

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
СЕРИИ «УЧЕБНИКИ НГТУ»**

д-р техн. наук, проф. (председатель) *Н.В. Пустовой*

д-р техн. наук, проф. (зам. председателя) *Г.И. Расторгуев*

д-р техн. наук, проф. *А.А. Батаев*

д-р техн. наук, проф. *А.Г. Вострецов*

д-р техн. наук, проф. *В.И. Гужов*

д-р техн. наук, проф. *В.А. Гридчин*

д-р техн. наук, проф. *В.И. Денисов*

д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Г. Дубровский*

д-р экон. наук, проф. *К.Т. Джурабаев*

д-р филос. наук, проф. *В.И. Игнатъев*

д-р филос. наук, проф. *В.В. Крюков*

д-р техн. наук, проф. *В.Н. Максименко*

д-р техн. наук, проф. *Х.М. Рахимьянов*

д-р техн. наук, проф. *Ю.Г. Соловейчик*

д-р техн. наук, проф. *А.А. Спектор*

д-р экон. наук, проф. *В.А. Титова*

д-р техн. наук, проф. *А.Ф. Шевченко*

д-р техн. наук, проф. *Н.И. Щуров*

В.В. ПАНКРАТОВ, Е.А. ЗИМА, О.В. НОС

ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ
ТЕОРИИ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ

НОВОСИБИРСК
2011

УДК 681.5.01(075.8)

П 164

Рецензенты:

д-р техн. наук, профессор *В.Д. Юркевич*

д-р техн. наук, доцент *В.Н. Аносов*

Панкратов В.В.

П 164 Избранные разделы теории автоматического управления : учеб. пособие / В.В. Панкратов, О.В. Нос, Е.А. Зима. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. – 223 с. (Серия «Учебники НГТУ»).

ISBN 978-5-7782-1810-9

Излагаются специальные разделы теории автоматического управления, традиционно изучаемые в НГТУ студентами электротехнического и машиностроительного профиля. Рассмотрены методы модального управления и наблюдатели Люенбергера. Обсуждаются методы синтеза систем автоматического управления нелинейными и нестационарными объектами, основанные на принципе «глубокой» обратной связи по производным выхода. Рассматриваются основы теории оптимального управления и классические задачи оптимального управления электроприводами постоянного тока. Приведены вопросы для самоконтроля, примеры решения задач, задания на расчетно-графическую работу и лабораторный практикум.

Адресовано студентам, обучающимся по направлениям подготовки 220700 – Автоматизация технологических процессов и производств, 151900 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 140400 – Электроэнергетика и электротехника, специальностям 140604 – Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов, 220301 – Автоматизация технологических процессов и производств, а также может быть полезно магистрантам и аспирантам, специализирующимся в указанных областях.

УДК 681.5.01(075.8)

ISBN 978-5-7782-1810-9

© Панкратов В.В., Нос О.В., Зима Е.А., 2011

© Новосибирский государственный
технический университет, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	9
ЧАСТЬ 1. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И НАБЛЮДАТЕЛИ	11
1.1. Метод модального управления и управляемость линейных стационарных объектов	11
1.2. Наблюдаемость линейных объектов и наблюдатели полного порядка	16
1.3. Наблюдатели пониженного порядка	19
1.4. Свойства систем с модальным управлением и наблюдателями Люенбергера.....	22
1.5. Преимущества и недостатки «классического» модального управления	25
1.6. Модифицированный модальный метод	26
Вопросы для самоконтроля	31
Библиографический список.....	32
Приложения	33
П1.1. Стандартные линейные формы и распределения корней характеристического полинома	33
П1.2. Примеры синтеза линейных САУ модальным методом при полных и неполных измерениях.....	41
П1.3. Задание на расчетно-графическую работу	62
П1.4. Лабораторный практикум.....	70
ЧАСТЬ 2. МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, МАЛОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ИЗМЕНЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ: ОДНОКАНАЛЬНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОБЪЕКТЫ	75
Введение.....	75
2.1. Проблема синтеза алгоритмов управления в условиях неопределенности	79
2.1.1. Модель управляемого процесса и цель управления	79

2.1.2. Обратные модели управляемых процессов	81
2.1.3. Закон управления как алгоритм решения конечного уравнения	84
2.1.4. Метод разделения движений в задачах синтеза систем с разно- темповыми процессами	85
2.1.5. О принципе глубокой обратной связи.....	88
2.2. Метод больших коэффициентов	90
2.2.1. Основные положения метода.....	90
2.2.2. Дифференцирующие фильтры и их применение	93
2.2.3. Методика расчета систем с большими коэффициентами.....	96
2.2.4. Астатические законы управления в САУ с большими коэффици- ентами	99
2.2.5. Предельное управление и учет ресурсных ограничений	101
2.2.6. О синтезе квазинепрерывных систем с большими коэффициен- тами в законе управления.....	103
2.3. Метод скользящих режимов.....	105
2.3.1. Предпосылки и теоретические основы метода	105
2.3.2. Реальные скользящие режимы и способы обеспечения их малой чувствительности к состоянию и вариациям параметров объекта управления.....	109
2.3.3. Методика расчета систем с прямым разрывным управлением в скользящем режиме	111
2.3.4. Иллюстрация основных свойств метода на примере системы вто- рого порядка	111
2.4. Метод локализации	121
2.4.1. Идеиные основы метода	121
2.4.2. Особенности синтеза контура быстрых движений в системах с управлением по старшей производной	123
2.4.3. О синтезе астатических систем со старшей производной выхода в законе управления.....	126
2.5. Метод сигнально адаптивной обратной модели.....	128
2.5.1. Идея метода	128
2.5.2. Модельный пример САУ нестационарным линейным объектом.....	133
Вопросы для самоконтроля	139

Библиографический список.....	140
Приложения	145
П2.1. Применение метода больших коэффициентов в задаче управления технологическим процессом на базе асинхронного двигателя	145
П2.2. Синтез трехконтурной системы позиционного электропривода постоянного тока с прямым разрывным управлением.....	162
П2.3. Применение метода локализации в задаче управления положением подъемно-транспортного механизма	172
ЧАСТЬ 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ	189
Введение.....	189
3.1. Элементы классического вариационного исчисления.....	192
3.1.1. Задача о безусловном экстремуме функционала – простейшая задача вариационного исчисления	192
3.1.2. Нахождение оптимального характеристического полинома линейной системы.....	195
3.1.3. Оптимальное по критерию минимума потерь энергии управление позиционным электроприводом постоянного тока. Синтез с помощью уравнения Эйлера–Пуассона	196
3.1.4. Постановка задачи оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем.....	200
3.1.5. Задача об условном экстремуме функционала. Метод множителей Лагранжа.....	202
3.1.6. Синтез оптимального по критерию минимума потерь энергии управления позиционным электроприводом на основе метода Лагранжа.....	204
3.2. Элементы неклассического вариационного исчисления.....	205
3.2.1. Принцип максимума Л.С. Понтрягина.....	205
3.2.2. Линейная задача максимального быстродействия.....	207
3.2.3. Синтез оптимального по быстродействию программного управления позиционным электроприводом	209
3.2.4. Синтез оптимального по быстродействию закона управления позиционным электроприводом в классе алгоритмов с обратной связью.....	211

3.3. Динамическое программирование.....	213
3.3.1. Предварительные замечания.....	213
3.3.2. Функциональное уравнение Беллмана и алгоритм синтеза оптимальных управлений.....	214
3.3.3. Линейно-квадратичные задачи оптимального управления.....	216
Вопросы для самоконтроля	221
Библиографический список.....	222

ПРЕДИСЛОВИЕ

Владение современными подходами к анализу, синтезу и оптимизации систем автоматического управления сложными динамическими объектами в настоящее время является необходимым условием качественной профессиональной подготовки инженеров и исследователей, специализирующихся в области автоматизации технологических процессов, установок и комплексов. Наиболее перспективные из таких подходов базируются на идеях модального управления и восстановления неизмеряемых координат, использовании принципа глубокой обратной связи, методов теории оптимального управления.

Настоящее учебное пособие подготовлено сотрудниками кафедры электропривода и автоматизации промышленных установок и кафедры автоматизации производственных процессов в машиностроении Новосибирского государственного технического университета и структурно состоит из трех частей, в которых отражены основы перечисленных выше методов и принципов.

