ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие является составной частью комплекса учебных пособий по курсу высшей математики, которые могут быть полезны для организации учебного процесса на факультете дистанционного обучения, при самостоятельной подготовке студентов к экзаменам. Оно поможет без помощи преподавателя организовать планомерное изучение материала, не только основных понятий и положений теории, но и основных приемов и методов решения задач.

Учебное пособие содержит материалы по следующим темам: обыкновенные дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды, ряды Фурье – это те разделы, на которых основаны многие технические науки. Учебное пособие создано на основе опыта преподавания высшей математики в Комсомольском-на-Амуре государственном техническом университете на технических и гуманитарных факультетах.

В начале каждого раздела излагаются основные теоретические сведения, знание которых необходимо для осознанного решения примеров и задач. Все определяемые понятия и формулировки теорем выделены курсивом. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров и задач различной трудности. В конце каждого раздела приводятся решения задач. Основные формулы и теоремы имеют двойную нумерацию, первый номер означает номер раздела, к которому относится формула или теорема, второй – порядковый номер формулы или теоремы в рассматриваемом разделе.

Вопросы и задачи, включенные в учебное пособие, по сложности соответствуют вопросам и задачам, предлагаемым обычно на зачетах и экзаменах по обыкновенным дифференциальным уравнениям и рядам, и могут быть использованы для самоконтроля. По каждому разделу приводятся экзаменационные вопросы. Более подробное изложение данного материала можно найти в книгах, учебных пособиях и монографиях, указанных в списке литературы.

1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Математическое исследование и моделирование самых разнообразных природных явлений часто приводят к решению дифференциальных уравнений, так как сами законы, которым подчиняется то или иное явление, записываются в виде дифференциальных уравнений (примером может служить второй закон Ньютона: $mv' = F$). Поэтому дифференциальные уравнения – это наука, которая лежит в основе современной механики.

Определение. ***Дифференциальными уравнениями*** называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких независимых переменных, причём в эти уравнения обязательно входят производные от неизвестной функции (или дифференциалы).

Другими словами, дифференциальное уравнение – это уравнение, содержащее функцию под знаком производной или дифференциала. Основная задача теории дифференциальных уравнений – изучение функций, являющихся решениями таких уравнений.

Если неизвестная – функция одной переменной, то соответствующее дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***, если нескольких переменных, то дифференциальное уравнение называется ***дифференциальным уравнением с частными производными***.

Простейшим примером обыкновенного дифференциального уравнения является нахождение первообразной функции. Пусть $y' = f(x)$, необходимо найти функцию y. Из интегрального исчисления функции одной переменной известно решение этого дифференциального уравнения:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, C – произвольная постоянная, и, следовательно, дифференциальное уравнение имеет бесконечное число решений.

Решению дифференциальных уравнений с частными производными посвящен раздел «Математическая физика», а примерами таких уравнений служат волновое уравнение, уравнение колебания струны и другие. В данном разделе ограничимся рассмотрением только обыкновенных дифференциальных уравнений, к уравнениям такого вида приводят многие задачи физики и механики.

1.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Рассмотрим некоторые задачи механики и физики, приводящиеся к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.1.1. ЗАДАЧА О СВОБОДНОМ ПАДЕНИИ ТЕЛА

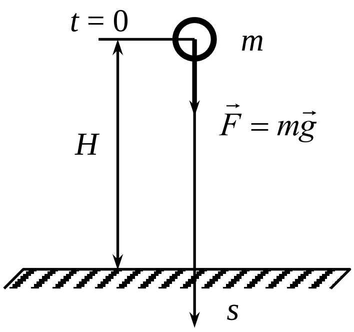

Рис. 1.1

Пусть с некоторой высоты H сброшено тело массы m (рис. 1.1). Требуется установить, за какое время тело достигнет земной поверхности (сопротивлением воздуха пренебречь).

Решение. Из условия ясно, что это тело движется под действием силы тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$. Направим ось s отсчета перемещения тела вертикально вниз так, чтобы ее начало совпало с начальным положением тела. Согласно второму закону Ньютона, имеем:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg,$$

где m – масса тела, $\dfrac{d^2s}{dt^2}$ – ускорение движущегося тела, g – ускорение свободного падения. Данное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением, так как содержит вторую производную от перемещения по времени: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = s''$. Сокращая обе части уравнения на m, получим: $s'' = g$. Интегрируя полученное уравнение, находим:

$$s' = gt + C_1, \quad s = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2. \qquad (*)$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ скорость и перемещение соответственно были равны v_0 и s_0, то из уравнений (*) получим: $v_0 = C_1$, $s_0 = C_2$. Тогда закон движения тела примет вид:

$$s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0. \qquad (**)$$

Если в равенстве (**) $v_0 \neq 0$, $s_0 = 0$, то получим известное в механике соотношение $s = \dfrac{gt^2}{2} + v_0 t$. Подставляя теперь в равенство (**) значения $s = H$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, получим формулу для определения времени свободного падения тела: $t = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

1.1.2. ЗАДАЧА О ПЕРЕХОДНОМ ПРОЦЕССЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

В электрической цепи (рис. 1.2), содержащей активное сопротивление R, индуктивность L и электродвижущую силу (ЭДС) E, в момент времени $t = 0$ замыкается рубильник P. Найти закон, по которому изменяется ток i в этой цепи.

Решение. Согласно закону Ома для участка цепи, падение напряжения на активном сопротивлении составит R. При замыкании цепи в катушке L возникает ЭДС самоиндукции, направленная противоположно току i и пропорциональная производной $\dfrac{di}{dt}$, причем коэффициент пропорциональности равен L. По второму закону Кирхгофа для RL-цепи при $t > 0$ имеем: $Ri = E - L\dfrac{di}{dt}$, откуда

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E. \qquad (*)$$

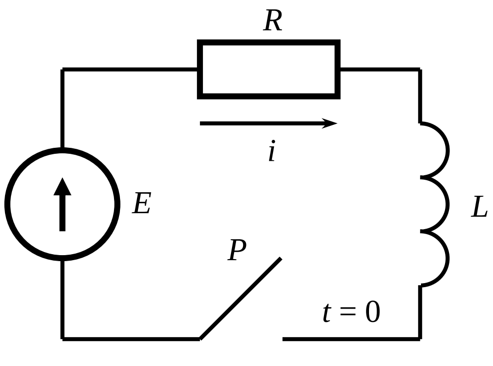

Рис. 1.2

Уравнение (*) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Непосредственной подстановкой можно проверить, что общим решением уравнения (*) является функция: $i = \dfrac{E}{R} + \dfrac{1}{CR} e^{-\frac{R}{L}t}$, где C – произвольная постоянная (метод получения общего решения можно найти в соответствующем разделе). Учитывая, что при $t = 0$ в цепи нет электрического тока ($i = 0$), имеем: $\dfrac{E}{R} + \dfrac{1}{CR} = 0$, откуда $C = -\dfrac{1}{E}$. Поставляя значение C в равенство (*), получим закон изменения тока в RL-цепи:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Отметим, что вычисление токов и напряжений в электрических цепях с помощью дифференциальных уравнений является классическим методом расчета цепей в электротехнике.

1.1.3. ЗАДАЧА О РАДИОАКТИВНОМ РАСПАДЕ

Установить закон изменения массы m радиоактивного вещества в зависимости от времени t, считая, что начальная масса вещества при $t=0$ была m_0 (экспериментальным путем установлено, что скорость распада радиоактивного вещества, т.е. скорость изменения его массы в зависимости от времени, прямо пропорциональна его количеству).

Решение. Пусть в момент времени t масса вещества есть m, в момент времени $t+\Delta t$ масса составляет $m-\Delta m$, т.е. за время Δt распадается масса Δm. Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ – средняя скорость распада вещества за время Δt, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$ – мгновенная скорость распада в момент времени *t*. Согласно условию

$$\frac{dm}{dt} = -km, \qquad (*)$$

где k – коэффициент пропорциональности (знак «минус» взят потому, что масса вещества убывает с течением времени, а производная убывающей функции отрицательна). Равенство (*) является дифференциальным уравнением, решая которое находим

$$\frac{dm}{m} = -kdt, \quad \ln m = -kt + \ln C,$$

откуда

$$m = Ce^{-kt}. \qquad (**)$$

Формула (**) дает зависимость массы вещества от времени t. При $t=0$ масса вещества составляет m_0, подставляя эти значения в (**), получим зависимость массы радиоактивного вещества от времени:

$$m = m_0 e^{-kt}. \qquad (***)$$

Коэффициент k определяется экспериментально. Например, для радия $k \approx 0{,}000447$. Промежуток времени T, за который распадается половина первоначальной массы радиоактивного вещества, называют ***периодом полураспада*** этого вещества. Подставляя в формулу (***) вместо m значение $\frac{m_0}{2}$, вместо k – значение 0,000447, получаем уравнение для определения периода полураспада T радия

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-0{,}000447T}, \quad -0{,}000447T = -\ln 2,$$

откуда $T = \frac{\ln 2}{0{,}000447}$, $T \approx 1\,550$ лет.

1.2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Дифференциальное уравнение может содержать неизвестную функцию и её производные различных порядков, в связи с этим возникает понятие: порядок дифференциального уравнения.

Определение. ***Порядком дифференциального уравнения*** называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Определение. ***Дифференциальным уравнением n-го порядка*** называется уравнение, содержащее независимую переменную x, неизвестную функцию $y = f(x)$ и её производные $y', y'', y''', ..., y^{(n)}$, т.е. уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Замечание. Для того чтобы дифференциальное уравнение (1.1) было дифференциальным уравнением n-го порядка, необходимо наличие старшей производной $y^{(n)}$, а присутствие всех производных порядка меньше, чем n, не обязательно.

Изучение теории дифференциальных уравнений начнем с наиболее простого уравнения – уравнения первого порядка.

Определение. ***Дифференциальным уравнением первого порядка*** называется уравнение вида:

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.2}$$

Форма записи дифференциального уравнения (1.2) называется ***общей формой.***

Если уравнение (1.2) можно разрешить относительно y', то его можно записать в виде:

$$y' = \Phi(x, y). \tag{1.3}$$

Форма записи уравнения (1.3) называется ***нормальной формой*** записи дифференциального уравнения первого порядка.

Уравнение (1.2) можно также представить и в другой форме, которая называется ***дифференциальной формой*** записи дифференциального уравнения:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0. \tag{1.4}$$

Данную форму записи уравнения можно получить, используя обозначение производной: $y' = \dfrac{dy}{dx}$. Уравнение в симметричной форме (1.4) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. каждую из них можно рассматривать как функцию другой.

Формы записи (1.2), (1.3), (1.4) – это различные представления одного и того же дифференциального уравнения.

Например, рассмотрим уравнение: $x + y - y' = 0$. Данное уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка, так как содержит производную y' некоторой функции $y(x)$, кроме того, это уравнение записано в общей форме (1.2). Из этого уравнения выразим производную: $y' = x + y$. В результате, получим тоже дифференциальное уравнение, но записанное в нормальной форме (1.3), где $\Phi(x, y) = x + y$. Если в последнем уравнении сделать замену $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то получим:

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad (x + y)dx - dy = 0$$

– уравнение, записанное в дифференциальной форме, где $P(x, y) = x + y$, а $Q(x, y) = -1$.

Определение. ***Решением дифференциального уравнения*** (1.2) называется такая функция $y = f(x)$, что при подстановке её в уравнение (1.2) вместо y получается тождество. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения.*** График решения $y = f(x)$ дифференциального уравнения на координатной плоскости Oxy называется ***интегральной кривой дифференциального уравнения.***

В связи с тем, что заранее не известно, имеет ли дифференциальное уравнение решение, возникает проблема формулировки условий существования и единственности его решения.

Теорема Коши (о существовании и единственности решения дифференциального уравнения). Пусть дано уравнение $y' = \Phi(x, y)$, где функция $\Phi(x, y)$ определена в некоторой открытой области D координатной плоскости Oxy. Если функции $\Phi(x, y)$ и $\Phi'_y(x, y)$ непрерывны в области D, то для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ существует решение $y = f(x)$ уравнения (1.3), удовлетворяющее условию:

$$y_0 = y(x_0), \tag{1.5}$$

причём это решение единственно.

Доказательство этой теоремы приводится в более подробных курсах.

Геометрический смысл теоремы: через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ из области D непрерывности функций Φ и Φ'_y проходит единственная интегральная кривая l (рис. 1.3).

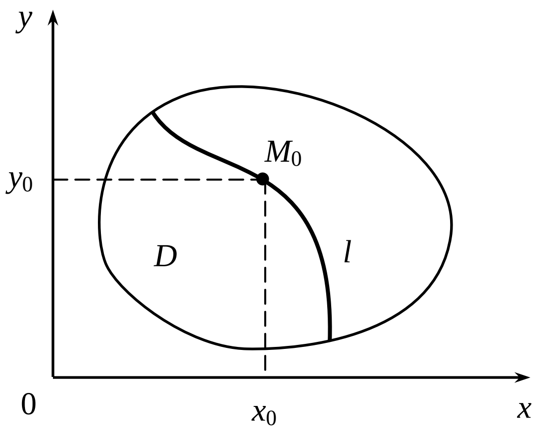

Рис. 1.3

Очевидно, что в области D уравнение (1.3) имеет бесконечное множество решений.

Определение. Задача решения дифференциального уравнения (1.3) совместно с условием (1.5) называется ***задачей Коши***. Условие (1.5) называется ***начальным условием***, а значения x_0 и y_0 называются ***начальными значениями***.

С геометрической точки зрения решить задачу Коши – значит, из множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости Oxy.

Определение. Точки плоскости, через которые либо проходит более одной интегральной кривой, либо не проходит ни одной интегральной кривой, называются ***особыми точками*** данного уравнения.

Определение. Решение дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную C, будем называть ***общим решением*** этого дифференциального уравнения. Решение, полученное из общего решения фиксированием постоянной $C = C_0$, соответствующей данному начальному условию, будем называть ***частным решением*** дифференциального уравнения, т.е. $y = f(x, C)$ – общее решение, $y = f(x, C_0)$ – частное решение.

Замечание. Если решение дифференциального уравнения не может быть получено в явном виде, то будем называть его ***общим или частным интегралом***, т.е. $F(x, y, C) = 0$ – общий интеграл, $F(x, y, C_0) = 0$ – частный интеграл.

Таким образом, общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой совокупность частных решений (частных интегралов), соответствующих различным значениям постоянной C, найденным для всевозможных начальных условий $y_0 = y(x_0)$. С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной C. Эти кривые являются интегральными кривыми данного дифференциального уравнения. Частному решению (частному интегралу) соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через некоторую заданную точку плоскости.

Правило решения задачи Коши:

1) найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения;

2) подставить начальные значения в формулу общего решения (интеграла) и из полученного соотношения найти значение произвольной постоянной $C = C_0$;

3) полученное значение C_0 подставить в формулу общего решения (интеграла), в результате получится частное решение (частный интеграл), которое и является решением задачи Коши.

1.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ УРАВНЕНИЯ

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, т.е. в нормальной форме (1.3), и пусть $y = f(x, c)$ есть общее решение данного уравнения. Это общее решение определяет семейство интегральных кривых на плоскости *Oxy*.

Правая часть уравнения (1.3) для каждой точки $M(x, y)$ дает значение производной $\frac{dy}{dx}$, т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку (согласно геометрическому смыслу производной). Таким образом, дифференциальное уравнение (1.3) дает совокупность направлений или, как говорят, определяет ***поле направлений*** на плоскости *Oxy*.

Следовательно, с геометрической точки зрения задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

Построив на плоскости поле направлений данного дифференциального уравнения, можно приближенно построить интегральные кривые.

Для дифференциального уравнения (1.3) геометрическое место точек, в которых выполняется соотношение: $\frac{dy}{dx} = k = const$, называется ***изоклиной*** данного дифференциального уравнения. При различных значениях k получаем различные изоклины. Уравнение изоклины, соответствующей значению k, будет $\Phi(x, y) = k$. Построив семейство изоклин, можно приближенно построить семейство интегральных кривых. Говорят, что, зная изоклины, можно качественно определить расположение интегральных кривых на плоскости.

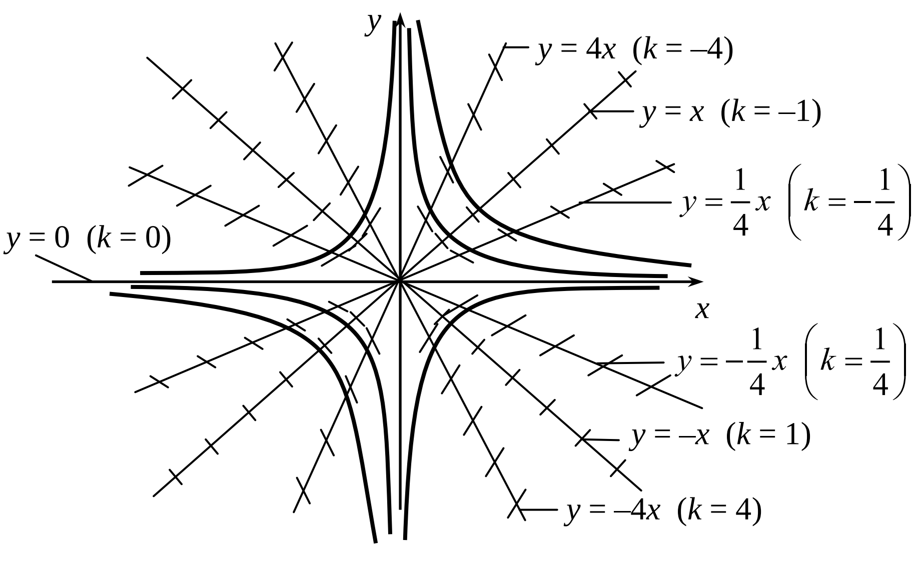

Рис. 1.4

Например, рассмотрим уравнение: $y' = -\frac{y}{x}$. Функция $\Phi(x, y) = -\frac{y}{x}$ не определена при $x = 0$, следовательно, поле направлений для данного уравнения можно построить на всей плоскости, кроме оси Oy.

Изоклинами данного дифференциального уравнения являются:

$$-\frac{y}{x} = k, \text{ или } y = -kx.$$

Это семейство прямых, проходящих через начало координат (рис. 1.4). В каждой точке (x, y) $(x \neq 0)$ отдельной изоклины сохраняется угол наклона касательных, проведенных к интегральным кривым, в этих точках. Используя полученное поле направлений можно изобразить семейство интегральных кривых, которые, очевидно, являются гиперболами.

1.4. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим несколько типов дифференциальных уравнений первого порядка. Отметим, что общего метода нахождения решений не существует. Обычно рассматривают отдельные типы уравнений, и для каждого из них находят свой способ нахождения решений.

1.4.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Определение: ***Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*** называется уравнение вида:

$$y' = f(x)g(y) \tag{1.6}$$

или

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0. \tag{1.7}$$

Рассмотрим уравнение (1.6). Преобразуем его, предполагая $g(y) \neq 0$, $y' = \frac{dy}{dx}$, к виду:

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx. \tag{1.8}$$

Уравнение вида (1.8) называется ***дифференциальным уравнением с разделенными переменными.*** Считая y известной функцией от x, равенство (1.8) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, поэтому неопределенные интегралы от них будут отличаться на постоянную

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Интегрируя, получим:

$$G(y) = F(x) + C,$$

где $G(y)$ – первообразная функции $\frac{1}{g(y)}$, $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Мы получили соотношение, связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, т.е. получили общий интеграл уравнения (1.6).

Замечание. Если уравнение $g(y) = 0$ имеет корни $y = y_i = const$, то они являются решениями уравнения (1.6). Если функции $y = y_i$ не могут быть получены из формулы общего решения ни при каком конечном C, то они называются ***особыми решениями*** дифференциального уравнения, в противном случае – это частные решения.

Правило решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

1) необходимо разделить переменные x и y, т.е. получить дифференциальное уравнение с разделёнными переменными;

2) проинтегрировать полученное уравнение и найти общее решение (общий интеграл);

3) найти особые решения (если они есть).

Пример. Проинтегрировать уравнение: $y' = \dfrac{\sqrt{y}}{x}$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, так как $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и $g(y) = \sqrt{y}$. Разделим переменные x и y, для этого умножим обе части уравнения на dx и разделим на $\sqrt{y}$, при условии $\sqrt{y} \neq 0$ или $y \neq 0$, тогда

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение с разделёнными переменными:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad 2\sqrt{y} = \ln|x| + C.$$

Полученное решение является общим интегралом исходного уравнения. Выразив из этого равенства y, получим общее решение: $y = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \ln|x| + C\right)^2$.

Найдём особые решения, если они есть, из условия $y = 0$, т.е. $\left(\dfrac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2 = 0$. Очевидно, что ни при каком значении постоянной C выражение в левой части равенства в ноль не обращается, поэтому $y = 0$ – особое решение дифференциального уравнения.

1.4.2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Функция $\Phi(x, y)$ называется ***однородной*** функцией k-го порядка, если для любого $t \neq 0$ выполняется тождество:

$$\Phi(tx, ty) \equiv t^k \Phi(x, y). \tag{1.9}$$

Например, рассмотрим функцию $\Phi(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$. Вместо переменных x и y подставим tx и ty, тогда

$$\Phi(tx, ty) = \frac{2txty}{(tx)^2 - (ty)^2} = \frac{t^2\, 2xy}{t^2(x^2 - y^2)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = t^0 \Phi(x, y).$$

Таким образом, рассмотренная функция $\Phi(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка ($k = 0$).

Определение. Дифференциальное уравнение $y' = \Phi(x, y)$ называется ***однородным***, если $\Phi(x, y)$ является однородной функцией нулевого порядка.

Другая формулировка: дифференциальное уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется ***однородным***, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового порядка.

Эти два определения эквивалентны, так как если дифференциальное уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ привести к нормальному виду: $\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, то правая часть уравнения, т.е. функция: $\Phi(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ есть однородная функция нулевого порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение: $y'=\Phi(x,y)$, где $\Phi(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка, т.е. $\forall t\neq 0$: $\Phi(x,y)\equiv\Phi(tx,ty)$.

Выберем $t=\frac{1}{x}$, тогда $\Phi(x,\,y)\equiv\Phi\left(1,\,\frac{y}{x}\right)$ – функция одного аргумента $\frac{y}{x}$. Введём обозначение $\Phi\left(1,\,\frac{y}{x}\right)\equiv g\left(\frac{y}{x}\right)$, тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$y'=g\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.10}$$

Замечание. Если дифференциальное уравнение можно привести к виду (1.10), то оно является однородным.

Однородное дифференциальное уравнение сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $\frac{y}{x}=U$, где $U=U(x)$ – новая неизвестная функция переменной x. Возможны два варианта такой подстановки:

1) если однородное уравнение дано в общей или нормальной форме, то используется подстановка:

$$y=Ux,\ y'=U+U'x, \tag{1.11}$$

где $U'=\frac{dU}{dx}$;

2) если уравнение записано в дифференциальной форме, то

$$y=Ux,\quad dy=xdU+Udx. \tag{1.12}$$

Правило решения однородных дифференциальных уравнений:

1) в однородном дифференциальном уравнении сделать подстановку (1.11) или (1.12);

2) проинтегрировать полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными;

3) в полученном общем решении сделать обратную подстановку $U=\frac{y}{x}$.

1.4.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Определение. ***Линейным*** дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{1.13}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции от x (или постоянные). Таким образом, линейным дифференциальным уравнением называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной.

Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение принимает вид:

$$y'+p(x)y=0. \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) называется ***однородным*** линейным дифференциальным уравнением первого порядка и является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Если $q(x) \neq 0$, то уравнение (1.13) называется линейным ***неоднородным*** дифференциальным уравнением.

Если $p(x) \equiv 0$, то уравнение $y' = q(x)$ также является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Рассмотрим общий случай, когда $p(x) \neq 0, q(x) \neq 0$.

При решении линейных дифференциальных уравнений (1.13) обычно используются два различных метода: либо ***метод вариации произвольной постоянной***, либо ***метод Бернулли.*** Дадим их подробное описание.

Метод вариации произвольной постоянной

Для нахождения общего решения сначала находят общее решение линейного однородного уравнения (1.14), соответствующего данному неоднородному уравнению (1.13). Как уже отмечалось ранее, уравнение:

$$y' + p(x)y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|,$$

здесь постоянная C_1 введена для удобства выкладок. Откуда находим общее решение уравнения (1.14):

$$y = e^{-\int p(x)dx + \ln|C_1|} = \pm C_1 e^{-\int p(x)dx},$$

или

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{*}$$

где $C = \pm C_1$ – произвольная постоянная.

