Указания для выполнения

Контрольной работы

«Алгебра, геометрия и функции»

по дисциплине **«Высшая математика-1»,**

Межрегиональный учебный центр переподготовки специалистов
Разработчик: доцент, к.т.н. Храмова Татьяна Викторовна

Перед решением контрольной работы следует полностью выписать её условие. Решения задач располагайте в порядке возрастания номеров, указанных в задании.

Решения следует излагать, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения. Необходимые рисунки следует помещать в тексте по ходу решения. Ответы в конце решения задачи следует выделять. При необходимости используйте конспект по высшей математике, прилагаемый к курсу.

Контрольную работу следует посылать отдельным файлом, помещая в начале титульный лист.

Оглавление

Задание 1. Матричная алгебра

Теоретический материал к разделу 1, п. 1.1.

Систему линейных уравнений решить методом Крамера.

$$\begin{cases} x-3y+2z=8, \\ 2x+5y-3z=1, \\ 5x+y-2z=-3. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$\begin{cases} x-3y+2z=8, \\ 2x+5y-3z=1, \\ 5x+y-2z=-3. \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Найдём определитель матрицы A:

$$\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot 5\cdot(-2)+(-3)\cdot(-3)\cdot 5+2\cdot 1\cdot 2-(2\cdot 5\cdot 5+(-3)\cdot(-2)\cdot 2+1\cdot 1\cdot(-3))=-20.$$

Найдём определители матриц, полученных из матрицы A заменой i-го столбца на столбец B правых частей (i=1,2,3):

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-57, \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix}=-121, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-233.$$

Подставим полученные значения в формулы Крамера и найдём решение системы:

$$x=\frac{-57}{-20}=\frac{57}{20}, \quad y=\frac{-121}{-20}=\frac{121}{20}, \quad z=\frac{-233}{-20}=\frac{233}{20}.$$

Ответ: $x=\frac{57}{20}, \quad y=\frac{121}{20}, \quad z=\frac{233}{20}.$

Задание 2. Аналитическая геометрия

Теоретический материал к разделу 1, п. 1.3-1.4.

Даны четыре точки в пространстве: A(0;0;0), B(2;0;-1), C(0;-1;0), D(1;1;1).
Составить уравнение прямой AB и плоскости BCD, вычислить угол между ними и найти расстояние от точки A до плоскости BCD.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_i, y_i, z_i), i=1,2 имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Подставим в уравнение значения координат точек A(0;0;0), B(2;0;-1) и преобразуем выражение:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{0-0}=\frac{z-0}{-1-0},$$

$\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}$ — канонические уравнения прямой АВ.
В знаменателях канонических уравнений прямой указаны координаты направляющего вектора прямой: $\bar{q}=(2;0;-1)$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки (x_i, y_i, z_i), i=1,2,3 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Подставим в уравнение значения координат точек В(2;0;-1), С(0;-1;0), D(1;1;1) и преобразуем выражение:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 0-2 & -1-0 & 0+1 \\ 1-2 & 1-0 & 1+1 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим определитель (формула «по первой строке»):

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$-3(x-2)+3y-3(z+1)=0$,

$-3x+3y-3z+3=0$ — уравнение плоскости BCD.

Коэффициенты перед переменными – координаты нормали к плоскости $\bar{n}=(-3;3;-3)$.

Угол φ между плоскостью и прямой можно найти, зная нормаль плоскости и направляющий вектор прямой:

$$\sin\varphi=\frac{\bar{n}\cdot\bar{q}}{|\bar{n}||\bar{q}|}=\frac{(2,0,-1)\cdot(-3,3,-3)}{|(2,0,-1)||(-3,3,-3)|}=\frac{2\cdot(-3)+0\cdot 3+(-1)\cdot(-3)}{\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{-3}{\sqrt{5}\sqrt{27}}=\frac{-1}{\sqrt{15}},$$

Найдём значение угла φ: $\quad \varphi=\arcsin\frac{-1}{\sqrt{15}}$.