Пособие представляет собой переиздание книги «Специальные разделы современной теории автоматического управления» (2007 г.), в которое внесены необходимые исправления и дополнения.

Первая часть пособия посвящена модальному управлению и наблюдателям Люенбергера. В ее теоретических разделах рассмотрены классический метод модального управления линейными стационарными объектами, синтез наблюдателей полного и пониженного порядка, свойства систем с линейными обратными связями и наблюдателями Люенбергера, а также модифицированный модальный метод, обеспечивающий астатизм систем регулирования по управляющему и возмущающим воздействиям, представлен список вопросов для самоконтроля. В приложениях к первой части пособия приведены необходимые сведения о наиболее часто применяемых стандартных линейных формах, рассмотрены примеры решения задач, даны варианты расчетно-графической работы и задание на лабораторный практикум.

Во второй части учебного пособия рассматривается класс методов синтеза систем управления нелинейными и нестационарными объектами, основанный на принципе «глубокой» обратной связи по производным выходной регули-

руемой переменной. Применительно к задачам управления одноканальными непрерывными динамическими процессами в пособии излагаются основы метода больших коэффициентов, метода скользящих режимов, метода локализации, авторского метода сигнально адаптивной обратной модели. Авторы ставили перед собой цель интерпретировать материал максимально доступно для студентов, не имеющих специальной математической подготовки, что ограничило круг объектов частным видом математических моделей с линейным входением управляющих воздействий без форсирующих свойств (относительный порядок инерционности по выходу равен полному порядку объекта управления). Приведен список вопросов для самоконтроля, в приложениях рассмотрены иллюстративные примеры решения типовых задач.

Третья часть пособия посвящена основам теории оптимального управления и задачам оптимального управления электроприводами постоянного тока, ставшим уже классическими.

Теоретические разделы пособия написаны доктором технических наук, профессором В.В. Панкратовым, приложения – кандидатами технических наук, доцентами О.В. Носом (П1.1, П2.1 – П2.3) и Е.А. Зима (П1.2 – П1.4).

Для успешного освоения материала учебного пособия студентам необходимо знание основ теории автоматического регулирования, математического анализа и линейной алгебры. Мелким шрифтом приведены сведения ознакомительного характера, которые при первом прочтении можно опустить, не нарушая целостности восприятия. С целью лучшего понимания материала в каждой части пособия использована локальная нумерация разделов, формул, рисунков и литературных источников.

Предлагаемое вниманию читателей настоящее учебное пособие, по мнению авторов, не может быть свободно от методических недостатков. Замечания и предложения по содержанию настоящего издания направлять по адресу: 630092, Новосибирск – 92, пр. К. Маркса – 20, Новосибирский государственный технический университет, издательство НГТУ.

Часть 1

**МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
И НАБЛЮДАТЕЛИ**

**1.1. МЕТОД МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ
СТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ**

Одним из наиболее мощных и теоретически проработанных методов синтеза линейных (линеаризованных) систем автоматического управления (САУ) с постоянными параметрами является модальный метод¹. Для иллюстрации его основной идеи сначала рассмотрим одноканальный объект управления (один вход – один выход) порядка n , описываемый моделью вида

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – n -мерный вектор координат состояния; u – управляющее воздействие; y – выходная переменная; \mathbf{A} – собственная матрица объекта; \mathbf{B} – матрица управлений; \mathbf{C} – матрица выхода; размерности матриц: $\dim \mathbf{A} = n \times n$; $\dim \mathbf{B} = n \times 1$; $\dim \mathbf{C} = 1 \times n$, возмущающие воздействия пока не рассматриваем.

Переходя к изображениям переменных по Лапласу, несложно получить передаточную функцию (1.1)

$$W(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B},$$

где \mathbf{E} – единичная матрица размерностью $n \times n$; p – оператор Лапласа.

¹ Более подробно с материалом по данной теме можно ознакомиться в монографии Н.Т. Кузовкова [1.5].

При этом необходимо отметить, что применительно к линейным непрерывным стационарным САУ переход к передаточной функции в операторной форме записи осуществляется путем замены оператора Лапласа на оператор дифференцирования $p = d/dt$.

Так как обратная матрица $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ определяется выражением

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|p\mathbf{E} - \mathbf{A}|} (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^*,$$

где символом $(\cdot)^*$ обозначена присоединенная (союзная) матрица, получаемая из исходной путем замены всех элементов их алгебраическими дополнениями с последующим транспонированием, становится очевидным, что знаменатель передаточной функции (ПФ) объекта, являющийся его характеристическим полиномом, равен определителю

$$D(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A}|,$$

а числитель – выражению

$$G(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^* \mathbf{B}.$$

Пусть, например, корни характеристического уравнения объекта

$$D(p) = 0$$

(собственные числа матрицы \mathbf{A}) – p_i , $i = \overline{1, n}$ – простые (некратные). Тогда переходная функция объекта (реакция на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях) определяется формулой разложения Хевисайда:

$$h(t) = \frac{G(0)}{D(0)} + \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}, \quad (1.2)$$

где $c_i = \frac{G(p_i)}{p_i D'(p_i)}$; $D'(p) = \frac{dD(p)}{dp}$.

Известно, что при наличии корней p_i с положительной вещественной частью в (1.2) будут присутствовать возрастающие по модулю с течением времени парциальные составляющие $c_i e^{p_i t}$ (моды), т. е. объект (1.1) будет неустойчивым.

тойчивым. Кроме того, даже если объект устойчив, среди p_i могут быть корни с малой степенью устойчивости, обуславливающие неприемлемо большую продолжительность переходного процесса, или пары комплексно-сопряженных корней с большим отношением мнимой части к вещественной, вызывающие недопустимую колебательность и перерегулирование. В этих случаях модальный метод предлагает скорректировать исходное расположение корней характеристического уравнения объекта (1.1) и привести его к некоторому желаемому.

Переходим непосредственно к изложению метода модального управления. Для объекта общего вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$ – m -мерный вектор управлений; $\mathbf{f}(t)$ – вектор независимых воз-

мущений; $\dim \mathbf{B} = n \times m$,

при допущении о возможности прямых измерений всех компонент вектора состояния x_i , $i = \overline{1, n}$ (при полных измерениях) закон модального управления записывается как

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{x}, \quad (1.4)$$

здесь \mathbf{v} – вектор задающих воздействий той же размерности, что и вектор \mathbf{u} ; \mathbf{K} – матрица коэффициентов обратных связей, которые для положительных элементов изначально предполагаются отрицательными (об этом свидетельствует знак « $-$ » перед $\mathbf{K}\mathbf{x}$ в выражении (1.4)); $\dim \mathbf{K} = m \times n$.

Структурная схема системы приведена на рис. 1.1, где приняты следующие обозначения: \mathbf{MK} – модальный корректор; \mathbf{OY} – объект управления.

Подставляя алгоритм управления (1.4) в уравнение объекта (1.3), получаем модель замкнутой системы

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{f}(t), \quad (1.5)$$

характеристическое уравнение которой

$$D(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = 0 \quad (1.6)$$

имеет корни, отличающиеся от собственных чисел матрицы \mathbf{A} объекта (1.3). Естественным образом возникает вопрос: при каких условиях можно путем

выбора соответствующей матрицы коэффициентов обратных связей \mathbf{K} обеспечить любое желаемое расположение корней (1.6) на комплексной плоскости, т. е. когда объект (1.3) является управляемым? Ответ на него дает утверждение Р. Калмана о полной управляемости [1.2].

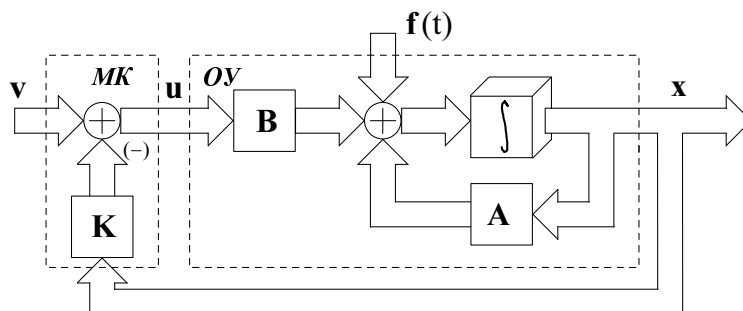


Рис. 1.1. Структурная схема системы с модальным управлением и полными измерениями

Определение. Под *полной управляемостью* понимается свойство объекта, заключающееся в возможности его перевода из любого начального состояния $\mathbf{x}(t_n)$ в произвольное наперед заданное конечное состояние $\mathbf{x}(t_k)$ за конечный интервал времени $(t_k - t_n)$ посредством ограниченных управляющих воздействий.

