-й год.

Для линейной зависимости:

$$S(30) = -0{,}379 \cdot 30 + 47{,}932 = 36{,}562\ (\text{тыс.га}).$$

Для квадратичной зависимости:

$$S(30) = 0{,}027 \cdot 30^2 - 0{,}788 \cdot 30 + 48{,}682 = 49{,}342\ (\text{тыс.га}).$$

Ответ:

а) $S = -0{,}379t + 47{,}932$, $S = 0{,}027t^2 - 0{,}788t + 48{,}682$;

б) лучшей является квадратичная зависимость;

в) для линейной зависимости площадь лесовосстановления в 2020 году составит 36,562 тыс. га, для квадратичной – 49,342 тыс. га.

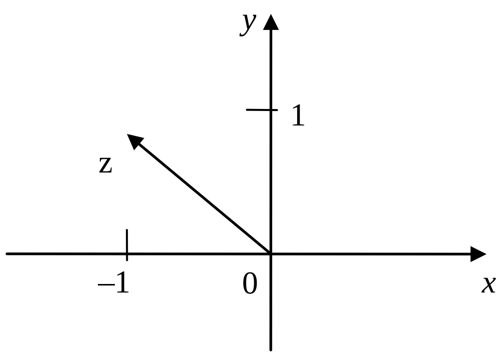
ТЕМА 7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Задание 1. Изобразить комплексное число на плоскости, найти его модуль и аргумент. Записать число в тригонометрической и показательной формах.

1. $z=3+3i$	2. $z=5+5i$	3. $z=4+4i$
4. $z=-3+3i$	5. $z=-7+7i$	6. $z=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}i$
7. $z=-6+6i$	8. $z=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{3}i$	9. $z=2-2i$
10. $z=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{3}i$	11. $z=8-8i$	12. $z=-5-5\sqrt{3}i$
13. $z=9-9i$	14. $z=7\sqrt{3}+7i$	15. $z=-5-5i$
16. $z=7\sqrt{3}-7i$	17. $z=-7-7i$	18. $z=-7\sqrt{3}+7i$
19. $z=-3-3i$	20. $z=-7\sqrt{3}-7i$	21. $z=4+4\sqrt{3}i$
22. $z=-3-3\sqrt{3}i$	23. $z=4-4\sqrt{3}i$	24. $z=-3+3\sqrt{3}i$
25. $z=-4-4\sqrt{3}i$	26. $z=3\sqrt{3}-3i$	27. $z=-4-4\sqrt{3}i$
28. $z=-3\sqrt{3}+3i$	29. $z=3+3\sqrt{3}i$	30. $z=3\sqrt{3}+3i$
31. $z=3-\sqrt{3}i$	32. $z=-3\sqrt{3}-3i$	

Пример. $z=-1+i$.

Решение. Данному числу z на комплексной плоскости соответствует точка с координатами $(-1;1)$.



Пусть комплексное число записано в алгебраической форме: $z=a+i\cdot b$. Тогда модуль данного комплексного числа равен $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. Для нахождения аргумента φ воспользуемся следующей таблицей:

II четверть: $\varphi=\pi+arctg\frac{b}{a}$	I четверть: $\varphi=arctg\frac{b}{a}$
III четверть: $\varphi=\pi+arctg\frac{b}{a}$	IV четверть: $\varphi=arctg\frac{b}{a}$

Тогда аргумент данного комплексного числа равен: $\varphi=\pi+arctg\frac{b}{a}=\pi+arctg\frac{1}{-1}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

Тригонометрическая форма записи имеет вид: $z=\sqrt{r}(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$,

показательная форма записи имеет вид:

$$z=re^{i\varphi}=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Ответ: $r=\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, $z=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$, $z=\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

ТЕМА 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задание 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $4xdx-3ydy=3x^2ydy-2xy^2dx$
2. $\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$
3. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx$
4. $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$

