ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО МОРСКОГО И РЕЧНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени адмирала Г.И. Невельского
(МГУ им. адм. Г.И. Невельского)

Кафедра высшей математики

Ю.И. Загородников

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

для 1-го курса технических специальностей ФЗДО
и руководство к ее решению.
Учебное пособие

Владивосток

2018

Студент должен выполнить контрольную работу по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой его зачётки.

В конце пособия указаны основные учебники [1-2], из которых студент должен предварительно изучить разделы необходимые для решения контрольной работы.

При решении задач кроме типовых задач, рассмотренных в пособии, можно использовать учебники [3-4], в которых приведены решения различных задач по курсу высшей математики.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задача 1. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4. Найти:

а) уравнение плоскости $A_1 A_2 A_3$;

б) уравнение прямой линии $A_1 A_4$;

в) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$;

г) угол между ребром $A_1 A_4$ и гранью $A_1 A_2 A_3$;

д) площадь грани $A_1 A_2 A_3$;

е) объём пирамиды.

1. $A_1(4;2;5),\ A_2(0;7;2),\ A_3(0;2;7),\ A_4(1;5;0)$.
2. $A_1(4;4;10),\ A_2(4;10;2),\ A_3(2;8;4),\ A_4(9;6;4)$.
3. $A_1(4;6;5),\ A_2(6;9;4),\ A_3(2;10;10),\ A_4(7;5;9)$.
4. $A_1(3;5;4),\ A_2(8;7;4),\ A_3(5;10;4),\ A_4(4;7;8)$.
5. $A_1(10;6;6),\ A_2(-2;8;2),\ A_3(6;8;9),\ A_4(7;10;3)$.
6. $A_1(1;8;2),\ A_2(5;2;6),\ A_3(5;7;4),\ A_4(4;10;9)$.
7. $A_1(6;6;5),\ A_2(4;9;5),\ A_3(4;6;11),\ A_4(6;9;3)$.
8. $A_1(7;2;2),\ A_2(5;7;7),\ A_3(5;3;1),\ A_4(2;3;7)$.
9. $A_1(8;6;4),\ A_2(10;5;5),\ A_3(5;6;8),\ A_4(8;10;7)$.
10. $A_1(7;7;3),\ A_2(6;5;8),\ A_3(3;5;8),\ A_4(8;4;1)$.

Задача 2. Даны вершины треугольника ABC. Найти:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) точку H пересечения высоты CH и стороны AB;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB.

1. $A(-2;4),\ B(3;1),\ C(10;7)$.
2. $A(-3;-2),\ B(14;4),\ C(6;8)$.
3. $A(1;7),\ B(-3;-1),\ C(11;-3)$.
4. $A(1;0),\ B(-1;4),\ C(9;5)$.
5. $A(1;-2),\ B(7;1),\ C(3;7)$.
6. $A(-2;-3),\ B(1;6),\ C(6;1)$.

7. $A(-4;2),B(-6;6),C(6;2)$.
8. $A(4;-3),B(7;3),C(1;10)$.
9. $A(4;-4),B(8;2),C(3;8)$.
10. $A(-3;-3),B(5;-7),C(7;7)$.

Задача 3. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{1-\cos4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+\sin5x}{6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\,\mathrm{tg}\,x}{\sin^2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,x}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\sin^2 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-4}{x^2-16}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 3x}{10x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{ctg}^2 3x$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

Задача 4. Задана функция $y=f(x)$. Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти её пределы слева и справа, классифицировать характер разрыва. Построить схематично график функции.

1. $f(x)=\begin{cases} x+4,\ x<-1, \\ x^2+2,\ -1\le x<1, \\ 2x,\ x\ge 1. \end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases} x+2,\ x\le -1, \\ x^2+1,\ -1<x\le 1, \\ -x+3,\ x>1. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} -x,\ x\le 0, \\ -(x-1)^2,\ 0<x<2, \\ x+3,\ x\ge 2. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} \cos x,\ x\le 0, \\ x^2+1,\ 0<x<1, \\ x,\ x\ge 1. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} -x,\ x\le 0, \\ x^2,\ 0<x\le 2, \\ x+1,\ x>2. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} -x,\ x\le 0, \\ \sin x,\ 0<x\le \pi, \\ x-2,\ x>\pi. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} -x^2,\ x\le 0, \\ \mathrm{tg}x,\ 0<x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 2,\ x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} -(x+1),\ x\le -1, \\ (x+1)^2,\ -1<x\le 0, \\ x,\ x>0. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} -2x,\ x\le 0, \\ x^2+1,\ 0<x\le 1, \\ 2,\ x>1. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} -2x,\ x\le 0, \\ \sqrt{x},\ 0<x<4, \\ 1,\ x\ge 4. \end{cases}$

Задача 5. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ следующих функций.

1. а) $y=x^2\arccos\sqrt{x}$; б) $y=\ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$; в) $x=2t^2+t,\ y=\ln t$.

2. а) $y=\dfrac{x}{2}\cdot\sqrt{25-x^2}+\dfrac{25}{2}\arccos\dfrac{x}{5}$; б) $y=e^{\operatorname{ctg}2x}$; в) $x=\dfrac{1-t}{1+t^2},\ y=\dfrac{2+t^2}{t^2}$.

3. а) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x-3}{x+3}$; б) $y=\operatorname{arcctg}e^{5x}$; в) $x=\sin^2 3t,\ y=\cos^2 3t$.

4. а) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; б) $y=\dfrac{1-\cos 3x}{1+\cos 3x}$; в) $x=t^4+2t,\ y=t^2+5t$.

5. а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\arccos\dfrac{1}{x^2}$; б) $y=(x-1)e^{x^2}$; в) $x=t-\ln\sin t,\ y=t+\ln\cos t$.

6. а) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+\ln\sin x$; б) $y=e^{\cos 3x}$; в) $x=\operatorname{tg}t,\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

7. а) $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)+\sqrt{x^2+2x}$; в) $x=t^2-t^3,\ y=2t^3$.

8. а) $y=\ln\cos 2x-\ln\sin 2x$; б) $y=2^{\operatorname{ctg}^2 3x}$; в) $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$.

9. а) $y=\arccos\dfrac{x-1}{x+1}$; б) $y=\ln\operatorname{ctg}\sqrt{x+2}$; в) $x=3\sin t,\ y=3\cos^2 t$.

10. а) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3x}{3}-\dfrac{\operatorname{ctg}^2x}{2}$; б) $y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$; в) $x=2t-t^2,\ y=2t^3$.

Задача 6. Методами дифференциального исчисления: а) исследовать функцию $y=f(x)$ и по результатам исследования построить её график; б) найти наименьшее и наибольшее значения заданной функции на отрезке [a; b].