Утверждение. Объект (1.3) является *вполне* (полностью) управляемым тогда и только тогда, когда ранг *матрицы управляемости* \mathbf{Y} , составленной по правилу

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B}],$$

равен порядку объекта управления, т. е.

$$\text{rang}\mathbf{Y} = n. \quad (1.7)$$

Примечание. В смысле модального метода под полной управляемостью понимается возможность целенаправленного задания всех корней характеристического уравнения (1.6) посредством обратных связей по координатам состояния.

При выполнении условия полной управляемости (1.7) задача модального управления всегда имеет решение. Модальный синтез заключается в определении таких элементов матрицы \mathbf{K} , при которых зависящие от них коэффициенты характеристического полинома замкнутой САУ $D(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|$

будут равны соответствующим коэффициентам *нормированного* (желаемого) характеристического полинома (считается, что он устойчив, поэтому все его коэффициенты положительны):

$$N(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i^*) = p^n + A_{n-1}\Omega p^{n-1} + \dots + A_1\Omega^{n-1}p + \Omega^n,$$

где p_i^* – желаемые корни характеристического уравнения САУ (1.6);

$\Omega = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n p_i^*}$ – так называемый среднегеометрический корень характеристического уравнения (положительная величина), косвенно определяющий быстродействие синтезируемой системы, причем для нормированных полиномов до пятого порядка, рекомендуемых к практическому применению в приложении П1.1, время регулирования приближенно составляет

$$t_p \approx \frac{(1 \dots 3)\pi}{\Omega};$$

$A_j, j = \overline{1, n-1}$ – коэффициенты формы, определяющие остальные прямые показатели качества переходных процессов – перерегулирование, число колебаний, декремент затухания и т.д.

Для полностью управляемого объекта со скалярным управлением ($m = 1$) задача модального управления имеет единственное решение $\mathbf{K} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, поскольку для определения n коэффициентов обратных связей α_i из условия $|\mathbf{pE} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = N(p)$ мы располагаем системой n алгебраических уравнений. В многоканальном ($m > 1$) случае $n(m-1)$ элементов матрицы \mathbf{K} размерности $m \times n$ могут быть заданы произвольно, и тогда оставшиеся n коэффициентов обратных связей находятся однозначно. Совместность системы уравнений неизвестных параметров обеспечивается при этом выбором свободно задаваемых элементов \mathbf{K} .

Некоторые виды нормированных характеристических полиномов, соответствующие так называемым стандартным линейным формам, рассмотрены в приложении П1.1.

1.2. НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ И НАБЛЮДАТЕЛИ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

Приведенный выше классический закон модального управления (1.4) требует создания обратных связей по всем без исключения координатам состояния объекта, однако возможность полных измерений совершенно не типична для реальных приложений. Как правило, по различным причинам не подлежат прямым измерениям магнитные потоки и индукции магнитных полей в задачах автоматического управления электрическими машинами, усилия в элементах кинематических передач электроприводов, ускорения, рывки и т.д. Поэтому для получения информации о текущих значениях неизмеряемых координат состояния по сигналам предусмотренных датчиков необходимы специальные вычислительные алгоритмы и, возможно, реализующие их устройства, обобщенно называемые наблюдателями.

Определение. *Наблюдателем* называется динамическая система, выходной вектор которой $\hat{\mathbf{x}}(t)$ обладает следующим свойством:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t).$$

Элементы вектора $\hat{\mathbf{x}}(t)$ при этом называются *оценками* соответствующих координат состояния объекта (1.3).

Рассмотрим построение наблюдателя для объекта

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t), \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

где вектор возмущений $\mathbf{f}(t)$ пока предполагаем полностью контролируемым (измеряемым); \mathbf{y} – k -мерный вектор выходных (измеряемых) переменных $k < n$; \mathbf{C} – матрица выхода, $\dim \mathbf{C} = k \times n$, $\text{rang} \mathbf{C} = k$; остальные обозначения соответствуют системе (1.3).

Наблюдателем полного порядка будем называть динамическую систему

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{f}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

где $\hat{\mathbf{y}}$ – вектор оценок выходных переменных; \mathbf{L} – матрица коэффициентов размерностью $n \times k$.

Как несложно заметить, наблюдатель (1.9) структурно отличается от модели объекта наблюдения (1.8) только наличием слагаемого $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$, часто называемого «стабилизирующей добавкой».

Стабилизирующая добавка выполняет следующие функции:

- ♦ позволяет обеспечить устойчивость собственно наблюдателя при неустойчивом объекте и необходимое качество процессов отработки начальных отклонений вектора оценок $\hat{\mathbf{x}}$ от оцениваемого вектора координат состояния \mathbf{x} ;

- ♦ посредством модального синтеза матрицы коэффициентов \mathbf{L} позволяет реализовать любое желаемое расположение корней характеристического уравнения наблюдателя при выполнении условий полной наблюдаемости объекта (1.8), о котором речь пойдет ниже, и воздействовать на статические ошибки наблюдения, возникающие при пренебрежении возмущениями.

Для анализа свойств (1.9) введем обозначение *ошибки наблюдения*:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x},$$

а затем, подставив в первое уравнение системы (1.9) вторые уравнения из (1.8) и (1.9), вычтем из него первое уравнение (1.8). Получим модель динамики ошибки наблюдения в виде

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.10)$$

откуда непосредственно следует, что *цель наблюдения*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = 0$$

выполняется, если матрица $\mathbf{A} - \mathbf{LC}$ *гурвицева* (имеет устойчивые собственные числа).

Желаемое распределение корней характеристического уравнения наблюдателя достигается определением элементов матрицы \mathbf{L} из условия равенства его характеристического полинома некоторому нормированному:

$$D_n(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = N_n(p).$$

Синтезированные таким образом наблюдатели называются наблюдателями *Люенбергера* [1.1]¹.

¹ Luenberger, David G. Observing the State of a Linear System // IEEE Trans. on Military Electronics. – Vol. 8, № 2. – 1964. – P. 74–80.

Задача произвольного желаемого расположения корней наблюдателя (т. е. задача модального управления для наблюдателя) имеет решение тогда и только тогда, когда объект (1.8) является вполне (полностью) наблюдаемым по Р. Калману [1.2].

Определение. Под *полной наблюдаемостью* понимается свойство объекта, заключающееся в принципиальной возможности восстановления как угодно точной текущей информации обо всех, в том числе неизмеряемых координатах состояния по информации об измеряемых за требуемое время.

Утверждение (Р. Калман). Необходимым и достаточным условием полной наблюдаемости объекта (1.8) является равенство ранга *матрицы наблюдаемости*

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T : \dots : (\mathbf{A}^T)^{(n-1)} \mathbf{C}^T \right]$$

порядку объекта, т. е.

$$\text{rang} \mathbf{H} = n. \quad (1.11)$$

Проверка условия (1.11) должна предшествовать синтезу любого наблюдателя Люенбергера.

Если возмущения, входящие в модель объекта наблюдения (1.8), как это и бывает чаще всего на практике, не контролируются, то в уравнение наблюдателя $\mathbf{f}(t)$ входить не может. При этом уравнение (1.10) примет вид

$$\dot{\varepsilon} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\varepsilon - \mathbf{f}(t),$$

откуда следует, что действие возмущения на наблюдатель будет сказываться в возникновении ненулевой установившейся ошибки наблюдения. Например, если $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f} = \text{const}$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})^{-1} \mathbf{f}.$$

Снизить ошибки наблюдения, как правило, можно увеличением среднегеометрического корня характеристического уравнения наблюдателя $N_H(p) = 0$ и оптимизацией его коэффициентов формы.

1.3. НАБЛЮДАТЕЛИ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

При большом количестве непосредственно измеряемых (выходных) переменных объекта наблюдатели полного порядка становятся существенно избыточными, поскольку незачем вычислять оценки значительного числа величин, доступных прямым измерениям. В таких случаях целесообразно применять *наблюдатель пониженного порядка* (редуцированный), порядок которого меньше чем у наблюдателя полного порядка на число непосредственно измеряемых переменных k .