Теперь найдём общее решение уравнения (1.13) в виде (*), где C будем считать не постоянной, а новой неизвестной функцией от x (в этом заключается смысл метода), т.е. решение исходного уравнения будем искать в виде:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{**}$$

Чтобы найти решение линейного неоднородного уравнения (1.13) в виде (*), необходимо найти неизвестную функцию $C(x)$. Для этого подставим функцию (**) в уравнение (1.13). Получим:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

или

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{***}$$

Итак, чтобы функция (**) являлась решением уравнения (1.13), функция $C(x)$ должна удовлетворять уравнению (***). Интегрируя его, находим:

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная. Подставляя найденное выражение для $C(x)$ в соотношение (**), получаем общее решение линейного уравнения (1.13):

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

При решении конкретных примеров проще повторять каждый раз все приведённые выкладки, чем использовать полученную громоздкую формулу.

Метод Бернулли

Решение уравнения (1.13) находится в специальном виде $y = U(x)V(x)$, т.е. вместо одной неизвестной функции $y = f(x)$ вводятся две неизвестные функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$. При этом в задаче присутствует «произвол», заключающийся в том, что одну из искусственно введенных функций можно находить по своему усмотрению (чаще всего из соображений упрощения поиска второй функции).

В уравнении (1.13) сделаем подстановку:

$$y = UV, \quad y' = U'V + UV', \tag{1.15}$$

тогда

$$U'V + UV' + p(x)UV = q(x), \quad U'V + U\big(V' + p(x)V\big) = q(x).$$

Пусть функция $V = V(x)$ является частным решением дифференциального уравнения $V' + p(x)V = 0$ при условии $C = 0$. Тогда $U'V = g(x)$. Таким образом нахождение общего решения $y = UV$ сводится к нахождению функций $U(x)$ и $V(x)$ из системы дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} V' + p(x)V = 0, \quad C = 0 \\ U'V = q(x) \end{cases}.$$

Причем сначала находится частное решение первого дифференциального уравнения, найденная функция $V(x)$ подставляется во второе уравнение системы и находится функция $U(x)$. После чего общее решение уравнения (1.13) находится в виде их произведения.

Замечание. Функции $U(x)$ и $V(x)$ не обращаются в ноль $(U \neq 0,\ V \neq 0)$, так как в противном случае $p(x) = 0$ и $q(x) = 0$, что противоречит условию.

Определение. ***Уравнением Бернулли*** называется уравнение вида:

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \tag{1.16}$$

где $m = const$.

При $m = 0$ получим линейное уравнение, при $m = 1$ – уравнение с разделяющимися переменными. В случае, когда $m \neq 0, m \neq 1$, уравнение (1.16) можно свести к линейному дифференциальному уравнению первого порядка (1.13) заменой $z = y^{1-m}$.

Разделив все члены уравнения (1.16) на y^n, получим $y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x)$.

Заметив, что $z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$, найдем:

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x), \quad z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x).$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно функции $z(x)$. Общее решение этого уравнения также можно находить методом Бернулли или методом вариации произвольной постоянной.

Замечание. Общее решение уравнения Бернулли (1.16) можно сразу находить методом Бернулли (т.е. подстановкой (1.15)), не приводя уравнение к виду линейного дифференциального уравнения первого порядка.

1.4.4. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Определение. ***Уравнением в полных дифференциалах*** называется дифференциальное уравнение вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $U(x,y)$, т.е. уравнение вида:

$$dU(x,y)=0. \qquad (1.17)$$

Выясним связь между функциями $U(x,y)$, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Сравнивая дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

с полным дифференциалом функции $U(x,y)$:

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

делаем вывод, что

$$\begin{cases} P(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ Q(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial y}. \end{cases} \qquad (1.18)$$

Если продифференцировать функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ по y и x соответственно, то согласно (1.18) получим: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$.

Если частные производные непрерывны, то они не зависят от порядка дифференцирования, следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (1.19)$$

Замечание. Соотношение (1.19) является признаком ***уравнения в полных дифференциалах*** (т.е. дифференциальное уравнение будет уравнением в полных дифференциалах, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ удовлетворяют равенству (1.19)).

Исходя из равенства (1.17) можно сделать вывод о виде решения уравнения в полных дифференциалах:

$$U(x,y)=C, \qquad (1.20)$$

где C – произвольная постоянная. Решение (1.20) является общим интегралом уравнения в полных дифференциалах. Для того чтобы его найти, необходимо найти $U(x,y)$.

Правило решения уравнения в полных дифференциалах:

1) убедиться, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.е. выполняется условие (1.19);

2) последовательно рассмотреть условия (1.18):

а) из первого уравнения $P(x,y)=\dfrac{\partial U}{\partial x}$ следует то, что

$$U(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – неизвестная функция, $M_0(x_0,y_0)$ – произвольная точка области D, в которой определены и непрерывны функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$;

б) функция $\varphi(y)$ находится из второго уравнения (1.18)

$$Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx\right)+\varphi'(y), \quad Q(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\varphi'(y).$$

Используя соотношение (1.19) можно записать:

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(x,y) - (Q(x,y) - Q(x_0, y)), \quad \varphi'(y) = Q(x_0, y).$$

Интегрируя последнее равенство, получим: $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy$. Таким образом,

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy.$$

3) записать общий интеграл дифференциального уравнения

$$\int_{x_0}^{x} P(x,\, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\, y)dy = C. \tag{1.21}$$

Замечание. При решении уравнения в полных дифференциалах можно сразу использовать формулу общего интеграла уравнения (1.21), где x_0 и y_0 – координаты произвольной точки M_0 области непрерывности функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ (чаще всего выбирают решение $x_0 = y_0 = 0$).

Пример. Решить задачу Коши: $2xydx + (y - x^2)dy = 0, \quad y(-2) = 4$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение не является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными, линейным дифференциальным уравнением и уравнением Бернулли, однородным дифференциальным уравнением и уравнением в полных дифференциалах относительно функции $y = y(x)$.

Попробуем найти решение этого уравнения в виде: $x = x(y)$, т.е. будем искать функцию, обратную неизвестной функции $y = y(x)$.

Преобразуем уравнение к виду:

$$x' - \frac{1}{2y} x = -\frac{1}{2} x^{-1}, \tag{*}$$

где $x' = \dfrac{dx}{dy}$. Полученное уравнение имеет вид: $x' + p(y)x = q(y)x^m$, где $p(y) = -\dfrac{1}{2y}$, $q(y) = -1/2 \;\; m = -1$, т.е. является уравнением Бернулли относительно $x = x(y)$.

Будем искать решение методом Бернулли: $x = UV$, $x' = U'V + UV'$, где

$$U = U(y), \;\; V = V(y), \;\; U' = \frac{dU}{dy}, \;\; V' = \frac{dV}{dy}.$$

В уравнении (*) сделаем подстановку Бернулли:

$$U' + UV' - \frac{1}{2y} UV = -\frac{1}{2UV}, \quad U'V + U\left(V' - \frac{V}{2y}\right) = -\frac{1}{2UV}.$$

Решение полученного уравнения сводится к решению системы дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} V' - \dfrac{V}{2y} = 0, \quad C = 0 \\ U'V = -\dfrac{1}{2UV} \end{cases}.$$

Разделяя переменные в первом уравнении системы и интегрируя, получим:

$$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dy}{2y}, \quad \ln|V| = \frac{1}{2}\ln|y|, \quad V = \sqrt{y}.$$

Подставим $V=\sqrt{y}$ во второе уравнение системы, разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int 2UdU=-\int\frac{dy}{y}+\ln|C|,\quad U^2=\ln\left|\frac{C}{y}\right|.$$

Откуда находим $x^2=U^2V^2=y\ln\left|\frac{C}{y}\right|$. Используя начальное условие $y(-2)=4$, определим значение произвольной постоянной ($x_0=-2,\ y_0=4$): $(-2)^2=4\ln\left|\frac{C}{4}\right|$, откуда $C=4e$.

Таким образом, частный интеграл исходного дифференциального уравнения имеет вид: $x^2=y\ln\left|\dfrac{4e}{y}\right|$.

1.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1.5.1. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение n-го порядка в общей форме имеет вид:

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0, \tag{1.22}$$

будем считать, что $n>1$.

Если уравнение (1.22) можно разрешить относительно n-й производной, то его можно записать в виде, называемом ***нормальной формой*** дифференциального уравнения:

$$y^{(n)}=\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}). \tag{1.23}$$

Определение. ***Решением*** дифференциального уравнения n-го порядка называется такая функция y, зависящая от независимой переменной x и n произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$, что при подстановке её в дифференциальное уравнение получается тождество при любых значениях постоянных $C_1,C_2,...,C_n$.

Решение, полученное в явном виде: $y=f(x,C_1,C_2,...,C_n)$, называется ***общим решением,*** а решение уравнения, полученное в неявном виде: $F(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, называется ***общим интегралом.***

Теорема 1.1 (о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка). Если в дифференциальном уравнении (1.23) функция $\Phi(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)})$ и её частные производные по аргументам $y,y',y'',\ ...,\ y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой области D, содержащей значения $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0,\ldots$, $y^{(n-1)}={y_0}^{(n-1)}$, то существует решение $y=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)={y_0}^{(n-1)}, \tag{1.24}$$

причём это решение единственное.

Доказательство этой теоремы выходит за рамки данного пособия.

Условия (1.24) называются ***начальными условиями,*** а $x_0,y_0,y'_0,...,{y_0}^{(n-1)}$ – ***начальными значениями***.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения (1.23), удовлетворяющего заданным начальным условиям (1.24), называется ***задачей Коши.***

Решение задачи Коши называется ***частным решением*** (***частным интегралом***) дифференциального уравнения.

Методы решения дифференциальных уравнений n-го порядка также во многом зависят от вида дифференциального уравнения. Существует широкий класс уравнений n-го порядка, решение которых можно осуществить путём их сведения к уравнениям более низкого порядка и, в конечном счёте, к уравнению первого порядка, это так называемые ***дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.*** Рассмотрим основные типы таких уравнений.

1) Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1.25}$$

Так как $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f(x)$, то $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1$, где $f_1(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, C_1 – произвольная постоянная.

Аналогично $y^{(n-2)} = \int (f_1(x) + C_1)dx + C_2 = f_2(x) + C_1 x + C_2$, где $f_2(x)$ – первообразная для функции $f_1(x)$, C_2 – произвольная постоянная.

Продолжая интегрировать функции, в конце получим:

$$y = f_n(x) + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n,$$

где $f_n(x)$ – первообразная для $f_{n-1}(x)$, $C_i = const$ $(i = \overline{1, n})$.

Нахождение решения дифференциального уравнения (1.25) свелось к n-кратному интегрированию его правой части, т.е.

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n \text{ раз}} f(x) \underbrace{dx \cdot \ldots \cdot dx}_{n \text{ раз}}.$$

Уравнение (1.25) является простейшим примером дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка.

2) Неполное дифференциальное уравнение, имеющее вид

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1.26}$$

где $1 \le k \le n-1$. Дифференциальное уравнение (1.26) не содержит в явном виде неизвестной функции y и некоторой части её производных $y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$.

Уравнение (1.26) решают путём подстановки:

$$y^{(k)} = z(x). \tag{1.27}$$

Сделав в уравнении (1.26) замену (1.27), получаем дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $z = z(x)$:

$$z^{(n-k)} = f(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k-1)}), \tag{1.28}$$

порядок которого понизился на k единиц.

Если (1.28) – дифференциальное уравнение первого порядка, то его решение находится методами, описанными в разд. 1.4. Если (1.28) не является дифференциальным уравнением первого порядка, то перед нами опять стоит задача решения дифференциального уравнения высшего порядка.

Пусть общее решение уравнения (1.26) имеет вид $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, тогда промежуточный интеграл исходного дифференциального уравнения относительно y будет: $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$. Данное уравнение является дифференциальным уравнением, допускающим понижение порядка вида (1.25).

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение: $y'' - \frac{y'}{x} + x^2 = 0$.

Решение. Данное дифференциальное уравнение второго порядка является уравнением, допускающим понижение порядка, так как явно не содержит функции y, $k = 1$. Сделаем замену $z = y'$. В результате получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$z' - \frac{z}{x} = -x^2, \tag{*}$$

которое решим методом вариации произвольной постоянной. Однородное линейное дифференциальное уравнение $z' - \frac{z}{x} = 0$ является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Решая его, получим:

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad \ln|z| = \ln|Cx|, \quad z = Cx.$$

Пусть $C = C(x)$, тогда $z = xC(x)$. Неизвестную функцию $C(x)$ находим подстановкой $z = xC(x)$ в уравнение (*)

$$C(x) + xC'(x) - \frac{xC(x)}{x} = -x^2,$$

откуда $C_1'(x) = -x$. Интегрируя функцию, получим: $C(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1$. Тогда

$$z = x\left(-\frac{x^2}{2} + C_1\right), \quad z = -\frac{x^3}{2} + C_1 x,$$

и промежуточный интеграл имеет вид: $y' = -\frac{x^3}{2} + xC_1$. Интегрируя полученное уравнение с разделяющимися переменными, найдём общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = \int\left(-\frac{x^3}{2} + C_1 x\right)dx = -\frac{x^4}{8} + \frac{C_1}{2}x + C_2.$$

3) Неполное дифференциальное уравнение, не содержащее переменную *x*:

$$y^{(n)} = f(y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{1.29}$$

Сделаем замену:

$$y' = p(y), \tag{1.30}$$

где $p(y)$ – неизвестная функция от y. Такая замена позволяет понизить порядок исходного уравнения (1.29) на одну единицу.

Найдём производную второго порядка:

$$y'' = (y')' = (p(y))'_x = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

Таким образом,

$$y'' = p\frac{dp}{dy}. \tag{1.31}$$

Аналогично можно показать, что

$$\forall k = \overline{1, n}: \quad y^{(k)} = \Psi(p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2 p}{dy^2}, ..., \frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}).$$

Поэтому уравнение (1.29) подстановкой (1.30) сводится к дифференциальному уравнению $(n-1)$-го порядка:

$$\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}} = F(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{(n-2)}p}{dy^{n-2}}).$$

Общее решение этого дифференциального уравнения даёт промежуточный интеграл:

$$\frac{dy}{dx} = p = \Phi(y, C_1, ..., C_{n-1}).$$

Решая полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим общий интеграл исходного уравнения (1.29):

$$\int \frac{dy}{\Phi} = \int dx = x + C_n.$$

Пример 2. Проинтегрировать уравнение: $\frac{y''}{y'} = e^y$.

Решение. Сделаем замену $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$. В результате приходим к уравнению с разделяющимися переменными $\frac{dp}{dy} = e^y$. Интегрируя его, находим:

$$p = e^y + C_1, \quad y' = e^y + C_1.$$

Полученное уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными, проинтегрируем его:

$$\int \frac{dy}{e^y + C_1} = x + C_2, \quad \frac{1}{C_1} \cdot \int \frac{(e^y + C_1 - e^y)dy}{e^y + C_1} = x + C_2$$

Откуда получаем общий интеграл дифференциального уравнения:

$$\frac{y}{C_1} - \frac{1}{C_1} \cdot \ln\left|e^y + C_1\right| = x + C_2, \quad y - \ln\left|e^y + C_1\right| = C_1 \cdot (x + C_2).$$

4) Дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ – однородное относительно неизвестной функции y и её производных

Данное уравнение не изменяется при замене $y, y', ..., y^{(n)}$ на $ty, ty', ..., ty^{(n)}$ ($\forall t \neq 0$). Порядок этого уравнения можно понизить на одну единицу путём замены $\frac{y'}{y} = z$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 3. Найти решение уравнения: $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$.

Решение. Очевидно, что данное уравнение является однородным относительно y, y' и y''. Сделаем замену $z = \frac{y'}{y}$, получим: $y' = z \cdot y$ и $y'' = z' \cdot y + z \cdot y'$. Тогда уравнение принимает вид $\frac{z'}{z} + z = z$. Откуда $z' = 0$, $z = C_1$. Сделаем обратную подстановку $\frac{y'}{y} = C_1$. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, интегрируя его, получим:

$$\int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx + C_2, \quad \ln|y| = C_1 x + C_2.$$

Откуда находим общее решение исходного уравнения: $y = e^{C_1 x + C_2}$.

Замечание. Дифференциальные уравнения, левая и правая части которых являются полными производными или дифференциалами некоторых функций, также являются дифференциальными уравнениями, допускающими понижение порядка.

Например, дифференциальное уравнение $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$ можно представить в виде $\left(\ln|y'|\right)' = \left(\ln|y|\right)'$, откуда $\ln|y'| = \ln|y| + \ln|C_1|$ или $y' = C_1 y$. Интегрируя это уравнение, получим: $y = e^{C_1 x + C_2}$.

1.5.2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *N*-ГО ПОРЯДКА

Определение. ***Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*** называется уравнение вида:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{1.32}$$

где $a_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, $f(x)$ – заданные функции от x, причём $a_0(x) \neq 0$; функция $f(x)$ называется ***правой частью уравнения*** (все функции определены на некотором промежутке (a,b); $n > 1$, $n \in N$).

Определение. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (1.32) называется ***линейным неоднородным*** или ***уравнением с правой частью.*** Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0 \tag{1.33}$$

называется ***линейным однородным*** (левая часть уравнения является однородной функцией первого порядка относительно $y, y', y'', ..., y^{(n)}$).

В дальнейшем будем предполагать, что функции: $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x), f(x)$ – непрерывны $\forall x \in (a,b)$. Так как $a_0(x) \neq 0$, то дифференциальное уравнение (1.33) всегда можно записать в приведённом виде:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0.$$

Основные свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения:

1) если y_1 и y_2 – два частных решения линейного однородного дифференциального уравнения, то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения;

2) если y_1 – есть частное решение линейного однородного дифференциального уравнения и C – постоянная, то $C \cdot y_1$ есть также решение этого уравнения;

3) следствие из первых двух свойств: если $y_1, y_2, ..., y_k$ $(k \geq 2)$ – частные решения линейного однородного дифференциального уравнения, то любая их линейная комбинация, то есть функция вида:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_k y_k, \text{ где } \forall i = \overline{1, k}: \ C_i = const \in R,$$

также является решением линейного однородного дифференциального уравнения.

Если $n = k$, то вид линейной комбинации частных решений аналогичен общему решению, так как содержит n произвольных постоянных. Поэтому логично поставить вопрос: нельзя ли так подобрать частные решения $y_1, y_2, ..., y_n$, чтобы функция:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \tag{*}$$

являлась общим решением линейного однородного дифференциального уравнения (1.33).

Одним из необходимых условий того, чтобы функция (*) являлась общим решением линейного однородного дифференциального уравнения, является условие линейной независимости всех частных решений y_i, $i=\overline{1,n}$, так как если одно решение выражается через другое, то сокращается число произвольных постоянных.

Определение. Совокупность n функций $y_1, y_2, ..., y_n$, определённых на некотором промежутке (a,b) изменений аргумента x, называется ***линейно независимой системой функций*** на этом промежутке, если тождество:

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n \equiv 0$$

выполняется только в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, в противном случае, то есть существует хотя бы один коэффициент $\lambda_j \neq 0$, называется ***линейно зависимой системой.***

Определение. Пусть дана система функций $y_1, y_2, ..., y_n$, определённая на некотором промежутке (a,b) изменения независимой переменной x. ***Определителем Вронского*** или ***вронскианом*** данной системы функций называется определитель вида:

$$W = W(x) = W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{1.34}$$

Теорема 1.2 (об условии линейной независимости решений линейного определённого дифференциального уравнения). Если система функций $y_1, y_2, ..., y_n$, определённая на некотором промежутке (a,b) изменения независимой переменной x: 1) является линейно независимой системой; 2) состоит из частных решений линейного однородного дифференциального уравнения (1.33); то в $\forall x \in (a,b)$: $W(x) \neq 0$.

Доказательство: Предположим, что существует некоторая точка $x_0 \in (a,b)$, в которой $W(x_0) = 0$. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \lambda_2 y_2(x_0) + ... + \lambda_n y_n(x_0) = 0 \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \lambda_2 y_2'(x_0) + ... + \lambda_n y_n'(x_0) = 0 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}. \tag{**}$$

Система (**) – однородная система n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. По предположению определитель этой системы $W(x_0) = 0$, следовательно, система (**) имеет бесконечное множество решений, т.е. найдётся хотя бы одно $\lambda_j \neq 0$.

Составим линейную комбинацию: $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n$. В силу третьего свойства решений линейных однородных дифференциальных уравнений, y – решение линейного однородного дифференциального уравнения. Кроме того, в силу равенств системы (**):

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ ... \quad ... \quad ... \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}.$$

Полученная система равенств есть совокупность нулевых начальных условий линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, следовательно, функция $y(x)$ есть решение задачи Коши. Этой же задаче удовлетворяет (то есть является её решением) и функция $Y \equiv 0$ (справедливы и начальные условия, и линейное однородное дифференциальное уравнение). В силу теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка: $y \equiv Y$, т.е.

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n \equiv 0,$$

где есть $\lambda_j \neq 0$. Следовательно, система функций $y_1, y_2, ..., y_n$ – линейно зависима, что противоречит условию теоремы. Поэтому сделанное предположение неверно, и $\forall x_0 \in (a,b)$ выполняется условие $W(x_0) \neq 0$ или $W(x) \neq 0$.

Замечание. Пусть функции y_1 и y_2 – линейно зависимы. Тогда определитель Вронского этих функций:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = 0,$$

а это возможно только в том случае, когда строки определителя пропорциональны, т.е. $\dfrac{y_2}{y_1} = const$. Следовательно, если функции y_1 и y_2 – линейно независимы, то

$$\forall x: \ \frac{y_2}{y_1} \neq const.$$

Определение. Линейно независимая система n частных решений линейного однородного дифференциального уравнения (1.33) называется ***фундаментальной системой решений*** этого уравнения.

Теорема 1.3 (о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения). Если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – какая-либо фундаментальная система линейного однородного дифференциального уравнения (1.33), то общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x), \tag{1.35}$$

где C_i – произвольные постоянные ($i = \overline{1,n}$).

Доказательство. Из свойств линейного однородного дифференциального уравнения следует, что функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \tag{*}$$

есть решение дифференциального уравнения (1.33) при любых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Докажем, что каковы бы ни были начальные условия:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

можно так подобрать значения произвольных постоянных $C_1^\circ, C_2^\circ, ..., C_n^\circ$, чтобы соответствующее частное решение $C_1^\circ y_1 + C_2^\circ y_2 + ... + C_n^\circ y_n$, удовлетворяло заданным начальным условиям.

Дифференцируя равенство (*) $n-1$ раз и подставляя начальные условия, будем иметь:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_0^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) \end{cases} . \qquad (**)$$

Система (**) – неоднородная система линейных алгебраических уравнений, определитель которой $W(x_0) \neq 0$ (в силу линейной независимости функций $y_1, y_2, ..., y_n$). Частное решение, которое получится из семейства (*) при найденных значениях $C_1 = C_1^\circ, C_2 = C_2^\circ, ..., C_n = C_n^\circ$, удовлетворяет заданным начальным условиям.

Замечания

1) Каждой линейно независимой системе функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ соответствует единственное линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого данная система функций является фундаментальной.

2) Не существует общих методов для нахождения в конечном виде общего решения линейного однородного дифференциального уравнения (существует только в некоторых частных случаях).

Рассмотрим частный случай линейного однородного дифференциального уравнения (1.33).

1.5.3. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Определение. Уравнение вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1.36)$$

где коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ – действительные постоянные, будем называть ***линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.***

Рассмотрим уравнение 2-го порядка вида:

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1.37)$$

где p, q – постоянные действительные числа.

Для того чтобы найти общее решение уравнения (1.37), достаточно найти любые два линейно независимых частных решения. Будем искать частные решения в виде:

$$y = e^{kx}, \qquad (1.38)$$

где $k = const$. Тогда

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx}.$$

Подставляя полученные соотношения в (1.37), находим:

$$k^2 e^{kx} + pk^2 e^{kx} + qe^{kx} = 0, \quad e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $\forall x$: $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \qquad (1.39)$$

Следовательно, если k будет удовлетворять уравнению (1.39), то e^{kx} будет решением уравнения (1.37).

Уравнение (1.39) называется ***характеристическим уравнением*** дифференциального уравнения (1.37).

Характеристическое уравнение (1.39) – квадратное уравнение, имеющее два корня:

$$k_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

При этом возможны случаи:

1) k_1 и k_2 – действительные различные числа, т.е. $k_1 \neq k_2$;

2) k_1 и k_2 – действительные равные числа, т.е. $k_1 = k_2$;

3) k_1 и k_2 – комплексные числа (комплексно сопряженные).