5. $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0$

6. $x\sqrt{1+y^2}+y'y\sqrt{4+x^2}=0$

7. $\sqrt{3+y^2}dx-ydy=x^2ydy$

8. $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$

9. $6xdx+3x^2ydy=6ydy-2xy^2dx$

10. $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$

11. $y\left(e^x+4\right)dy-e^xdx=0$

12. $\sqrt{4-y^2}y'+xy^2+x=0$

13. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx$

14. $x\sqrt{4+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$

15. $\left(e^x+8\right)dy-ye^xdx=0$

16. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$

17. $xy^2dy-3xy^2dx=6xdx-y^2dy$

18. $y\ln y+xy'=0$

19. $\left(e^x+1\right)y'=ye^x$

20. $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$

21. $y'=e^{x+y}+e^{x-y}$

22. $(1+\ln y)y+xy'=0$

23. $y\ln^3 y+y'\sqrt{x+1}=0$

24. $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{y}\right)dx=0$

25. $y(x+2)dx+x(y-1)dy=0$

26. $yy'+xe^y=0$

27. $y'=tgx\cdot tgy$

28. $\ln(\cos y)dx + x \cdot tgydy = 0$

29. $e^{1+x^2} tgydx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0$

30. $y^2 \left(e^{2x} + 1\right) dy = e^x dx$

31. $x\left(y^6 + 1\right)dx + y^2\left(x^4 + 1\right)dy = 0$

32. $3e^x tgydx + \left(1 + e^x\right)\sec^2 ydy = 0$

Пример. $y^2 x^2 dy - (y-1)dx = 0$.

Решение. Данное уравнение относится к классу дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$\frac{y^2}{y-1} dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Теперь уравнение можно интегрировать:

$$\int \frac{y^2}{y-1} dy = \int \frac{dx}{x^2} + C.$$

Находим неопределенные интегралы:

$$\int (y + 1 - \frac{1}{y-1}) dy = \int \frac{dx}{x^2} + C,$$

откуда: $\frac{y^2}{2} + y - \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$ – это общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Ответ: $\frac{y^2}{2} + y - \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$.

Задание 2. Найти решение задачи Коши.

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2, (1) = 0$

2. $y' - yctgx = 2x \cdot \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

3. $2y' + 2y\cos x = \sin 2x, y(0) = 0$

4. $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), y(0) = 1$

5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = 1{,}5$

6. $y' + ytgx = \cos^2 x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$

7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1$

10. $y' - 3x^2 y = x^2, y(0) = \frac{2}{3}$

11. $y' - \frac{(2x-5)y}{x^2} = 5, y(2) = 4$

12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{xe^x}, y(-1) = e$

13. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2\ln x}{x}, y(1) = 1$

14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, y(1) = 4$

15. $y' + \frac{2y}{3} = x^3, y(1) = -\frac{5}{6}$

16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 1$

17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3$

18. $y' - \frac{(1+2x)y}{x^2} = 1, y(1) = 1$

19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$

20. $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}$

21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}$

22. $y' + xy = -x^3, y(0) = 3$

23. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2, y(0) = 1$

24. $y' + \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 1$

25. $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}$

26. $y' - \frac{y}{x} = \ln x, y(1) = 1$

27. $y' - \frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2}, y(1) = 1$

28. $y' + 2xy = xe^{x^2}, y(0) = 1$

29. $y' - y\cos x = -2\sin x, y(0) = 3$

30. $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = tgx + tg^3 x, y(0) = 0$

31. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = \frac{1}{2}$

32. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1$

Пример. $y' - \frac{y}{x} = -2x$ при условии $y(1) = 3$.

Решение. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, для его решения применяем метод Бернулли.

Делаем замену: $y = uv, y' = u'v + uv'$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – неизвестные функции. Получаем: $u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -2x$ или $u'v + u(v' - \frac{1}{x}v) = -2x$.

Неизвестную функцию $v(x)$ найдем из условия $v' - \frac{1}{x}v = 0$: $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$, $\ln|v| = \ln|x|$, откуда $v = x$.

Тогда для нахождения второй неизвестной функции $u(x)$ нужно решить уравнение: $u'v = -2x$, откуда: $u'x = -2x$. Тогда $u' = -2$ и путем интегрирования последнего равенства получаем $u = -2x + C$.

Общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = uv = (-2x + C) \cdot x$.