Для получения уравнений наблюдателя пониженного порядка необходимо преобразовать пространство состояний объекта (1.8) таким образом, чтобы в структуре «нового» вектора координат состояния были явно выделены измеряемая и неизмеряемая части. Определим такое преобразование формулой

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x},$$

где \mathbf{y} – вектор измеряемых (выходных) переменных; \mathbf{z} – вектор неизмеряемых переменных в «новом» пространстве состояний, $\dim \mathbf{z} = (n-k) \times 1$; $\tilde{\mathbf{C}}$ – невырожденная квадратная матрица размерностью $\dim \tilde{\mathbf{C}} = n \times n$, полученная путем дополнения \mathbf{C} снизу $(n-k)$ строками, образующими блок \mathbf{C}_1 :

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \dots \\ \mathbf{C}_1 \end{bmatrix};$$

единственным условием для выбора элементов \mathbf{C}_1 является $|\tilde{\mathbf{C}}| \neq 0$.

Обратное преобразование представим как

$$\tilde{\mathbf{C}}^{-1} = [\mathbf{L}_1 : \mathbf{L}_2],$$

где $\dim \mathbf{L}_1 = n \times k$; $\dim \mathbf{L}_2 = n \times (n-k)$, при этом получаем

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\mathbf{z}.$$

На основании изложенного объект (1.8) преобразуется к виду (возмущением $\mathbf{f}(t)$ для упрощения выкладок пренебрегаем, так как его наличие качественно ничего не меняет в процедуре синтеза):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}[\mathbf{A}(\mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\mathbf{z}) + \mathbf{B}\mathbf{u}], \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{C}_1[\mathbf{A}(\mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\mathbf{z}) + \mathbf{B}\mathbf{u}], \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

где первое уравнение можно также представить в виде

$$0 = \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}[\mathbf{A}(\mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\mathbf{z}) + \mathbf{B}\mathbf{u}]. \quad (1.13)$$

Наблюдателем пониженного порядка называется вытекающая из второго уравнения (1.12) динамическая система

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{C}_1[\mathbf{A}(\mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{B}\mathbf{u}] + \boldsymbol{\eta}, \quad (1.14)$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ – вектор оценок неизмеряемых координат состояния объекта (1.12); $\boldsymbol{\eta}$ – «стабилизирующая добавка», получаемая умножением правой части (1.13), куда вместо \mathbf{z} подставлен вектор оценок $\hat{\mathbf{z}}$, слева на некоторую матрицу \mathbf{L} , $\dim \mathbf{L} = (n - k) \times k$:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{L} \left\{ \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}[\mathbf{A}(\mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{B}\mathbf{u}] \right\}.$$

Модель динамики ошибки наблюдения неизмеряемых координат $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$ получим, почленно вычитая из (1.14) второе уравнение системы (1.12) и уравнение (1.13), домноженное слева на \mathbf{L} ,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{C}_1 - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{A}\mathbf{L}_2\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (1.15)$$

Отсюда следует, что для выполнения цели наблюдения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\varepsilon}(t) = 0$$

и обеспечения благоприятных характеристик (1.15) при синтезе наблюдателя Люенбергера пониженного порядка из условия желаемого распределения корней его характеристического полинома порядка $n - k$

$$D_n(p) = |pE - (C_1 - LC)AL_2|$$

должна выбираться матрица L . Нужная матрица всегда существует при выполнении условий полной наблюдаемости (1.11).

После нахождения матрицы L синтез наблюдателя пониженного порядка можно было бы считать завершенным, если бы не одно немаловажное обстоятельство. Дело в том, что в выражении «стабилизирующей добавки» η , входящей в модель наблюдателя (1.14), фигурирует производная вектора выхода \dot{y} , которая непосредственно не измеряется. Поэтому при реализации (1.14) вводят вспомогательную переменную $q = \hat{z} - Ly$, благодаря чему удается исключить необходимость дифференцирования y , и модель наблюдателя пониженного порядка окончательно принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= (C_1 - LC)[A(L_1y + L_2\hat{z}) + Bu], \\ \hat{z} &= q + Ly. \end{aligned} \right\}$$

Структурная схема полученной модели изображена на рис. 1.2.

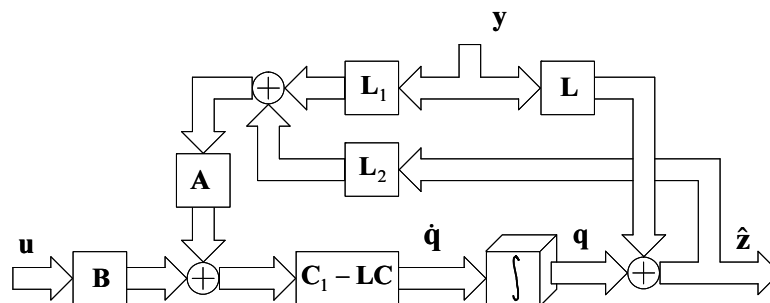


Рис. 1.2. Структурная схема наблюдателя пониженного порядка

Наличие неконтролируемых возмущений, так же как и в наблюдателе полного порядка, приводит к возникновению установившихся (статических) ошибок наблюдения z_j , $j = \overline{1, n-k}$.

1.4. СВОЙСТВА СИСТЕМ С МОДАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ И НАБЛЮДАТЕЛЯМИ ЛЮЕНБЕРГЕРА

При использовании в системе наблюдателя полного порядка (1.9) алгоритм (1.4) модального управления объектом (1.8) принимает вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}. \quad (1.16)$$

Структурная схема САУ приведена на рис. 1.3.

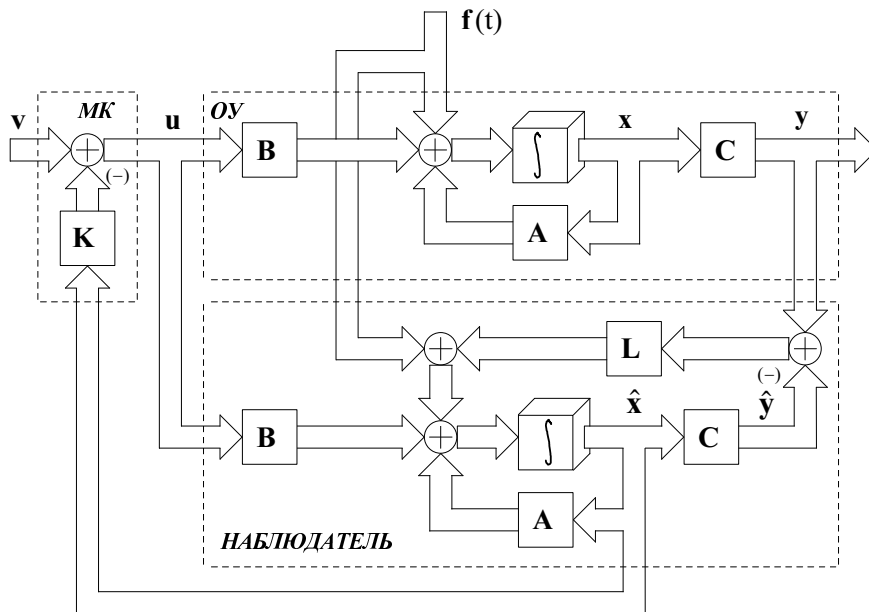


Рис. 1.3. Структурная схема системы с модальным управлением и наблюдателем полного порядка

Уравнения замкнутой системы (1.8), (1.9), (1.16) несложно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}), \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{L}\mathbf{C}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}), \end{aligned} \right\}$$

откуда путем вычитания первого уравнения из второго и перехода к ошибке $\varepsilon = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} - \mathbf{BK}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \right\}$$

Характеристический полином этой САУ

$$D_3(p) = \begin{vmatrix} p\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) & \mathbf{BK} \\ 0 & p\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC}) \end{vmatrix},$$

или

$$D_3(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| \cdot |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = D(p)D_n(p)$$

согласно правилам вычисления определителей блочных матриц равен произведению характеристических многочленов идеализированной системы с полными измерениями $D(p)$ и собственно наблюдателя $D_n(p)$. Поэтому синтезированная устойчивая система модального управления полностью управляемым и полностью наблюдаемым объектом, реализуемая на основе устойчивого наблюдателя Люенбергера, также всегда будет устойчивой. Это позволяет произвести декомпозицию задачи синтеза системы порядка $2n$ на две подзадачи порядка n и рассчитывать модальный корректор и наблюдатель обособленно [1.2]. Для того чтобы собственные процессы в наблюдателе по ошибке наблюдения $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$, имеющие место при несовпадении начальных условий объекта и наблюдателя

$$\hat{\mathbf{x}}(0) \neq \mathbf{x}(0),$$

несущественно не сказывались на показателях качества САУ, рекомендуется разносить на порядок темпы процессов управления и наблюдения (делать последние значительно быстрее), задавая соотношение между значениями среднегеометрических корней идеализированной САУ и наблюдателя

$$\Omega_n \geq (5...6)\Omega. \quad (1.17)$$

Примечание. Для реализации непрерывных законов управления и наблюдения в САУ могут быть использованы как средства аналоговой и цифровой схемотехники, так и промышленные контроллеры, управляющие компьютеры, быстродействие которых позволяет просчитывать численные алгоритмы с частотой, на порядок выше среднегеометрического корня наблюдателя, деленного на 2π .