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Корни характеристического уравнения действительны и различны.

В этом случае $k_1 \neq k_2$ и частными решениями будут функции:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Так как $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq 0$, то $W(y_1, y_2) \neq 0$, следовательно, функции y_1 и y_2– линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений.

Следовательно, общее решение уравнения (1.37) в случае различных корней характеристического уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{1.40}$$

2) Корни характеристического уравнения действительные и равные.

В этом случае $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$. На основании предыдущих рассуждений одно из частных решений есть $y_1 = e^{k_1 x}$. В качестве второго взять $e^{k_2 x}$ не можем, так как $e^{k_1 x} \equiv e^{k_2 x}$. Второе частное решение будем искать в виде $y_2 = U(x) e^{k_1 x}$, где $U(x)$ – неизвестная функция, которую необходимо найти.

Подставим $y_2 = U e^{k_1 x}$ в дифференциальное уравнение (1.37), для этого найдём производные:

$$y_2' = U' e^{k_1 x} + k_1 U e^{k_1 x} = (U' + k_1 U) e^{k_1 x},$$

$$y_2'' = U'' e^{k_1 x} + U' k_1 e^{k_1 x} + k_1 U' e^{k_1 x} + (k_1)^2 U e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(U'' + 2k_1 U' + (k_1)^2 U),$$

тогда

$$e^{k_1 x}(U'' + 2k_1 U' + (k_1)^2 U) + p e^{k_1 x}(U' + k_1 U) + q U e^{k_1 x} = 0$$

или

$$e^{k_1 x}\left(U'' + (2k_1 + p)U' + (k_1^2 + k_1 p + q)U\right) = 0.$$

Так как

а) $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2}$, то $2k_1 = -p$, следовательно, $2k_1 + p = 0$;

б) k_1 – кратный корень уравнения $k^2 + p \cdot k + q = 0$, то $k_1^2 + p \cdot k_1 + q = 0$,

получаем:

$$e^{k_1 x} U'' = 0, \quad U'' = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим: $U' = A$, $U = Ax + B$, где A и B – произвольные постоянные. Так как мы находим частное решение, то можно положить: $A = 1$ и $B = 0$, тогда $U = x$ и $y_2 = x e^{k_1 x}$.

Функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = x e^{k_1 x}$ – линейно независимы, так как

$$\forall x: \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{x e^{k_1 x}}{e^{k_1 x}} = x \neq const.$$

Тогда общее решение уравнения (1.37), в случае равных действительных корней характеристического уравнения, имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = (C_1 + xC_2)e^{k_1 x}. \tag{1.41}$$

3) Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные.

В этом случае $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = -\dfrac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$.

Частные решения можем записать в форме:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}.$$

Это комплексные функции действительного аргумента, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (1.37). Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

и перепишем y_1 и y_2 в другом виде:

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x \\ y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases} \tag{*}$$

Покажем, что если функция $y = U(x) + iV(x)$ удовлетворяет уравнению (1.37), то этому уравнению удовлетворяют также и функции $U(x)$ и $V(x)$:

$$(U + iV)'' + p(U + iV)' + q(U + iV) = 0, \quad U'' + iV'' + pU' + ipV' + qU + iqV = 0$$

или

$$(U'' + pU' + qU) + i(V'' + pV' + qV) = 0.$$

Комплексная функция равна нулю только в том случае, когда её действительная и мнимая части равны нулю, т.е.

$$U'' + pU' + qU = 0 \quad \text{и} \quad V'' + pV' + qV = 0.$$

Сравнивая полученные уравнения с (1.37), делаем вывод, что функции $U(x)$ и $V(x)$ есть решения уравнения (1.37). Следовательно (согласно соотношениям (*)), частными решениями уравнения (1.37) будут функции: $Y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $Y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Эти функции линейно независимы, так как

$$\forall x: \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = ctg\beta x \neq const.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.37) в случае комплексно сопряжённых корней характеристического уравнения имеет вид: $y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ или

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \tag{1.42}$$

Правило решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1) для линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ составить характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ (можно придерживаться правила: при составлении характеристического уравнения в линейном однородном дифференциальном уравнении следует заменить $y^{(m)}$ на k^m, $m = \overline{0, 2}$);

2) найти корни характеристического уравнения k_1 и k_2;

3) в зависимости от вида корней, использовать формулу (1.40), (1.41) или (1.42).

Замечание. При решении линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1.43)$$

следует придерживаться аналогичного правила:

1) составить характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0;$$

найти корни полученного уравнения $k_1, k_2, ..., k_n$;

2) выписать фундаментальную систему решений $y_1, y_2, ..., y_n$, руководствуясь тем, что:

а) каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx};

б) каждому действительному корню k кратности r соответствует r линейных независимых решений:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad x^2 e^{kx}; \quad \ldots; \quad x^{r-1} e^{kx};$$

в) каждой паре однократных комплексно-сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ соответствует пара частных решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

г) каждой паре комплексно сопряженных корней $k_1 = \alpha + i\beta$ и $k_2 = \alpha - i\beta$ кратности s соответствуют $2s$ частных решений:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad xe^{\alpha x} \cos \beta x, \quad ..., \quad x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad xe^{\alpha x} \sin \beta x, \quad ..., \quad x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

3) в результате получим n линейно независимых частных решений $y_1, y_2, ..., y_n$ уравнения (1.43), общее решение которого имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y^{(5)} + 4y''' = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением пятого порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни

$$k^5 + 4k^3 = 0, \quad k^3(k^2 + 4) = 0.$$

Откуда $k^3 = 0$ или $k^2 + 4 = 0$. В результате получим: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 2i$ и $k_5 = -2i$.

Корню k = 0 кратности r = 3 характеристического уравнения соответствует совокупность линейно независимых решений:

$$y_1 = e^{0x} = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2,$$

а паре комплексно сопряженных корней $\pm 2i$ соответствуют решения:

$$y_4 = e^{0x} \cos 2x = \cos 2x, \quad y_5 = e^{0x} \sin 2x = \sin 2x.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 + C_5 y_5$$

или

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

1.5.4. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ *N*-ГО ПОРЯДКА

Будем рассматривать дифференциальные уравнения вида:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (1.44)$$

где $a_i(x)$ и $f(x)$ – известные непрерывные функции, определенные на некотором промежутке (a, b), причем $a_0(x) \neq 0$, $f(x) \neq 0$.

Теорема 1.4 (о структуре общего решения). Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.44) имеет вид:

$$y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}, \qquad (1.45)$$

где $y_{\text{о.о}}$ – общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения, т.е. уравнения:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}^{(x)}y' + a_n^{(x)}y = 0, \qquad (1.46)$$

$y_{\text{ч.н}}$ – какое-либо частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.44).

Доказательство. Исходя из структуры общего решения линейного однородного дифференциального уравнения общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, т.е. соотношение (1.45), можно записать в другой форме:

$$y_{\text{о.н.}} = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n + y_{\text{ч.н}}, \qquad (1.45')$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения (1.46).

Докажем сначала, что функция $y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$ есть некоторое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.44). Для этого подставим $y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$ в (1.44) вместо y:

$$a_0(y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}})^{(n)} + a_1(y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}})^{(n-1)} + ... + a_n(y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}) = f(x)$$

или

$$\left[a_0y_{\text{о.о}}^{(n)} + a_1y_{\text{о.о}}^{(n-1)} + ... + a_ny_{\text{о.о}}\right] + \left[a_0y_{\text{ч.н}}^{(n)} + a_1y_{\text{ч.н}}^{(n-1)} + ... + a_ny_{\text{ч.н}}\right] = f(x),$$

где $a_0y_{\text{о.о}}^{(n)} + a_1y_{\text{о.о}}^{(n-1)} + ... + a_ny_{\text{о.о}} = 0$, так как $y_{\text{о.о}}$ – общее решение уравнения (1.46), и $a_0y_{\text{ч.н}}^{(n)} + a_1y_{\text{ч.н}}^{(n-1)} + ... + a_ny_{\text{ч.н}} = f(x)$, так как $y_{\text{ч.н}}$ – частное решение уравнения (1.44). Таким образом, $f(x) \equiv f(x)$, т.е. функция (1.45) является решением уравнения (1.44).

Покажем теперь, что функция (1.45) является общим решением уравнения (1.44), т.е. докажем, что входящие в (1.45) произвольные постоянные можно подобрать так, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (*)$$

На основании условий (*) и (1.45′) будем иметь:

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) + y_{\text{ч.н.}}(x_0),\\
y'(x_0) &= C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) + y_{\text{ч.н.}}'(x_0),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
y^{(n-1)}(x_0) &= C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) + y_{\text{ч.н.}}^{(n-1)}(x_0).
\end{aligned}$$

Получили систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_{1_0} + C_2 y_{2_0} + \ldots + C_n y_{n_0} = y_0 - y_{\text{ч.н.}_0} \\ C_1 y'_{1_0} + C_2 y'_{2_0} + \ldots + C_n y'_{n_0} = y'_0 - y'_{\text{ч.н.}_0} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 y_{1_0}^{(n-1)} + C_2 y_{2_0}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n_0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} - y_{\text{ч.н.}_0}^{(n-1)} \end{cases}.$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского для функций $y_1, y_2, ..., y_n$ в точке $x = x_0$. Так как по условию функции $y_1, y_2, ..., y_n$ – линейно независимы, то $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение $C_1 = C_{1_0}$, $C_2 = C_{2_0}$, …, $C_n = C_{n_0}$. Это означает, что существуют такие значения произвольных постоянных, при которых функция (1.45) определяет решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.44), удовлетворяющее заданным начальным условиям (*).

Замечание. Если известно общее решение линейного однородного дифференциального уравнения (1.46), то основная задача при интегрировании линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.44) состоит в нахождении какого-либо его частного решения $y_{\text{ч.н}}$.

Существуют два метода нахождения $y_{\text{ч.н}}$: метод вариации произвольных постоянных; метод неопределённых коэффициентов.

Метод вариации произвольных постоянных является универсальным, применим для уравнений с любой правой частью. Метод неопределённых коэффициентов применим только для уравнений с постоянными коэффициентами со специальной правой частью.

Основной трудностью решения линейного неоднородного дифференциального уравнения является нахождение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения, так как не существует общего метода нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения (1.46) (исключение составляет случай дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами).

Правило нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

1) для линейного неоднородного дифференциального уравнения (1.44) записать соответствующее линейное однородное дифференциальное уравнение (1.46);

2) найти фундаментальную систему решений $y_1, y_2, ..., y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения (1.46) и записать общее решение линейного однородного дифференциального уравнения $y_{\text{о.о}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$;

3) найти какое-либо частное решение $y_{\text{ч.н.}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных или методом неопределённых коэффициентов;

4) записать общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения при помощи соотношения (1.45), т.е. сложить $y_{\text{о.о}}$ и $y_{\text{ч.н}}$

$$y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}.$$

Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

1) Варьируя произвольные постоянные в общем решении линейного однородного дифференциального уравнения, записать структуру частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{ч.н.} = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + ... + C_n(x) y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i. \tag{1.47}$$

2) Неизвестные функции $C_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, определить из системы:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{1.48}$$

Данная система уравнений получается при подстановке $y_{\text{ч.н}} = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x) y_i$ в линейное неоднородное дифференциальное уравнение (1.44). Система (1.48) является системой n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $C_i'(x)$ ($i=\overline{1,n}$). Определителем системы будет определитель Вронского $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$, следовательно, система (1.48) имеет единственное решение: $C_i' = \varphi_i(x)$ ($i=\overline{1,n}$). Интегрируя эти равенства (так как это дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными), получим: $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx$. Так как мы находим частное решение, то постоянные интегрирования здесь будем считать равными нулю.

3) Найденные функции подставить в (1.47) и записать окончательный вид частного решения $y_{ч.н}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Пример 1. Решить уравнение: $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение будем искать в виде: $y_{\text{о.н}} = y_{\text{о.о}} + y_{\text{ч.н}}$. Составим однородное уравнение, соответствующее исходному: $y'' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет комплексно сопряженные корни $k_1 = i$ и $k_2 = -i$, которым соответствует фундаментальная система решений: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{о.о}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Теперь найдем частное решение линейного неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных, т.е. решение будем искать в виде:

$$y_{\text{ч.н}} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ найдем из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos^3 x} \end{cases}.$$

Деля первое уравнение системы на $\cos x \neq 0$, а второе – на $\sin x \neq 0$ и складывая полученные уравнения, находим: $C_2' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, тогда $C_1' = -\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

Интегрируя полученные дифференцированные уравнения первого порядка, имеем:

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = -\int \cos^{-3} x d(-\cos x) = \frac{\cos^{-2} x}{-2} + C_1 = -\frac{1}{2\cos^2 x} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C_2.$$

Тогда частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н}} = -\frac{1}{2\cos^2 x}\cos x + \operatorname{tg} x \sin x .$$

Складывая полученные решения, находим общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y_{\text{о.н}} = \left(C_1 - \frac{1}{2\cos^2 x}\right)\cos x + (C_2 + \operatorname{tg} x)\sin x .$$

Определение. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $a_i = const$, $i = \overline{1, n}$, называется ***уравнением со специальной правой частью,*** если правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x\right] \tag{1.49}$$

(функция вида (1.49) встречается во многих инженерных приложениях), где $P_n(x)$ и $Q_k(x)$ – многочлены относительно независимой переменной x степени n и k соответственно, $\alpha, \beta \in R$.

Частное решение $y_{\text{ч.н}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью (1.49) имеет структуру, аналогичную выражению (1.49). В общем виде частное решение имеет вид:

$$y_{\text{ч.н}} = x^r e^{\alpha x}\left[P_s^*(x)\cos\beta x + Q_s^*(x)\sin\beta x\right], \tag{1.50}$$

где $P_s^*(x)$ и $Q_s^*(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами степени $s = \max\{n, k\}$, r – кратность корня k характеристического уравнения, совпадающего с комплексным числом $z = \alpha + i\beta$.

Метод неопределенных коэффициентов

1) Используя вид специальной правой части (1.49), определить числа n, k, α, β.

2) Найти степень новых неизвестных многочленов $s = \max\{n, k\}$.

3) Записать комплексное число $z = \alpha + i\beta$ и сравнить его с корнями характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения, определить кратность r.

4) Используя найденные величины s и r, записать структуру частного решения (1.50), в котором многочлены $P_s^*(x)$ и $Q_s^*(x)$ имеют неопределенные коэффициенты (можно доказать, что эти коэффициенты определяются однозначно).

5) Неизвестные коэффициенты многочленов определить подстановкой $y_{\text{ч.н}}$ в исходное линейное неоднородное дифференциальное уравнение и приравниванием коэффициентов подобных членов левой и правой частей уравнения (в результате получается система линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов).

6) Подставляя найденные коэффициенты в (1.50), записать вид частного решения $y_{\text{ч.н}}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения.

В тех случаях, когда правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму нескольких различных функций специального вида, удобно использовать принцип наложения решений, который справедлив для любого конечного числа функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ (доказательство теоремы приведено для случая $n = 2$; если $n > 2$, то доказательство проводится аналогично).

Теорема 1.5 (принцип наложения решений). Если функция $y_1(x)$ – решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x),$$

а функция $y_2(x)$ – решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x),$$

то функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x). \qquad (1.51)$$

Доказательство. Подставим $y_1(x) + y_2(x)$ в дифференциальное уравнение (1.51) вместо y:

$$a_0(y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_n(y_1 + y_2) = f_1(x) + f_2(x)$$

или

$$(a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n y_1) + (a_0 y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n y_2) = f_1(x) + f_2(x).$$

Откуда

$$f_1(x) + f_2(x) \equiv f_1(x) + f_2(x),$$

следовательно, функция $y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения (1.51).

Замечание. При нахождении $y_{ч.н}$ необходимо найти частные решения $y_{ч.н_1}, y_{ч.н_2}, \ldots, y_{ч.н_n}$ линейных неоднородных дифференциальных уравнений с правыми частями $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ соответственно, потом сложить полученные частные решения, т.е. частное решение уравнения:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f_0(x)y^{(n)} + f_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)y,$$

где $f_i(x)$ – функции специального вида (1.49), $i = \overline{1, n}$, имеет вид

$$y_{ч.н} = y_{ч.н_1} + y_{ч.н_2} + \ldots + y_{ч.н_n}.$$

Пример 2. Решить уравнение: $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение будем искать в виде: $y_{о.н} = y_{о.о} + y_{ч.н}$.

Запишем линейное однородное дифференциальное уравнение:

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Составим его характеристическое уравнение:

$$k^2 + 5k + 6 = 0 \ .$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим корни: k_1 = –3 и k_2 = –2. Так как корни действительные и различные, то общее решение однородного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y_{о.о} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}.$$

Рассмотрим теперь правую часть неоднородного уравнения: $f(x) = e^{-x} + e^{-2x}$. Она представляет собой сумму двух функций специального вида: $f_1(x) = e^{-x}$ и $f_2(x) = e^{-2x}$. Поэтому частное решение будем искать в виде:

$$y_{ч.н} = y_{ч.н_1} + y_{ч.н_2},$$

где $y_{\text{ч.н}_1}$ – частное решение уравнения $y''+5y'+6y=e^{-x}$, а $y_{\text{ч.н}_2}$ – частное решение уравнения $y''+5y'+6y=e^{-2x}$.

Рассмотрим функцию $f_1(x)=e^{-x}$, по ее виду определяем:

$$\alpha=-1,\ \beta=0,\ n=k=0;\ z=-1,\ r=0,\ s=0.$$

Следовательно, $y_{\text{ч.н}_1}=Ae^{-x}$, где неизвестный коэффициент находим подстановкой $y_{\text{ч.н}_1}$ в уравнение $y''+5y'+6y=e^{-x}$. В результате получаем:

$$(Ae^{-x})''+5(Ae^{-x})'+6(Ae^{-x})=e^{-x}, \quad Ae^{-x}-5Ae^{-x}+6Ae^{-x}=e^{-x},$$

откуда $A=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, $y_{\text{ч.н}_1}=\dfrac{1}{2}e^{-x}$.

Рассмотрим функцию $f_2(x)=e^{-2x}$, по ее виду определяем:

$$\alpha=-2,\ \beta=0,\ n=k=0,\ z=-2,\ r=1,\ s=0.$$

Следовательно, $y_{\text{ч.н}_2}=Bxe^{-2x}$, где неизвестный коэффициент находим подстановкой этой функции в уравнение $y''+5y'+6y=e^{-2x}$. В результате получаем:

$$(Bxe^{-2x})''+5(Bxe^{-2x})'+6(Bxe^{-2x})=e^{-2x},$$

$$-4Be^{-2x}+4Bxe^{-2x}+5Be^{-2x}-105Bxe^{-2x}+6Bxe^{-2x}=e^{-2x},$$

откуда $B=1$. Таким образом, $y_{\text{ч.н}_2}=xe^{-2x}$, и, значит, частное решение исходного неоднородного уравнения будет: $y_{\text{ч.н}}=0{,}5e^{-x}+xe^{-2x}$.

Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y_{\text{о.н}}=C_1e^{-3x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-x}+xe^{-2x}.$$

1.6. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В прикладных задачах возникают случаи нескольких неизвестных функций, входящих в дифференциальные уравнения под знаками производных. Например, второй закон Ньютона в векторной форме имеет вид:

$$m\vec{a}=\vec{F}.$$

В общем случае пространственного движения материальной точки из одного векторного уравнения $m\vec{a}=\vec{F}$ вытекает совокупность трёх обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных координат движущейся материальной точки:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\ddot{y}=F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\ddot{z}=F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \end{cases}$$

в результате, получается система из трёх дифференциальных уравнений на три неизвестные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Пусть функции $y_1, y_2, ..., y_n$ независимой переменной x определены на некотором промежутке (a,b).

Определение. ***Системой обыкновенных дифференциальных уравнений*** называется совокупность дифференциальных уравнений вида:

$$\Phi_i(x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{(m_1)}, y_2, y_2', y_2'', ..., y_2^{(m_2)}, ..., y_n, y_n', y_n'', ..., y_n^{(m_n)})=0 \quad (i=\overline{1,n}).$$

Используя процедуру введения дополнительных функций, любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением систем дифференциальных уравнений только первого порядка.

Определение. Система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{1.52}$$

называется ***нормальной системой*** обыкновенных дифференциальных уравнений.

Определение. ***Решением системы*** (1.52) называется совокупность n функций $y_1, y_2, ..., y_n$, определенных и дифференцируемых на некотором промежутке (a, b), при подстановке которых в систему (1.52) получается совокупность тождеств на (a, b). Процесс нахождения решения системы называется ***интегрированием системы.***

Определение. Задача решения системы (1.52), совместно с начальными условиями $y_i(x_0) = y_{i_0}$ $(i = \overline{1, n})$, называется ***задачей Коши для системы*** (1.52).

1.6.1. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

Одним из методов решения системы (1.52) является метод исключения неизвестных, который приводит к эквивалентной системе дифференциальных уравнений n-го порядка.

Дифференцируем по x первое уравнение системы (1.52):

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Заменяя производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, ..., \dfrac{dy_n}{dx}$ их выражениями $F_1, F_2, ..., F_n$ из уравнений (1.52), будем иметь уравнение:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

при этом введем обозначение:

$$f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \equiv F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Дифференцируя полученное дифференциальное уравнение второго порядка и подставляя производные $\dfrac{dy_1}{dx}, \dfrac{dy_2}{dx}, ..., \dfrac{dy_n}{dx}$ из (1.52), найдем:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = f_3(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Продолжая далее таким же образом, получим, наконец, уравнение:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n).$$

В результате, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{d^n y_1}{dx^n} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}. \tag{1.53}$$

Из первых $(n-1)$ уравнений определим $y_2, y_3, ..., y_n$ (предполагается, что эти операции выполнимы) так, чтобы

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3 = \varphi_3(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = \varphi_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) \end{cases}. \tag{1.54}$$

Подставляя эти выражения в последнее из уравнений (1.53), получим уравнение n-го порядка для определения функции $y_1(x)$:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = f(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(n-1)}). \tag{1.55}$$

Решая уравнение (1.55), определим:

$$y_1 = \psi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n). \tag{1.56}$$

Дифференцируя общее решение (1.56) $(n-1)$ раз, найдем производные $y_1', y_1'', ..., y_1^{(n-1)}$ как функции от $x, C_1, C_2, ..., C_n$. Подставляя эти функции в (1.54), определяем:

$$\begin{aligned} &y_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \quad y_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \qquad y_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Замечания

1) Если система (1.52) линейна относительно искомых функций, то и уравнение (1.55) будет линейным.

2) Понятия общего, частного, особого решения полностью аналогичны случаю одного дифференциального уравнения.

Для того чтобы полученное решение (1.56) и (1.57) удовлетворяло начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_{1_0}, \quad y_2(x_0) = y_{2_0}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_{n_0}, \tag{1.58}$$

необходимо найти из уравнений (1.56) и (1.57) соответствующие значения постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Пример. Проинтегрировать систему $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2y_2 \end{cases}$.

Решение. Продифференцируем первое уравнение по x:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}.$$

В полученное уравнение подставим $\frac{dy_1}{dx}$ из первого уравнения и $\frac{dy_2}{dx}$ из второго уравнения, тогда

$$\frac{d^2y_1}{dx} = y_1 + y_2 + 2y_2 = y_1 + 3y_2 .$$

В результате, получили систему:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_1'' = y_1 + 3y_2 \end{cases} .$$

Из первого уравнения выразим:

$$y_2 = y_1' - y_1 \qquad (*)$$

и подставим во второе уравнение:

$$y_1'' = y_1 + 3(y_1' - y_1), \quad y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 0 .$$

В результате, получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет вид: $k^2 - 3k + 2 = 0$; находим корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Так как корни действительные и различные, то фундаментальная система решений $y_{1_1} = e^x$, $y_{1_2} = e^{2x}$ и общее решение будет: $y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Продифференцируем общее решение по x: $y_1' = C_1e^x + 2C_2e^{2x}$ и подставим в уравнение (*), тогда $y_2 = C_2e^{2\cdot x}$. Таким образом, решение системы:

$$y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x}, \quad y_2 = C_2e^{2x} .$$

1.6.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Определение. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ ... \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases} , \qquad (1.59)$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные числа, будем называть ***системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*** относительно функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$, определенных и дифференцируемых на некотором интервале (a,b) изменения аргумента t.