1. а) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$, б) [-3; 3].

2. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, б) [-1; 1].

3. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, б) [-2; 2].

4. а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$, б) [-2; 2].

5. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$, б) [1; 4].

6. а) $y=(x-1)^{3x+1}$, б) [0; 1].

7. а) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, б) [1; 9].

8. а) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$, б) [-1; 1].

9. а) $y=xe^{-x^2}$, б) [-2; 2].

10. а) $y=\dfrac{x^3-3}{x^2+9}$, б) [-2; 2].

Решение задачи 1.

Приведём теоретический материал, (см. [1]), необходимый для решения задачи 1.

Квадратной матрицей *n*-го порядка называется таблица, состоящая из чисел, расположенных в виде *n* строк и *n* столбцов, заключённая в круглые скобки. Числа, из которых состоит матрица, называют элементами матрицы. Каждому элементу матрицы ставят в соответствие двойной номер: номер строки и номер столбца, на пересечении которых он находится.

Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю матрицы *A* называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \cdots a_{nn}$. Побочной диагональю матрицы *A* называется совокупность элементов $a_{n1}, a_{n-1\,2}, \cdots a_{2\,n-1}, a_{1n}$. Определителем матрицы *A* называется число Δ_n, обозначаемое

$$\Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(1), вычисляемое по правилу, которое будет приведено ниже.

Для *n*=2 имеем $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Для *n*=3 имеем $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$, где A_{ij} алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, которое определяется равенством $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, а M_{ij} – минор элемента a_{ij}, который равен определителю, полученному из определителя Δ_n вычёркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Определитель Δ_3 можно найти по правилу треугольников:

$$\Delta_3 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} +$$
$$+ a_{21} \cdot a_{12} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}).$$

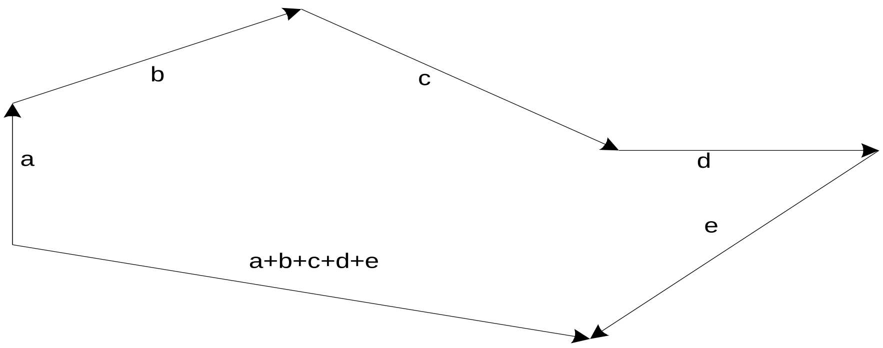
Вектором называется направленный отрезок, обозначаемый $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, где *A*– начальная точка вектора, а *B*–конечная точка вектора.

Длиной вектора называется расстояние между его началом и концом и обозначается $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Векторы называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой и компланарными, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Суммой векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots \overrightarrow{a_n}$ называется вектор, начало которого находится в начале первого вектора, а конец – в конце вектора $\overrightarrow{a_n}$, где начало каждого следующего вектора совпадает с концом предыдущего вектора. Например.



Прямая *l* с заданным на ней направлением (положительным направлением) и единицей масштаба называется числовой прямой.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось *l* называется число, обозначаемое $ПР_l \vec{a}$, равное $|\vec{a}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi -$угол между положительным направлением оси *l* и вектором $\vec{a}$ $(0 \le \varphi \le \pi)$.

Координатами вектора $\vec{a}$ называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Запись $\vec{a} = (x; y; z)$ означает, что *x, y, z* координаты вектора $\vec{a}$.

Если $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Векторы $\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$ называются ортами.

Тогда $\vec{a} = (x; y; z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Пусть $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ и $\lambda -$ произвольное число.

Тогда $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1), \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$,

$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

Отношением, в котором точка *M* делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{M\,M_2}$. Пусть $M(x; y; z), M_1(x_1; y_1; z_1)$,

$M_2(x_2; y_2; z_2)$, тогда $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$. (5)

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$, равное $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то справедливы формулы:

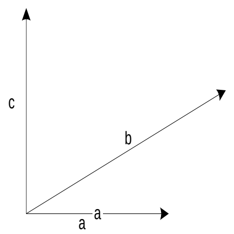
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, (6) $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_1^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. (7)

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка векторов:



Если

$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают с двумя смежными сторонами параллелограмма, тогда $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ – площадь параллелограмма и $S = \dfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ – площадь треугольника, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают с двумя сторонами треугольника, выходящими из общей вершины.

Смешанным произведением трёх векторов $\vec{a}; \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Если

$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{\mathrm{c}} = (x_3; y_3; z_3)$, то $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. (9)

Рассмотрим треугольную пирамиду, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ совпадают с тремя рёбрами, выходящими из одной вершины. Тогда объём пирамиды находится по формуле $V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$. (10)

Рассмотрим элементы аналитической геометрии, необходимые для решения задачи 1.

Уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$ (11), где *A, B, C* – заданные числа, $(x;\, y;\, z)$ – координаты переменной точки плоскости. Тогда $\vec{n} = (A;\, B;\, C)$ – вектор перпендикулярный плоскости (нормальный вектор).Пусть $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1),\, M_2(x_2;\, y_2;\, z_2),\, M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$ три точки не лежащие на одной прямой, принадлежащие плоскости. Тогда её уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ (12)

Каноническим уравнением прямой в пространстве называется уравнение

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$. (15)

Перейдём к решению задачи 1.

Пусть $A_1(2;\, -1;\, 7),\, A_2(6;\, 3;\, 1),\, A_3(3;\, 2;\, 8),\, A_4(-2;\, -3;\, 7)$.

а) Найдём уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле (12):

$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-7 \\ 6-2 & 3+1 & 1-7 \\ 3-2 & 2+1 & 8-7 \end{vmatrix} = 0$, т. е. $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-7 \\ 4 & 4 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Приведём уравнение плоскости к общему виду (11). Для этого применим формулу (3) и определение алгебраических дополнений, получим

$(x-2)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (y+1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z-7)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Раскрывая определители 2-го порядка по формуле (2), получим $(x-2)\cdot(4+18) - (y-1)\cdot(4+6) + (z-7)\cdot(12-4) = 0$, или $22(x-2) - 10(y-1) + 8(z-7) = 0$. Деля обе части уравнения на 2, раскрывая скобки и приводя подобные, получим уравнение искомой плоскости

$$11x - 5y + 4z - 51 = 0.$$

Отметим, что вектор нормали к этой плоскости будет $\vec{n} = (11;\, -5;\, 4)$.