Рассмотрим по той же схеме свойства систем с наблюдателями пониженного порядка, для упрощения выкладок не учитывая возмущение.

Закон управления в этом случае использует комбинированную обратную связь по измеряемым и наблюдаемым координатам состояния:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}(\mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\hat{\mathbf{z}}). \quad (1.18)$$

Подставляя (1.18) в уравнения (1.12) и (1.14), после несложных преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}[(\mathbf{A} - \mathbf{BK})(\mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\mathbf{z}) - \mathbf{BKL}_2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{Bv}], \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{C}_1[(\mathbf{A} - \mathbf{BK})(\mathbf{L}_1\mathbf{y} + \mathbf{L}_2\mathbf{z}) - \mathbf{BKL}_2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{Bv}], \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\mathbf{C}_1 - \mathbf{LC})\mathbf{AL}_2\boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \right\}$$

откуда путем матричного объединения первых двух уравнений в одно

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \{(\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} - \mathbf{BKL}_2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{Bv}\}$$

и умножения последнего слева на $\tilde{\mathbf{C}}^{-1}$ возвращаемся к модели САУ в пространстве состояний, образованном элементами векторов \mathbf{x} и $\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} - \mathbf{BKL}_2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{Bv}, \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\mathbf{C}_1 - \mathbf{LC})\mathbf{AL}_2\boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \right\}$$

и снова приходим к выводу о независимости свойства устойчивости системы с модальным управлением от наличия наблюдателя Люенбергера, используемого для формирования воздействий обратной связи:

$$D_3(p) = \begin{vmatrix} p\mathbf{E} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) & \mathbf{BK} \\ 0 & p\mathbf{E} - (\mathbf{C}_1 - \mathbf{LC})\mathbf{AL}_2 \end{vmatrix},$$

или

$$D_3(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| \cdot |p\mathbf{E} - (\mathbf{C}_1 - \mathbf{LC})\mathbf{AL}_2| = D(p)D_H(p).$$

1.5. ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ «КЛАССИЧЕСКОГО» МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

По сравнению с другими известными методами синтеза замкнутых линейных систем «классический» модальный метод, рассмотренный в разделах 1.1–1.4, обладает следующими преимуществами.

1. Процедура синтеза САУ любого конечного порядка сводится к элементарным алгебраическим операциям над матрицами (сложение, перемножение, нахождение определителей) и решению алгебраической системы уравнений параметров относительно искомых коэффициентов матрицы \mathbf{K} , что позволяет легко ее автоматизировать с применением средств вычислительной техники.

2. В случае неполных измерений дополнение системы наблюдателем Люенбергера, синтезированным обособленно от закона модального управления с соблюдением условия разделения собственных частот (1.17), не может привести к нарушению устойчивости САУ и, более того, несущественно сказывается на показателях качества переходных процессов.

3. Для синтеза как закона управления, так и наблюдателей Люенбергера можно применять одни и те же универсальные процедуры модального метода, что способствует автоматизации вычислений.

4. Используются относительно простые условия разрешимости задачи синтеза – условия полных управляемости и наблюдаемости.

К сожалению, за перечисленными преимуществами скрываются не столь явные недостатки рассматриваемого метода.

1. Метод не гарантирует требуемой статической точности регулирования выходных переменных САУ, так как оперирует лишь распределением корней характеристического уравнения системы.

2. При управлении объектами, обладающими форсирующими свойствами (в одноканальном случае – имеющими в числителе передаточной функции по управляющему воздействию полином первого или более высокого порядка), метод не обеспечивает желаемого качества переходных процессов согласно принятой при настройке САУ стандартной линейной форме, так как переходная функция системы (1.2) зависит не только от характеристического полинома $D(p)$, но и от числителя ПФ $G(p)$, т. е. и от ее полюсов, и от ее нулей (корней числителя).

1.6. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МОДАЛЬНЫЙ МЕТОД

В настоящее время известны модификации модального метода, свободные от перечисленных выше недостатков, приводящие к общепринятому астатическому регулированию и позволяющие скомпенсировать влияние «левых» нулей объекта. В качестве примера рассмотрим операторную методику синтеза одноканальных систем, которая следует из предложенной в статье [1.4]. В основу методики положена расчетная структурная схема, приведенная на рис. 1.4.

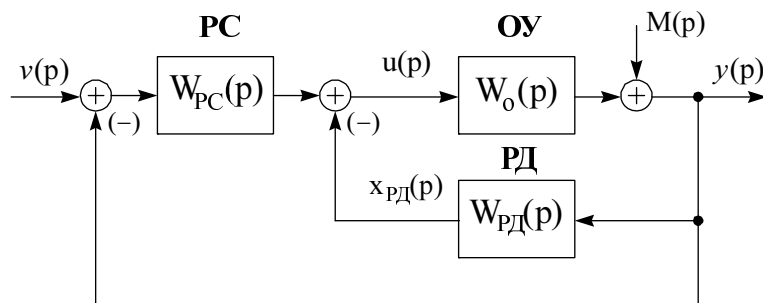


Рис. 1.4. Структурная схема САУ, синтезированной модифицированным модальным методом

Здесь $W_o(p) = \frac{G(p)}{D(p)}$ – «правильная» передаточная функция объекта управления, где полиномы $G(p)$ и $D(p)$ имеют соответственно степени m и n , $m < n$; $M(p)$ – приведенное к выходу ОУ возмущение; $W_{PC}(p)$, $W_{PD}(p)$ – последовательное и параллельное корректирующие устройства, названные автором [1.4] регуляторами «статики» (РС) и «динамики» (РД).

Предположим, что все нули объекта имеют отрицательную действительную часть, тогда регулятор статики может быть принят в виде

$$W_{PC}(p) = \frac{k_{PC}}{pG(p)},$$

а регулятор динамики

$$W_{PD}(p) = \frac{H(p)}{G(p)}.$$

Здесь КСМУ – «классическая» система модального управления с наблюдателем полного порядка, который синтезируется по традиционной методике с применением модели объекта в пространстве состояний.

Искомые элементы матрицы обратной связи \mathbf{K} и коэффициент k_{PC} могут быть определены без учета наблюдателя по структурной схеме, приведенной на рис. 1.6, где в общем виде ($m = n - 1$) при

$$G(p) = g_{n-1}p^{n-1} + \dots + g_1p + g_0,$$

$$D(p) = p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \dots + d_1p + d_0,$$

для синтеза наблюдателя должна быть использована модель объекта (1.8) в форме Фробениуса

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \vdots & -d_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [g_0, g_1, \dots, g_{n-1}],$$

полученная методом последовательного программирования, k_{PC} и $H(p)$ определяются из условия (1.19), а матрица коэффициентов обратных связей по оценкам координат состояния \mathbf{K} связана с $H(p)$ выражением

$$\mathbf{K} = [h_0, h_1, \dots, h_{n-1}].$$

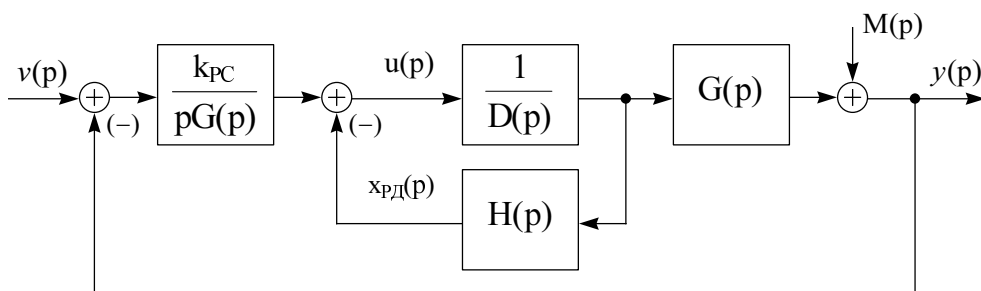


Рис. 1.6. Расчетная структурная схема САУ

Существует и очевидный методический подход [1.6], позволяющий распространить данную модификацию модального метода на многоканальные системы управления объектами с «левыми» передаточными нулями, обеспечивая при этом автономность каналов регулирования, настраиваемых на единый нормированный характер переходного процесса.