Будем искать частное решение системы в следующем виде:

$$x_1 = \alpha_1e^{k\cdot t}, \quad x_2 = \alpha_2e^{kt}, \quad ..., \quad x_n = \alpha_ne^{kt} \qquad (1.60)$$

Требуется определить постоянные α_1, α_2, …, α_n и k так, чтобы функции α_1e^{kt}, α_2e^{kt}, …, α_ne^{kt} удовлетворяли системе (1.59). Подставляя функции (1.60) в систему (1.59), получим:

$$\begin{cases} k\alpha_1 e^{kt} = (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)e^{kt} \\ k\alpha_2 e^{kt} = (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n)e^{kt} \\ \ldots \\ k\alpha_n e^{kt} = (a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n)e^{kt} \end{cases}.$$

Сократим все уравнения на e^{kt}, перенесем все члены в одну сторону и соберем коэффициенты при α_1, α_2, …, α_n. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-k)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn}-k)\alpha_n = 0 \end{cases}. \qquad (1.61)$$

Выберем α_1, α_2, …, α_n и k такими, чтобы удовлетворялась система (1.61). Эта система есть система линейных однородных алгебраических уравнений относительно α_1, α_2, …, α_n. Составим определитель системы (1.61):

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix}. \qquad (1.62)$$

Если $\Delta(k) \neq 0$, то система (1.61) имеет только нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, следовательно, формулы (1.60) дают только тривиальное решение:

$$x_1(t) = x_2(t) = \ldots = x_n(t) \equiv 0.$$

Этот случай не представляет собой интереса.

Таким образом, нетривиальное решение (1.60) можно получить только при таких значениях k, при которых определитель (1.62) обращается в нуль. В этом случае получаем уравнение n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.63)$$

Уравнение (1.63) называется ***характеристическим уравнением*** для системы (1.59), его корни называются ***корнями характеристического уравнения.***

Пусть корни характеристического уравнения (1.63) действительные, обозначим их через k_1, k_2, …, k_n. Для каждого корня k_i $(i = \overline{1,n})$ напишем систему (1.61) и определим коэффициенты:

$$\alpha_1^{(i)},\ \alpha_2^{(i)},\ \ldots,\ \alpha_n^{(i)}.$$

Таким образом, получаем:

для корня k_1 решение системы (1.59):

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t},\quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t},\quad \ldots,\quad x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t};$$

для корня k_2 решение системы (1.59):

$$x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t},\quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t},\quad \ldots,\quad x_n^{(2)} = \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t};$$

……………………………………………………………….;

для корня k_n решение системы (1.59):

$$x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t},\quad x_2^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t},\quad \ldots,\quad x_n^{(n)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}.$$

Путем непосредственной подстановки в уравнения (1.59) можно убедиться, что система функций:

$$\begin{cases} x_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_1^{(n)}e^{k_n t} \\ x_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_2^{(n)}e^{k_n t} \\ \ldots \\ x_n = C_1\alpha_n^{(1)}e^{k_1 t} + C_2\alpha_n^{(2)}e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_n^{(n)}e^{k_n t} \end{cases} \qquad (1.64)$$

где C_1, C_2, …, C_n – произвольные постоянные, тоже является решением системы дифференциальных уравнений (1.59). Это есть ***общее решение.***

Правило решения линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1) для системы уравнений (1.59) составить характеристическое уравнение (1.63) и найти его корни;

2) для каждого корня k_i записать систему (1.61) и определить коэффициенты:

$$\alpha_1^{(i)},\ \alpha_2^{(i)},\ \ldots,\ \alpha_n^{(i)} \quad (i = \overline{1, n});$$

3) найденные значения коэффициентов $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, …, $\alpha_n^{(i)}$ для корней характеристического уравнения k_i $(i = \overline{1, n})$ подставить в общее решение (1.64) исходной системы.

Пример. Найти общее решение системы уравнений: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2 \end{cases}$.

Решение. Для решения данной системы можно применить метод исключения неизвестных, но решим его при помощи характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0, \quad (2-k)(3-k) - 2 = 0, \quad k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Находим его корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$.

Решение системы будем искать в виде:

$$x_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{t} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{4t}, \quad x_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{t} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{4t}.$$

Значение коэффициентов $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_2^{(1)}$ определяем из системы:

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ \alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases},$$

или $\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0$, откуда $\alpha_2^{(1)} = -\dfrac{1}{2}\alpha_1^{(1)}$. Полагая $\alpha_1^{(1)} = 2$, получаем: $\alpha_2^{(1)} = -1$.

Значение коэффициентов $\alpha_1^{(2)}$ и $\alpha_2^{(2)}$ определяем из системы:

$$\begin{cases} (2-4)\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \\ \alpha_1^{(2)} + (3-4)\alpha_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

или $\alpha_1^{(2)} - \alpha_2^{(2)} = 0$, откуда $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$. Пусть $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} = 1$.

Тогда общее решение системы:

$$x_1 = 2C_1e^{t} + C_2e^{4t},\ x_2 = -C_1e^{t} + C_2e^{4t}.$$

Замечание. Так как однородная система (1.61) имеет бесконечное множество решений, то при нахождении коэффициентов $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, …, $\alpha_n^{(i)}$ им можно придавать различные, удобные для вычислений, значения.

2. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2.1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Определение. Пусть дана бесконечная числовая последовательность a_1, a_2, $a_3, ..., a_n, ...$ Выражение вида:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (2.1)$$

называется ***числовым рядом***. Числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ называются ***членами ряда*** (2.1), член a_n называют ***общим членом ряда*** ($n \in N$).

Сокращённое обозначение ряда (2.1): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение. Сумма n первых членов ряда называется ***n-й частичной суммой ряда*** и обозначается: S_n, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Рассмотрим последовательность частичных сумм:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, \quad \ldots$$

Определение. Если существует конечный предел S последовательности частичных сумм $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то ряд (2.1) называют ***сходящимся***, а число S называют ***суммой ряда*** (2.1). В этом случае пишут: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если последовательность $S_1, S_2, S_3, ..., S_n, ...$ не имеет конечного предела, то ряд (2.1) называют ***расходящимся***.

Пример 1. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

Решение. Возьмём сумму S_n первых n членов ряда:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Слагаемые этой суммы могут быть представлены в виде:

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм данного ряда равен единице: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится и его сумма $S = 1$.

Пример 2. Исследовать ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ... + (-1)^{n-1} + ...$$

Решение. Последовательность частичных сумм ряда имеет вид: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, $S_5 = 1$, … и, значит, не сходится ни к какому пределу, поэтому данный ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд, составленный из ***членов геометрической прогрессии*** (a – первый член геометрической прогрессии, q – знаменатель прогрессии):

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \qquad (2.2)$$

Решение. Частичная сумма S_n этого ряда при $q \neq 1$ имеет вид:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a\,(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

здесь использована формула суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Отсюда:

1) если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его сумма: $S = \frac{a}{1-q}$. Например, при a = 1, $q = \frac{1}{3}$ имеем:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2} = 1{,}5;$$

2) если $|q| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \infty,$$

т.е. ряд расходится;

3) при $q = 1$ ряд (2.2) принимает вид: $a + a + \ldots + a + \ldots$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}}) = \lim\limits_{n\to\infty} (n \cdot a) = \infty$, т.е. ряд расходится;

4) при $q = -1$ ряд (2.2) принимает вид: $a - a + a - a + \ldots$ Его частичные суммы $S_n = 0$ при *n* чётном и $S_n = a$ при *n* нечётном. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится. Таким образом, ряд (2.2) является сходящимся при $|q| < 1$ и расходящимся при $|q| \geq 1$.

Определение. Если в выражении (2.1) отбросить *n* первых членов, то оставшийся ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots$$

называют ***n-м остатком ряда*** (2.1) и обозначают r_n.

Если (2.1) сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$.

Сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нём отбросить любое конечное число членов. Но его сумма, если она существует, при этом изменяется.

Свойства сходящихся рядов:

1) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна *S*, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n$, где c – некоторое действительное число, также сходится, и его сумма равна cS;

2) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S_{I} и S_{II}, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ сходится и его сумма равна: $S_{\text{I}} \pm S_{\text{II}}$.

В приложениях применяются только сходящиеся ряды, поэтому по данному ряду необходимо, прежде всего, определить, является ли он сходящимся. Исследование сходимости рядов проводится с помощью теорем, называемых ***признаками сходимости***.

Теорема 2.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ сходится, т.е. имеет место равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S – сумма ряда; но тогда имеет место также равенство $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Вычитая почленно из первого равенства второе, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Но $S_n - S_{n-1} = a_n$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что этот признак сходимости не является достаточным. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может быть сходящимся или может быть расходящимся. Так, для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ из примера 3 предел общего члена ряда равен: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$, и этот ряд сходится.

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... \frac{1}{n} + ... \qquad (2.3)$$

называется ***гармоническим рядом***.

Гармонический ряд (2.3) является **расходящимся (**как будет показано в разд. 2.2, пример 5), хотя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Таким образом, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (т.е. если общий член ряда стремится к нулю), то ещё нельзя сделать вывод о сходимости ряда. Необходимо дополнительное исследование, которое может быть проведено с помощью достаточных условий (признаков) сходимости ряда. Кроме того, из теоремы 2.1 можно сделать вывод о достаточном признаке расходимости ряда.

Теорема 2.2 (достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$.

Решение. Запишем общий член данного ряда $a_n = \frac{n}{3n+1}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+1/n} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

т.е. ряд расходится.

2.2. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Теорема 2.3 (признак сравнения). Пусть даны два ряда с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \qquad (*)$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,, \qquad (**)$$

и для всех $n \geq N$ выполняются неравенства

$$0 < a_n \leq b_n \,, \qquad (***)$$

тогда: 1) из сходимости ряда (**) следует сходимость ряда (*);

2) из расходимости ряда (*) следует расходимость ряда (**).

Доказательство

1) Обозначим через S_n и σ_n соответственно частичную сумму первого и второго рядов, т.е. $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Из условия (2.6) следует, что $S_n \leq \sigma_n$. Так как ряд (**) сходится, то существует предел σ его частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \,.$$

Из того, что члены рядов (*) и (**) положительны, следует, что $\sigma_n < \sigma$, и тогда в силу неравенства $S_n \leq \sigma_n$ получаем: $S_n < \sigma$. Таким образом, мы доказали, что частичные суммы S_n ограниченны. Кроме того, при увеличении n частичная сумма S_n возрастает. А из того, что последовательность частичных сумм возрастает и ограничена, следует, что она имеет предел: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, причём $S \leq \sigma$.

2) Пусть ряд (*) расходится. Так как члены этого ряда положительны, то его частичная сумма S_n возрастает с возрастанием n, и $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$. Тогда в силу неравенства $S_n \leq \sigma_n$, получаем: $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$, т.е. ряд (**) расходится.

В качестве ряда для сравнения необходимо выбрать такой ряд, о котором заранее известно, является ли он сходящимся или расходящимся. Примерами таких рядов являются: ряд, представляющий сумму членов геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ (см. разд. 2.1, пример 3), а также гармонический (расходящийся) ряд.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot 2^n} + \ldots$$

Решение. Для того чтобы установить сходимость ряда, воспользуемся неравенством $a_n = \dfrac{1}{n2^n} < \dfrac{1}{2^n}$ $(n \geq 2)$ и сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$. Ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots$ представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a = \dfrac{1}{2}$ и знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$. Так как

$q=\frac{1}{2}<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – сходится. Согласно признаку сравнения (см. теорему 2.3), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$ также сходится.

Чаще на практике бывает удобнее использовать признак сравнения в другой форме.

Теорема 2.4 (предельный признак сравнения). Два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ с положительными членами одновременно сходятся или одновременно расходятся, если существует конечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\neq 0$.

Пример 2. Исследовать ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ на сходимость.

Решение. Общий член данного ряда $a_n=\frac{1}{2n-1}$. Сравним ряд с расходящимся гармоническим рядом: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, общий член которого $b_n=\frac{1}{n}$. Далее, воспользуемся предельным признаком сравнения (см. теорему 2.4):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Отсюда следует, что ряды: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ одновременно расходятся, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ – расходящийся.

Теорема 2.5 (признак Даламбера). Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ положительны и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d, \tag{2.4}$$

то при $d<1$ ряд сходится, при $d>1$ ряд расходится (при $d=1$ ответа о сходимости ряда теорема не даёт).

Доказательство

1) Пусть $d<1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. По определению предела числовой последовательности для любого $\varepsilon>0$ существует номер N, такой, что при $n\geq N$ выполняется неравенство: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-d\right|<\varepsilon$.

Отсюда следует, что $-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}-d<\varepsilon$ или

$$d-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<d+\varepsilon. \tag{*}$$

Так как $d<1$, то ε можно взять настолько малым, что будет выполняться неравенство: $d+\varepsilon<1$. Полагая $d+\varepsilon=q$, где $q<1$, на основании правого из неравенств (*) имеем:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \text{ или } a_{n+1} < a_n \cdot q \text{ для } n = N,\, N+1,\, N+2,...$$

Придавая n значения $N+1,\, N+2,\, ...,$ из последнего неравенства получаем:

$$a_{N+1} < a_N \cdot q, \quad a_{N+2} < a_{N+1} \cdot q < a_N \cdot q^2, \quad a_{N+3} < a_{N+2} \cdot q < a_N \cdot q^3, ...,$$

т.е. члены ряда

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + ... \qquad (**)$$

меньше соответствующих членов ряда, составленного из членов геометрической прогрессии

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + ... \qquad (***)$$

Так как $q < 1$, то ряд (***) сходится (см. разд. 2.1, пример 2.3). Тогда согласно признаку сравнения ряд (**) также сходится. Но ряд (**) получен из данного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ в результате отбрасывания конечного числа первых членов, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) Пусть $d > 1$. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Возьмём ε настолько малым, чтобы $d - \varepsilon > 1$. Тогда при $n \ge N$ в силу левого из неравенств (*) выполняется неравенство: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$или $a_{n+1} > a_n$. Таким образом, члены ряда, начиная с некоторого номера N, возрастают с увеличением их номеров, т.е. общий член ряда a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, согласно теореме 2.2 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание. Как показывают примеры, при $d = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью признака сравнения или других признаков.

Пример 3. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ на сходимость.

Решение. Так как $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

Теорема 2.6 (радикальный признак Коши). Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d, \qquad (2.5)$$

то при $d < 1$ ряд сходится, при $d > 1$ ряд расходится (при $d = 1$ теорема ответа о сходимости ряда не даёт).

Доказательство

1) Пусть $d < 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = d$. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. По определению предела числовой последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой, что при $n \ge N$ выполняется неравенство $\left| \sqrt[n]{a_n} - d \right| < \varepsilon$ или

$$d-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<d+\varepsilon. \qquad (!)$$

Так как $d<1$, то ε можно взять настолько малым, что будет выполняться неравенство $d+\varepsilon<1$. Полагая $d+\varepsilon=q$, где $q<1$, на основании правого из неравенств (!) имеем $\sqrt[n]{a_n}<q$ или $a_n<q^n$ для всех $n\geq N$.

Рассмотрим теперь два ряда:

$$a_1+a_2+a_3+...+a_N+a_{N+1}+a_{N+2}+..., \qquad (!!)$$

$$q^N+q^{N+1}+q^{N+2}+... \qquad (!!!)$$

Ряд (!!!) сходится, так как его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию. Члены ряда (!!), начиная с a_N, меньше членов ряда (!!!). Следовательно, по теореме 2.3 ряд (!!) сходится.

2) Пусть $d>1$. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится. Возьмём ε настолько малым, чтобы $d-\varepsilon>1$. Тогда при $n\geq N$ в силу левого из неравенств (!) выполняется неравенство: $\sqrt[n]{a_n}>1$ или $a_n>1$. Но если все члены рассматриваемого ряда, начиная с a_N, больше 1, то ряд расходится, так как его общий член не стремиться к нулю (см. теорему 2.2).

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

Решение. Для исследования ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$$

на сходимость применим, допустим, признак Даламбера. Запишем члены ряда:

$$a_n=\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \quad \text{и} \quad a_{n+1}=\left(\frac{n+1}{2(n+1)+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n+1};$$

найдём предел их отношения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\cdot\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n\cdot\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\cdot\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n+3)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+3n}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n^2+3n}\right)^{2n^2+3n}\right]^{\frac{n}{2n^2+3n}}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n}{2n^2+3n}}=\frac{1}{2}\cdot e^0=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Намного проще исследовать ряд на сходимость, если применить радикальный признак Коши. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

Ряд сходится.

Следующий достаточный признак сходимости основан на сравнении ряда с несобственным интегралом.

Теорема 2.7 (интегральный признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, и существует монотонно убывающая функция $f(x)$, непрерывная на промежутке $[1;+\infty)$, такая, что $f(n)=a_n$ для любого натурального n. Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; если же $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y=f(x)$, с боковых сторон прямыми $x=1$, $x=n$, снизу осью Ox. Впишем в эту трапецию и опишем около неё две ступенчатых фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями $[1,2]$, $[2,3]$, …, $[n-1,n]$ и высотами $f(2),\ldots,f(n-1)$, $f(n)$ (рис. 2.1) или $f(1), f(2),\ldots, f(n-1)$ (рис. 2.2).

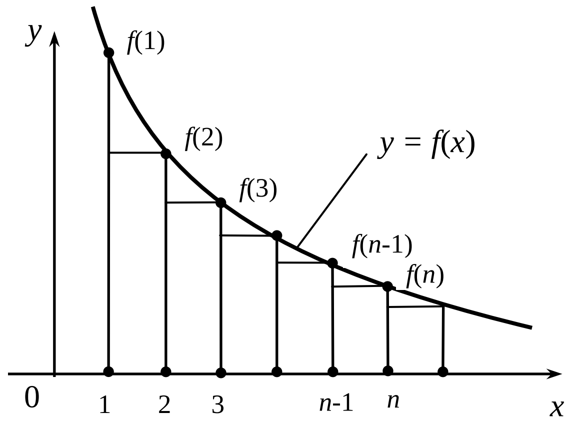

Рис. 2.1

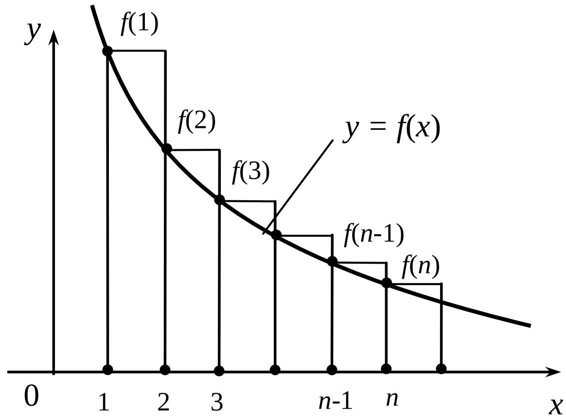

Рис. 2.2

Все построенные прямоугольники имеют основание, равное 1. Следовательно, площадь каждого прямоугольника равна его высоте. Сумма площадей вписанных прямоугольников (рис. 2.1) равна:

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=a_2+a_3+\ldots+a_n=S_n-a_1,$$

сумма площадей описанных прямоугольников (см. рис. 2.2) равна

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}=S_n-a_n.$$

Площадь криволинейной трапеции (исходя из геометрического смысла определённого интеграла) равна: $\int_1^n f(x)dx$, следовательно, $S_n-a_1<\int_1^n f(x)dx<S_n-a_n$, где S_n – частичные суммы рассматриваемого ряда. Отсюда получаем:

$$S_n<a_1+\int_1^n f(x)dx, \qquad (*)$$

$$S_n>a_n+\int_1^n f(x)dx. \qquad (**)$$

Пусть интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Это значит, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)dx = I$. Так как $f(x) > 0$, то последовательность $\int\limits_1^n f(x)dx$ возрастает с увеличением n и ограничена сверху своим пределом: $\int\limits_1^n f(x)dx < I$ Из неравенства (*) следует, что $S_n < a_1 + I$, т.е. возрастающая последовательность частичных сумм $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена и, следовательно, имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Таким образом, по определению, ряд сходится.

Пусть теперь интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится. В этом случае $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx \to +\infty$ при $n \to \infty$ (как монотонно возрастающая неограниченная последовательность). Из неравенства (**) следует, что $S_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, т.е. последовательность частичных сумм $S_1, S_2, ..., S_n, ...$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится и, следовательно, ряд расходится.

Определение. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + ... + \frac{1}{n^{\alpha}} + ..., \tag{2.6}$$

где $\alpha \in R$, называется ***рядом Дирихле***. Если $\alpha > 0$, то соответствующий ряд (2.6) называется ***обобщённым гармоническим рядом***.

Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является частным случаем обобщённого гармонического ряда (при $\alpha = 1$).

Пример 5. Исследовать сходимость ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ при различных значениях α.

Решение. Рассмотрим несколько случаев:

1) пусть $\alpha < 0$. Введём $\tau = -\alpha$, где $\tau > 0$. Тогда ряд Дирихле представим в виде: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\tau}$. Данный ряд расходится, тат как $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\tau} = +\infty$ (см. достаточный признак расходимости ряда);

2) пусть $\alpha = 0$. В результате получаем ряд $1+1+1+...+1+...$, который также расходиться, так как не существует конечного предела последовательности частичных сумм;

3) пусть $\alpha > 0$. Поведение ряда Дирихле выясним с помощью интегрального признака Коши. В качестве функции $f(x)$ возьмём функцию: $\frac{1}{x^{\alpha}}$ $(x \geq 1)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 2.7, функция $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ монотонно убывающая и непрерывная на промежутке $[1; +\infty)$. Члены ряда равны значениям этой функции при $x = 1, 2, ..., n, ...$, т.е. $a_n = f(n)$. Исследуем несобственный интеграл: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ на сходимость:

а) Если $0 < \alpha < 1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(b^{1-\alpha}-1\right)=+\infty,\ \text{так как } 1-\alpha>0.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится, и ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ также расходится.

б) Если $\alpha>1$, то $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\alpha}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\left.\frac{1}{(1-\alpha)\cdot x^{\alpha-1}}\right|_1^b=$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}}-1\right)=\left|\begin{array}{c}\alpha-1>0\\ b^{\alpha-1}\to+\infty\\ \dfrac{1}{b^{\alpha-1}}\to 0\end{array}\right|=\frac{1}{1-\alpha}(-1)=\frac{1}{\alpha-1},$$

т.е. интеграл сходится и, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится.

в) Если $\alpha=1$, то $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b-\ln 1)=+\infty$, следовательно, несобственный интеграл расходится, а, значит, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Таким образом, ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Из примера 2.9 следует, что обобщённый гармонический ряд сходится при $\alpha>1$ и расходится при $0<\alpha<1$, а также, что гармонический ряд расходится.

Сходимость многих рядов можно исследовать путём сравнения их с соответствующим рядом Дирихле.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+1}$.

Решение. Используем предельный признак сравнения и сравним данный ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся, так как $\alpha=2>1$. Вычислим предел отношения общих членов рассматриваемых рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^4+1}:\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4+1}=1\ne 0,$$

следовательно, ряды одновременно сходятся, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+1}$ сходится.

2.3. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Определение. Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots,\tag{2.7}$$

члены a_n которого после любого номера N $(n>N)$ имеют разные знаки, называется ***знакопеременным***.

Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots, \tag{2.8}$$

составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ряд (2.8) имеет положительные члены, и его сходимость может быть исследована с помощью достаточных признаков сходимости (см. разд. 2.2).

Для знакопеременных рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема 2.8. Если ряд (2.8) сходится, то сходится и ряд (2.7).

Доказательство. Пусть S_n и σ_n – суммы n первых членов рядов (2.7) и (2.8) соответственно. Пусть далее S'_n – сумма всех положительных, а S''_n – сумма абсолютных величин всех отрицательных членов среди первых n членов данного знакопеременного ряда; тогда

$$S_n = S'_n - S''_n, \quad \sigma_n = S'_n + S''_n.$$

По условию σ_n имеет предел σ; S'_n и S''_n – положительные возрастающие величины, меньше σ. Следовательно, они имеют пределы S' и S''. Из соотношения: $S_n = S'_n - S''_n$ следует, что и S_n имеет предел и этот предел равен:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S'_n - \lim_{n\to\infty} S''_n = S' - S'',$$

т.е. знакопеременный ряд (2.7) сходится.

Рассмотренный признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым, так как обратное утверждение: если сходится ряд (2.7), то сходится и ряд (2.8), не всегда верно. Так, существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, а ряды, составленные из абсолютных величин их членов как сходятся, так и расходятся.

Определение. Пусть ряд (2.7) сходится. Если ряд (2.8) сходится, то знакопеременный ряд (2.7) называется ***абсолютно сходящимся***, если ряд (2.8) расходится, то ряд (2.7) называется ***условно* (*неабсолютно*) *сходящимся***.