Для нахождения частного решения воспользуемся начальным условием: $y(1) = 3$. Подставляя соответствующие значения переменных $x = 1$ и $y = 3$ в общее решение, получаем: $3 = (-2 \cdot 1 + C) \cdot 1$, откуда $C = 5$. Тогда частное решение данной задачи имеет вид: $y = x(-2x + 5) = -2x^2 + 5x$.

Ответ: $y = -2x^2 + 5x$.

Задание 3. Решить уравнения.

1. $y'' - y = 0$	2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' - 4y = 0$	4. $y'' + 2y' + 5y = 0$
5. $y'' - 4y' + 5y = 0$	6. $y'' + y' = 0$
7. $y'' + 4y = 0$	8. $y'' - 2y' + y = 0$
9. $y'' + 16y' + 15y = 0$	10. $y'' + 6y' + 13y = 0$
11. $y'' + 7y' + 10y = 0$	12. $y'' - 4y' + 4y = 0$
13. $y'' - 2y' + 5y = 0$	14. $y'' - 9y' = 0$
15. $y'' - 2y' + 2y = 0$	16. $y'' - y' + 3y = 0$
17. $y'' - 6y' + 9y = 0$	18. $y'' - 5y' + 6y = 0$
19. $y'' + 2y' - 3y = 0$	20. $y'' - 3y' - 4y = 0$.
21. $y'' + 2y' + y = 0$.	22. $y'' + 4y' + 5y = 0$
23. $y'' - 5y' + 4y = 0$	24. $y'' - y = 0$
25. $y'' - 3y' - 4y = 0$	26. $y'' - 2y' + 2y = 0$
27. $y'' - y' + 2y = 0$	28. $y'' + 3y' + 2y = 0$
29. $y'' + y' - 6y = 0$	30. $y'' - 4y' + 13y = 0$
31. $y'' + 4y' + 4y = 0$	32. $y'' + 3y' + 2y = 0$

Пример. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Для его решения составляем характеристическое уравнение:

$$k^2+2k+5=0.$$

Это алгебраическое уравнение второго порядка, его корни – комплексные, сопряженные числа: $k_{1,2}=-1\pm 2i$.

Тогда общее решение данного уравнения имеет вид:

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Ответ: $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

ТЕМА 9. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Задание 1. Исследовать ряд на сходимость.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\sqrt{3})^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{2n+n}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+5}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+n-1}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$ 10. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{3+n^2}$ 12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)2^n}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+2}{2n}}$ 14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+4}{3^n}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+4)^4}$ 16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n+3}(n+3)^3}$ 18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^3}{(\sqrt{2})^n}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n^2-1}$ 20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+2n^2}{n^4+1}$ 22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{n^4+1}$ 24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$ 26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{(2n^2+7)^3}}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)^2}$ 28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{2^{n+2}(n+2)}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}$ 30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n}$ 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{6^n}$.

Решение. Для исследования данного ряда на сходимость можно применить признак Д’Аламбера. Для этого находим $u_n=\frac{3n+1}{6^n}$ и $u_{n+1}=\frac{3(n+1)+1}{6^{n+1}}=\frac{3n+4}{6^{n+1}}$. Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{6^{n+1}}:\frac{3n+1}{6^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{6^{n+1}}\cdot\frac{6^n}{3n+1}\right)=$$

$=\frac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{3n+1}=\frac{1}{6}<1$, следовательно по признаку Д’Аламбера данный числовой ряд сходится.

Ответ: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{6^n}$ сходится.

<u>Задание 2.</u> Найти область сходимости степенного ряда.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)!}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+3)}$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{5^n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 x^n}{2^n}$
7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{nx^n}{5^n}$
8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+3}$
9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$
10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)x^n$
11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}5^n x^n$
12. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n^2+4)10^n}$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n}$
14. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2}$
15. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$
16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)^3}$
17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$
18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$
19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 3^n}$
20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\cdot n}$
21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}5^n(n^2+1)x^n$
22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n}$
23. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)2^n}$
24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}$
25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[3]{n+1}}$
26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+2)}$

27. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+2}}$ 28. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^4+1}}$

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ 30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)3^n}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^3}$ 32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 5^n}$

Пример. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

Решение. Находим радиус сходимости данного степенного ряда по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Получаем: $a_n = \frac{1}{2n+1}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2n+3}$. Тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{2n+3}{2n+1} \right| = 1$. Итак, радиус сходимости $R = 1$. Тогда интервал сходимости данного ряда: $|x| < 1$, то есть $x \in (-1;\, 1)$.