Рассмотрим процедуру синтеза алгоритма управления полностью управляемым и наблюдаемым объектом вида (1.8), у которого размерность вектора выходных регулируемых переменных $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^m$ совпадает с размерностью вектора управляющих воздействий \mathbf{u} ($k = m$), $\text{rang} \mathbf{C} = m$.

Пусть передаточная матрица объекта (1.8) по управлению, представленная как

$$\mathbf{W}_0(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B},$$

включает в себя только «левые» нули. Тогда система с обратной связью вида (1.4)

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (1.20)$$

имеет передаточную матрицу по «новому» управлению \mathbf{v}

$$\mathbf{W}_0(p) = \frac{1}{D_1(p)} \mathbf{C}\Phi(p)\mathbf{B},$$

также с «левыми» нулями.

Здесь $\Phi(p) = \mathbf{S}^*(p)$ – присоединенная по отношению к $\mathbf{S}(p) = (p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})$ матрица, $D_1(p) = \det \mathbf{S}(p)$.

Формула (1.20), по сути, описывает эквивалент «регулятора динамики», тогда как «регулятор статики» в данном случае можно представить в виде

$$p\mathbf{v} = \mathbf{W}_{PC}(p) \{ \mathbf{g} - \mathbf{y} \},$$

где \mathbf{g} – задающее воздействие, определяющее желаемое установившееся значение выхода \mathbf{y} ,

$$\mathbf{W}_{PC}(p) = k_{PC} (\mathbf{C}\Phi(p)\mathbf{B})^{-1},$$

благодаря чему достигается автономность каналов регулирования. Операторное уравнение замкнутой системы принимает вид

$$(pD_1(p) + k_{PC})\mathbf{y} = k_{PC}\mathbf{g},$$

зи между каналами регулирования, нарушая их автономность, но и на показатели качества переходных процессов и даже устойчивость САУ; по этой причине редко удается применить рассмотренный подход к объектам третьего и более высокого порядка;

– невозможно обеспечить индивидуальную форму переходного процесса в каждом канале управления.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте общие условия устойчивости линейных стационарных систем по корням характеристического уравнения.
2. Дайте определения передаточной функции, переходной функции, прямым показателям качества переходных процессов, статической ошибки регулирования.
3. Получите математическую модель колебательного звена в форме пространства состояний, используя метод последовательного программирования.
4. Изобразите обобщенную структурную схему управляемого линейного динамического объекта в пространстве состояний.
5. Запишите классический закон модального управления. Поясните основную идею модального метода и методику определения матрицы коэффициентов обратных связей.
6. Запишите и поясните общий вид стандартной линейной формы произвольного порядка. Какие стандартные распределения корней линейных форм вы знаете? Каковы их основные свойства?
7. Изобразите обобщенную структурную схему системы модального управления с полными измерениями.
8. Определите понятие и сформулируйте условия полной управляемости линейного стационарного объекта.
9. Дайте определение наблюдателя и поясните причины использования наблюдателей в системах с обратными связями по координатам состояния.
10. Определите понятие и сформулируйте условия полной наблюдаемости линейного стационарного динамического объекта.
11. Запишите модель наблюдателя полного порядка. Какие функции выполняет «стабилизирующая добавка», какова методика ее синтеза?
12. Изобразите обобщенную структурную схему САУ с модальным управлением и наблюдателем полного порядка.

13. Получите модель наблюдателя пониженного порядка. Насколько его порядок инерционности отличается от порядка объекта и наблюдателя полного порядка?

14. Изобразите структурную схему САУ с модальным управлением и наблюдателем пониженного порядка.

15. Опишите основные свойства систем с линейными обратными связями и наблюдателями Люенбергера. Какова процедура их расчета?

16. Сформулируйте преимущества и недостатки классического модального метода синтеза.

17. Изобразите операторную структурную схему САУ с модифицированным модальным управлением. В чем ее преимущества и недостатки?

18. Изобразите структурную схему САУ с модифицированным модальным управлением и наблюдателем полного порядка. Какие функции в ней выполняет наблюдатель?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1.1. *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы : учеб. пособие для вузов / А. Г. Александров. – М. : Высш. шк., 1989. – 263 с.

1.2. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. – М. : Наука ; Глав. ред. физ.-мат. лит., 1976. – 424 с.

1.3. *Бесекерский В. А.* Теория систем автоматического регулирования / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – М. : Наука, 1972. – 768 с.

1.4. *Востриков А. С.* Операторная методика синтеза одноканальных систем модальным методом / А. С. Востриков // Автоматическое управление объектами с переменными характеристиками : межвуз. сб. науч. тр. – Новосибирск, 1991. – С. 5–10.

1.5. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства / Н. Т. Кузовков. – М. : Машиностроение, 1976. – 184 с.

1.6. *Панкратов В. В.* Модальный синтез астатических многоканальных систем управления / В. В. Панкратов, Е. А. Зима // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2004) : материалы VII междунар. конф. 21–24 сент. 2004 г., Новосибирск. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2004. – Т. 6. – С. 146–149.

1.7. *Панкратов В. В.* Специальные разделы теории автоматического управления : учеб. пособие / В. В. Панкратов, О. В. Нос. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – Ч. 1. Модальное управление и наблюдатели. – 48 с.

1.8. *Титце У.* Полупроводниковая схемотехника : справ. рук. : пер. с нем. / У. Титце, К. Шенк. – М. : Мир, 1982. – 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П1.1. СТАНДАРТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

Модальный метод синтеза линейных систем предполагает управление свободными составляющими движения, входящих в правую часть (1.2). Задавая определенное распределение корней характеристического полинома синтезируемой САУ на комплексной плоскости в зависимости от предъявляемых к ней требований, можно обеспечить желаемую (монотонную или колебательную) форму переходных процессов, а также заданное быстродействие. При этом классический модальный метод предполагает отсутствие конечных нулей передаточной функции, влияющих на форму процессов, например, при положительности всех коэффициентов числителя $G(p)$, приводящих к увеличению перерегулирования [1.3].

Распределение собственных чисел преобразованной матрицы $A - BK$ (собственной матрицы замкнутой системы) на комплексной плоскости зависит от коэффициентов характеристического полинома

$$N(p) = p^n + A_{n-1}\Omega p^{n-1} + \dots + A_1\Omega^{n-1}p + \Omega^n.$$

Структура САУ с обратными связями по координатам состояния позволяет задать среднегеометрический корень Ω , а также привести коэффициенты формы A_{n-1}, \dots, A_1 к нормированным значениям и тем самым обеспечить заранее известные прямые показатели качества переходных процессов. В настоящее время разработано несколько стандартных линейных форм, обеспечивающих желаемое распределение корней характеристического полинома на комплексной плоскости.

Если все корни характеристического полинома системы кратные и равны некоторому отрицательному действительному числу, переходная характеристика имеет монотонный (апериодический) характер. При этом характеристический полином можно преобразовать к произведению n двучленов первого порядка

$$(p - \Omega)^n,$$

представляющему собой бином Ньютона. Такой полином получил название биномиальной стандартной линейной формы, в которой коэффициенты формы A_j для систем до пятого порядка включительно выбираются в соответствии с табл. П1.1.