б) Для нахождения прямой A_1A_4 применим формулу (15):

$\frac{x-2}{-2-2} = \frac{y+1}{-3+1} = \frac{z-7}{7-7}$ т. е. $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-7}{0}$.

в) Так как высота, опущенная из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$, к ней перпендикулярна то нормальный вектор $\vec{n} = (11;\, -5;\, 4)$ этой плоскости будет параллелен высоте, поэтому его можно принять за направляющий вектор. Тогда уравнение высоты находим по формуле (13): $\dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y+3}{-5}=\dfrac{z-7}{4}$.

г) Угол φ между ребром A_1A_4 и плоскостью найдём из формулы (14):

$$\sin\varphi=\frac{|11\cdot(-4)+(-5)\cdot(-2)+4\cdot 0|}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{11^2+(-5)^2+4^2}} \text{ т. е. } \sin\varphi=\frac{34}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{162}}\approx 0{,}5973$$

Тогда $\varphi=\arcsin(0{,}5973)\approx 36^\circ 41'$. д) Для нахождения площади грани $A_1A_2A_3$ воспользуемся геометрическим приложением векторного произведения $S=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, где $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{b}=\overrightarrow{A_1A_3}$.

Сначала найдём данные вектора: $\overrightarrow{A_1A_2}=(6-2;3+1;1-7)=(4;4;-6)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(3-2;2+1;8-7)=(1;3;1)$. Затем найдём их векторное произведение по формуле (8): $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 4 & -6\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}4 & -6\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}4 & -6\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}4 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=$

$=\vec{i}\cdot(4+18)-\vec{j}\cdot(4+6)+\vec{k}\cdot(12-4)=22\vec{i}-10\vec{j}+8\vec{k}=(22;-10;8)$.

Применяя формулу (7), получим

$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\sqrt{22^2+(-10)^2+8^2}=\sqrt{648}=\sqrt{162\cdot 4}=2\sqrt{162}$.

Тогда окончательно находим, что $S_{\Delta A_1A_2A_3}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{162}=\sqrt{162}.$

е) Для нахождения объёма V пирамиды применим формулу (10): $V=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Находим $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}=(6-2;3+1;1-7)=(4;4;-6)$,

$\vec{b}=\overrightarrow{A_1A_3}=(3-2;2+1;8-7)=(1;3;1)$,

$\vec{c}=\overrightarrow{A_1A_4}=(-2-2;-3+1;7-7)=(-4;-2;0)$.

Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}$, и $\overrightarrow{A_1A_4}$ находим по формуле (9):

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}4 & 4 & -6\\ 1 & 3 & 1\\ -4 & -2 & 0\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -4 & 0\end{vmatrix}+(-6)\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -4 & -2\end{vmatrix}=$$

$=4\cdot(0+2)-4\cdot(0+4)-6\cdot(-2+12)=4\cdot 2-4\cdot 4-6\cdot 10=8-16-60=-68$.

Тогда окончательно имеем, что $V=\dfrac{1}{6}\cdot|-68|=\dfrac{68}{6}=\dfrac{34}{3}$.

Решение задачи 2

1.2. Приведём теоретический материал, (см. [1]), необходимый для решения задачи 2. Запишем различные уравнения прямой линии на плоскости. Прямая, проходящая через две заданные точки $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$, имеет вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. (16) Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;\, y_0)$ с угловым коэффициентом *к* (тангенс угла наклона прямой с положительным направлением оси *Ох*) имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$. (17) Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y=kx+b$, (18), где b отрезок, отсекаемый прямой от оси *Оу*.

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты k_1 и k_2 равны, если прямые перпендикулярны, то $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Перейдём к решению задачи 2. Пусть $A(-2;2), B(4;5), C(2;7)$.

а) Найдём уравнение прямой *АВ* по формуле (16):
$\dfrac{x+2}{4+2}=\dfrac{y-2}{5-2}$, т. е. $\dfrac{x+2}{6}=\dfrac{y-2}{3}$. Приведём полученное уравнение к виду (18). Для этого умножим обе части полученного уравнения на 6:
$x+2=2(y-2)$, т. е. $x+2=2y-4,\ 2y=x+6$. Деля обе части последнего уравнения на 2, окончательно получим $y=\dfrac{1}{2}x+3$.

б) Найдём уравнение высоты *СН*. Из полученного в п. а) уравнения прямой *АВ* находим, что её угловой коэффициент $k_1=\dfrac{1}{2}$. Тогда из условия перпендикулярности прямых *АВ* и *СН* находим, что угловой коэффициент k_2 прямой *СН* будет $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-2$. Поэтому, уравнение высоты *СН* найдём по формуле (17): $y-7=-2\cdot(x-2)$, т. е. $y-7=-2x+4;\ y=-2x+11$.

в) Для нахождения уравнения медианы, воспользуемся её определением: точка *М* делит отрезок *ВС* пополам, т. е. $\lambda=1$. Поэтому координаты точки *М* найдём по формуле (5), учитывая, что координата z отсутствует:
$x=\dfrac{4+2}{2}=3,\ y=\dfrac{5+7}{2}=6$, т. е. $M(3;6)$. Тогда уравнение медианы *АМ* найдём по формуле (16): $\dfrac{x+2}{3+2}=\dfrac{y-2}{6-2}$, т. е. $\dfrac{x+2}{5}=\dfrac{y-2}{4}$.

г) Точка *Н* есть точка пересечения двух прямых *АВ* и *СН*, поэтому она находится как решение системы из двух уравнений: $\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+3 \\ y=-2x+11 \end{cases}$. Вычитая из 1-го уравнения 2-е, получим: $\frac{5}{2}x-8=0$, т. е. $\frac{5}{2}x=8$ или $x=\frac{16}{5}$. Тогда, $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}+3=\frac{8}{5}+3=\frac{23}{5}$. Итак $H\left(\frac{16}{5};\frac{23}{5}\right)$.

д) Так как прямая, проходящая через вершину C параллельна прямой AB, то её угловой коэффициент $k=\frac{1}{2}$. Поэтому её уравнение найдём по формулу (17): $y-7=\frac{1}{2}(x-2)$, т. е. $y-7=\frac{1}{2}x-1$ или $y=\frac{1}{2}x+6$.

<u>Решение задачи 3.</u>

Приведём теоретический материал, необходимый для решения задачи 3. (см [2], т. 1).

Функцией называется правило, по которому каждому числу *x,* принадлежащему ($\in$) некоторому множеству D *и*з числовой прямой *R* ставится в соответствие единственное число *y* и это записывают в виде $y=f(x)$; *x* называют независимой переменной или аргументом функции. Множество D называют областью определения функции, а множество E значений принимаемых функцией *y* – называется областью значений функции.