Исследуем ряд на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Этот ряд знакочередующийся, для исследования его на сходимость применяем признак Лейбница:

а) элементы данного ряда убывают по абсолютной величине: $\frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \text{K}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$.

Оба условия признака Лейбница выполняются, значит знакочередующийся числовой ряд сходится, и при $x = -1$ исходный степенной ряд сходится.

При $x=1$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Этот ряд знакоположительный, для исследования его на сходимость применяем интегральный признак Коши: составляем интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}dn$ и исследуем его на сходимость.

Получаем:

$$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}dn=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dn}{2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\ln\left|2n+1\right|\Big|_{1}^{b}=\infty.$$

Несобственный интеграл расходится, следовательно будет расходящимся и числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Тогда на правом конце интервала сходимости исходный степенной ряд расходится.

Таким образом, степенной ряд сходится при $x\in[-1;1)$.

Ответ: данный степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$ сходится при $x\in[-1;1)$.

Задание 3. Разложить данные функции в ряд по степеням x, используя известные разложения, и указать области сходимости.

1. $f(x)=x\sin^2 x^2$
2. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$
3. $f(x)=x\cos\left(\frac{2}{3}x^3\right)$
4. $f(x)=\sqrt{1+2x}$
5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$
6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$
7. $f(x)=e^{-x^4}$
8. $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$

9. $f(x)=\sqrt[4]{1+x}$

10. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $f(x)=x^5\ln\left(1+x^2\right)$

12. $f(x)=1+xe^{-x}$

13. $f(x)=\sin^2 2x$

14. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{x}{5}\right)$

15. $f(x)=\cos^2 2x$

16. $f(x)=e^{-3x^2}$

17. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$

18. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}$

19. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^5}$

20. $f(x)=\dfrac{1}{x}(1-e^{-2x})$

21. $f(x)=x\cdot\mathrm{arctg}x^2$

22. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$

23. $f(x)=\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}$

24. $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$

25. $f(x)=x\,\mathrm{ch}x$

26. $f(x)=\cos^2 x^2$

27. $f(x)=x\,\mathrm{ch}x$

28. $f(x)=\sin^2 x^2$

29. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{x}$

30. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

31. $f(x)=\sqrt{x}\cdot\mathrm{ch}\sqrt{x}$

32. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

Пример. $f(x)=e^{-x^2}$.

Решение. Воспользуемся разложением в степенной ряд функции e^x: $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$, при этом $-\infty<x<+\infty$. Заменив в этом разложении x на $-x^2$, получаем: $e^{-x^2}=1+\dfrac{-x^2}{1!}+\dfrac{(-x^2)^2}{2!}+\dfrac{(-x^2)^3}{3!}+\ldots+\dfrac{(-x^2)^n}{n!}+\ldots$ или

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\ldots,$$

при этом $-\infty<x<+\infty$.

Ответ: $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}+\ldots$, при этом $-\infty<x<+\infty$.

РАЗДЕЛ 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ТЕМА 10. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ, СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Задание 1. Бросают две монеты. Найти вероятность того, что:

1. на обеих монетах появится «герб»,
2. хотя бы на одной монете появится «герб»;
3. ни на одной монете не появится «герб»;

Бросают три монеты. Найти вероятность того, что:

4. на всех монетах появится «герб»;
5. хотя бы на одной монете появится «герб»;
6. только на двух монетах появится «герб»;
7. только на одной монете появится «герб»;
8. ни на одной монете не появится «герб».

Бросают четыре монеты. Найти вероятность того, что:

9. на всех монетах появится «герб»;
10. хотя бы на одной монете появится «герб»;
11. только на одной монете появится «герб»;
12. только на двух монетах появится «герб»;
13. только на трех монетах появится «герб»;
14. ни на одной монете не появится «герб».

Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что на верхней грани появится:

15. четное число очков;
16. «1» или «6».

Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся следующие числа очков:

17. только четные;
18. одно четное, другое нечетное;
19. сумма которых четна;
20. сумма которых нечетна;
21. сумма которых больше, чем их произведение;
22. сумма которых меньше шести;
23. сумма которых больше восьми.

Бросают три игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся следующие числа очков

24. только четные;
25. одно четное, остальные нечетные;
26. сумма которых четна;
27. сумма которых нечетна;
28. которые все одинаковы;
29. которые все различны;
30. сумма которых делится на четыре;
31. сумма которых делится на пять.
32. только четные.

Пример. Бросают три игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появится число очков, сумма которых делится на пять.

Решение. Определим испытание и его результат, то есть элементарное событие. Испытанием является бросание трех игральных костей; результатом – одно из сочетаний очков 1, ..., 6 на верхних гранях трех костей.

Исследуемое событие A – сумма очков на трех костях делится на пять. Вероятность события A вычислим с помощью формулы:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Общее количество элементарных событий n можно найти по правилу умножения. На каждой игральной кости 6 граней и все они могут сочетаться со всеми гранями других костей. Итак, получаем $n=6\cdot 6\cdot 6=216$.

Количество элементарных событий m, входящих в состав события A или благоприятствующих событию A, найдем выписав всевозможные результаты испытаний и оставив из них только те, для которых сумма очков на всех трех костях делится на пять. Можно облегчить работу, выписав всевозможные исходы бросания первых двух костей, сочетая с ними подходящие значения количества очков, выпавших на третьей кости. Имеем:

113	212	311	366	465	564	663
122	221	316	415	514	613	
131	226	325	424	523	622	
136	235	334	433	532	631	
145	244	343	442	541	636	
154	253	352	451	546	645	
163	262	361	456	555	654	

В результате получаем, что $P(m)=43$, значит, $P(A)=\frac{43}{216}$.

Ответ: $P(A)=\frac{43}{216}$.

Задание 2.

Варианты 1-8.

В семье $\boldsymbol{n}$ детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятности следующих событий:

а) в семье $\boldsymbol{m}$ мальчиков и $\boldsymbol{k}$ девочек;

б) число мальчиков в семье от $\boldsymbol{m_1}$ до $\boldsymbol{m_2}$.

№ варианта	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{m_1}$	$\boldsymbol{m_2}$
1	6	2	4	0	3
2	4	1	3	2	4
3	5	4	1	1	3
4	7	3	4	5	7
5	6	5	1	3	5
6	5	2	3	0	2
7	4	2	2	0	3
8	5	3	2	2	5

Варианты 9-16.

На заводе работает линия из $\boldsymbol{n}$ однотипных станков. Вероятность поломки одного станка в течение смены $\boldsymbol{p}$. Найти вероятности следующих событий:

а) в течение одной смены сломается $\boldsymbol{m}$ станков;

б) число сломанных станков в течение одной смены будет в пределах от $\boldsymbol{m_1}$ до $\boldsymbol{m_2}$

№ варианта	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{m_1}$	$\boldsymbol{m_2}$
9	5	0,2	2	1	3
10	6	0,3	2	3	5
11	4	0,1	1	2	4
12	7	0,2	3	0	3
13	5	0,1	3	2	5
14	4	0,2	3	0	3

15	5	0,3	2	2	4
16	6	0,2	1	1	4

Варианты 17-24.

Игральная кость бросается $\boldsymbol{n}$ раз. Найти вероятности следующих событий:

а) «шестерка» выпадет $\boldsymbol{m}$ раз;

б) число выпадений «шестерки» будет в пределах от $\boldsymbol{m_1}$ до $\boldsymbol{m_2}$.

№ варианта	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{m_1}$	$\boldsymbol{m_2}$
17	5	2	1	3
18	5	1	3	5
19	4	1	2	4
20	6	3	0	2
21	5	3	2	5
22	4	3	0	3
23	5	2	2	4
24	6	1	1	4

Варианты 25-32.

При передаче сообщения вероятность искажения одного знака $\boldsymbol{p}$. Переданное сообщение содержит в себе $\boldsymbol{n}$ знаков. Найти вероятности следующих событий:

а) в переданном сообщении искажено $\boldsymbol{m}$ знаков;

б) число искаженных знаков в переданном сообщении от $\boldsymbol{m_1}$ до $\boldsymbol{m_2}$.