Таблица П1.1

**Коэффициенты характеристического полинома
при биномиальной стандартной линейной форме**

Порядок полинома n	Стандартные коэффициенты формы			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	–	–	–	2
3	–	–	3	3
4	–	4	6	4
5	5	10	10	5

Переходные характеристики САУ при биномиальном распределении корней изображены на рис. П1.1, где номер кривой соответствует порядку характеристического полинома.

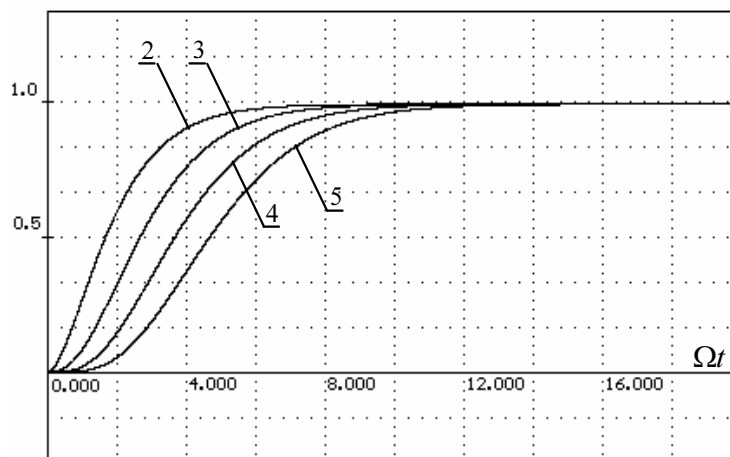


Рис. П1.1. Переходные процессы в системе с биномиальным распределением корней

При биномиальной настройке реакция системы на входные воздействия является относительно медленной. Достичь более высокого быстродействия позволяют стандартные линейные формы распределения комплексно-сопряженных корней характеристического полинома (при нечетном значении n один из корней является отрицательным вещественным). Один из вариантов выбора коэффициентов A_j такой формы, представленный в табл. П1.2, был предложен Баттервортом (S. Butterworth). Наличие мнимой составляющей в

корнях $D(p)$ приводит к возникновению перерегулирования, причем с увеличением порядка САУ колебательность растет, что иллюстрируется рис. П1.2. Настройка замкнутой системы на желаемое распределение корней, соответствующее данной форме, позволяет приблизить ее показатели качества к характеристикам идеального фильтра, а также достичь относительного компромисса между быстродействием и степенью колебательности переходных процессов.

Таблица П1.2

**Коэффициенты характеристического полинома
при стандартной линейной форме Баттерворта**

Порядок полинома n	Стандартные коэффициенты формы			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	–	–	–	1,41
3	–	–	2	2
4	–	2,613	3,414	2,613
5	3,24	5,24	5,24	3,24

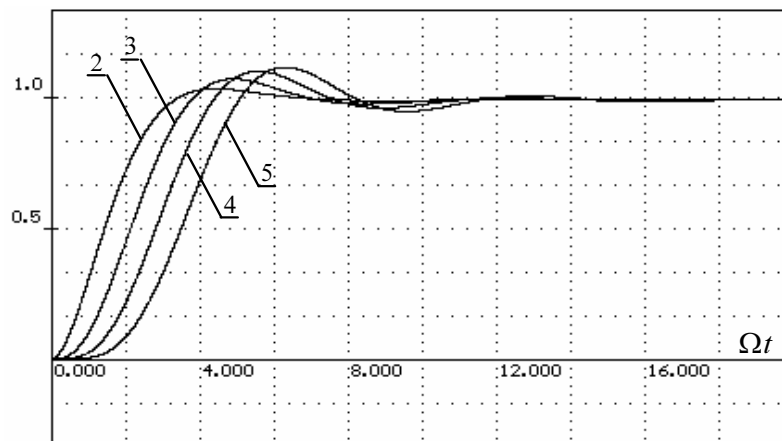


Рис. П1.2. Переходные процессы в системе при настройке на стандартную форму Баттерворта

Близкие к стандартной линейной форме Баттерворта переходные процессы получаются при разложении характеристического полинома на произведения $n/2$ квадратных трехчленов (при нечетном n добавляется двучлен первой степени)

$$N(p) = (p^2 + 2\xi\Omega p + \Omega^2)^k,$$

где $k = n/2$, и выборе коэффициента демпфирования из условия

$$\xi = 0,75.$$

Значения нормированных коэффициентов формы представлены в табл. П1.3, а реакция системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях – на рис. П1.3.

Таблица П1.3

**Коэффициенты характеристического полинома
при стандартной линейной форме с $\xi = 0,75$**

Порядок полинома n	Стандартные коэффициенты формы			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	–	–	–	1,5
3	–	–	2,5	2,5
4	–	3	4,25	3
5	4	7,25	7,25	4

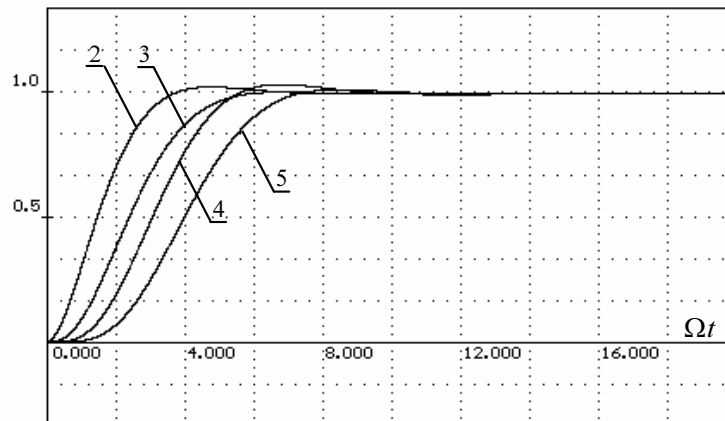


Рис. П1.3. Переходные процессы в системе при стандартной линейной форме с $\xi = 0,75$

Как видно из табл. П1.1 – П1.3, одной из особенностей рассмотренных выше стандартных линейных форм является симметричное распределение

коэффициентов формы A_{n-1}, \dots, A_1 , что объясняется особым расположением полюсов на левой полуплоскости [1.5].

Распределение корней, соответствующее стандартной линейной форме Баттерворта, характеризуется достаточно большим перерегулированием переходных характеристик, возрастающим с порядком САУ, а при биномиальной форме – относительно медленным темпом процессов. Отмеченных недостатков позволяет избежать стандартная линейная форма Бесселя, нормированные коэффициенты формы которой приведены в табл. П1.4, а переходные процессы в замкнутой системе до пятого порядка включительно изображены на рис. П1.4.

Таблица П1.4

**Коэффициенты характеристического полинома
при стандартной линейной форме Бесселя**

Порядок полинома n	Стандартные коэффициенты формы			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	–	–	–	1,73
3	–	–	2,43	2,47
4	–	3,12	4,39	3,2
5	3,81	6,78	6,89	3,94

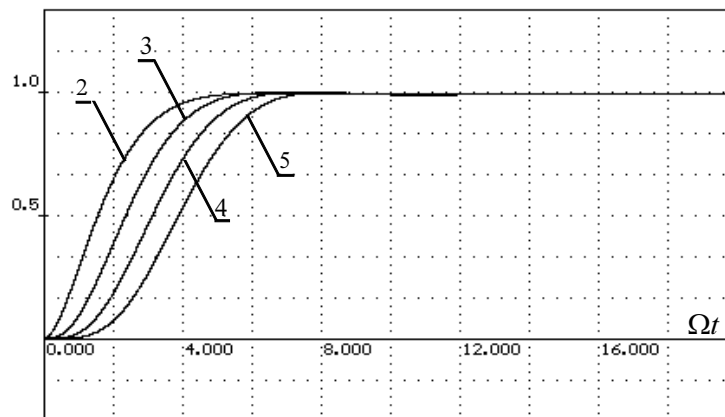


Рис. П1.4. Переходные процессы в системе при настройке на стандартную форму Бесселя

Как видно из рис. П1.4, реакция системы на единичное ступенчатое воздействие практически не имеет колебаний, и при этом обеспечивается достаточно малое время регулирования.

Другим широко распространенным видом распределения корней характеристического полинома на комплексной плоскости является стандартная линейная форма Чебышева, коэффициенты A_j , $j = \overline{1, n}$ которой приведены в табл. П1.5, а реакции на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях изображены на рис. П1.5.