Знак «—» следует проигнорировать, так как указывая угол между плоскостью и прямой, принято указывать острый: $\varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Расстояние от точки до плоскости — это проекция произвольного вектора, соединяющего плоскость и точку на нормаль этой плоскости:

$$d(A,BCD)=\left|np_{\bar{n}}\overline{AB}\right|=\left|\frac{\overline{AB}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=\left|\frac{(2;0;-1)\cdot(-3;3;-3)}{\sqrt{(-3)^2+3^2+(-3)^2}}\right|=\frac{|2\cdot(-3)+0\cdot 3+(-1)\cdot(-3)|}{\sqrt{27}}=\frac{|-3|}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{x}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-1}$, $\quad -3x+3y-3z+3=0$, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{15}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задание 3. Предел функции

Теоретический материал к разделу 2.

Вычислить пределы.
Замечание: в контрольной работе можно использовать *любой* из предложенных способов.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+3x-2x^3}{(x+1)^2+x}$.

1-й способ. Преобразование выражения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3x-2x^3}{(x+1)^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\begin{matrix}\text{вынесем в числителе и знаменателе}\\ \text{"старшую степень" переменной}\end{matrix}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(7\frac{1}{x}+3\frac{1}{x^2}-2\right)}{x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(7\cancelto{0}{\frac{1}{x}}+3\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}-2\right)}{\left(1+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}\right)^2+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(-2)}{1}=[-2\cdot\infty]=\infty.$$

2-й способ. Использование правила Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+3x-2x^3}{(x+1)^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(7x^2+3x-2x^3\right)'}{\left((x+1)^2+x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{14x+3-6x^2}{2(x+1)+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{14x+3-6x^2}{2x+3}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(14x+3-6x^2\right)'}{(2x+3)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{14-12x}{2}=\left[\frac{-\infty}{2}\right]=\infty.$$

Ответ: ∞.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-x^2+6x-9}{2x^2+x-21}$

1-й способ. Преобразование выражения

$$\lim_{x\to3}\frac{-x^2+6x-9}{2x^2+x-21}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)^2}{2(x-3)(x-3.5)}=\lim_{x\to3}\frac{-(x-3)}{2(x-3.5)}=\frac{-(3-3)}{2(3-3.5)}=0$$

2-й способ. Использование правила Лопиталя

$$\lim_{x\to3}\frac{-x^2+6x-9}{2x^2+x-21}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to3}\frac{\left(-x^2+6x-9\right)'}{\left(2x^2+x-21\right)'}=\lim_{x\to3}\frac{-2x+6}{4x+1}=\frac{-2\cdot3+6}{4\cdot3+1}=0$$

Ответ: 0.

Пример 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{tg}(4x)}{1-\cos(2x)}$.

1-й способ. Преобразование выражения, сведение к первому замечательному пределу (1.З.П.)

$$\lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{tg}(4x)}{1-\cos(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{x\dfrac{\sin(4x)}{\cos(4x)}}{1-(1-2\sin^2x)}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin(4x)}{\cos(4x)\cdot2\cdot\sin^2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(4x)\cdot 2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin(4x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\sin(4x)}{4x}\cdot 4x}{x^2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\cancel{x^2}\cdot\overbrace{\frac{\sin(4x)}{4x}}^{1.З.П.}}{\cancel{x^2}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1.З.П.}}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{(1)^2}=2$$

2-й способ. Использование правила Лопиталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{tg}(4x)}{1-\cos(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x\mathrm{tg}(4x)\right)'}{\left(1-\cos(2x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(4x)+\frac{4x}{\cos^2(4x)}}{2\sin(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(4x)\cos^2(4x)+4x}{2\sin(2x)\cos^2(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos^2(4x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)\cos(4x)+4x}{\sin(2x)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin(8x)+4x}{\sin(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\sin(8x)+4x\right)'}{\left(\sin(2x)\right)'}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4\cos(8x)+4}{2\cos(2x)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4+4}{2}=2$$

3-й способ. Использование эквивалентностей

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\mathrm{tg}(4x)}{1-\cos(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix}x\to 0\\ \mathrm{tg}(4x)\sim 4x\\ \cos(2x)\sim 1-\frac{(2x)^2}{2}\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 4x}{1-\left(1-\frac{(2x)^2}{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{\frac{4x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 4x^2}{4x^2}=2.$$

Ответ: 2.

Задание 4. Исследование функции

Теоретический материал к разделу 3.

Дана функция $y=\frac{x^3}{3-x^2}$.

Требуется провести её полное исследование и построить график.

Решение.