Таким образом, все сходящиеся знакопеременные ряды подразделяются на абсолютно и условно сходящиеся.

Исследование вопроса об абсолютной сходимости знакопеременного ряда сводится к исследованию соответствующего ряда с положительными членами.

Пример 2.11. Исследовать на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ $(\alpha \in R)$.

Решение. Данный ряд является знакопеременным. Составим ряд из абсолютных величин членов ряда, т.е. ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \ (\alpha \in R).$$

Так как $|\sin n\alpha| \le 1$, то члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ не больше членов ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который, как известно из примера 2.10, сходится. Следовательно, на основании признака сравнения (см. теорему 2.3) ряд из абсолютных величин сходится. Тогда на основании теоремы 2.8 сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$, причём сходится абсолютно.

Далее рассмотрим частный случай знакопеременного ряда.

Определение. Ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot a_n + \ldots, \qquad (2.9)$$

где $a_n \ge 0$, называется ***знакочередующимся рядом***.

Для знакочередующихся рядов имеет место следующий очень простой достаточный признак сходимости.

Теорема 2.9 (признак Лейбница). Если в знакочередующемся ряду (2.9) выполняются два условия:

1) члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots, \qquad (2.10)$$

2) общий член ряда стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad (2.11)$$

то ряд (2.9) сходится и его сумма S удовлетворяет условию $0 < S < a_1$.

Доказательство. Рассмотрим сумму $n = 2m$ первых членов ряда (2.9):

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Из условия (2.10) следует, что выражение в каждой скобке положительно. Следовательно, $S_{2m} > 0$ и возрастает с возрастанием m. Запишем теперь эту же сумму так:

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

В силу условия (2.10) каждая из скобок положительна, поэтому в результате вычитания получим: $S_{2m} < a_1$.

Таким образом, при возрастании m частичная сумма S_{2m} возрастает и ограничена сверху. Отсюда следует, что S_{2m} имеет предел S: $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, причём $0 < S < a_1$.

Однако сходимость ряда ещё не доказана; мы доказали только, что последовательность «чётных» частичных сумм имеет пределом число S. Докажем теперь, что «нечётные» частичные суммы также стремятся к пределу S.

Рассмотрим для этого сумму $n = 2m+1$ первых членов ряда (2.9):

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

Так как по условию (2.11), $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$, то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} = S.$$

Тем самым мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ как при чётном n, так и при нечётном n. Следовательно, ряд (2.9) сходится.

Следствие. Остаток r_n ряда (2.9) всегда удовлетворяет условию:

$$|r_n| < a_{n+1}. \qquad (2.12)$$

Доказательство. Рассмотрим остаток r_n ряда (2.9):

$$r_n = \pm(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots).$$

Полученный ряд также является знакочередующимся рядом, сумма которого по абсолютной величине меньше первого члена этого ряда, т.е. $|r_n| < a_{n+1}$.

Замечание. Признак Лейбница также справедлив, если неравенства (2.10) выполняются, начиная с некоторого номера N.

Пример 2. Исследовать на абсолютную (условную) сходимость знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение. Исследуем данный ряд на сходимость при помощи признака Лейбница. Оба условия (2.10) и (2.11) выполняются, так как

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots \text{ и } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ сходится. Составим соответствующий знакоположительный ряд: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Получили гармонический ряд, который является расходящимся, следовательно, исходный ряд сходится условно.

Пример 3. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2 2^n}$ с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение. Так как данный ряд – знакочередующийся, сходящийся (что можно проверить при помощи признака Лейбница), то величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена (на основании следствия из признака Лейбница). Нужное число членов n найдём путём подбора из неравенства:

$$\frac{1}{n^2 2^n}<0{,}001.$$

При $n=6$ последнее неравенство выполняется, значит, если отбросить в данном ряду все члены, начиная с шестого, то требуемая точность будет обеспечена. Следовательно,

$$S\approx S_5=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{72}-\frac{1}{256}+\frac{1}{800}\approx 0{,}449.$$

Абсолютно сходящиеся ряды (в отличие от условно сходящихся) обладают свойствами сумм конечного числа слагаемых (например, от перемены мест слагаемых сумма не меняется). Если числовой ряд сходится условно, то, задав любое число a, можно так переставить члены ряды, что его сумма окажется равной a. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся. Проиллюстрируем этот факт на примере.

Пример 4. Рассмотрим условно сходящийся ряд (см. пример 2):

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots=S.$$

Переставим его члены так, чтобы после каждого положительного члена стояли два отрицательных. Получим:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\ldots$$

Сложим теперь каждый положительный член с последующим отрицательным:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Таким образом, сумма исходного ряда уменьшилась вдвое.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

3.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

Определение. Пусть $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ – бесконечная последовательность функций, определённых на некотором множестве X. Выражение вида:

$$f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+... \tag{3.1}$$

называется ***функциональным рядом*** и обозначается сокращённо: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Пусть число $x_0 \in X$, тогда ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)=f_1(x_0)+f_2(x_0)+...+f_n(x_0)+... \tag{3.2}$$

является числовым рядом.

Определение. Если числовой ряд (3.2) сходится, то ряд (3.1) называется ***сходящимся в точке x_0***, а число x_0 называется ***точкой сходимости*** функционального ряда (3.1).

Определение. Множество D всех точек сходимости функционального ряда (3.1) называется его ***областью сходимости***.

Последнее определение можно сформулировать иначе: областью сходимости функционального ряда называется совокупность значений $x \in X$, при которых ряд (3.1) сходится. Как правило, область сходимости D не совпадает с областью определения X функционального ряда, а является её частью, т.е. $D \subset X$.

Пример 1. Найти область определения и область сходимости функционального ряда:

$$\ln x+\ln^2 x+\ln^3 x+...+\ln^n x+...=\sum_{n=1}^{\infty}\ln^n x.$$

Решение. Так как ряд составлен из функций вида $\ln^n x$, то их областью определения является область определения основной элементарной функции $y=\ln x$, т.е. $x>0$. Кроме того, данный ряд является суммой членов геометрической прогрессии с первым членом $a=\ln x$ и знаменателем $q=\ln x$. Такой ряд сходится, если $|q|=|\ln x|<1$, т.е. при

$$-1<\ln x<1, \quad \ln\frac{1}{e}<\ln x<\ln e.$$

Поэтому областью сходимости является интервал $\frac{1}{e}<x<e$.

Таким образом, X: $x>0$ и D: $\frac{1}{e}<x<e$. Очевидно, что $D \subset X$.

Определение. Как и для числовых рядов, ***n-й частичной суммой*** ряда (3.1) называется выражение:

$$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x),$$

а ряд

$$r_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+...+f_{n+k}(x)+...$$

называется ***n-м остатком ряда***.

Для любого x из области сходимости D: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$ существует.

Определение. Функция $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, где $x\in D$, называется ***суммой ряда*** (3.1). Говорят также, что функция $S(x)$, определённая на множестве D, разлагается в функциональный ряд (3.1) и пишут:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (x\in D).$$

Если $S(x)$ – сумма ряда, $S_n(x)$ – n-я частичная сумма ряда (3.1), то её n-й остаток определяется равенством:

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x).$$

Полезно также другое определение суммы функционального ряда.

Определение. Функция $S(x)$ называется суммой ряда (3.1) в некоторой области D, если для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер $N_0=N_0(x)$, что при всех $n>N_0$ справедливо неравенство:

$$\left|r_n(x)\right|<\varepsilon \quad (x\in D). \tag{3.3}$$

В общем случае N_0 зависит от x, т.е. при заданном $\varepsilon>0$ натуральные числа N_0 различны для различных значений $x\in D$. Если же существует один номер N_0, такой, что при $n>N_0$ неравенство (3.3) справедливо для всех $x\in D$, то ряд (3.1) называется ***равномерно сходящимся в D.***

В случае равномерной сходимости функционального ряда его n-я частичная сумма является приближением суммы ряда с одной и той же точностью для всех $x\in D$.

Определение. Функциональный ряд (3.1) называется ***мажорируемым*** в некоторой области D, если существует сходящийся числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n>0), \tag{3.4}$$

такой, что для всех $x\in D$ справедливы неравенства: $\left|f_k(x)\right|\le a_k \ (k=1,2,\ldots)$.

Ряд (3.4) называется ***мажорантным*** **(*мажорирующим*)** ***рядом***.

Мажорируемый ряд является рядом равномерно сходящимся.

Например, функциональный ряд:

$$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$$

мажорируется рядом $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$, так как $\left|\cos nx\right|\le 1$. Данный функциональный ряд равномерно сходится на всей оси Ox, поскольку он мажорируется при любом x.

Равномерно сходящиеся ряды обладают некоторыми общими свойствами:

1) если члены равномерно сходящегося ряда непрерывны на некотором отрезке, то его сумма также непрерывна на этом отрезке;

2) если члены ряда (3.1) непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд равномерно сходится на этом отрезке, то в случае, когда $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f_n(x)dx,$$

где $S(x)$ – сумма ряда (3.1);

3) если ряд (3.1), составленный из функций, имеющих непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, сходится на этом отрезке к сумме $S(x)$ и ряд

$$f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_n'(x)+...$$

равномерно сходится на том же отрезке, то $f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_n'(x)+...=S'(x)$.

Последние два свойства определяют условия, при которых функциональные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать.

3.2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Определение. ***Степенным рядом*** называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+..., \qquad (3.5)$$

где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые ***коэффициентами ряда*** (3.5), x_0 – фиксированное число.

При $x_0 = 0$ получаем степенной ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (3.6)$$

Очевидно, что для (3.5) число $x = x_0$ является точкой сходимости.

Выясним вопрос об области сходимости степенного ряда.

Теорема 3.1 (теорема Абеля)

1) Если степенной ряд (3.6) сходится при некотором значении $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всяком значении x, удовлетворяющим условию: $|x| < |x_1|$.

2) Если степенной ряд (3.5) расходится при некотором значении $x = x_2$, то он расходится при любых x, для которых $|x| > |x_2|$.

Доказательство

1) Так как по условию числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ сходится, то его общий член $a_n x_1^n \to 0$ при $n \to \infty$, откуда следует, что числовая последовательность

$$a_0,\ a_1x_1,\ a_2x_1^2,\ ...,\ a_nx_1^n, ...$$

ограничена, т.е. существует число $M > 0$ такое, что

$$\left| a_n x_1^n \right| < M\ ,\ n = 0, 1, 2, ... \qquad (3.7)$$

Перепишем ряд (3.6) в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... =$$
$$= a_0 + a_1 x_1\left(\frac{x}{x_1}\right) + a_2 x_1^2\left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + ... + a_n x_1^n\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + ... \qquad (3.8)$$

и рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_0| + |a_1x_1| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right| + \left|a_2 x_1^2\right| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^2 + ... + \left|a_n x_1^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n + ... \qquad (3.9)$$

Члены ряда (3.9) в силу неравенства (3.7) меньше соответствующих членов ряда

$$M + M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right| + M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^2 + ... + M\cdot\left|\frac{x}{x_1}\right|^n + ... \qquad (3.10)$$

При $|x|<|x_1|$ ряд (3.10) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\left|\dfrac{x}{x_1}\right|<1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (3.9) меньше соответствующих членов ряда (3.10), то по признаку сравнения (см. теорему 2.3) ряд (3.9) также сходится, а это значит, что ряд (3.6) при $|x|<|x_1|$ сходится абсолютно (см. теорему 2.8).

2) Докажем теперь вторую часть теоремы. По условию в точке x_2 ряд (3.6) расходится. Требуется показать, что он расходится для всех x, удовлетворяющих условию: $|x|>|x_2|$. Предположим обратное, т.е. допустим, что при некотором значении x таком, что $|x|>|x_2|$, ряд (3.6) сходится. Тогда, по только что доказанной первой части теоремы, ряд (3.6) должен сходится и в точке x_2, так как $|x_2|<|x|$. Но это противоречит тому, что в точке x_2 ряд расходится. Следовательно, ряд расходится и в точке x. Таким образом, теорема полностью доказана.

Теорема Абеля утверждает, что если x_1 – точка сходимости степенного ряда, то во всех точках, расположенных на интервале $\left(-|x_1|;\,|x_1|\right)$, этот ряд сходится абсолютно (рис. 3.1,а), а если x_2 – точка расходимости степенного ряда (3.6), то во всех точках, расположенных вне интервала $\left(-|x_2|;\,|x_2|\right)$, ряд расходится (рис. 3.1,б).

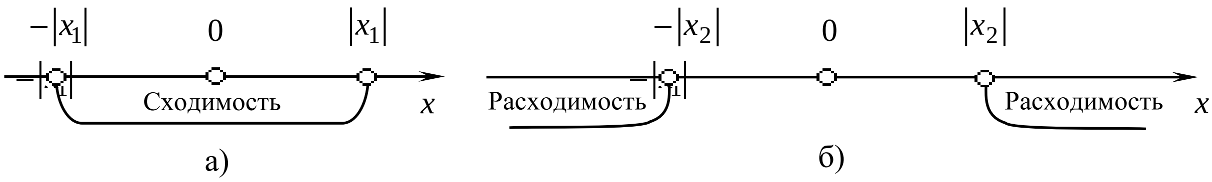

Рис. 3.1

Из этого можно заключить, что существует такое число R, что при $|x|<R$ мы имеем точки абсолютной сходимости и при $|x|>R$ – точки расходимости.

Таким образом, имеет место следующая теорема о строении области сходимости степенного ряда (3.6).

Теорема 3.2. Областью сходимости степенного ряда (3.6) является интервал с центром в начале координат.

Определение. Неотрицательное число R, такое, что при всех $|x|<R$ степенной ряд (3.6) сходится, а при всех $|x|>R$ – расходится, называется ***радиусом сходимости степенного ряда*** (рис. 3.2). Интервал $(-R;\,R)$ называется ***интервалом сходимости степенного ряда*** (3.6).

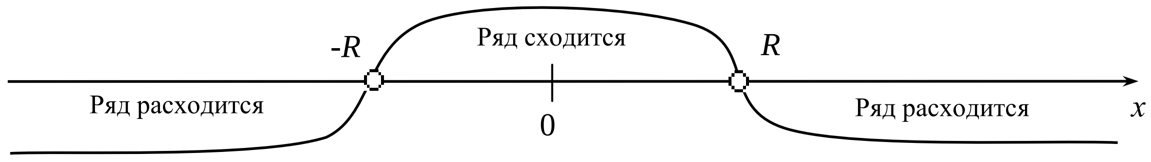

Рис. 3.2

На концах интервала (т.е. при $x=R$ и при $x=-R$) вопрос о сходимости или расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Если ряд (3.6) сходится только в одной точке $x=0$, то для него радиус сходимости $R=0$. Если ряд (3.6) сходится для любого действительного числа x, то будем считать, что $R=\infty$.

Радиус сходимости степенного ряда обычно находится с использованием признаков Даламбера и Коши. Рассмотрим способ определения радиуса сходимости R.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (3.6):

$$|a_0|+|a_1|\cdot|x|+|a_2|\cdot|x|^2+\ldots+|a_n|\cdot|x|^n+\ldots \tag{3.11}$$

Так как ряд (3.11) с положительными членами, то для определения его сходимости применим признак Даламбера (см. теорему 3.5).

Допустим, что существует предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\cdot x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x|=d\cdot|x|.$$

Тогда по признаку Даламбера ряд (3.11) сходится, если $d\cdot|x|<1$, т.е. если $|x|<\frac{1}{d}$, и расходится, если $d\cdot|x|>1$, т.е. если $|x|>\frac{1}{d}$.

Следовательно, ряд (3.6) сходится абсолютно при $|x|<\frac{1}{d}$. Если же $|x|>\frac{1}{d}$, то ряд (3.11) расходится, причём его общий член не стремится к нулю (см. теорему 3.5). Но тогда и общий член данного степенного ряда (3.6) не стремится к нулю, а это значит (на основании достаточного признака расходимости), что этот степенной ряд расходится (при $|x|>\frac{1}{d}$). Полученный интервал $\left(-\frac{1}{d};\ \frac{1}{d}\right)$ есть интервал сходимости степенного ряда (3.6), т.е.

$$R=\frac{1}{d}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Таким образом, радиус сходимости степенного ряда определяется формулой:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{3.12}$$

Аналогичным образом для определения интервала сходимости можно воспользоваться радикальным признаком Коши (см. теорему 3.6), и тогда

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3.13}$$

Рассмотрим степенной ряд (3.5), т.е. ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

Для определения сходимости этого ряда сделаем замену переменной:

$$x-x_0=X.$$

После этой замены ряд (3.5) имеет вид:

$$a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_nX^n+\ldots, \tag{3.14}$$

т.е. получили степенной ряд вида (3.6), расположенный по степеням X.

Пусть интервал $-R < X < R$ есть интервал сходимости ряда (3.14). Отсюда следует, что ряд (3.5) будет сходиться при значениях x, удовлетворяющих неравенству: $-R < x - x_0 < R$ или $x_0 - R < x < x_0 + R$, и будет расходиться вне этого интервала.

Таким образом, интервал сходимости степенного ряда (3.5) есть интервал с центром в точке $x = x_0$ и радиуса R, т.е. интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$, причём радиус сходимости R ряда определяется также по формуле (3.12) или по формуле (3.13).

Замечание: для нахождения области сходимости степенного ряда (3.6) необходимо сначала определить радиус сходимости, используя формулы (3.12) или (3.13). Если R – конечное число, $R \neq 0$, то для нахождения области сходимости степенного ряда (3.6), кроме нахождения интервала сходимости, необходимо исследовать сходимость ряда (3.6) на концах этого интервала, т.е. в точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$, и присоединить к интервалу $(x_0 - R; x_0 + R)$, тот конец, в котором ряд (3.6) сходится. Таким образом, областью сходимости ряда (3.6) будет один из промежутков: $(x_0 - R; x_0 + R)$, $[x_0 - R, x_0 + R)$, $(x_0 - R, x_0 + R]$ или $[x_0 - R, x_0 + R]$. Если $R = 0$, то область сходимости состоит из одной точки x_0. Если $R = \infty$, то областью сходимости будет вся числовая ось $(x \in R)$.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-2)^n}{2^n \sqrt{n+1}}$.

Решение. Найдём радиус сходимости ряда по формуле (3.12). Так как

$$|a_n| = \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}}, \quad |a_{n+1}| = \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{n+2}},$$

то

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^n \sqrt{n+1}} = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 2.$$

Определим интервал сходимости ряда. Так как $x_0 = 2$, то интервал сходимости $(2-2, 2+2)$ или $(0, 4)$. На концах этого интервала ряд может сходиться или расходиться.

При $x = 0$ получаем ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-2)^n}{2^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

который расходится, так как его члены больше членов расходящегося гармонического ряда.

При $x = 4$ получаем знакочередующийся ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(4-2)^n}{2^n \cdot \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}},$$

члены которого по абсолютной величине убывают и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$. Следовательно, знакочередующийся ряд сходится (по признаку Лейбница), причём сходится условно, так как соответствующий знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ расходится.

Таким образом, область сходимости данного ряда: (0, 4].

3.3. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Теорема 3.3. Степенной ряд:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{3.15}$$

мажорируем на любом отрезке $[-\rho, \rho]$, целиком лежащем внутри интервала сходимости.

Доказательство. По условию $\rho < R$, а поэтому числовой ряд (с положительными членами):

$$|a_0| + |a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots + |a_n|\rho^n + \ldots \tag{3.16}$$

сходится. Но при $|x| < \rho$ члены ряда (3.15) по абсолютной величине не больше соответствующих членов ряда (3.16). Следовательно, по определению ряд (3.15) мажорируем на отрезке $[-\rho, \rho]$ (рис. 3.3).

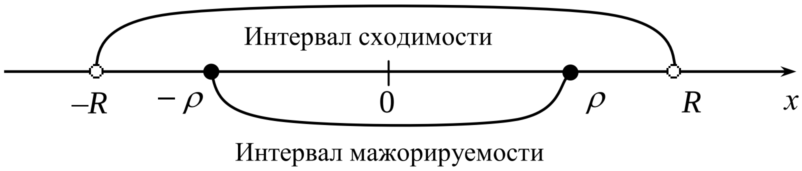

Рис. 3.3

Следствие 1. На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда $S(x)$ есть непрерывная функция.

Следствие 2. Если пределы интегрирования α и β лежат внутри интервала сходимости степенного ряда, то интеграл от суммы ряда равен сумме интегралов от членов ряда (т.е. если $[\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, то ряд можно почленно интегрировать):

$$\int_\alpha^\beta S(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots\right)dx = \int_\alpha^\beta a_0 dx + \int_\alpha^\beta a_1 x dx + \int_\alpha^\beta a_2 x^2 dx + \ldots + \int_\alpha^\beta a_n x^n dx + \ldots$$

Представляет интерес интегрирование степенного ряда (3.15) по отрезку $[0, x]$, где $|x| < R$:

$$\int_0^x S(x)dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

В этом случае опять получаем степенной ряд, который имеет тот же интервал сходимости, что и ряд (3.15).

Следствие 3. Если степенной ряд сходится в интервале $(-R, R)$, то его сумма $S(x)$ представляет собой функцию, имеющую внутри интервала сходимости производные любого порядка. Каждая производная есть сумма ряда, получающегося в результате почленного дифференцирования данного ряда (3.15) соответствующее число раз; при этом интервал сходимости каждого ряда, получившегося в результате дифференцирования, есть тот же интервал $(-R, R)$, т.е.

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$S''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \ldots, \quad \ldots, \quad \text{если } |x| < R.$$

Пусть функция $S(x)$ является суммой степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ на интервале сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$, другими словами, $S(x)$ разлагается в степенной ряд:

$$S(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + a_n \cdot (x - x_0)^n + \ldots \tag{3.17}$$

Так как ряд (3.17) приводится к виду (3.15) заменой переменной $x - x_0 = X$, то функция $S(x)$ обладает следующими свойствами:

1) функция $S(x)$ непрерывна на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$;

2) степенной ряд (3.17) можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости, т.е.

$$S'(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (x - x_0) + \ldots + n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} + \ldots,$$

а это означает, что функция $S(x)$ в интервале сходимости дифференцируема бесконечное число раз;

3) степенной ряд (3.17) можно почленно интегрировать по любому отрезку $[\alpha; \beta]$, если $[\alpha; \beta] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$, причем

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (x - x_0)^n dx.$$

Теорема 3.4. Если функция $f(x)$ на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ разлагается в степенной ряд:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + a_n \cdot (x - x_0)^n + \ldots, \qquad (3.18)$$

то это разложение единственно.

Доказательство. По условию ряд (3.18) сходится на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, и функция $f(x)$ – его сумма. Следовательно, на основании второго свойства, ряд (3.18) можно почленно дифференцировать на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ любое число раз. Дифференцируя, получаем:

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot a_3 \cdot (x - x_0)^2 + 4 \cdot a_4 \cdot (x - x_0)^3 + \ldots + n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot 4 \cdot a_4 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2} + \ldots,$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4 \cdot (x - x_0) + \ldots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-3} + \ldots,$$

…………………………………………………………………………………...

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x + \ldots, \ \ldots$$

Полагая в полученных равенствах и в равенстве (3.18) $x = x_0$, имеем:

$$f(x_0) = a_0, \ f'(x_0) = 1 \cdot a_1, \ f''(x_0) = 2! \cdot a_2, \ \ldots, \ f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n, \ \ldots$$

откуда находим:

$$a_0 = f(x_0), \ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ \ldots, \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ \ldots \qquad (3.19)$$

Таким образом, все коэффициенты ряда (3.18) определяются единственным образом формулами (3.19), что и доказывает теорему.

3.4. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Для функции $f(x)$, имеющей все производные до $(n+1)$-го порядка включительно, в окрестности точки $x = x_0$ справедлива формула Тейлора /5/:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \quad (3.20)$$

Остаточный член формулы Тейлора $R_n(x)$ может быть вычислен по формуле:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad (3.21)$$

где ξ – некоторая точка между x_0 и x, т.е. $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ для некоторого $0 < \theta < 1$.

При $x_0 = 0$ формула (3.20) называется формулой Маклорена.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков в окрестности точки $x = x_0$, то в формуле Тейлора (3.20) число n можно брать сколь угодно большим. Допустим, что в рассматриваемой окрестности остаточный член R_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Тогда, переходя в формуле (3.20) к пределу при $n \to \infty$, получим справа бесконечный ряд, который называется ***рядом Тейлора***:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots \quad (3.22)$$

При $x_0 = 0$ получаем ряд, который называется ***рядом Маклорена*:**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f''(0)}{n!}x^n + \ldots \quad (3.23)$$

Формулы (3.22) и (3.23) справедливы лишь в том случае, если $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае ряды справа сходятся и их сумма равна данной функции $f(x)$. Докажем, что это действительно так.