Окрестностью точки x_0 будем называть любой отрезок, содержащий точку

x_0 внутри себя. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда число *A* называется пределом функции $y=f(x)$ при *x* стремящемся ($\to$) к x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0\,(\delta=\delta(\varepsilon))$ такое, что при $0<|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ и это записывают $A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. Запись $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=A$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $N=N(\varepsilon)$ такое, что при $|x|>N$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пусть существуют конечные пределы $A_i=\lim\limits_{x\to x_0}f_i(x)$, где $i=1,2,...,n$.

Тогда 1)
$\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)+\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)+...+\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_n(x))=\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\cdot f_2(x)\cdot...\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)}$, если $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)\neq 0$.

Свойства справедливы и при $x\to\pm\infty$

4) Пусть C постоянная величина. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой величиной при $x \to x_0$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} E(x) = \infty$, то *E(x)* называют бесконечно большой величиной.

Справедливо утверждение: если $\alpha(x)$ – б. м. величина при $x \to x_0$ то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – б. б. величина при $x \to x_0$ и, наоборот, если *E(x)* – б. б. величина то $\dfrac{1}{E(x)}$ – б. м. величина при $x \to x_0$.

Бесконечно малые величины $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ при $x \to x_0$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$.

Бесконечно большие величины $E_1(x)$ и $E_2(x)$ при $x \to x_0$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{E_1(x)}{E_2(x)} = 1$.

В дальнейшем применяется символическая запись эквивалентности $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ и $E_1(x) \sim E_2(x)$ при $x \to x_0$.

При нахождении пределов функций можно бесконечно малые и бесконечно большие величины заменять на эквивалентные более простые.

<u>Замечательные пределы:</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, т. е. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;
2. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e \approx 2,718.$

Пусть $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$, тогда $P_n(x) \sim a_0 x^n$ при $n \to \infty$, где $a_0 \neq 0$.

Рассмотрим решение типовых примеров для задачи 3.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2} = \left[4x^3 - 2x + 1 \sim 4x^3;\, 2x^3 + 3x^2 + 2 \sim 2x^3\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3}{2x^3}$ =2.

б) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} = A$. Если применим свойство пределов 3), то получим неопределённость $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, т. е. свойство не применимо. Для избавления от неопределённости разложим числитель и знаменатель на простые сомножители используя формулу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратичной функции. Так как один корень мы знаем

$x_1=-2$, то второй корень x_2 удобно найти из теоремы Виетта: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Тогда для числителя $-2x_2=\frac{6}{5}$, т. е. $x_2=-\frac{3}{5}$; для знаменателя $-2x_2=-\frac{8}{3}$, т. е. $x_2=\frac{4}{3}$. Возвращаясь к нашему пределу, имеем

$$A=\lim_{x\to-2}\frac{5(x+2)\cdot(x+\frac{3}{5})}{3(x+2)\cdot(x-\frac{4}{3})}=\lim_{x\to-2}\frac{5(x+\frac{3}{5})}{3(x-\frac{4}{3})}=\lim_{x\to-2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{-10+3}{-6-4}=\frac{-7}{-10}=0,7$$

.

в) $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]$=[для избавления от неопределённости умножим числитель и знаменатель дроби на $\left(\sqrt{2x+7}+5\right)$ и $\left(\sqrt{3}+x\right)$]=

$$=\lim_{x\to9}\frac{\left(\sqrt{2x+7}-5\right)\left(\sqrt{2x+7}+5\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x+7}+5\right)}=\lim_{x\to9}\frac{(2x+7-25)(3+\sqrt{x})}{(9-x)(\sqrt{2x+7}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{2(x-9)(3+\sqrt{x})}{-(x-9)(\sqrt{2x+7}+5)}=\lim_{x\to9}\frac{2(3+\sqrt{x})}{-(\sqrt{2x+7}+5)}=\frac{2\cdot(3+3)}{-(5+5)}=-\frac{12}{10}=-1,2.$$

г) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos8x}{x(\sin4x+\sin6x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$=[для избавления от неопределённости воспользуемся формулой: $1-\cos8x=2\sin^2 4x$ и эквивалентностями: $\sin4x\sim4x$,

$\sin6x\sim6x$]$=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot(4x)^2}{x\cdot(4x+6x)}=\lim_{x\to0}\frac{32x^2}{10x^2}=\lim_{x\to0}\frac{32}{10}=3,2$.

д) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+8}\right)^{2x+1}=A$. Так как $3x+4\sim3x$ то получим неопределённость $\left[1^\infty\right]$ Для избавления от полученной неопределённости применим 2-й замечательный предел. Тогда

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x+8)-4}{3x+8}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{3x+8}\right)^{2x+1}=[3x+8\sim3x,\ 2x+1\sim2x]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{3x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{3x}\right)^{\frac{3x}{-4}\cdot(-8)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{3x}\right)^{\frac{3x}{-4}}\right)^{-8}=e^{-8}.$$

<u>Решение задачи 4.</u>

1.4. Приведём теоретический материал, необходимый для решения задачи 4 (см.[2], т. 1). Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если: 1) она определена в точке x_0 и её окрестности; 2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется непрерывной в области, если она непрерывна во всех точках области. Точка x_0, в которой нарушено хотя бы одно из 3-х условий непрерывности называется точкой разрыва функции. Если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x<x_0)}} f(x)$, то он называется левосторонним пределом функции и обозначается символом $f(x_0 - 0)$. Аналогично:

если существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x>x_0)}} f(x)$, то он называется правосторонним пределом функции и обозначается символом $f(x_0 + 0)$.

Если в точке $x = x_0$ существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, такие, что $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется точкой разрыва первого рода. Если хотя бы один из этих пределов равен бесконечности, то $x = x_0$ точка разрыва второго рода. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ и функция $f(x)$ в точке x_0 не определена, то $x = x_0$ называют точкой устранимого разрыва.