Исследование будем проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция чётной, нечётной, периодической или общего вида.
4. Найти точки разрыва функции и определить их характер.
5. Найти асимптоты функции.
6. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.
8. Построить эскиз графика.

1. Знаменатель не может быть равен 0, поэтому функция не определена при $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$. То есть область определения состоит из трёх интервалов $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$, а график, соответственно, из трёх ветвей.

Функция знакоположительна ($y>0$) в интервалах $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(0,\sqrt{3})$, знакоотрицательна ($y<0$) – в $(-\sqrt{3},0)$ и $(\sqrt{3},+\infty)$.

2. Если $x=0,$ то $y=0$. То есть график функции пересекается с осями координат в точке $(0,0)$.
3. Функция не является периодической. Проверим на чётность:

$$y(-x)=\frac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\frac{-x^3}{3-x^2}=-y(x).$$

Таким образом, функция является нечётной, следовательно, её график симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно провести исследование при $x\ge 0$.

4. В точке $x=\sqrt{3}$ функция имеет разрыв второго рода:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty\ ;\quad \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty\ .$$

5. Прямая $x=\sqrt{3}$ является вертикальной асимптотой. Выясним наличие наклонной $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{3-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}-(-1)\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=0.$$

При $x\to-\infty$ также $k=-1$ и $b=0$. Следовательно, $y=-x$ — двусторонняя наклонная асимптота.

6. Исследуем функцию на экстремумы.

$$y'=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{3x^2(3-x^2)-x^3(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(x-3)(x+3)}{(3-x^2)^2}.$$

$y'=0$ при $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 3$. Исследуем интервалы знакопостоянства первой производной:

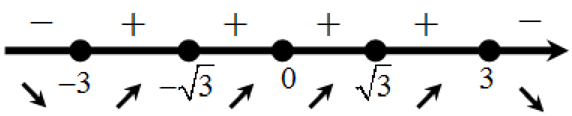

Рисунок 1 – Точки экстремума и монотонность

При переходе через $x=3$ y' меняет знак с «+» на «-», $y(3)=\dfrac{3^3}{3-3^2}=\dfrac{27}{-6}=-4,5$, следовательно, точка $(3;-4,5)$ является максимумом функции. Аналогично, $(-3;4,5)$ - минимум.

Функция убывает на промежутках $(-\infty,-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3},+\infty)$, на всех остальных интервалах области определения она возрастает (Рисунок 1).

7. Исследуем функцию на выпуклость. Находим y'':

$$y''=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)''=\left(\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)'=\frac{(18x-x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)\cdot 2(3-x^2)\cdot(-2x)}{(3-x^2)^4}=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3}$:

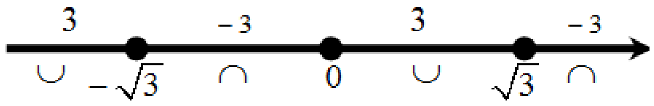

Рисунок 2 – Точки перегиба и выпуклость

Точка (0, 0) – точка перегиба. На интервалах $(-\sqrt{3},\,0)$ и $(\sqrt{3},\,+\infty)$ график выпуклый, на $(-\infty,\,-\sqrt{3})$ и $(0,\,\sqrt{3})$ - вогнутый (Рисунок 2).
Используя полученные данные, рисуем эскиз графика заданной функции (Рисунок 3):