Теорема 3.5. Для того чтобы ряд Тейлора (3.22) сходился на $(x_0 - R, x_0 + R)$ и имел своей суммой функцию $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы на $(x_0 - R, x_0 + R)$ остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора (3.20) стремился к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Доказательство

1) **Необходимость.** Пусть функция $f(x)$ – сумма ряда Тейлора на $(x_0 - R, x_0 + R)$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, где $S_n(x)$ – n-я частичная сумма ряда (3.20).

Формулу Тейлора (3.20) можно представить в виде:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (3.24)$$

где n-й остаток ряда $R_n(x)$ определяется формулой (3.21). Из равенства (3.24) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

2) **Достаточность.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Тогда из равенства (3.24) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x) - S_n(x)] = 0$, т.е. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. А это означает, что ряд Тейлора (3.22) сходится на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, и его сумма для любого x из этого интервала равна: $f(x)$.

Из доказательства теоремы 3.4 следует, что если функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора (степенной ряд), то это разложение единственное.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, то ряд не представляет данной функции, хотя может и сходиться (к другой функции). Поэтому, для того чтобы доказать, что формально выписанный ряд Тейлора сходится к данной функции, нужно доказать, что остаточный член стремится к нулю.

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена функцию: $f(x) = e^x$.

Решение. Найдём производные функции $f(x) = e^x$ и вычислим их при $x_0 = 0$:

$$f'(x) = e^x, \ f''(x) = e^x, \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = e^x, \ \ldots$$

Значит, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$, …, $f^{(n)}(0) = 1$, … В результате, получаем ряд:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{3.25}$$

Покажем, что полученный ряд сходится к функции $f(x) = e^x$. Найдём интервал сходимости степенного ряда (3.25):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

следовательно, ряд (3.25) абсолютно сходится на всей числовой прямой.

Докажем теперь, что функция e^x – сумма ряда (3.25). Остаточный член

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где число ξ лежит между 0 и x. Отсюда следует, что

$$\left| R_n(x) \right| < e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{3.26}$$

Так как ряд (3.25) сходится, то используя необходимый признак сходимости ряда (теорема 3.1), можно записать: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^n}{n!} = 0$, тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Поэтому, переходя к пределу в неравенстве (3.26) при $n \to \infty$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

при любом x и, следовательно, функция $f(x) = e^x$ является суммой ряда (3.25).

Таким образом, при любом x имеет место разложение:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

В общем случае разложение в степенные ряды основано на использовании рядов Тейлора или Маклорена. Но на практике степенные ряды многих функций можно найти формально, используя известные разложения (например, как для функции $f(x) = e^x$) или формулу для суммы членов геометрической прогрессии. Иногда при разложении полезно пользоваться почленным дифференцированием или интегрированием рядов. В интервале сходимости ряды сходятся к соответствующим функциям.

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию: $f(x) = \mathrm{ch}x$.

Решение. Так как $\mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, то воспользуемся разложением:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

где вместо x подставляем $-x$, тогда

$$e^x = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Полученный ряд сходится при любых $x \in R$.

Теперь найдём разложение функции ch$x$:

$$\text{ch}x = \frac{1}{2}\cdot(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots + 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \ldots + 2\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right).$$

Таким образом,

$$\text{ch}x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

причём ряд сходится при любом $x \in R$.

Пример 5. Рассмотрим ряд: $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ Данный ряд является суммой членов геометрической прогрессии с первым членом $a = 1$ и знаменателем $q = x$. Как известно, при $|x| < 1$ данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-x}$. Следовательно,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{3.27}$$

Данное равенство является разложением функции $f(x) = \frac{1}{1-x}$ в степенной ряд (ряд Маклорена) на интервале $-1 < x < 1$.

Пример 6. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Используя разложение (3.27), можно записать:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{2\cdot(n-1)} + \ldots$$

Полученный ряд сходится при $-1 < x < 1$, значит, его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0, x] \subset (-1, 1)$. Следовательно,

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^x x^{2(n-1)}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

С другой стороны,

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg}\, x\Big|_0^x = \text{arctg}\, x,$$

поэтому

$$\text{arctg}\, x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

т.е. получили ряд Маклорена, сходящийся к данной функции при $|x| < 1$. Можно доказать, что ряд сходится и для $x = \pm 1$, и что для обоих этих значений сумма ряда равна arctg x.

Пример 7. Разложить функцию: $f(x) = \sin x$ в ряд Маклорена.

Решение. Найдём производные:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

откуда, полагая $x = 0$, получаем:

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad f^{(4)}(0)=0,\ \ldots$$

Составим по формуле (3.23) ряд Маклорена:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \tag{3.28}$$

Найдём радиус сходимости степенного ряда (3.28):

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1)-1)!}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot2n\cdot(2n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2n(2n+1)=\infty,$$

т.е. ряд (3.28) сходится абсолютно при любом $x\in R$. Исследуем остаточный член:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{\sin\left(\xi+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

где $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$. Так как $\left|\sin\left(\xi+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\right|\le1$, то $|R_n(x)|\le\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. А так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$ (см. пример 3), то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ при любом x. Следовательно,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,$$

т.е. получили ряд, сходящийся к функции $f(x)=\sin x$ при любом $x\in R$.

Аналогично можно получить разложение функции $f(x)=\cos x$ в ряд Маклорена, справедливое при любом $x\in R$. Однако ещё проще разложение $\cos x$ получается почленным дифференцированием ряда для $\sin x$:

$$(\sin x)'=(x)'-\left(\frac{x^3}{3!}\right)'+\left(\frac{x^5}{5!}\right)'-\left(\frac{x^7}{7!}\right)'+\ldots+\left(\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)'+\ldots$$

откуда

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Аналогично можно получить разложения в степенные ряды многих других функций. Выпишем ряды Маклорена для некоторых элементарных функций, которые чаще всего используются в приближённых вычислениях:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty), \tag{3.29}$$

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad(-\infty<x<+\infty), \tag{3.30}$$

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad(-\infty<x<+\infty), \tag{3.31}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad(-\infty<x<+\infty), \tag{3.32}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (3.33)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x < 1), \quad (3.34)$$

$$\text{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad (-1 < x < 1), \quad (3.35)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + ... + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)}\frac{x^{2 \cdot n-1}}{2n-1} + ... \quad (-1 < x < 1), \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1 < x < 1), \quad (3.37)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot (m-n+1)}{n!}x^n + ... \quad (-1 < x < 1). \quad (3.38)$$

Для каждого случая в скобках указана область, в которой степенной ряд сходится к соответствующей функции. Последний ряд, называемый ***биноминальным***, на концах интервала сходимости ведёт себя по-разному в зависимости от $m \in R$: при $m \geq 0$ абсолютно сходится в точках $x = \pm 1$; при $-1 < m < 0$ расходится в точке $x = -1$ и условно сходится в точке $x = 1$; при $m \leq -1$ расходится в точках $x = \pm 1$.

3.5. ПРИМЕНЕНИЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Рассмотрим наиболее важные применения степенных рядов.

Вычисление приближённого значения функции

Для нахождения приближённого значения функции $f(a)$ с заданной точностью ε $(\varepsilon > 0)$, сначала разлагают функцию $f(x)$ в степенной ряд и полагают в нём $x = a$. Затем устанавливают, сколько первых членов полученного числового ряда надо взять, чтобы их сумма была приближённым значением $f(a)$ с заданной точностью ε, т.е. $|r_n| < \varepsilon$. В результате, получают: $f(a) \approx S_n$.

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,001 значение $\sin\frac{1}{2}$.

Решение. В ряде Маклорена (3.32) для $\sin x$ положим $x = \frac{1}{2}$, это можно сделать, так как равенство (3.32) справедливо для любого x, в результате получим:

$$\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{3!} + \frac{(1/2)^5}{5!} - \frac{(1/2)^7}{7!} + ...$$

Необходимо найти n, при котором $\sin\frac{1}{2} \approx S_n$, и ошибка была бы не больше, чем требуемая в задаче точность $\varepsilon = 0{,}001$.

Ряд

$$\sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^5 5!} - \frac{1}{2^7 7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!} + ...$$

является знакочередующимся, поэтому по следствию из признака Лейбница

$$|r_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Так как

$$|a_1| = 0{,}5, \quad |a_2| = \frac{1}{2^3 3!} = \frac{1}{8 \cdot 6} \approx 0{,}021, \quad |a_3| = \frac{1}{2^5 5!} = \frac{1}{32 \cdot 120} \approx 0{,}00026,$$

т.е. уже третий член ряда меньше $\varepsilon = 0{,}001$, то $n = 2$, и с точностью до 0,001

$$\sin\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{8\cdot 6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{48}\approx 0{,}479.$$

Пример 2. Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

Решение. Известно, что степенной ряд (3.34) при $x = 1$ сходится условно. Для того чтобы вычислить $\ln 2$ с помощью ряда (3.34) с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$, необходимо взять не менее 10 000 его членов. Поэтому воспользуемся рядом, который получается в результате вычитания степенных рядов функций $\ln(1+x)$ и $\ln(1-x)$:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}+\ldots\right)-$$

$$-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots\right).$$

При $|x|<1$ полученный ряд сходится абсолютно. Поскольку $\frac{1+x}{1-x}=2$ при $x=\frac{1}{3}$, то, подставив это значение x в ряд, получим:

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}+\ldots\right).$$

Для вычисления $\ln 2$ с заданной точностью необходимо найти такое число n членов частичной суммы S_n, при котором сумма остатка $|r_n|<\varepsilon$. В нашем случае

$$r_n=2\left(\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)3^{2n+3}}\right). \tag{3.39}$$

Поскольку числа $2n+3$, $2n+5$, … больше, чем $2n+1$, то, заменив их на $2n+1$, мы увеличим каждую дробь в формуле (3.39). Поэтому

$$r_n<\frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{3^{2n+3}}+\ldots\right)=\frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\ldots\right).$$

В скобках получили сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $\left(a=1,\, q=\frac{1}{9}\right)$, которая равна $\frac{1}{1-1/9}=\frac{9}{8}$, поэтому $r_n<\frac{2}{(2n+1)3^{2n+1}}\frac{9}{8}=\frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}$.

Путём подбора значений n находим, что для $n=3$ $r_3<0{,}00015$, при этом

$$\ln 2\approx 2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}\right)\approx 0{,}6931.$$

Вычисление интегралов

Так как степенные ряды можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему внутри их интервала сходимости, то с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд можно находить приближённое значение определённого интеграла.

Пример 3. Вычислить приближённо с точностью до 0,001 определённый интеграл: $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

Решение. Первообразная функции $\sin x^2$ не выражается через элементарные функции, поэтому применим ряд (3.32), в который вместо x подставим x^2:

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots,$$

который сходится к функции $\sin x^2$ при любом $x \in R$. Тогда

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots \right) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^{10}}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^{14}}{7!} dx + \ldots =$$

$$= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 - \left. \frac{x^7}{7 \cdot 3!} \right|_0^1 + \left. \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} \right|_0^1 - \left. \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} \right|_0^1 + \ldots = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \ldots,$$

т.е.

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \frac{1}{15 \cdot 7!} + \ldots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{6 \cdot 7} \approx 0{,}309,$$

так как уже третий член полученного знакочередующегося ряда меньше $\varepsilon = 0{,}001$.

Приближённое решение дифференциальных уравнений

В случае, когда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение не удаётся, его решение удобно искать в виде степенного ряда, например, ряда Тейлора или Маклорена.

При решении задачи Коши

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0, \tag{3.40}$$

используется ряд Тейлора:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \tag{3.41}$$

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ находятся путём последовательного дифференцирования уравнения (3.40) и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

Пример 4. Дано дифференциальное уравнение: $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$, в виде ряда Тейлора (взяв первые 5 его членов).

Решение. Пусть решением исходного дифференциального уравнения является функция:

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \ldots \tag{3.42}$$

Начальное условие $y(1) = 1$ даёт первый член этого ряда. Подставив $x = 1$ и $y = 1$ в данное уравнение $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$, получим: $y'(1) = 1 + 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 1$. Продифференцируем исходное уравнение по переменной x:

$$y'' = \left(1 + x + x^2 - 2y^2\right)' = 1 + 2x - 4yy', \quad y''(1) = 1 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -1,$$

$$y''' = (1 + 2x - 4yy')' = 2 - 4(y')^2 - 4yy'', \quad y'''(1) = 2 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 2,$$

$$y^{IV} = \left(2 - 4(y')^2 - 4yy''\right)' = -4 \cdot 2y'y'' - 4y'y'' - 4yy''' = -12y'y'' - 4yy''',$$

$$y^{IV} = -12 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 12 - 8 = 4$$

и т.д. Подставим найденные значения в ряд (3.42)

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{4}{4!}(x-1)^4 \ldots = x - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 \ldots$$

3.6. РЯДЫ ФУРЬЕ

Определение. Функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+...+a_n\cos nx+b_n\sin nx+...=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{3.43}$$

называется ***тригонометрическим рядом***, а числа: $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ...$ – ***коэффициентами тригонометрического ряда.***

Если ряд (3.43) сходится, то его сумма есть ***периодическая*** функция $f(x)$ с периодом 2π, так как $\sin nx$ и $\cos nx$ являются ***периодическими*** функциями с периодом 2π. Таким образом,

$$f(x)=f(x+2\pi).$$

Кроме того, функции $\sin nx$ и $\cos nx$ образуют систему функций ***ортогональную*** на отрезке $[-\pi,\pi]$ в следующем смысле: интеграл по отрезку $[-\pi,\pi]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по отрезку $[-\pi,\pi]$ от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.

Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(k+n)x+\cos(k-n)x]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k+n)x}{k+n}+\frac{\sin(k-n)x}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0 \text{ при } k\neq n. \tag{3.44}$$

Аналогично находим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)dx=0 \text{ при } k\neq n;\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)dx=0; \tag{3.45}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi; \tag{3.46}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2kx)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2k}\sin 2kx\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\cos(kx)dx=\frac{1}{2k}\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0;\quad \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin(kx)dx=-\frac{1}{2k}\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0; \tag{3.47}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi. \tag{3.48}$$

Тригонометрические ряды особенно удобны при изучении периодических функций, описывающих различные периодические процессы (колебательные и вращательные движения различных деталей машин и приборов, периодическое движение небесных тел и элементарных частиц, акустические и электромагнитные колебания и др.).

Теорема 3.6. Если функция $f(x)$, определенная и интегрируемая на отрезке $[-\pi,\pi]$, разлагается в тригонометрический ряд:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{3.49}$$

который можно интегрировать почленно, то это разложение единственно.

Доказательство. Интегрируя (3.49) и учитывая формулы (3.48), получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx\right] = a_0\pi ,$$

откуда находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx . \tag{3.50}$$

Для определения коэффициента a_k при $\cos kx$ $(k \in N)$ умножим равенство (3.49) на $\cos kx$ и проинтегрируем по x от $-\pi$ до π (ряд можно интегрировать почленно после умножения его на ограниченную функцию). Тогда на основании формул (3.44) – (3.48) получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\cos(nx) + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\sin(nx)dx\right] =$$

$$= a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx = a_k\pi ,$$

откуда

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx . \tag{3.51}$$

Аналогично, умножая равенство (3.49) на $\sin kx$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до π, получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = b_k\pi ,$$

откуда

$$b_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx . \tag{3.52}$$

Таким образом, коэффициенты a_0, a_k и b_k ряда (3.49) определяются единственным образом формулами (3.50) – (3.52), что и доказывает теорему.

Эта теорема дает основание ввести следующее определение.

Определение. Функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \tag{3.53}$$

где коэффициенты a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ определяются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \tag{3.54}$$

называется ***рядом Фурье функции f(x)***. Отметим, что всегда $b_0 = 0$.

Выясним, какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходился, и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a, b]$, если отрезок можно разбить конечным числом точек $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на интервалы $(a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, b)$ так, чтобы в каждом из них функция была монотонна.

Из определения следует, что если функция $f(x)$ – кусочно-монотонна и ограниченная на отрезке $[a, b]$, то она может иметь только точки разрыва первого рода. Действительно, если $x = c$ есть точка разрыва функции $f(x)$, то в силу монотонности функции существуют пределы:

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0), \quad \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0),$$

т.е. точка c есть точка разрыва первого рода (рис. 3.4).

Сформулируем теорему, которая дает достаточные условия представимости функции $f(x)$ рядом Фурье.

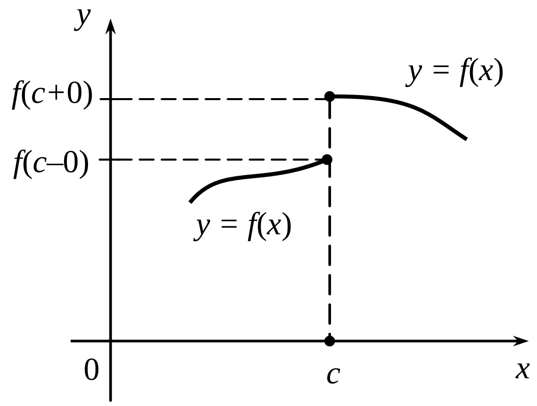

Рис. 3.4

Теорема 3.7. Если функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π, кусочно-монотонна и ограниченна на отрезке $[-\pi, \pi]$, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

для любой точки непрерывности x (т.е. является суммой своего ряда Фурье). Если же точка x – точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то сумма $S(x)$ ряда Фурье в этой точке

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – пределы слева и справа соответственно в точке x.

Из теоремы следует, что $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$ и сумма $S(x)$ равна среднему арифметическому пределов слева и справа функции $f(x)$ в точках разрыва первого рода.

Из теоремы следует также, что класс функций, представимых рядами Фурье, довольно широк. Поэтому ряды Фурье нашли широкое применение в различных разделах математики. Особенно успешно ряды Фурье применяются в математической физике и её приложениях к конкретным задачам механики и физики.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, имеющую период 2π и заданную на промежутке $(-\pi, \pi]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{если } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ (рис. 3.5) имеет точки разрыва $x = (2k-1)\pi$, $k \in Z$.

Так как $f(x)$ кусочно-монотонная и имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ лишь одну точку разрыва первого рода $\left(\lim\limits_{x\to-\pi-0} f(x) = f(-\pi) = \pi, \lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x) = 0\right)$, то во всех точках x

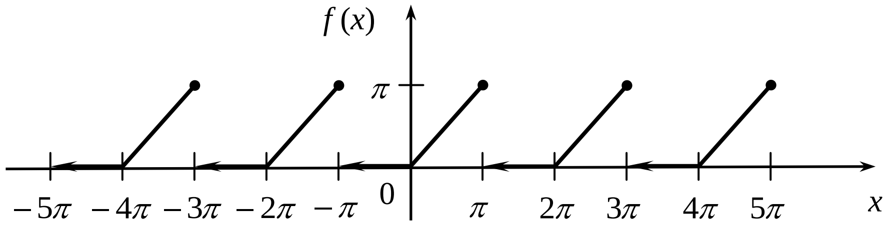

Рис. 3.5

непрерывности функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье. Найдём коэффициенты ряда по формулам (3.54):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \left|\begin{array}{c} u = x,\, du = dx \\ dv = \cos(nx)dx,\, v = \frac{1}{n}\sin(nx)\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin(nx)\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right) = -\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi n^2}\cos(nx)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}(\cos(\pi n) - \cos 0) = \frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right),\ n \in N;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = \left|\begin{array}{c} u = x,\, du = dx, \\ dv = \sin(nx)dx,\, v = -\frac{1}{n}\cos(nx)\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\Bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(\pi n) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\Bigg|_0^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{n}\cos(\pi n) = -\frac{1}{n}(-1)^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n},\ n \in N.$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд (3.53), получаем:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right),$$

для любого $x \neq (2k-1)\pi$, $k \in Z$. В точках сумма найденного ряда $S(x) = \frac{f(-\pi - 0) + f(-\pi + 0)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}$ (рис. 3.6).

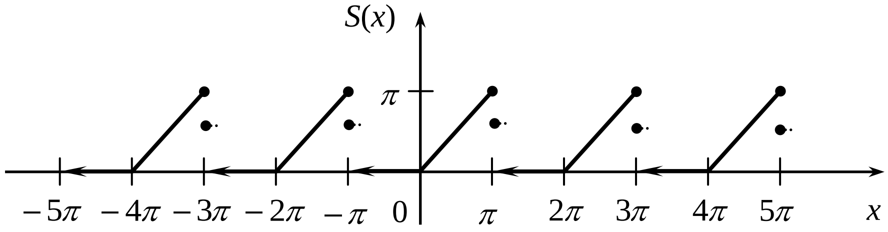

Рис. 3.6

Пусть $f(x)$ есть периодическая функция с периодом $2l$, вообще говоря, отличным от 2π. Разложим её в ряд Фурье.

Сделаем замену переменной по формуле $x = \frac{lt}{\pi}$. Тогда функция $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ будет периодической функцией от t с периодом 2π. Её можно разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le x \le \pi$:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\right), \tag{3.55}$$

где $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos(nt)dt$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\sin(nt)dt$.

Возвратимся теперь к старой переменной x:

$$x=\frac{l}{\pi}t,\quad t=\frac{\pi}{l}x,\quad dt=\frac{\pi}{l}dx.$$

Тогда

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx, \tag{3.56}$$

где $n\in N$. Формула (3.55) получит вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)+b_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right), \tag{3.57}$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам (3.56). Это и есть ***ряд Фурье для периодической функции с периодом 2l.***

Теорема 3.8. Если периодическая функция с периодом $2l$ кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке $[-l,l]$, то её ряд Фурье (3.57) сходится для любого $x\in R$ к сумме:

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Нетрудно видеть, что если периодическая функция чётная, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам, а если нечётная, то по синусам. Из определения чётной и нечётной функции следует, что если $\varphi(x)$ – чётная функция, то $\int\limits_{-l}^{l}\varphi(x)dx=2\int\limits_{0}^{l}\varphi(x)dx$, а если $\varphi(x)$ – нечётная функция, то $\int\limits_{-l}^{l}\varphi(x)dx=0$. Таким образом, если в ряд Фурье разлагается нечётная функция $f(x)$, то произведение $f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ есть функция также нечётная, а $f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ – чётная, следовательно,

$$\begin{gathered}a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx=0,\quad a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=0,\\ b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,\end{gathered} \tag{3.58}$$

т.е. ряд Фурье нечётной функции содержит «только синусы»:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \tag{3.59}$$

Если в ряд Фурье разлагается чётная функция $f(x)$, то произведение $f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ есть функция нечётная, $f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$ – чётная и, следовательно,

$$a_0=\frac{2}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=0, \tag{3.60}$$

т.е. ряд Фурье чётной функции содержит «только косинусы»:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \tag{3.61}$$

Полученные формулы позволяют упрощать вычисления при нахождении коэффициентов Фурье в тех случаях, когда заданная функция является чётной или нечётной.

Формулы (3.58) – (3.61) справедливы и в том случае, когда $f(x)$ – периодическая функция с периодом 2π $(l = \pi)$.

Рассмотрим разложение в ряд Фурье непериодической функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ определена только на отрезке $[-l, l]$, то рассматривают её периодическое продолжение (с периодом $2l$) на всю числовую ось и разлагают его в ряд Фурье обычным образом.

Если функция задана на отрезке $[0, l]$, то сначала продолжают её на отрезке $[-l, l]$ чётным или нечётным образом, а затем периодически продолжают на всю числовую ось.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, определённую на отрезке $[0, \pi]$ равенством: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad 0 \le x < \pi/2 \\ \pi/2, & \text{если} \ \ \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$.

Решение. Функцию $f(x)$ можно продолжить на отрезке $[-\pi, \pi]$ либо чётным (рис. 3.7), либо нечётным (рис. 3.8) образом, а затем рассмотреть её периодическое (с периодом 2π) продолжение на всю числовую ось.