Перейдём к решению **<u>задачи 4</u>**. Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 - x, & x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Так как элементарные функции непрерывны на области определения, то надо исследовать точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

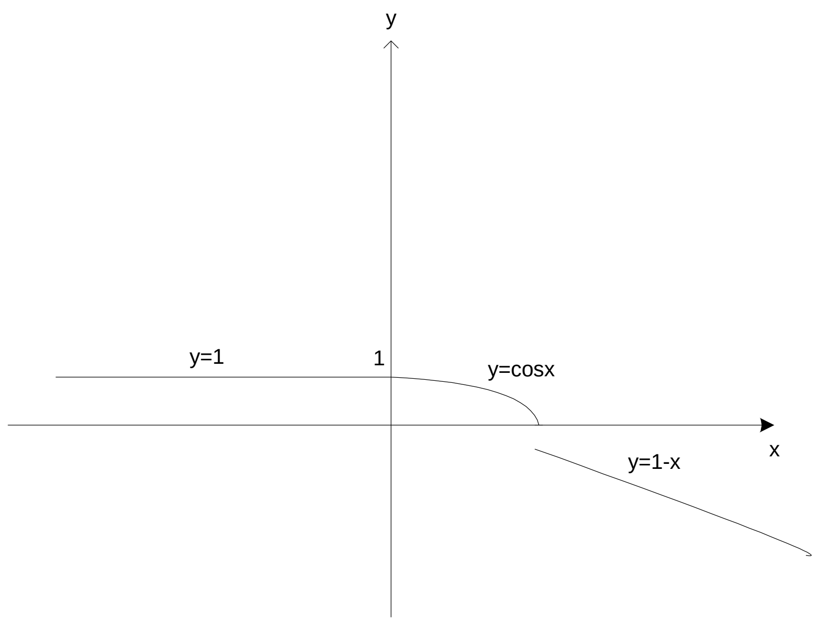
Рассмотрим точку $x_1 = 0$. Значение функции в точке $x_1 = 0$ существует и $f(0) = \cos 0 = 1$. Находим $f(-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$;

$f(+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, т. е. Существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Все три условия непрерывности выполнены, поэтому функция непрерывна в точке x=0.

Рассмотрим точку $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Значение функции в точке $x_2 = \frac{\pi}{2}$ существует и $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2}$. Находим $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ (x < \pi/2)}} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} \cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

$f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ (x > \pi/2)}} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi/2} (1 - x) = 1 - \frac{\pi}{2}.$

Оба предела конечны и неравны между собой, поэтому $x_2 = \frac{\pi}{2}$ точка разрыва первого рода. Строим схематический чертёж функции.



Решение задачи 5

Приведём теоретический материал, необходимый для решения задачи 5 (см. [2], т. 1). Пусть функция $y = f(x)$ задана в точке x и некоторой её окрестности. Приращением функции $y = f(x)$ в точке x называется величина $\Delta y(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, где $\Delta x -$ приращение аргумента x.

Предел отношения приращения функции $\Delta y(x)$ к приращению аргумента Δx, при стремлении Δx к нулю, называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается одним из символов: $y'(x),\ f'(x),\ \frac{dy(x)}{dx}$.

Если указанный предел существует, то функцию $y = f(x)$ называют дифференцируемой в точке x, а операцию нахождения y' – дифференцированием.

Пусть С – постоянное число, $u = u(x)$ и $v = v(x) -$ некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие свойства производных:

1) $C' = 0;$

2) $x' = 1;$

3) $(u \pm v)' = u' \pm v';$

4) $(u \cdot v)' = u'v + v'u;$

5) $(c \cdot u)' = c\,u';\ \left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c};$

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0);$

7) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2} \quad (v \neq 0);$

8) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x;$

9) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $g'(y) \neq 0$, то $f'(x) = \dfrac{1}{g'(y)}$.

Приведём таблицу производных основных элементарных функций.

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u', \quad (\alpha \in R);$
2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$
3. $\left(a^{u}\right)' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'; \quad (a \in R, a > 0);$
4. $\left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u';$
5. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'; \quad (a \in R, a > 0, a \neq 1)$
6. $\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u';$
7. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u';$
8. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u';$
9. $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
10. $\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
11. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

12. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

13. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

14. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

15. $\left(\mathrm{sh} u\right)' = \mathrm{ch} u \cdot u'$, где $\mathrm{sh} u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2}$, $\mathrm{ch} u = \dfrac{e^u + e^{-u}}{2}$;

16. $\left(\mathrm{ch} u\right)' = \mathrm{sh} u \cdot u'$;

17. $\left(\mathrm{th} u\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$; $\mathrm{th} u = \dfrac{\mathrm{sh} u}{\mathrm{ch} u}$;

18. $\left(\mathrm{cth} u\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$; $\mathrm{cth} u = \dfrac{\mathrm{ch} u}{\mathrm{sh} u}$;

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически $\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \psi(t) \end{cases}$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемые функции в точке t и $\psi'(t) \neq 0$, тогда $y'_x = \dfrac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$.

Рассмотрим решение типовой задачи.

Пусть а) $y = \left(3x^2 - 1\right) \cdot \sin^3(2x) + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{e^x}$. Для нахождения производной от функции y сначала применим свойство 3), а затем к первому слагаемому свойство
4) и ко второму слагаемому свойство 6). Тогда получим, что

$$y' = \left((3x^2 - 1) \cdot \sin^3(2x)\right)' + \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{e^x}\right)' = (3x^2 - 1)' \cdot \sin^3(2x) + (3x^2 - 1) \cdot \left(\sin^3(2x)\right)' +$$

$$+ \frac{(x^{\frac{2}{3}})' \cdot e^{2x} - x^{\frac{2}{3}} \cdot \left(e^{2x}\right)'}{e^{4x}}.$$ Находим $(3x^2 - 1)' = (3x^2)' - 1' = 3 \cdot (x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$ [мы сначала применили свойство3), затем к каждому слагаемому соответственно свойство 5) и 1), а после этого формулу 1].

$$\left(\sin^3(2x)\right)' = 3\sin^2(2x) \cdot \left(\sin(2x)\right)' = 3\sin^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot (2x)' =$$

$= 3\sin^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 = 6 \cdot \sin^2(2x) \cdot \cos(2x)$ [мы сначала применили формулу 1, затем 7, а после свойство 5) и свойство 2)];

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\cdot x' = \frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$$ [мы применили формулу 1, затем свойство 2)];

$\left(e^{2x}\right)' = e^{2x}\cdot(2x)' = e^{2x}\cdot 2\cdot x' = 2\cdot e^{2x}$ [мы применили формулу 4, затем свойство 5) и свойство 2)]. Подставляя найденные производные в y', получим

$$y' = 6x\cdot\sin^3(2x) + 6(3x^2-1)\cdot\sin^2(2x)\cdot\cos(2x) + \frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot e^{2x} - x^{\frac{2}{3}}\cdot 2e^{2x}}{e^{4x}}.$$

Пусть б) $y = \operatorname{tg}\left(\log_2(\arcsin x^2)\right)$. Функция имеет табличный вид 9, поэтому

$$y' = \frac{1}{\cos^2\left(\log_2(\arcsin x^2)\right)}\cdot\left(\log_2(\arcsin x^2)\right)'.$$

Оставшаяся производная имеет табличный вид 5, поэтому

$$y' = \frac{1}{\cos^2\left(\log_2(\arcsin x^2)\right)}\cdot\frac{1}{\arcsin x^2\cdot\ln 2}\cdot(\arcsin x^2)' =$$

$$= \frac{1}{\cos^2\left(\log_2(\arcsin x^2)\right)\cdot\arcsin x^2\cdot\ln 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\cdot(x^2)' =$$

$$= \frac{2x}{\cos^2\left(\log_2(\arcsin x^2)\right)\cdot\arcsin x^2\cdot\ln 2\cdot\sqrt{1-4x^2}}$$ [для окончательного нахождения производной мы применили формулу 11, а затем 1].