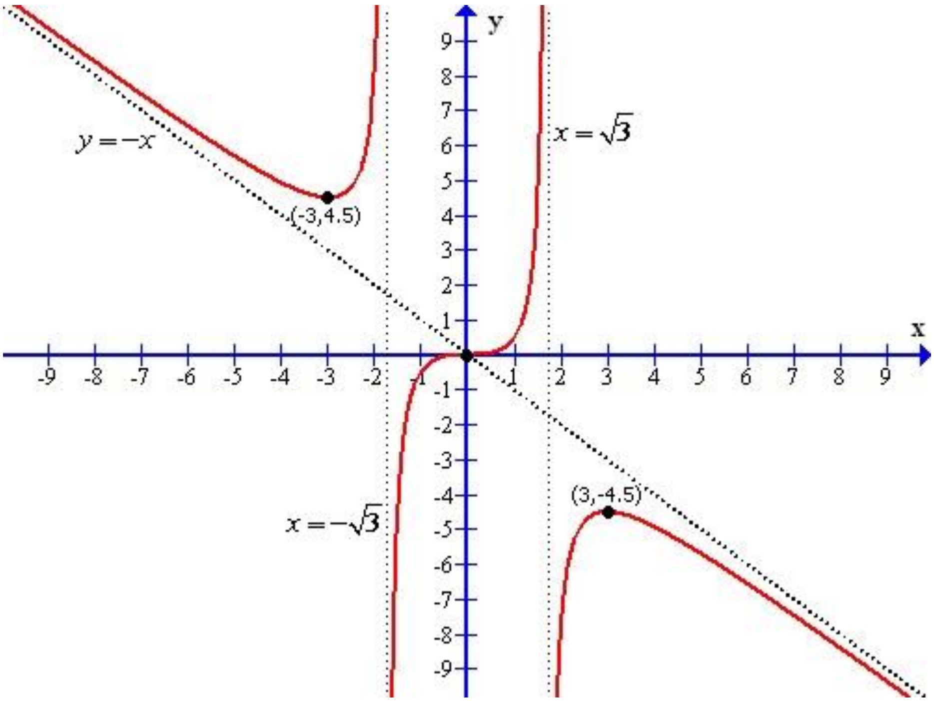

Рисунок 3 – Эскиз графика функции

Задание 5. Интеграл

Теоретический материал к разделу 4.

Если фигура ограничена сверху кривой $y_{в.}(x)$, а снизу кривой $y_{н.}(x)$ при $a \le x \le b$, то её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(y_{в.}(x) - y_{н.}(x) \right) dx.$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 1,\ y = x + 5.$$

Решение. Построим чертёж (Рисунок 4) и определим ограничения.
Найдём точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 5 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - 1 = x + 5 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3,\ x = -2;$$

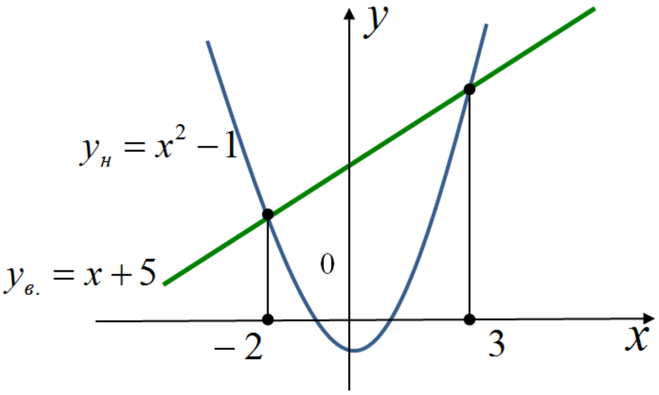

Рисунок 4 – Чертеж к примеру 1

$$S=\int_{-2}^{3}\left((x+5)-(x^2-1)\right)dx=\int_{-2}^{3}\left(x+6-x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{3}=\left(\frac{9}{2}+18-\frac{27}{3}\right)-\left(\frac{4}{2}-12-\frac{8}{3}\right)=21\frac{2}{3}\cdot$$

Ответ: $21\frac{2}{3}$.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=1$, $x=-2$, $x=1$.

Решение. Построим чертёж (Рисунок 5). Фигура ограничена сверху кривой $y_{в.}(x)=x^2+1$, а снизу кривой $y_{н.}(x)=0$ при $-2\le x\le 1$, площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b\left(y_{в.}(x)-y_{н.}(x)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left((x^2+1)-0\right)dx\,.$$

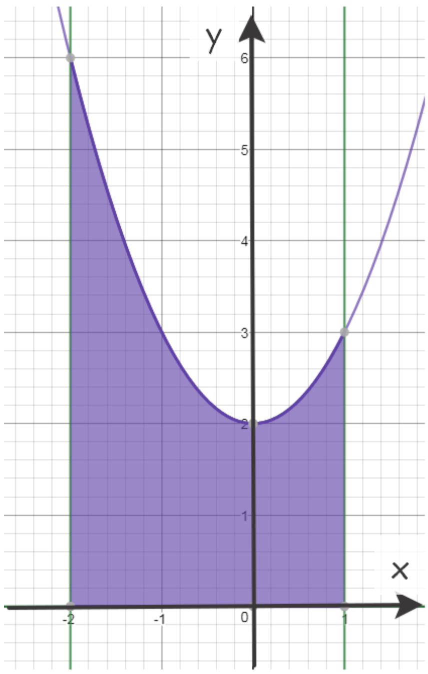

Рисунок 5 – Чертеж к примеру 2

$$S=\int_{-2}^{1}\left(x^2+1-0\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{1}{3}-1-\left(\frac{-8}{3}+2\right)=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}.$$

Ответ: $5\frac{1}{3}$.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $4y=-2x-1,\quad 4y=-3x^2$.