№ варианта	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{m_1}$	$\boldsymbol{m_2}$
25	7	0,2	2	1	3
26	6	0,2	2	3	5
27	5	0,1	1	2	4
28	7	0,3	3	0	3

29	5	0,3	3	2	5
30	4	0,4	3	0	3
31	5	0,5	2	2	4
32	6	0,3	1	1	4

Пример. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,2. Имеется шесть билетов. Найти вероятности следующих событий:

а) два билета будут выигрышными;

б) выигрышных билетов будет от двух до четырех.

Решение. Для вычисления искомых вероятностей воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^n.$$

По условию задачи $p=0{,}2$, $q=1-p=0{,}8$.

а) Рассмотрим случайное событие A: два билета из шести будут выигрышными. Его вероятность: $P(A)=P_6(2)=C_6^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^{6-2}=\dfrac{6\cdot 5}{2!}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^4=0{,}2458$.

б) Рассмотрим случайное событие B: выигрышных билетов будет от двух до четырех. Это сложное событие состоит из следующих:

B_1: два билета из шести будут выигрышными;

B_2: три билета из шести будут выигрышными;

B_3: четыре билета из шести будут выигрышными.

Тогда $B=B_1+B_2+B_3$ и $P(B)=P\left(B_1+B_2+B_3\right)$.

Находим по формуле Бернулли соответствующие вероятности:

$$P(B_1)=P_6(2)=C_6^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^{6-2}=\frac{6\cdot 5}{2!}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^4=0{,}2458,$$

$$P(B_2)=P_6(3)=C_6^3\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^{6-3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^3=0{,}0492,$$

$$P(B_3)=P_6(4)=C_6^4\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^{6-4}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^2=0{,}0061.$$

Тогда искомая вероятность: $P(B)=0{,}2458+0{,}0492+0{,}0061=0{,}3011.$

Ответ: $P(B)=0{,}3011.$

Задание 3. Случайная величина X задана рядом распределения:

X	x_1	x_2	x_3	x_4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график. Вычислить для X её среднее значение $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$.

№ варианта	x_1	x_2	x_3	x_4	p_1	p_2	p_3	p_4
1	4	6	6	12	0,143	0,2	0,49	0,167
2	5	7	7	13	0,143	0,2	0,49	0,167
3	6	8	8	14	0,143	0,2	0,49	0,167
4	7	9	9	15	0,143	0,2	0,49	0,167
5	8	11	11	20	0,125	0,167	0,508	0,2
6	9	13	13	25	0,111	0,143	0,496	0,25
7	10	15	15	30	0,1	0,125	0,442	0,333
8	11	13	13	19	0,143	0,2	0,49	0,167
9	12	15	15	24	0,125	0,167	0,508	0,2
10	13	17	17	29	0,111	0,143	0,496	0,25
11	14	19	19	34	0,1	0,125	0,442	0,333
12	15	17	17	23	0,143	0,2	0,49	0,167
13	16	19	19	28	0,125	0,167	0,508	0,2
14	17	21	21	33	0,111	0,143	0,496	0,25
15	18	23	23	38	0,1	0,125	0,442	0,333
16	19	21	21	27	0,143	0,2	0,49	0,167

17	20	23	23	32	0,125	0,167	0,508	0,2
18	21	25	25	37	0,111	0,143	0,496	0,25
19	22	27	27	42	0,1	0,125	0,442	0,333
20	23	25	25	31	0,143	0,2	0,49	0,167
21	24	27	27	36	0,125	0,167	0,508	0,2
22	25	29	29	41	0,111	0,143	0,496	0,25
23	26	31	31	46	0,1	0,125	0,442	0,333
24	27	29	29	35	0,143	0,2	0,49	0,167
25	28	31	31	40	0,125	0,167	0,508	0,2
26	29	33	33	45	0,111	0,143	0,496	0,25
27	30	35	35	50	0,1	0,125	0,442	0,333
28	31	33	33	39	0,143	0,2	0,49	0,167
29	32	35	35	44	0,125	0,167	0,508	0,2
30	33	37	37	49	0,111	0,143	0,496	0,25
31	34	39	39	54	0,1	0,125	0,442	0,333
32	35	37	37	43	0,143	0,2	0,49	0,167

Пример.