Пусть в) $\begin{cases} x = 3t^2 + \sin t, \\ y = \dfrac{3^{\cos t}}{t^2}. \end{cases}$ Для нахождения производной воспользуемся формулой $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. Найдём производные $y'_t = \dfrac{\left(3^{\cos t}\right)'\cdot t^2 - 3^{\cos t}\cdot(t^2)'}{t^4} =$

$$= \frac{3^{\cos t}\cdot\ln 3\cdot(\cos t)'\cdot t^2 - 3^{\cos t}\cdot 2t\cdot t'}{t^4} = \frac{3^{\cos t}\cdot\ln 3\cdot(-\sin t)\cdot t'\cdot t^2 - 3^{\cos t}\cdot 2t}{t^4} =$$

$$= \frac{-t(3^{\cos t}\cdot\ln 3\cdot(-\sin t)\cdot t'\cdot t + 3^{\cos t}\cdot 2)}{t^4} = -\frac{3^{\cos t}\cdot\ln 3\cdot\sin t\cdot t + 3^{\cos t}\cdot 2}{t^3}.$$ [мы сначала применили свойство 6), затем формулы 3 и 1, после чего применили формулу 8 и воспользовались тем, что производная переменной по самой себе равна 1].

$x_t' = (3t^2)' + (\sin^2 t)' = 3\cdot(t^2)' + 2\sin t\cdot(\sin t)' = 3\cdot 2t\cdot t' + 2\sin t\cdot\cos t\cdot t' =$
$= 6t + \sin 2t.$ [мы применили свойство 3, затем к первому слагаемому свойство 5, а ко второму формулу 1, после чего к первому слагаемому применим формулу 1, а ко второму формулу 7 и что $t' = 1$]. Тогда, проводя деление полученных результатов, получим $y_x' = -\dfrac{3^{\cos t}\ln 3\cdot\sin t\cdot t + 2\cdot 3^{\cos t}}{t^3(6t + \sin 2t)}.$

Решение задачи 6.

Приведём теоретический материал, необходимый для решения задачи 6 (см [2], т. 1). Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на интервале $[a;b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a;b], x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Справедливы утверждения:

1. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ для любого $x \in [a;b]$.
2. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая внутри него функция $y = f(x)$ имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке. Интервалы возрастания и убывания функции называют интервалами монотонности функции.

Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $\triangle x$ $(\triangle x \neq 0)$ выполняется неравенство $f(x_0 + \triangle x) < f(x_0)$ $\left(f(x_0 + \triangle x) > f(x_0)\right)$. Точки минимума и максимума функции – называют точками экстремума функции, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Точка x_0 называется критической точкой функции $y = f(x)$, если функция определена в этой точке и производная в ней равна нулю или не существует.

Теорема 1. Пусть x_0 критическая точка функции $y = f(x)$, а сама функция непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой окрестности (кроме, может быть, самой этой точки x_0). Для того чтобы функция имела экстремум в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы производная слева и справа от точки x_0 имела разные знаки. При этом, если слева от точки x_0 производная $f'(x) < 0$, то x_0 точка локального минимума, а если $f'(x) > 0$, то локального максимума.

Если на отрезке $[a;b]$ функция непрерывна, то она может достигать наименьшего $\left(y_{\text{наим.}}\right)$ и наибольшего $\left(y_{\text{наиб.}}\right)$ значений либо внутри отрезка, либо на его концах.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется выпуклой $(\cap)$ (вогнутой $(\cup)$) на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат не выше (не ниже) любой касательной в этом интервале.
Точка x_0 называется критической точкой 2-го типа для функции $y = f(x)$, если $f''(x) = 0$ или не существует. Точка x_0 называется точкой перегиба функции $y = f(x)$, если слева от неё кривая выпуклая, а справа – вогнутая и наоборот.

Теорема 2. Если во всех точках интервала $(a;b)$ производная $y''(x) > 0 \, (< 0)$, то кривая $y = f(x)$ в этом интервале вогнутая (выпуклая).

Теорема 3. Для того, чтобы критическая точка второго рода была точкой перегиба функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы слева и справа от неё производная второго порядка имела разные знаки.

Прямая линия L называется асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L, при удалении точки M в бесконечность, стремится к нулю.

Если функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет разрыв 2-го рода, то прямая $x = x_0$ является асимптотой кривой $y = f(x)$ (её называют вертикальной асимптотой). Если существуют пределы

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx), \quad (19)$$

То прямые $y = kx + b$ являются наклонными асимптотами кривой $y = f(x)$ (при $k = 0$ – горизонтальными)

Перейдём к решению **задачи 6.**

а) $y = \dfrac{x^3}{9 - x^2}$.

Найдём область определения (ОДЗ) функции. Дробь существует, если знаменатель не равен нулю, т. е. $9 - x^2 \neq 0;\ x^2 \neq 9;\ x \neq \pm 3$.
Итак, ОДЗ: $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; -\infty)$. Точки $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$ – точки разрыва. Исследуем их. Находим

$$y(-3-0) = \lim_{\substack{x \to -3 \\ (x < -3)}} \frac{x^3}{9 - x^2} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ (x < -3)}} \frac{-27}{9 - x^2} = +\infty,$$ т. к. знаменатель отрицательный и стремится к нулю;

$$y(-3+0) = \lim_{\substack{x \to -3 \\ (x > -3)}} \frac{x^3}{9 - x^2} = \lim_{\substack{x \to -3 \\ (x > -3)}} \frac{-27}{9 - x^2} = -\infty,$$ так как знаменатель положительный и стремится к нулю;

$$y(3-0)=\lim_{\substack{x\to 3\\(x<3)}}\frac{x^3}{9-x^2}=\lim_{\substack{x\to 3\\(x<3)}}\frac{27}{9-x^2}=+\infty$$, так как знаменатель положительный и стремится к нулю;

$$y(3+0)=\lim_{\substack{x\to 3\\(x>3)}}\frac{x^3}{9-x^2}=\lim_{\substack{x\to 3\\(x>3)}}\frac{27}{9-x^2}=-\infty$$, так как знаменатель отрицательный и стремится к нулю. И так $x_1=-3$ и $x_2=3$ – точки разрыва 2-го рода.