Решение. Первое уравнение задаёт прямую, второе – параболу. Построим чертёж (Рисунок 6).

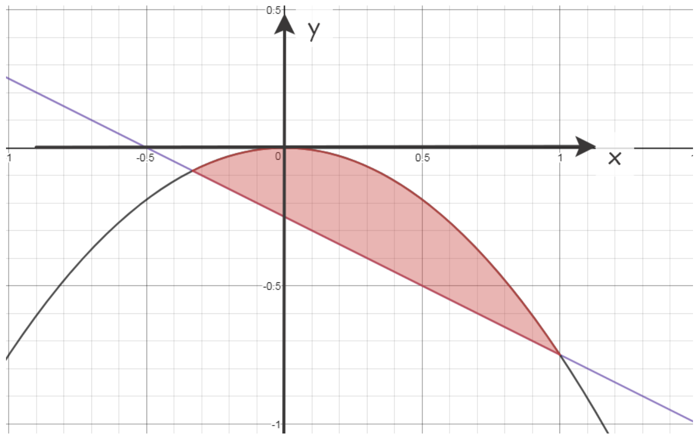

Рисунок 6 – Чертеж к примеру 3

Аналитически найдём точки пересечения кривых:

$$\frac{-2x-1}{4}=\frac{-3x^2}{4},\qquad 3x^2-2x-1=0,\qquad x_{1,2}=\frac{2\pm4}{6}=1;-\frac{1}{3}.$$

Фигура ограничена сверху кривой $y_{в.}(x)=-3x^2$, а снизу кривой $y_{н.}(x)=-2x-1,\ -\frac{1}{3}\le x\le 1$.

$$S=\int_a^b\left(y_{в.}(x)-y_{н.}(x)\right)dx=\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(-\frac{3x^2}{4}-\frac{-2x-1}{4}\right)dx=-\frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{3}}^{1}\left(3x^2-2x-1\right)dx=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(x^3-x^2-x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1}=-\frac{1}{4}\left(1-1-1-\left(-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{13}{54}.$$

Ответ: $\frac{13}{54}$.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\sqrt{x},\quad y=\frac{2x}{3}-3,\quad y=-\frac{x}{2}+4.$$

Решение. Построим чертёж (Рисунок 7).

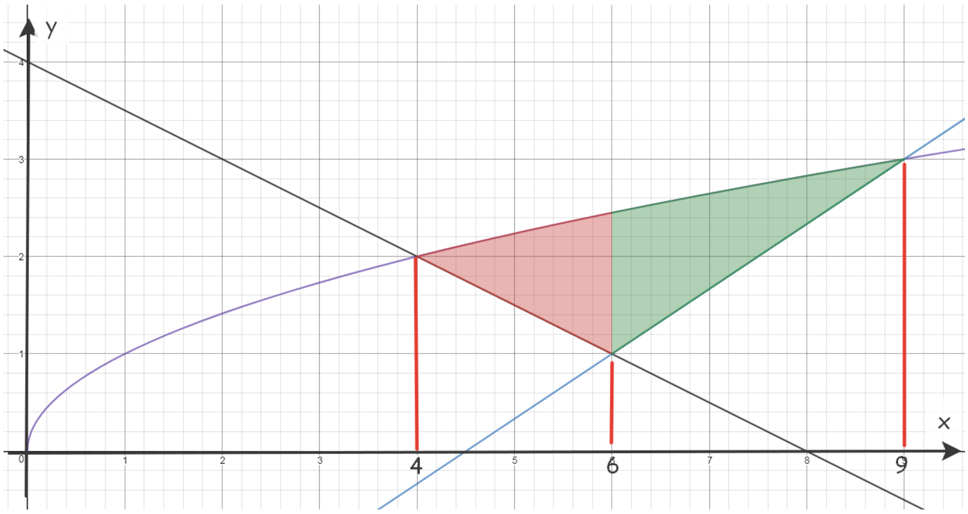

Рисунок 7 – Чертеж к примеру 4

Найдём точку пересечения графика квадратного корня и прямой с положительным угловым коэффициентом (справа):