X	*3*	*5*	*7*	*11*
P	*0,14*	*0,20*	*0,49*	*0,17*

Решение. Функцию распределения находим по формуле:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Тогда:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ 0{,}14, & 3<x\le 5,\\ 0{,}34, & 5<x\le 7,\\ 0{,}83, & 7<x\le 11,\\ 1, & x>11.\end{cases}$$

Построим график функции распределения $F(x)$ (см. рисунок).

Среднее значение $M(X)$ вычисляем по формуле $M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i$:

$$M(X)=3\cdot 014+5\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}49+11\cdot 0{,}17=6{,}72.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся формулами $D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2$ и $M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$:

$$M\left(X^2\right)=3^2\cdot 014+5^2\cdot 0{,}2+7^2\cdot 0{,}49+11^2\cdot 0{,}17=50{,}84.$$

$$D(X)=50{,}84-6{,}72^2=5{,}6816.$$

Среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$ находим по формуле $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$: $\sigma(X)=\sqrt{5{,}6816}\approx 2{,}3836$.

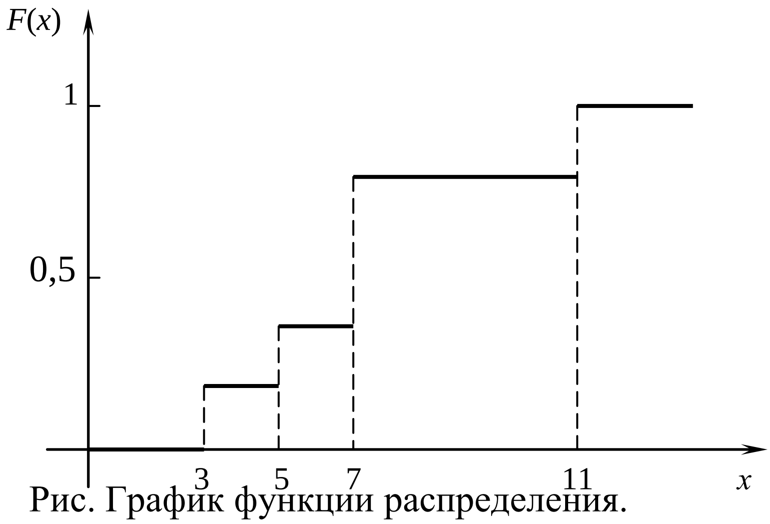


Рис. График функции распределения.

Ответ:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ 0{,}14, & 3<x\le 5,\\ 0{,}34, & 5<x\le 7,\\ 0{,}83, & 7<x\le 11,\\ 1, & x>11.\end{cases}$$

M(X)=6,72, D(X)=5, 6816, $\sigma(X)\approx 2{,}3836.$

<u>Задание 4.</u> После обработки результатов эксперимента составлена таблица, в первой строке которой указаны группы возможных значений некоторой случайной величины x_i, а во второй строке – численность каждой группы значений m_i. Найти объем выборки *n*; относительные частоты p_i^*, соответствующие каждой отдельной группе значений случайной величины; составить вариационный ряд распределения данной случайной величины. Найти числовые характеристики выборки: среднее арифметическое, выборочную дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Вариант 1.

x_i	53	54	56	58
m_i	12	10	4	1

Вариант 2.

x_i	73	75	76	79
m_i	5	12	11	3

Вариант 3.

x_i	38	40	44	45
m_i	1	6	12	13

Вариант 4.

x_i	21	24	26	27
m_i	13	10	4	6

Вариант 5.

x_i	27	30	33	40
m_i	5	6	11	10

Вариант 6.

x_i	63	65	68	70
m_i	4	12	15	9

Вариант 7.

x_i	17	21	23	25
m_i	2	11	13	12

Вариант 8.

x_i	42	45	48	52
m_i	13	2	14	3

Вариант 9.

x_i	56	60	63	65
m_i	11	10	3	7

Вариант 10.

x_i	28	32	36	42
m_i	12	5	11	6

Вариант 11.

x_i	23	25	28	29
m_i	2	1	11	10

Вариант 12.