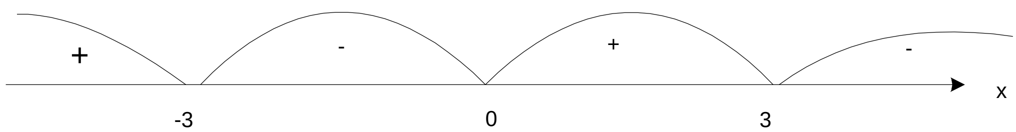
Так как область определения функции симметрична относительно нуля и $y(-x)=\frac{(-x)^3}{9-(-x)^2}=-\frac{x^3}{9-x^2}=-y(x)$, то функция нечётная, т. е. её график симметричен относительно начала координат.

Найдём точки пересечения графика функции с осями координат:
а) с осью ох: $y=0\Rightarrow x=0$, т. е. О(0; 0). б) с осью *оу*: $x=0\Rightarrow y=0$, т. е. О(0; 0)

Функция может менять знаки при переходе через точки разрыва и точки пересечения с осью ох. Найдём знаки функции. Так как

$y(-4)=\frac{-64}{9-16}=\frac{64}{7}>0$,

$y(-1)=\frac{-1}{9-1}=\frac{-1}{8}<0$, $y(4)=\frac{64}{9-16}=\frac{64}{-7}<0$, $y(1)=\frac{1}{9-1}=\frac{1}{8}>0$, то знаки функции будут:



Найдём асимптоты.

Так как $x_1=-3$ и $x_2=3$ – точки разрыва 2-го рода, то $x=-3$ и $x=3$ – вертикальные асимптоты. Найдём наклонные асимптоты, используя формулы (19),

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(9-x^2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{9-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

$\left[9-x^2\sim -x^2 \text{ при } x\to\pm\infty\right]$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{9-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+9x-x^3}{9-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x}{9-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9x}{-x^2}=$$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{9}{-x} = 0$

$\left[9 - x^2 \sim -x^2 \text{ и так как } (-x) - \text{б.б. величина, то } \dfrac{9}{-x} - \text{б.м. величина} \right]$. Мы получили, что наклонная асимптота задаётся уравнением $y = -x$.

Исследуем функцию на монотонность и экстремумы. Найдём производную

$$y' = \frac{(x^3)' \cdot (9 - x^2) - x^3 \cdot (9 - x^2)'}{(9 - x^2)^2} = \frac{3x^2 \cdot (9 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} =$$

$$= \frac{27x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(9 - x^2)^2} = \frac{27x^2 - x^4}{(9 - x^2)^2}.$$

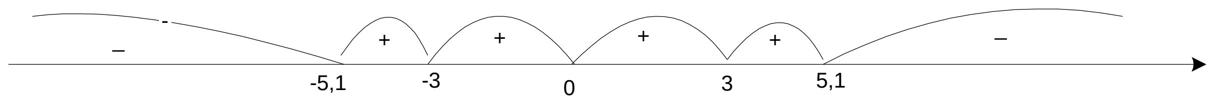
Найдём критические точки: $y' = 0 \Rightarrow 27x^2 - x^4 = 0;\ x^2(27 - x^2) = 0,\ x_1 = 0;$ $27 - x^2 = 0; x^2 = 27; x = \pm 3\sqrt{3} \approx \pm 5{,}1;$

y' – не существует $\Rightarrow 9 - x^2 = 0, x^2 = 9, x = \pm 3 \notin$ ОДЗ.

Исследуем знаки производной на интервалах, на которые ОДЗ разбилось критическими точками и укажем поведение функции на них

$(y'(-6) < 0, y'(-4) > 0,$

$y'(-1) > 0, y'(1) > 0,\ y'(6) < 0, y'(4) > 0,)$



Имеем, что $x = -3\sqrt{3} -$ точка минимума, а $x = 3\sqrt{3} -$ точка максимума. Найдём .экстремумы:

$$y_{\min} = y(-3\sqrt{3}) = \frac{\left(-3\sqrt{3}\right)^3}{9 - \left(-3\sqrt{3}\right)^2} = \frac{-27\sqrt{27}}{9 - 27} = \frac{81\sqrt{3}}{18} = \frac{9\sqrt{3}}{2};$$

Так как функция нечётная, то $y_{\max} = y\left(3\sqrt{3}\right) = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. Итак, получили две характерные точки $M_1\left(-3\sqrt{3}; \dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ и $M_2\left(3\sqrt{3}; -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\right)$.

Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба. Находим

$$y'' = \left(\frac{27x^2 - x^4}{(9 - x^2)^2}\right)' = \frac{(27x^2 - x^4)' \cdot (9 - x^2)^2 - (27x^2 - x^4) \cdot \left((9 - x^2)^2\right)'}{(9 - x^2)^4} =$$

$$= \frac{(54x - 4x^3) \cdot (9 - x^2)^2 - (27x^2 - x^4) \cdot 2 \cdot (9 - x^2) \cdot (9 - x^2)'}{(9 - x^2)^4} =$$

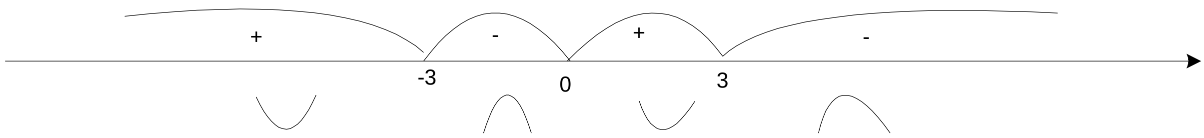
$$=\frac{(9-x^2)\left((54x-4x^3)\cdot(9-x^2)-(27x^2-x^4)\cdot 2\cdot(-2x)\right)}{(9-x^2)^4}$$ = [для нахождения производной мы воспользовались свойством 6) производных, после чего применили к первой функции сначала свойство 3), затем свойство 5) и формулу 1, а ко второй функции формулу 1, затем свойства 3) и 1) и формулу 1; далее сократим дробь на $(9-x^2)$ и в числители раскроем скобки и приведем подобные]=

$$=\frac{486x-36x^3-54x^3+4x^5+108x^3-4x^5}{(9-x^2)^3}=\frac{486x+18x^3}{(9-x^2)^3}.$$

Найдём критические точки второго типа:

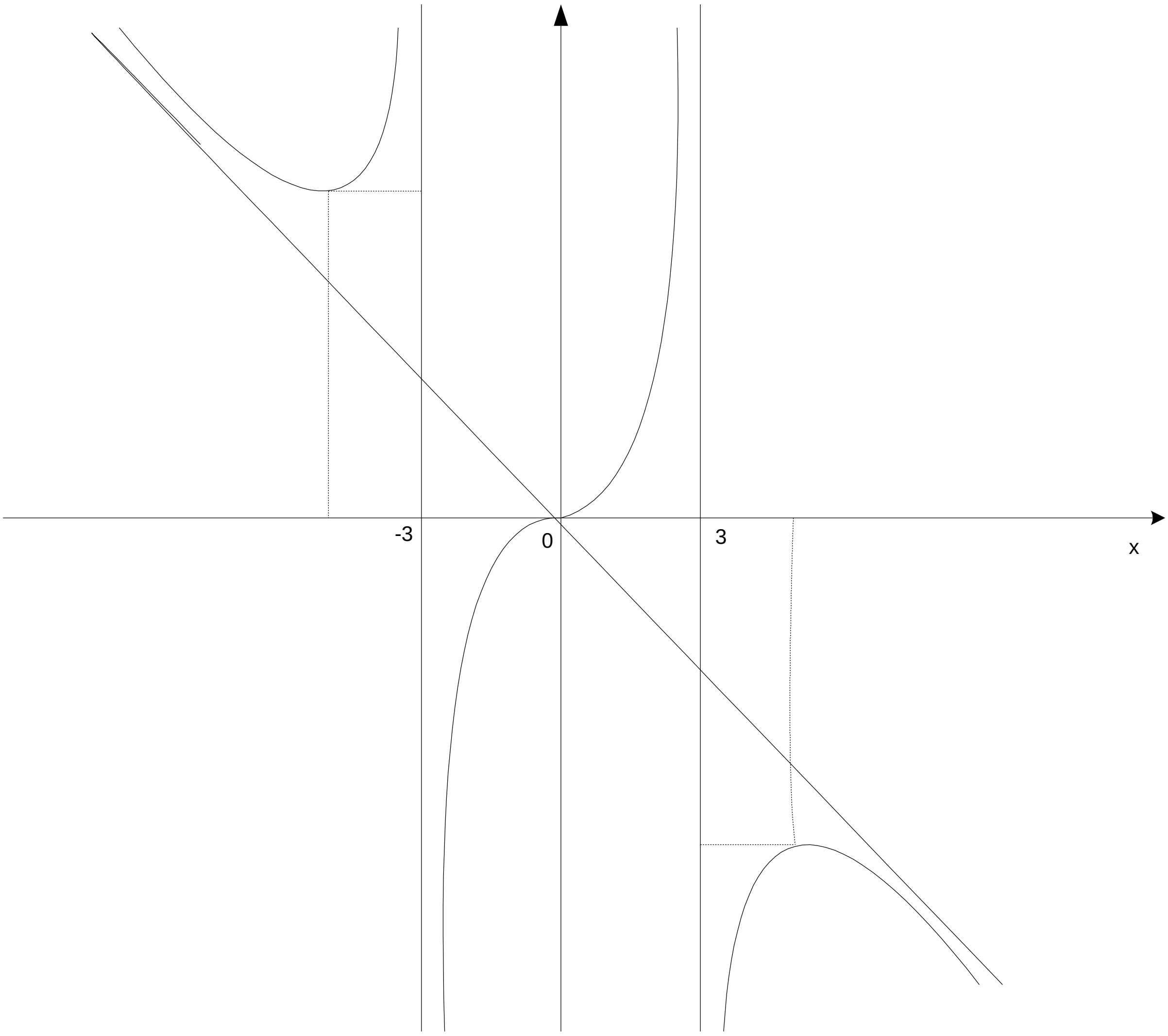
$y''=0\Rightarrow 18x\,(27+x^2)=0,$ т. е. $x=0.$ $y''-$ не существует $\Rightarrow 9-x^2=0$, $x=\pm 3\notin$ ОДЗ. Исследуем знаки y'' на интервалах, на которых ОДЗ разбилось критическими точками второго типа, и укажем поведение функции на них

$\left(y''(-4)>0,\ y''(-1)<0,\ y''(1)>0,\ y''(4)<0\right).$



Итак, получили, что $x=0$ точка перегиба, $y(0)=0$, т. е. полученная точка совпадает с точкой $\mathrm{O}(0;0)$. Переходим к построению графика функции, учитывая что он обладает симметрией относительно начала координат. Строим систему координат, наносим ОДЗ, характерные точки графика функции (точки О, M_1, M_2), проводим асимптоты $(x=-3,\ x=3,\ y=-x)$. Строим график сначала на промежутке $x\in(-\infty;-3)$ учитывая, что функция $y(x)>0$, всюду вогнута и убывает от $+\infty$, начинаясь от асимптоты $y=-x$ до точки M_1, а затем возрастает до $+\infty$, неограниченно приближаясь к вертикальной асимптоте $x=-3$.

Затем строим график функции на интервале $x\in(-3;3)$, учитывая, что функция на всём интервале монотонно растёт от $-\infty$ до $+\infty$, проходит через точку перегиба О(0; 0), слева от которой она выпуклая, а справа – вогнутая и неограниченно приближается к вертикальным асимптотам $x=-3$ и $x=3$. Строим график функции на последнем участке $x\in(3;+\infty)$ учитывая, что функция $y(x)<0$, на всём интервале выпукла и возрастает от $-\infty$, начиная от вертикальной асимптоты $x=3$ до точки M_2, а затем убывает до $-\infty$ неограниченно приближаясь к наклонной асимптоте $y=-x$.



Пусть б) $x \in [4; 6]$. Наибольшее и наименьшее значения функции могут приниматься на концах отрезка или во внутренних критических точках, т. е. при $x_1 = 4, x_2 = 6$ и $x = 3\sqrt{3}$ (в силу свойства а)).

Находим $y(4) = \dfrac{64}{9-16} = -\dfrac{64}{7}$; $y(6) = \dfrac{216}{9-36} = -\dfrac{216}{27} = -8$; $y(3\sqrt{3}) = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Сравнивая полученные значения, получим $y_{\text{наиб.}} = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$, $y_{\text{наим.}} = -\dfrac{64}{7}$.

Список литературы

1. Привалов И.И. Аналитическая Геометрия, – С.-П.: Лань, 2008, 304 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, М: Наука, 1985. В 2-х т.,. Т. 1. – 432 с.; т. 2. – 576 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах, – М: Высш. шк., 1986. В 2-х ч. ч., ч. I. – 304 с., ч.II
4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу, – С.-П. Лань, 2009, 464 с.