$$\sqrt{x} = \frac{2x}{3} - 3, \;\; 2x - 3\sqrt{x} - 9 = 0,$$

Сделаем замену переменных $\sqrt{x} = t, \quad t \geq 0$

$$2t^2 - 3t - 9 = 0, \qquad D = 9 + 72 = 81, \quad t_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{4} = -1,5; 3, \quad -1,5 < 0,$$

$$\sqrt{x} = 3, \quad x = 9.$$

Найдём точку пересечения графика квадратного корня и прямой с отрицательным угловым коэффициентом (слева):

$$\sqrt{x} = -\frac{x}{2} + 4, \;\; x + 2\sqrt{x} - 8 = 0,$$

Сделаем замену переменных $\sqrt{x} = t, \quad t \geq 0$

$$t^2 + 2t - 8 = 0, \qquad D = 4 + 32 = 36, \quad t_{1,2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -4; 2, \quad -4 < 0,$$

$$\sqrt{x} = 2, \quad x = 4$$

Найдём точку пересечения прямых: $\dfrac{2x}{3} - 3 = -\dfrac{x}{2} + 4 \quad \Rightarrow x = 6$

Верхняя граница области всегда одна и та же, а нижняя граница меняется в точке $x = 6$:

- на промежутке $4 \leq x \leq 6$ фигура ограничена сверху кривой $y_{в.}(x) = \sqrt{x}$, а снизу кривой $y_{н.}(x) = -\dfrac{x}{2} + 4$;

- на промежутке $6 \leq x \leq 9$ фигура ограничена сверху кривой $y_{в.}(x) = \sqrt{x}$, а снизу кривой $y_{н.}(x) = \dfrac{2x}{3} - 3$.

Площадь фигуры равна сумме площадей $S = S_{лев.} + S_{прав.} =$

$$=\int_4^6\left(\sqrt{x}-\frac{-x}{2}-4\right)dx+\int_6^9\left(\sqrt{x}-\frac{2x}{3}+3\right)dx=\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{4}-4x\right)\Bigg|_4^6=$$

$$+\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}-\frac{x^2}{3}+3x\right)\Bigg|_6^9=\left(4\sqrt{6}-15\right)-\left(\frac{16}{3}-12\right)+\left(\frac{54}{3}\right)-\left(4\sqrt{6}+6\right)=\frac{11}{3}.$$

Ответ: $11/3$.

Задание 6. Функции двух переменных

Теоретический материал к разделу 5.

Исследовать функцию $z=4xy+2y^2-2x-y$ на экстремум.

Решение.

Найдём частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(4xy+2y^2-2x-y\right)'_x=4y-2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(4xy+2y^2-2x-y\right)'_y=4x+4y-1.$$

Найдём стационарные точки функции z (систему решим методом Крамера):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y-2=0\\4x+4y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}0&4&2\\4&4&1\end{array}\right)\Leftrightarrow\ x=\frac{\begin{vmatrix}2&4\\1&4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&4\\4&4\end{vmatrix}}=\frac{4}{-16}=-0.25,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}0&2\\4&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}0&4\\4&4\end{vmatrix}}=\frac{-8}{-16}=0.5$$

Вычислим вторые производные функции в точке (-0.25;0.5):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial(4y-2)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(4y-2)}{\partial y}=4,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial(4x+4y-1)}{\partial y}=4;$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-0.25;0.5)}=0,\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-0.25;0.5)}=4,\quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-0.25;0.5)}=4.$$

Стационарную точку характеризует определитель $\Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}&\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4\\4&4\end{vmatrix}=-16.$

Возможны случаи:

$\Delta<0$ – точка не является экстремумом (минимакс, седло);

$\Delta>0,\ \dfrac{d^2z}{dx^2}>0$ – точка минимума;

$\Delta>0,\ \dfrac{d^2z}{dx^2}<0$ – точка максимума;

$\Delta=0$ – требуется дополнительное исследование (проанализировать знак выражения Δz).

Точка (-0.25;0.5) является седловой.

Ответ: (-0.25;0.5) — седловая точка.