x_i	17	21	25	27
m_i	3	13	14	2

Вариант 13.

x_i	24	26	28	30
m_i	1	12	12	6

Вариант 14.

x_i	12	16	19	21
m_i	2	5	1	15

Вариант 15.

x_i	12	16	19	21
m_i	11	12	3	1

Вариант 16.

x_i	30	32	35	40
m_i	1	2	14	12

Вариант 17.

x_i	12	14	16	20
m_i	11	1	13	5

Вариант 18.

x_i	21	25	28	31
m_i	1	4	15	11

Вариант 19.

x_i	60	64	67	70
m_i	1	3	4	15

Вариант 20.

x_i	45	47	50	52
m_i	1	2	12	12

Вариант 21.

x_i	46	49	51	55
m_i	12	13	4	7

Вариант 22.

x_i	18	22	23	26
m_i	2	14	3	12

Вариант 23.

x_i	78	80	84	85
m_i	1	1	12	10

Вариант 24.

x_i	37	41	43	45
m_i	3	14	11	4

Вариант 25.

x_i	25	28	30	33
m_i	2	2	13	11

Вариант 26.

x_i	56	58	60	64
m_i	1	14	11	3

Вариант 27.

x_i	31	34	34	40
m_i	12	5	11	2

Вариант 28.

x_i	17	20	23	27
m_i	3	5	12	10

Вариант 29.

x_i	28	32	34	36
m_i	3	3	14	5

Вариант 30.

x_i	35	39	42	46
m_i	2	12	10	6

Вариант 31.

x_i	53	54	56	58
m_i	12	10	4	1

Вариант 32.

x_i	73	75	76	79
m_i	5	12	11	3

Пример. После обработки результатов эксперимента составлена таблица, в первой строке которой указаны группы возможных значений некоторой случайной величины x_i, а во второй строке – численность каждой группы значений m_i:

x_i	21	17	35	11
m_i	3	11	14	5

Решение. Найдем объем выборки n по формуле: $n=\sum\limits_{i=1}^{k} m_i$, где k – число столбцов в таблице. Тогда n =3+11+14+5=33.

Относительные частоты p_i^*, соответствующие каждой отдельной группе значений случайной величины, находим по формулам: $p_i^*=\frac{m_i}{n}$. Получаем: $p_1^*=\frac{m_1}{n}=\frac{1}{11}$, $p_2^*=\frac{m_2}{n}=\frac{1}{3}$, $p_3^*=\frac{m_3}{n}=\frac{14}{33}$, $p_4^*=\frac{m_4}{n}=\frac{5}{33}$.

Составим вариационный ряд распределения данной случайной величины:

x_i	21	17	35	11
p_i^*	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{33}$	$\frac{5}{33}$

Находим числовые характеристики выборки:

а) среднее арифметическое находим по формуле: $m_X^* = \sum x_i \cdot p_i^* = 21\cdot\frac{1}{11}+17\cdot\frac{1}{3}+35\cdot\frac{14}{33}+11\cdot\frac{5}{33}\approx 24$

б) выборочная дисперсия находится по формуле: $D^*(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^* \cdot (x_i - m_X^*)^2$.

Получаем:

$D^*(X)=\frac{1}{11}\cdot(21-24)^2+\frac{1}{3}\cdot(17-24)^2+\frac{14}{33}\cdot(35-24)^2+$

$$+\frac{5}{33}\cdot(11-24)^2=94.$$

в) среднеквадратическое отклонение: $\sigma_X^* = \sqrt{94} \approx 9{,}7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин, И. И. Высшая математика / И. И. Баврин. М.: Издательский центр «Академия». 2003.
2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. М.: Высшая школа. 2004.
3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. М.: Высшая школа, 1997.
4. Данко, П. Е. Высшая математика в примерах и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Часть 1, 2. М.: Высшая школа. 2009.
5. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория Базовых Знаний. 2003.
6. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. 1 курс. М.: Айрис-пресс. 2003.
7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. М.: «Интеграл – Пресс», т. 1, 2. 2007.
8. Сборник типовых расчётов по высшей математике / Под редакцией В. Б. Миносцева. М.: МГИУ. 2001.