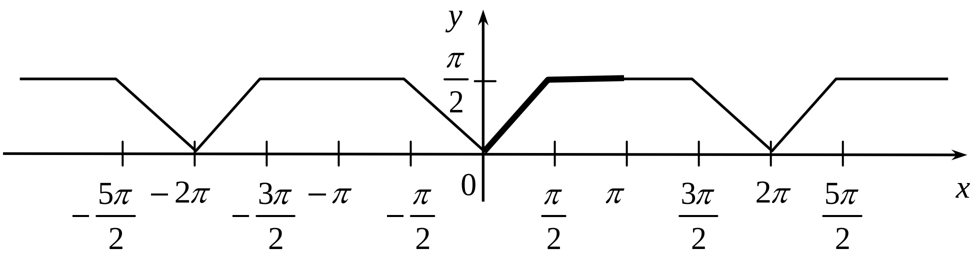

Рис. 3.7

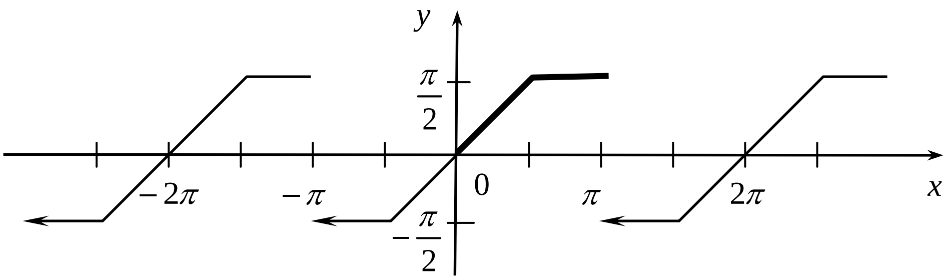

Рис. 3.8

Чётное продолжение функции $f(x)$ непрерывно на всей действительной оси и разлагается в ряд по косинусам, а нечётное продолжение имеет разрыв первого рода в точках $(2k-1)\pi$ $(k \in Z)$ и разлагается по синусам.

Вычислим коэффициенты рядов Фурье для этих продолжений по формулам (3.58) и (3.60) при $l = \pi$.

Для нечётного продолжения функции $f(x)$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} xdx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2}x\bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{3\pi}{4},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}\cos(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin(nx)\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2n}\sin(nx)\bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1\right) + \frac{\pi}{2n}\left(\sin(\pi n) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1\right) - \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 1\right),$$

$$b_n = 0,$$

тогда

$$f(x) = \frac{3}{8}\pi + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{2} - 1\right)\cos(nx) \quad (x \in [0, \pi]).$$

Для нечётного продолжения функции $f(x)$:

$$a_0 = 0, \ a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{2}\sin(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos(nx)\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\bigg|_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{2n}\cos(nx)\bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{n}\cos(\pi n) + \frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{n}\cos(\pi n) = \frac{2}{\pi n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2} + (-1)^{n+1}\right)\sin(nx) \quad (x \in [0, \pi]).$$

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

4.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'\cos x - (y+1)\sin x = 0$.

Решение. Разделим переменные. Для этого умножим обе части уравнения на множитель $\dfrac{dx}{\cos x(y+1)}$, заменив y' на $\dfrac{dy}{dx}$. Уравнение примет вид: $\dfrac{dy}{y+1} - \dfrac{\sin x dx}{\cos x} = 0.$

Проинтегрируем почленно это уравнение, получим:

$$\int \frac{d(y+1)}{y+1} + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln c, \quad \ln|y+1| + \ln|\cos x| = \ln c,$$

$$(y+1)\cos x = c, \;\; y+1 = \frac{c}{\cos x}, \;\; y = \frac{c}{\cos x} - 1,$$

получили общий интеграл уравнения.

Пример 2. Найти частное решение уравнения: $2yy' = 1 - 3x^2$, если $y = 3$ при $x = 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде: $2ydy = (1 - 3x^2)dx$, заменив y' на $\dfrac{dy}{dx}$.

Интегрируя обе части уравнения, получим:

$$\int 2ydy = \int \left(1 - 3x^2\right)dx + c, \qquad y^2 = x - x^3 + c$$

– общий интеграл уравнения. Подставим начальные условия $y = 3$ при $x = 1$, получим: $9 = 1 - 1 + c$, отсюда следует, что $c = 9$. Искомое частное решение имеет вид:

$$y^2 = x - x^3 + 9 \quad \text{или} \quad x^3 + y^2 - x - 9 = 0.$$

4.2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пример. Проинтегрировать уравнение: $2x^2dy = (x^2 + y^2)\,dx$.

Решение. Разделив обе части уравнения на x^2dx, получим уравнение, правая часть которого есть функция отношения $\dfrac{y}{x}$:

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \quad \text{или} \quad 2\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad 2y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Положим в нем $u = \dfrac{y}{x}$, тогда $y = ux$, дифференцируем $y' = u'x + u$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$2u'x + 2u = 1 + u^2, \quad 2\frac{du}{dx}x = u^2 - 2u + 1, \quad \frac{2du}{u^2 - 2u + 1} = \frac{dx}{x}.$$

После разделения переменных получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем $-\dfrac{2}{u-1} = \ln c + \ln x,$ подставим $u = \dfrac{y}{x}$, получим:

$$-\frac{2}{(y/x)-1}=\ln cx, \quad -\frac{2x}{y-x}=\ln cx, \quad cx=e^{-2x/(y-x)}.$$

Замечание. При разделении переменных мы делили на x и на $(u-1)^2$, что возможно лишь при $x \neq 0$ и $u \neq 1$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что $x = 0$ и $u = 1$ т. е. $y = x$, являются также решениями данного уравнения, но они не входят в общий интеграл. Такие решения называются особыми.

4.3. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пример 1. Найти общее решение уравнения: $\left(1+x^2\right)y'-2xy=\left(1+x^2\right)^2$.

Решение. Поделим обе части данного уравнения на $(1 + x^2)$, получим:

$$y'-\frac{2x}{1+x^2}\cdot y=1+x^2$$

– линейное уравнение. Решим его, применяя метод подстановки $y = u\cdot v$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставим значения y и y' в данное уравнение:

$$u'v+uv'-\frac{2x}{1+x^2}uv=1+x^2,$$

сгруппируем члены:

$$u'v+u\left(v'-\frac{2x}{1+x^2}v\right)=1+x^2. \tag{4.1}$$

Выберем функцию v так, чтобы выражение в скобках было равно нулю:

$$v'-\frac{2xv}{1+x^2}=0.$$

Тогда уравнение (4.1) запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} v'-\dfrac{2x}{1+x^2}v=0 \\ u'v=1+x^2 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Найдем функцию v из первого уравнения системы:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{1+x^2}v=0,$$

разделим переменные:

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x}{1+x^2}dx.$$

Интегрируя, получаем: $\ln v=\ln(1+x^2)+\ln c_1$, пусть $c_1 = 1$, $v = 1 + x^2$.

Подставим значение функции v во второе уравнение системы (4.2):

$$\frac{du}{dx}(1+x^2)=1+x^2, \quad \frac{du}{dx}=1, \quad du=dx, \quad \text{откуда} \quad u = x + c.$$

Найденные функции u и v подставим в равенство $y = u\cdot v$, получим:

$$y = (1 + x^2)(x + c)$$

– общее решение данного уравнения.

Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению.

Пример 2. Найти кривую, проходящую через точку $M_0(1, 4)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 4.1). Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомой кривой, AB – отрезок касательной к кривой в данной точке, заключенный между координатными осями. По условию задачи $BM = MA$. Если OP – абсцисса точки M, то $\Delta AMP \sim \Delta ABO$ и

$$\frac{OA}{PA} = \frac{OB}{MP} = \frac{AB}{MA}.$$

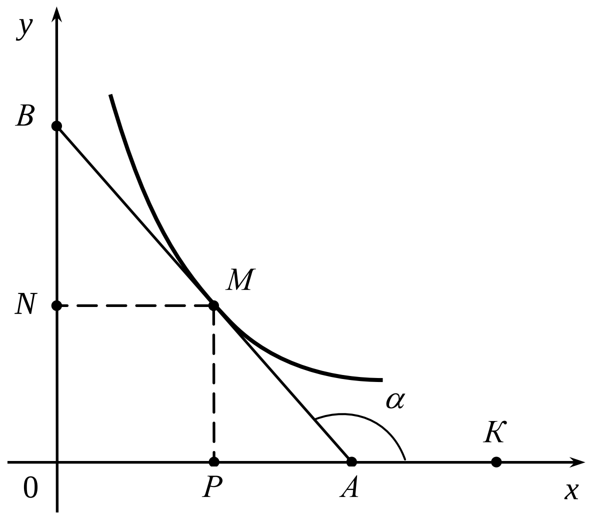

Рис. 4.1.

Но $\frac{AB}{MA} = 2$, $PA = OP$, поэтому $\frac{OA}{OP} = \frac{BO}{MP} = 2$, т.е. $OA = 2x$, $OB = 2y$.

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$ выражается с помощью производной:

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha, \quad \text{где} \quad \alpha = \angle BAK.$$

С другой стороны, так как

$$tg\alpha = -tg\angle BAO \quad \text{и} \quad tg\angle BAO = \frac{OB}{OA},$$

то

$$tg\alpha = -\frac{OB}{OA} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}.$$

Следовательно, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ – дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$, интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + \ln c, \quad \ln y + \ln x = \ln c, \quad yx = c.$$

Так как кривая должна проходить через точку $M_0(1, 4)$, то подставляя ее координаты в данное уравнение, находим: $1 \cdot 4 = c$, $c = 4$. Таким образом, искомая кривая определяется уравнением $xy = 4$.

Пример 3. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, через 4 с скорость ее 1 м/с. Найти скорость движения лодки через 12 с после начала движения.

Решение. Согласно второму закону динамики дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt,$$

интегрируем:

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int dt + \ln c, \quad \ln v = -\frac{k}{m}t + \ln c, \quad v = ce^{-kt/m}.$$

Подставляя начальные условия: $t = 0$, $v = 1{,}5$ находим:

$$1{,}5 = ce^{-k\cdot 0/m}; \qquad c = 1{,}5.$$

Следовательно, $v = 1{,}5e^{-kt/m}$. Значение k/m определим, подставляя второе начальное условие: $t = 4$, $v = 1$, $1 = 1{,}5e^{-4k/m}$. Отсюда следует: $\dfrac{k}{m} = -\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$. Итак, получили частное решение данного уравнения:

$$v(t) = 1{,}5e^{(\ln(2/3))t/4}, \quad v(t) = \frac{3}{2}e^{(\ln(2/3))t/4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{4}-1}.$$

Подставим в это равенство $t = 12$, окончательно получим:

$$v(12) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0{,}44.$$

4.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Пример 1. Проинтегрировать уравнение: $y'' = \dfrac{24}{(x+2)^5}$.

Решение. Интегрируем это уравнение последовательно два раза:

$$y' = \int \frac{24}{(x+2)^5}dx = -\frac{6}{(x+2)^4} + c_1, \quad y = \int\left(-\frac{6}{(x+2)^4} + c_1\right)dx = \frac{2}{(x+2)^3} + c_1x + c_2.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения: $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Решение. Это уравнение не содержит явно искомой функции y. Положив в уравнении $y' = z$, $y'' = z'$, получим линейное уравнение первого порядка относительно $z(x)$: $z' + z\operatorname{tg} x = \sin 2x$. Заменив $z = uv$, $z' = u'v + uv'$, получим:

$$u'v + uv' + uv\operatorname{tg}x = \sin 2x, \; u'v + u(v' + v\operatorname{tg}x) = \sin 2x.$$

Это уравнение заменим системой уравнений:

$$\begin{cases} v' + v\operatorname{tg} x = 0 \\ u'v = \sin 2x \end{cases}.$$

Решаем первое уравнение системы:

$$v' + v\operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dv}{dx} = -v\operatorname{tg} x, \quad \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x dx,$$

интегрируем: $\displaystyle\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{\sin x}{\cos x}dx + c_0$, $c_0 = 0$, откуда $\ln v = \ln\cos x$ или $v = \cos x$. Подставим найденное значение v во второе уравнение системы: $u'\cos x = \sin 2x$, $\dfrac{du}{dx}\cos x = 2\sin x\cos x$. Разделим переменные $du = 2\sin x dx$, интегрируем: $u = -2\cos x + c_1$, следовательно, $z = u\cdot v = \cos x(-2\cos x + c_1)$. Возвращаясь к первоначальной переменной y, получим:

$$y' = z = \cos x(-2\cos x + c_1), \quad \frac{dy}{dx} = c_1\cos x - 2\cos^2 x.$$

Разделим переменные $dy = (-2\cos^2 x + c_1\cos x)dx$, интегрируем:

$$\int dy = -2\int\cos^2 x dx + c_1\int\cos x dx + c_2, \quad y = -2\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx + c_1\sin x + c_2,$$

получим общее решение данного уравнения:

$$y = -x - \frac{\sin 2x}{2} + c_1\sin x + c_2$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения: $y''(3+y)=(y')^2$.

Решение. Это дифференциальное уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x. Положим $y' = p$, $y'' = p(dp/dy)$, подставим в данное уравнение:

$$p\frac{dp}{dy}(3+y)=p^2.$$

Разделим переменные $\frac{pdp}{p^2}=\frac{dy}{3+y}$ или $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{3+y}$, интегрируем:

$$\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{3+y}+\ln c_1,\quad \ln p=\ln(3+y)+\ln c_1,\quad p=c_1(3+y).$$

А так как $p = y'$, то получим $y' = c_1(3 + y)$ – уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Разделим их: $\frac{dy}{dx}=c_1(3+y)$, $\frac{dy}{3+y}=c_1dx$, интегрируем:

$$\int\frac{dy}{3+y}=c_1\int dx+c_2,\quad \ln(3+y)=c_1x+c_2,\quad 3+y=e^{c_1x+c_2},\quad y=e^{c_1x+c_2}-3.$$

Получили общее решение данного уравнения.

4.5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения используется метод неопределенных коэффициентов. Частное решение линейного неоднородного уравнения для правых частей специального вида может быть найдено по виду правой части. Запишем в таблицу наиболее часто встречающиеся случаи (табл. 4.1).

Правая часть дифференциального уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
1) $f(x)=P_m(x)$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m.	а) Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$y=Q_m(x)=a_0x^m+$ $+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m$
	б) Число 0 является корнем характеристического уравнения кратности s	$y=x^sQ_m(x)$
2) $f(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$.	а) Число α не является корнем характеристического уравнения	$y=Q_m(x)e^{\alpha x}$
	б) Число α является корнем характеристического уравнения кратности s	$y=x^sQ_m(x)e^{\alpha x}$
3) $f(x)=P_m(x)\cos\beta x+$ $+Q_n(x)\sin\beta x$.	а) Число βi не является корнем характеристического уравнения	$y=U_k(x)\cos\beta x+$ $+V_k(x)\sin\beta x$, где $k=\max\{m,n\}$.
	б) Число βi является корнем характеристического уравнения	$y=x[U_k(x)\cos\beta x+$ $+V_k(x)\sin\beta x]$, где $k=\max\{m,n\}$.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y''-4y'+4y=e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Решение. Запишем соответствующее однородное уравнение: $y''-4y'+4y=0$, характеристическое уравнение имеет вид: $k^2-4k+4=0$, его корни $k_1=2$, $k_2 = 2$.

Общее решение однородного уравнения:

$$y_{\text{о.о.}}=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

Определим вид частного решения неоднородного уравнения. Правая часть $f(x)=e^{2x}$. Частное решение: $y_{\text{ч.н}}=Ax^2e^{2x}$, так как $k = 2$ – корень кратности $s = 2$ характеристического уравнения. Найдем производные от этой функции:

$$y'=2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x},\quad y''=2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}.$$

Подставим значения y, y' и y'' в данное уравнение, получим:

$$2Ae^{2x}+8Axe^{2x}+4Ax^2e^{2x}-4\left(2Axe^{2x}+2Ax^2e^{2x}\right)+4Ax^2e^{2x}\equiv e^{2x}$$

или $2Ae^{2x}\equiv e^{2x}$, откуда $A=1/2$.

Таким образом, частное решение неоднородного уравнения:

$$y_{\text{ч.н.}}=\frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

Общее решение определяется формулой:

$$y_{\text{о.н.}}=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

Найдем C_1 и C_2, используя начальные условия:

$$y'=C_2e^{2x}+2(C_1+C_2x)e^{2x}+xe^{2x}+x^2e^{2x},\quad y(0)=C_1=1,\quad y'(0)=C_2+2C_1=0,$$

$$\begin{cases}C_1=1\\ C_2+2C_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=1\\ C_2=-2\end{cases},$$

получаем частное решение неоднородного уравнения:

$$y=(1-2x)e^{2x}+\frac{1}{2}x^2e^{2x}=e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^2-2x+1\right).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''+y=4\cos x$.

Решение. Корни характеристического уравнения: $k^2+1=0$ будут мнимые $k_{1,2}=\pm i$. Общее решение однородного уравнения $y''+y=0$ будет:

$$y_{\text{о.о.}}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Определим частное решение неоднородного уравнения $y''+y=4\cos x$:

$$4\cos x=e^{0x}(4\cos x+0\cdot\sin x),\ \alpha=0,\ \beta=1,\ P_m(x)=4,\ Q_n(x)=0,$$

так как число $\beta i=i$ является корнем характеристического уравнения, здесь $s = 1$, то частное решение имеет вид $y_{\text{ч.н.}}=x(A\cos x+B\sin x)$. Найдем y', y'':

$$y'=A\cos x+B\sin x+x(-A\sin x+B\cos x),$$

$$y''=-2A\sin x+2B\cos x-x(A\cos x+B\sin x).$$

Из тождества, которое получается после подстановки y, y', y'' в исходное уравнение, получим:

$$-2A\sin x+2B\cos x-x(A\cos x+B\sin x)+x(A\cos x+B\sin x)\equiv 4\cos x.$$

Приравниваем коэффициенты при cos$x$ и sin$x$, получим: A = 0, B = 2, следовательно, $y_{\text{ч.н}} = 2x\sin x$. Тогда общее решение уравнения $y'' + y = 4\cos x$ будет:

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1\cos x + C_2\sin x + 2x\sin x.$$

4.6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пример 1. Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}. \tag{4.3}$$

Требуется:

1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения;

2) записать в матричной форме данную систему и ее решение.

Решение

а) Запишем характеристическое уравнение системы (4.3)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = 0.$$

б) Найдем корни характеристического уравнения k_1 и k_2.

в) Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta = 0 \end{cases},$$

подставим в эту систему значения k_1 и k_2 и определим числа

$$\alpha_1^{(1)},\ \beta_1^{(1)},\ \alpha_2^{(2)},\ \beta_2^{(2)},$$

являющиеся решением этой системы.

г) Получим частные решения системы:

$$x_1 = \alpha_1^{(1)}e^{k_1t},\quad y_1 = \beta_1^{(1)}e^{k_1t},\quad x_2 = \alpha_2^{(2)}e^{k_2t},\quad y_2 = \beta_2^{(2)}e^{k_2t}.$$

д) Зная частные решения, составим решение данной системы (4.3):

$$\begin{cases} x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{k_1t} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{k_2t} \\ y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\beta_1^{(1)}e^{k_1t} + C_2\beta_2^{(2)}e^{k_2t} \end{cases}.$$

Запишем матрицу системы линейных уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

матрицу из неизвестных:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда данную систему можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

а, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \beta_1^{(1)} \end{pmatrix} e^{k_1 t} + C_2\begin{pmatrix} \alpha_2^{(2)} \\ \beta_2^{(2)} \end{pmatrix} e^{k_2 t}.$$

Пример 2. Найти общее решение системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}.$$

Решение

1) Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -1-k & 5 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0, \quad k^2 - 2x - 8 = 0, \quad k_1 = -2, \quad k_2 = 4.$$

Находим числа α и β, составляем систему:

$$\begin{cases} (-1-k)\alpha + 5\beta = 0, \\ \alpha + (3-k)\beta = 0, \end{cases}$$

подставим $k_1 = 2$, получим:

$$\begin{cases} (-1+2)\alpha + 5\beta = 0, \\ \alpha + (3+2)\beta = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta = 0, \\ \alpha + 5\beta = 0, \end{cases} \quad \alpha = -5\beta.$$

Возьмем $\beta_1^{(1)} = 1$, тогда $\alpha_1^{(1)} = -5$. Подставим $k_2 = 4$, получим:

$$\begin{cases} -5\alpha + 5\beta = 0, \\ \alpha - \beta = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \beta,$$

тогда

$$\alpha_2^{(2)} = \beta_2^{(2)} = 1.$$

Частные решения системы имеют вид:

$$x_1 = -5e^{-2t}, \ x_2 = e^{4t}, \ y_1 = e^{-2t}, \ y_2 = e^{4t}.$$

Отсюда получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x(t) = -5C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}, \\ y(t) = \ \ C_1 e^{-2t} + C_2 e^{4t}. \end{cases}$$

2) Запишем данную систему в матричной форме:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ – матрица системы, $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ – матрица из неизвестных функций.

Тогда данную систему запишем в виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

и ее решение в матричной форме имеет вид: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}$.

4.7. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Пример 1. Исследовать ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10n+7}$ на сходимость.

Решение. $a_n = \frac{n}{10n+7}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{10n+7} = \frac{1}{10}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

По необходимому признаку заключаем, что данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!} = 4 + \frac{9}{2} + \frac{16}{6} + \frac{25}{24} + \ldots + \frac{(n+1)^2}{n!} + \ldots$$

Решение. Применим к этому ряду признак Даламбера:

$$a_n = \frac{(n+1)^2}{n!},\quad a_{n+1} = \frac{(n+1+1)^2}{(n+1)!} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)!} : \frac{(n+1)^2}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2\, n!}{(n+1)!(n+1)^2} = 0.$$

Так как $d = 0 < 1$, то ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n = \frac{3}{2} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n + \ldots$$

Решение. Применим к ряду признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n-1} = \frac{1}{3}.$$

Так как $k = 1/3 < 1$, то ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n + n^2 - 5}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n - 1/2}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^3 - 5n^2 + 1}$.

Решение

а) Сравним члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n + n^2 - 5}$ с членами ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, который сходится: $\frac{1}{3^n + n^2 - 5} < \frac{1}{3^n}$ для всех n. Поэтому данный ряд сходится.

б) Сравним члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n - 1/2}$ с членами гармонического ряда: $\frac{3}{n - 1/2} > \frac{1}{n}$. Так как гармонический ряд расходится, то данный ряд расходится по признаку сравнения.

в) Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^3 - 5n^2 + 1}$ с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ и применим предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n+1}{2n^3-5n^2+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^2+n}{2n^3-5n^2+1}=\frac{3}{2}\neq 0.$$

Следовательно, данный ряд расходится, так как гармонический ряд расходится.

4.8. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ. ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА

Пример 1. Исследовать на сходимость ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n\sqrt{n}}$.

Решение

а) Применим признак Лейбница:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ сходится, причем условно, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

б) При $\alpha\neq\pi k$, $k\in Z$, данный ряд является знакопеременным, но не обязательно знакочередующимся. Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{|\sin\alpha|}{1}+\frac{|\sin 2\alpha|}{2\sqrt{2}}+\frac{|\sin 3\alpha|}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{|\sin n\alpha|}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

исследуем ряд на сходимость. Сравним его с рядом:

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

Ряд сходится как обобщенный гармонический ряд с $\alpha=\frac{3}{2}$. Кроме того, $\frac{|\sin n\alpha|}{n\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}$. По сравнительному признаку ряд сходится, а поэтому сходится данный ряд, причем абсолютно.

Пример 2. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{10n+7}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\infty}\frac{n+3}{5^n}$.

Решение

а) Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{10n+7}\neq 0$, то данный ряд расходится по необходимому признаку сходимости рядов.

б) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ выполняются условия теоремы Лейбница (проверьте!), значит, этот ряд сходится. Чтобы выяснить, сходится ряд абсолютно или условно, надо исследовать на сходимость ряд, составленный из абсолютных величин, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Но это гармонический ряд, мы знаем, что он расходящийся. Значит, данный ряд сходится условно.

в) Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{5^n}$ сходится (докажите!), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{5^n}$ тоже сходится, причем абсолютно.

Пример 3. Найти сумму ряда: $1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}+...$ приближенно с точностью до 0,001.

Решение. Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница, поэтому сходится и $|r_n|<a_{n+1}$, т.е. $|r_n|<\frac{1}{(2n+1)!}$. Выясним, при каком n выполняется условие $|r_n|<0{,}001$. Так как $a_4=\frac{1}{7!}<\frac{1}{1000}$, то $|r_3|<\frac{1}{1000}$. Возьмем $S\approx S_3$,

$$S_3=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}\approx 0{,}8417\,.$$

Итак, $S\approx 0{,}842$ причем ошибка не превышает 0,001.

4.9. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}(x-3)^n$.

Решение. Для данного ряда

$$x_0=3,\ a_n=\frac{1}{2^n\sqrt{n+1}},\quad a_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+2}},\quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}\sqrt{n+2}}{2^n\sqrt{n+1}}=2\,.$$

Следовательно, радиус сходимости данного ряда R = 2, интервал сходимости (4, 5). При x = 1 данный ряд превращается в числовой ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}(-2)^n\,,\ \text{т.е. ряд}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,,$$

который сходится по признаку Лейбница как знакочередующийся, но сходится условно. Следовательно, x = 1 принадлежит области сходимости данного ряда.

При x = 5 получаем числовой ряд: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, который расходится (докажите это). Поэтому областью сходимости ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n\sqrt{n+1}}(x-3)^n$$

является промежуток [1, 5).

Пример 2. Доказать, что областью сходимости ряда: $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ является вся числовая ось.

Решение. $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, следовательно, областью сходимости является интервал (-∞, +∞).

Пример 3. Разложить в ряд Маклорена $f(x)=e^x$.

Решение. Найдем производные функции $f(x)=e^x$ и вычислим их при $x_0=0$:

$$f'(x)=e^x\ ,\qquad f''(x)=e^x\ ,...,\quad f^{(n)}(x)=e^x\ ,\ ...$$

Значит, $f'(0)=1$, $f''(0)=1$, ... , $f^{(n)}(0)=1$, ...

Остаточный член:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}=e^c\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,,$$

где число c лежит между числами 0 и x. Отсюда следует, что

$$|R_n(x)|<e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Покажем, что для любого x: $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится при любом x (проверьте это), поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$. Значит, при любом фиксированном x: $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Следовательно, для любого x

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ .$$

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $\operatorname{ch}x$, б) $\cos^2 x$, в) $\sqrt{1+x}$.

Решение

а) По определению косинуса гиперболического $\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Используем разложение функции e^x в ряд:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...\ .$$

Заменяя в этом равенстве x на $(-x)$ получим:

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+...$$

для любого x. Складывая почленно эти ряды, имеем:

$$e^x+e^{-x}=2+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^4}{4!}+...+2\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$$

После деления обеих частей на 2 получаем равенство:

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...,$$

справедливое для любого x.

б) Известно, что $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Разложение в степенной ряд функции $\cos 2x$ легко получить из ряда Маклорена для $\cos x$, заменив x на $2x$:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+...+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+...$$

Отсюда

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\left(1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\frac{2^6x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right),$$

окончательно:

$$\cos^2 x = 1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Это равенство справедливо для любого x.

в) Так как $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}$, то по биномиальному ряду имеем:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\ldots$$

После упрощения получим:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots$$

Равенство справедливо при $-1<x\le 1$.

4.10. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ

Пример. Вычислить с точностью до 0,001 а) $\sin\frac{1}{2}$, б) $\sqrt[5]{34}$.

Решение

а) Разложим функцию $\sin x$ в ряд Маклорена при $x=1/2$ (радиана), это можно сделать, так как равенство справедливо для любого x:

$$\sin(1/2)=\frac{1}{2}-\frac{(1/2)^3}{3!}+\frac{(1/2)^5}{5!}-\frac{(1/2)^7}{7!}+\ldots$$

Надо найти n, при котором $\sin(1/2)\approx S_n$ и ошибка не больше, чем $\varepsilon = 0{,}001$.

Ряд является знакочередующимся, поэтому по следствию из признака Лейбница $|r_n|<|a_{n+1}|$. Очевидно, что уже третий член ряда $\frac{(1/2)^5}{5!}<0{,}001$, поэтому $n = 2$ и с точностью до 0,001:

$$\sin(1/2)\approx\frac{1}{2}-\frac{1/8}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{48}\approx 0{,}479.$$

Для вычисления, например, $\sin 2^{\circ}$, надо 2° перевести в радианы.

б) Для вычисления $\sqrt[n]{A}$ сначала представим $A=a^n+b$, так, чтобы $\left|\frac{b}{a^n}\right|<1$ и запишем:

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{a^n+b}=a\sqrt[n]{1+\frac{b}{a^n}}=a\left(1+\frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Далее, применяем биномиальный ряд, в котором полагаем $x=\dfrac{b}{a^n}$, $m=\dfrac{1}{n}$. Для нашего случая: $\sqrt[5]{34}=\sqrt[5]{2^5+2}=2\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{16}}$.

Положим в ряде $x=1/16$, $m=1/5$, тогда

$$\sqrt[5]{34}=2\left(1+\frac{1}{5}\frac{1}{16}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\frac{1}{16^2}+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}\frac{1}{16^3}+\ldots\right),$$

$$\sqrt[5]{34}=2+\frac{1}{40}-\frac{1}{1600}+\ldots.$$

Поскольку уже третий член $\left|-\dfrac{1}{1600}\right|<0{,}001$, то, следовательно, $|r_3|<0{,}001$ и с точностью до 0,001: $\sqrt[5]{34}\approx 2+1/40=2{,}025$.

4.11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ

Так как степенные ряды можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему внутри их интервала сходимости, то с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд можно находить приближенное значение определенного интеграла.

Пример 1. Вычислить приближенно с точностью до 0,001 определенный интеграл: $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$.

Решение. Подынтегральная функция $\sin x^2$ такова, что ее первообразная не выражается в элементарных функциях. Применим ряд для $\sin x$, получим:

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots,$$

для любого *x*: $\int\limits_0^1 \sin x^2 dx=\int\limits_0^1 x^2-\dfrac{1}{3!}\int\limits_0^1 x^6dx+\dfrac{1}{5!}\int\limits_0^1 x^{10}dx-\dfrac{1}{7!}\int\limits_0^1 x^{14}dx+\ldots,$

$$\int\limits_0^1 \sin x^2 dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}-\frac{1}{15\cdot 7!}+\ldots\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3}\approx 0{,}295,$$

так как уже третий член полученного знакочередующегося ряда меньше 0,001.

Пример 2. Вычислить приближенно с точностью до 0,01 интеграл:

$$\int\limits_0^1 e^{x^2}dx.$$

Решение. Первообразная функции e^{x^2} также не выражается через элементарные функции:

$$e^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,$$

для любого *x* (здесь использован ряд Маклорена для функции e^x)

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2!}\int_0^1 x^4 dx + \frac{1}{3!}\int_0^1 x^6 dx + \ldots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} +$$
$$+\frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(n-1)!} + \ldots$$

Для оценки остатка ряда воспользоваться следствием из признака Лейбница не удается, так как полученный ряд не знакочередующийся. Поступим следующим образом:

$$r_n = \frac{1}{(2n+1)n!} + \frac{1}{(2n+3)(n+1)!} + \frac{1}{(2n+5)(n+2)!} + \ldots <$$
$$< \frac{1}{(2n+1)n!} + \frac{1}{(2n+1)(n+1)n!} + \frac{1}{(2n+1)(n+1)^2 n!} + \ldots =$$
$$= \frac{1}{(2n+1)n!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right).$$

В скобках получили сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая равна 1: $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n}$. Поэтому $r_n < \frac{1}{(2n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n+1}{n}$.

Вычисляя правую часть этого неравенства при различных n ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$), видим, что при $n = 4$: $r_n < 0{,}01$. Следовательно, для вычисления данного интеграла с точностью до 0,01 достаточно взять S_4, т.е.

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7\cdot 3} + \frac{1}{9\cdot 4} \approx 1{,}46.$$

4.12. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Иногда точно проинтегрировать дифференциальное уравнение не удается. В этом случае бывает удобно искать решение в виде степенного ряда.

Пример 1. Дано дифференциальное уравнение: $y' = x^2 + y^2$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$, в виде ряда Тейлора (взяв первые 5 его членов).

Решение. Пусть решением является

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^2 + \ldots$$

Начальное условие $y(1) = 1$ дает первый член этого ряда. Подставим $x = 1$ и $y = 1$ в данное уравнение $y' = x^2 + y^2$, получим: $y'(1) = 1 + 1 = 2$.

Продифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''(1) = 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 2 = 6, \quad y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$
$$y'''(1) = 2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 1\cdot 6 = 22, \quad y^{IV} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''', \quad y^{IV}(1) = 116$$

и т.д. Подставим найденные значения в ряд, получим:

$$y(x) = 1 + 2(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{22}{3!}(x-1)^3 + \frac{116}{4!}(x-1)^4 + \ldots =$$
$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{11}{3}(x-1)^3 + \frac{29}{6}(x-1)^4 + \ldots$$

Пример 2. Найти 6 первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''-(1+x^2)y=0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0)=-2,\ y'(0)=2$.

Решение. Поскольку $x_0 = 0$, то решение отыскиваем в виде ряда Маклорена

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots.$$

Дано, что $y(0)$ = -2, $y'(0)=2$. Подставив в данное уравнение $y''-(1+x^2)y=0$ начальные условия, получим: $y''(0)=(1+0)\cdot(-2)=-2$. Дифференцируя исходное уравнение, последовательно находим:

$$y'''=2xy+(1+x^2)y',\quad y'''(0)=2,\quad y^{IV}=2y+4xy'+(1+x^2)y'',$$

$$y^{IV}(0)=-6,\ y^{V}=2y'+4y'+4xy''+2xy''+(1+x^2)y''',\ y^{V}(0)=14.$$

Подставив найденные значения в ряд, получаем:

$$y(x)=-2+2x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{60}x^5+\ldots.$$

4.13. РЯДЫ ФУРЬЕ

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, имеющую период 2π и заданную на промежутке $(-\pi,\ \pi]$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } -\pi<x<0,\\ x, & \text{если } 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ имеет точки разрыва $x=(2k-1)\pi$, $k\in Z$ (рис. 4.2).

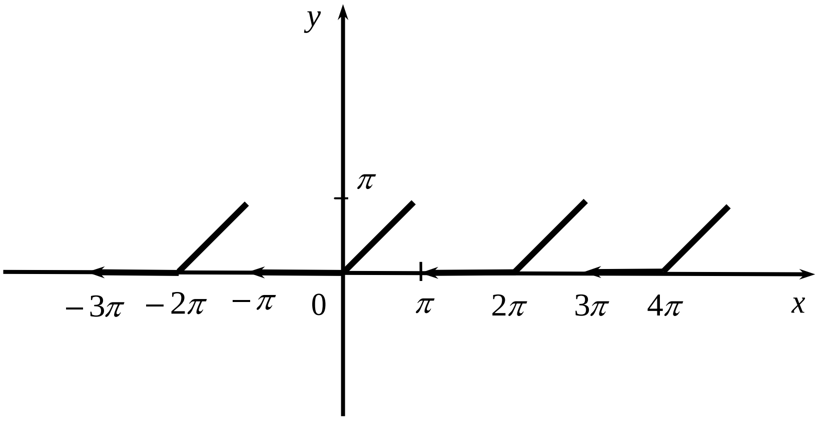

Рис. 4.2

Так как $f(x)$ кусочно-монотонна и имеет на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ лишь одну точку разрыва 1-го рода ($f(-\pi)=\pi$, $\lim\limits_{x\to-\pi+0}f(x)=0$), то во всех точках x непрерывности $f(x)$ разлагается в ряд Фурье. Находим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1),\ n\in N,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n}(\cos n\pi-0)=\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

$n\in N$. Подставляя найденные коэффициенты в ряд, получаем:

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}((-1)^n-1)\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$$

для любого $x\neq(2k-1)\pi$, $k\in Z$. В точках $x=(2k-1)\pi$ сумма найденного ряда:

$$S(x)=0{,}5(\pi+0)=\pi/2.$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l=4$, заданную на промежутке (–2, 2] равенством: $f(x)=|x|$.

Решение. Функция $f(x)$ определена и непрерывна на всей числовой оси и кусочно-монотонна на отрезке [–2, 2] (рис. 4.3).

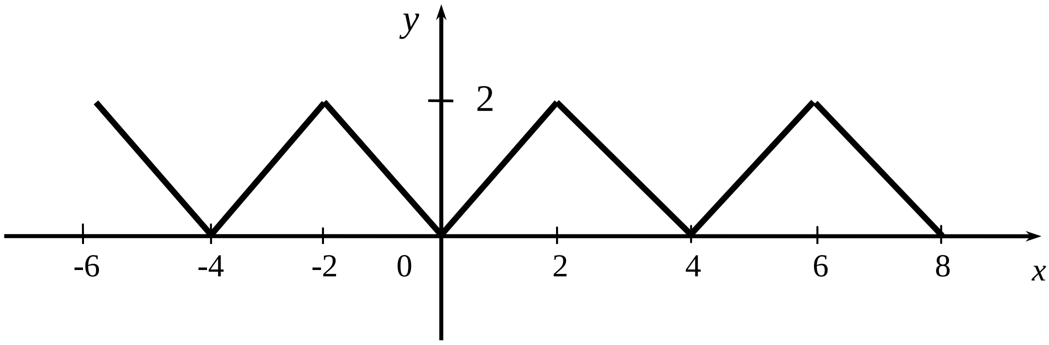

Рис. 4.3

Вычислим коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|dx=\frac{2}{2}\int_{0}^{2}xdx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=2,$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=\int_{0}^{2}x\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx=\frac{2x}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_0^2+$$

$$+\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{\pi^2n^2}((-1)^n-1)=\begin{cases}\dfrac{-8}{\pi^2n^2}, & \text{если}\quad n=2k+1\\ 0, & \text{если}\quad n=2k\end{cases}$$

Окончательно:

$$a_{2n-1}=\frac{-8}{\pi^2(2n-1)^2},\ \text{и}\ \ a_{2n}=0.$$

При вычислении a_0 и a_n было использовано свойство ***четной*** функции $\varphi(x)$:

$$\int_{-a}^{a}\varphi(x)dx=2\int_{0}^{a}\varphi(x)dx.$$

При вычислении b_n используем свойство ***нечетной*** функции:

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|x|\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx,$$

так как подынтегральная функция $|x|\sin\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)$ нечетная. Ряд Фурье для данной функции сходится к этой функции для любого x, так как $f(x)$ непрерывная для любого x. Итак,

$$f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right).$$

СОДЕРЖАНИЕ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы следует строго придерживаться указанных ниже правил.

1. Выбор задач для контрольных работ осуществляется по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра студента в соответствии с таблицей 1 для студентов инженерных специальностей и с таблицей 2 для студентов экономических специальностей.

Таблица 1

Варианты контрольной работы

Вариант	Номера задач									
1	1	11	31	41	51	61	71	81	91	101
2	2	12	32	42	52	62	72	82	92	102
3	3	13	33	43	53	63	73	83	93	103
4	4	14	34	44	54	64	74	84	94	104
5	5	15	35	45	55	65	75	85	95	105
6	6	16	36	46	56	66	76	86	96	106
7	7	17	37	47	57	67	77	87	97	107
8	8	18	38	48	58	68	78	88	98	108
9	9	19	39	49	59	69	79	89	99	109
0	10	20	40	50	60	70	80	90	100	110

Таблица 2

Варианты контрольной работы

Вариант	Номера задач						
1	1	11	21	31	61	71	81
2	2	12	22	32	62	72	82
3	3	13	23	33	63	73	83
4	4	14	24	34	64	74	84
5	5	15	25	35	65	75	85
6	6	16	26	36	66	76	86
7	7	17	27	37	67	77	87
8	8	18	28	38	68	78	88
9	9	19	29	39	69	79	89
0	10	20	30	40	70	80	90

2. Контрольная работа оформляется в тонкой тетради чернилами любого цвета (кроме красного). Для замечаний рецензента оставляются поля. На обложке тетради указывается фамилия, имя, отчество, учебный шифр (серия и номер зачетной книжки), домашний адрес, а также наименование дисциплины и номер контрольной работы.

3. Решение задач следует располагать в порядке следования номеров, указанных в задании, сохраняя номера задач и записывая исходные условия. Если несколько задач имеют общую формулировку, то при оформлении решения общие условия заменяют конкретными данными.

4. Решения задач контрольной работы следует оформлять аккуратно, подробно объясняя ход решения. В конце работы указать дату выполнения работы и поставить свою подпись.

5. После получения проверенной работы следует исправить в ней отмеченные тьютором ошибки и недочеты. Работа над ошибками, как правило, оформляется в той же тетради, что и контрольная работа. При необходимости, работу можно выполнить в другой тетради, но при передаче на повторное рецензирование необходимо приложить первоначально рецензированную работу.

ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1 – 10. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

1. $xy' - 2y + x^2 = 0$.
2. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0$.
3. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$.
4. $(2x - y)dy + (x + y)dy = 0$.
5. $(1 - x^2)y' + xy = 1$.
6. $\left[x - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$.
7. $xy' + y = \sin x$.
8. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\cdot y'$.
9. $y' + y = e^{-x}$.
10. $xy' = y\left[1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right]$.

11 – 20. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

11. $y''x\ln x - y' = 0$.
12. $y''y^3 = 1$.
13. $xy'' - y' = e^x x^2$.
14. $2yy'' - (y')^2 = 0$.
15. $2(y')^2 = (y-1)y''$.
16. $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = \sin^3 x$.
17. $y'' + 2y(y')^3 = 0$.
18. $x(y'' + 1) + y' = 0$.
19. $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$.
20. $2yy'' = 1 + (y')^2$.

21 – 30. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + q = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$.

21. $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 14$, $y'(0) = 0$.
22. $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
23. $y'' - y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
24. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
25. $y'' - 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
26. $y'' - 2y' + 14y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
27. $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.
28. $y'' - 3y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
29. $y'' - 14y' + 6y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
30. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

31 – 40. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$.

31. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.
32. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
33. $y'' - y' = x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
34. $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
35. $y'' - y' = 9xe^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -5$.
36. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
37. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
38. $y'' - 3y' = x + \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1/9$.
39. $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/9$.
40. $y'' + 2y' + y = x + \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

41 – 50. Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}.$$

Требуется: 1) найти общее решение системы с помощью характеристического уравнения; 2) записать в матричной форме данную систему и ее решение.

41. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$ 42. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y. \end{cases}$ 43. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$ 45. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$ 46. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y. \end{cases}$

47. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$ 48. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 9y. \end{cases}$ 49. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9y. \end{cases}$

51. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (3; 1) и обладающей тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью $0x$ делится пополам в точке пересечения с осью $0y$.

52. По закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. Если температура воздуха равна 20 °С и тело в течение часа охлаждается от 100 до 30 °С, то через сколько минут (с момента начала охлаждения) его температура понизится до 60 °С?

53. Катер движется в спокойной воде со скоростью v_0 = 10 км/ч. На полном ходу двигатель катера был выключен, и через 2 мин скорость катера уменьшилась до v_1 = 0,7 км/ч. Определить скорость, с которой двигался катер через 40 с после выключения двигателя, считая, что сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

54. Найти давление воздуха P на высоте h = 1000 м, если известно, что давление воздуха равно 1 кгс/см^2 на уровне моря (h = 0) и 0,92 кгс/см^2 на высоте h = 700 м.

55. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти угловую скорость диска через 3 мин после начала вращения, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 200 мин$^{-1}$, по истечении 1 мин вращается со скоростью 120 мин$^{-1}$.

56. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству x. Найти зависимость x от времени t, если известно, что по истечении 1600 лет остается половина первоначального количества. Принять первоначальное количество радия x_0 = 2.

57. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 2) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен абсциссе точки касания.

58. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 0) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси $0y$, равен радиусу-вектору точки касания.

59. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (–1; 1) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси $0x$ касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.

60. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 1) и обладающей тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке M кривой вдвое больше углового коэффициента радиуса-вектора точки M.

61 – 70. Исследовать ряд на сходимость.

61. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{n!}$.

62. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$.

63. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n}$.

64. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

65. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+2}{5^n}$.

66. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1`}{n(n+1)}$.

67. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{3^n}$.

68. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3n-1}$.

69. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$.

70. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+5}}$.

71 – 80. Найти область сходимости степенного ряда.

71. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x-2)^n$ 72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^3}$

74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ 75. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+2)^n$ 76. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}x^n$

77. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}x^n$ 78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n2^n}$ 79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3n}$ 80. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+3)}$

81 – 90. Вычислить с помощью рядов (точность до 0,001).

81. а) $\sqrt{1{,}3}$, б) $\int\limits_0^{0{,}2} \sqrt{x}\cos x dx$. 82. а) e^2, б) $\int\limits_0^{0{,}8} \frac{1-\cos x}{x} dx$.

83. а) $\operatorname{ch} 2$, б) $\int\limits_0^1 \cos\sqrt[3]{x} dx$. 84. а) $\cos 2^\circ$, б) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{4}} dx$.

85. а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$, б) $\int\limits_0^{0{,}5} e^{-x^2} dx$. 86. а) $\sqrt[3]{8{,}36}$, б) $\int\limits_0^{0{,}5} \frac{\sin x^2}{x} dx$.

87. а) $\sqrt{e}$, б) $\int\limits_0^{0{,}5} \frac{dx}{1+x^2}$. 88. а) $\sin 18^\circ$, б) $\int\limits_0^{0{,}4} \sqrt{1-x^3} dx$.

89. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$, б) $\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. 90. а) $\ln 1{,}2$, б) $\int\limits_0^{0{,}8} \frac{1+\cos x}{x^2} dx$.

91 – 100**.** Найти *k* первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям.

91. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 1/2$, $k = 3$.
92. $y'' = 2yy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $k = 4$.
93. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $k = 4$.
94. $y'' = xy + (y')^2$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$, $k = 4$.
95. $y' = xy + x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, $k = 3$.
96. $y' = x + 1/y$, $y(0) = 1$, $k = 4$.
97. $y''' = ye^x - x(y')^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, $k = 5$.
98. $y' = xy + e^x$, $y(0) = 0$, $k = 4$.
99. $y' = xy + \ln(x+y)$, $y(1) = 0$, $k = 4$.
100. $y'' = -\frac{y}{4x^2}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \frac{1}{2}$, $k = 3$.

101 – 105. Разложить в ряд Фурье функцию *f*(*x*), периодическую, с периодом 2π, заданную на промежутке $(-\pi, \pi]$ следующими равенствами.

101. $f(x) = x^2$. 102. $f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{если } -\pi < x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

103. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x < 0 \\ 1-4x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$. 104. $f(x) = -x$.

105. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

106 – 110. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию *f*(*x*) с периодом 2*l*, заданную на промежутке (–*l*, *l*] следующими равенствами.

106. $f(x) = x$, $-2 < x \le 2$, $l = 2$. 107. $f(x) = 10 - x$, $-5 < x \le 5$, $l = 5$.
108. $f(x) = |x| - 5$, $-2 < x \le 2$, $l = 2$. 109. $f(x) = 2x$, $-1 < x \le 1$, $l = 1$.
110. $f(x) = 1 + x$, $-1 < x \le 1$, $l = 1$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие дифференциального уравнения. Задачи, приводящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Понятие об общем, частном и особом решениях дифференциальных уравнений.
3. Геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка. Классификация дифференциальных уравнений первого порядка.
4. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Метод Бернулли. Уравнение Бернулли.
6. Уравнения в полных дифференциалах
7. Дифференциальные уравнения высших порядков. Уравнения, допускающие понижение порядка.
8. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения, основные понятия. Линейно-независимая система функций. Определитель Вронского. Теорема об условии линейной независимости решений дифференциального уравнения.
9. Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения
10. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Различные случаи нахождения фундаментальной системы решений.
11. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.
12. Метод вариации произвольных постоянных. Нахождение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.
13. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка со специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения. Принцип наложения решений.
14. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод исключения неизвестных.
15. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
16. Понятие числового ряда. Основные определения (сходимость ряда, сумма ряда, n-я частичная сумма ряда, n-й остаток ряда). Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии.
17. Понятие сходимости ряда. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточный признак расходимости ряда.
18. Признаки сравнения рядов с положительными членами.
19. Признак Даламбера.
20. Радикальный признак Коши.
21. Интегральный признак Коши.
22. Ряд Дирихле, исследование его сходимости. Обобщенный гармонический ряд.
23. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
24. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
25. Функциональные ряды. Основные понятия и свойства.
26. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область сходимости степенного ряда.
27. Интервал сходимости степенного ряда, его нахождение. Свойства степенных рядов.
28. Разложение функции в степенной ряд. Ряды Тейлора и Маклорена.
29. Разложение в ряд Маклорена основных элементарных функций.
30. Применение степенных рядов.
31. Тригонометрические ряды. Разложение функции в тригонометрический рад.
32. Ряды Фурье. Разложение периодической функции в ряд Фурье на отрезках $[-\pi, \pi]$ и $[-l, l]$.
33. Разложение в ряд Фурье непериодических функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа, 1990.
2. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1997.
3. Шестаков А.А., Малышев И.А., Полозков Д.П. Курс вышей математики. – М.: Высшая школа, 1997.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, Т. 1, 2. – М.: Наука, 1985.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1984.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1985.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1990.
8. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1981.