Таблица П1.5

**Коэффициенты характеристического полинома
при стандартной линейной форме Чебышева**

Порядок полинома n	Стандартные коэффициенты формы			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	–	–	–	1,16
3	–	–	1,4	1,92
4	–	1,53	2,79	2,12
5	3,81	6,78	6,89	3,94

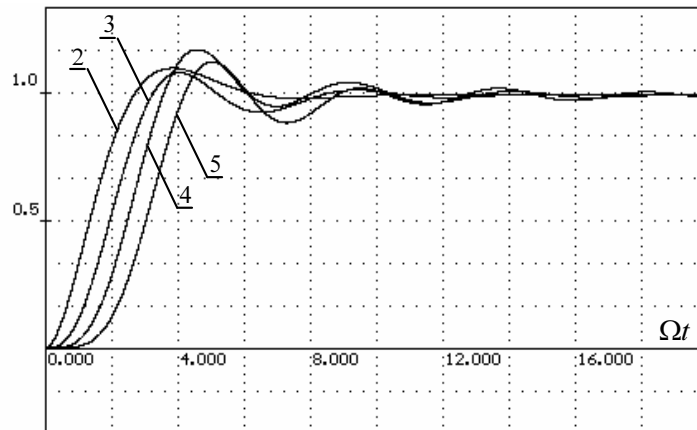


Рис. П1.5. Переходные процессы в системе при настройке на стандартную форму Чебышева

Достоинством стандартной линейной формы Чебышева является резкий спад амплитудно-частотной характеристики системы после частоты среза [1.8], что обуславливает широкое применение данной настройки при синтезе фильтров низких частот в различных устройствах автоматики.

Если принять некратное распределение комплексно-сопряженных корней с постоянной вещественной частью α , а мнимую составляющую задать в виде

арифметической прогрессии с разностью γ , первый член которой также равен γ , то путем выбора оптимального соотношения $\alpha\gamma^{-1}$ можно добиться наименьшего времени регулирования в линейной системе n -го порядка [1.3]. В табл. П1.6 приведены коэффициенты формы, а на рис. П1.6 изображены переходные характеристики при данном виде настройки.

Таблица П1.6

**Коэффициенты характеристического полинома
при настройке, обеспечивающей наибольшее быстродействие**

Порядок полинома n	Стандартные коэффициенты формы			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	–	–	–	1,38
3	–	–	2,05	2,39
4	–	2,6	3,8	2,8
5	2,5	5,3	5,46	3,64

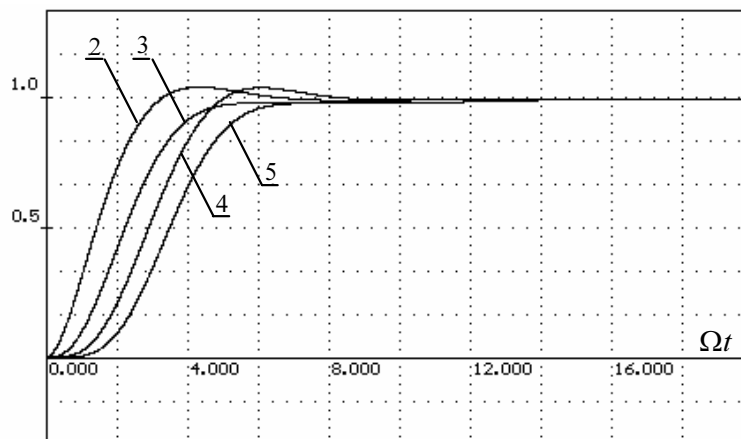


Рис. П1.6. Переходные процессы в системе при оптимальной настройке на быстродействие

Помимо рассмотренных выше вариантов выбора нормированных коэффициентов A_j существуют и другие стандартные линейные формы, полученные в результате минимизации некоторых функционалов качества.

Если в системе требуется обеспечить минимум интеграла от квадрата ошибки регулирования

$$J = \int_0^{\infty} (x(\infty) - x(t))^2 dt,$$

то стандартные коэффициенты формы принимают значения, представленные в табл. П1.7.

Таблица П1.7

**Коэффициенты характеристического полинома
при стандартной линейной форме, обеспечивающей
минимум интеграла от квадрата ошибки**

Порядок полинома n	Стандартные коэффициенты формы			
	A_4	A_3	A_2	A_1
2	–	–	–	1
3	–	–	1	2
4	–	1	3	2
5	1	4	3	3

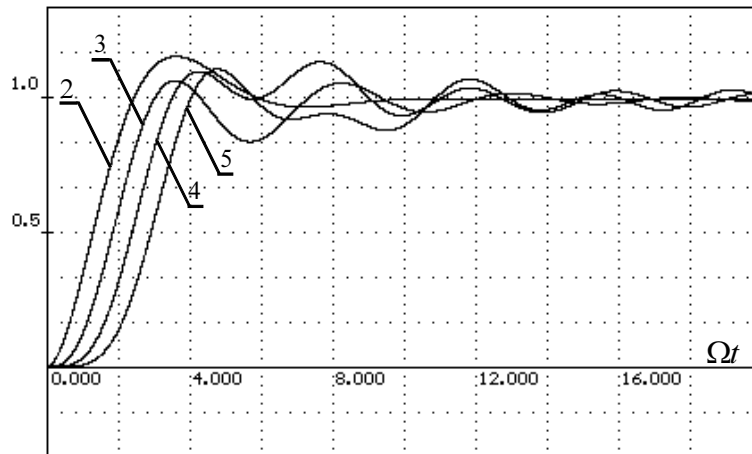


Рис. П1.7. Переходные процессы в системе при настройке на стандартную линейную форму, обеспечивающую минимум интеграла от квадрата ошибки

Соблюдение требования минимума данного функционала вне зависимости от знака ошибки и формы переходного процесса позволяет приблизить реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие к идеальной по быстродействию (рис. П1.7).

П1.2. ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ САУ МОДАЛЬНЫМ МЕТОДОМ ПРИ ПОЛНЫХ И НЕПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В качестве иллюстрации изложенного выше теоретического материала в настоящем разделе приложения представлены примеры синтеза САУ линейным одноканальным объектом вида (1.1) при полных и неполных измерениях, структурная схема которого изображена на рис. П1.8.

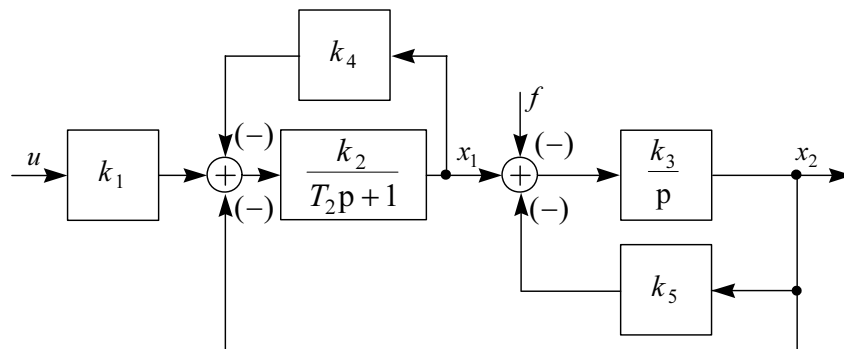


Рис. П1.8. Структурная схема объекта управления

Представим математическое описание объекта управления, заданное структурной схемой, в виде операторных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1(p) &= \frac{k_2}{T_2 p + 1} (k_1 u - k_4 x_1(p) - x_2(p)), \\ x_2(p) &= \frac{k_3}{p} (x_1(p) - k_5 x_2(p) - f) \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} p x_1(p) &= \frac{k_1 k_2}{T_2} u - \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} x_1(p) - \frac{k_2}{T_2} x_2(p), \\ p x_2(p) &= k_3 x_1(p) - k_3 k_5 x_2(p) - k_3 f. \end{aligned} \right\}$$

Переходя во временную область, получим математическую модель объекта управления в виде дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{k_1 k_2}{T_2} u - \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} x_1 - \frac{k_2}{T_2} x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_3 x_1 - k_3 k_5 x_2 - k_3 f. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.1})$$

Как видно из (П1.1), переменные x_1 и x_2 полностью описывают поведение объекта в любой момент времени, и поэтому они принимаются в качестве координат состояния. Векторно-матричную модель заданного объекта представим в форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{M}f, \quad (\text{П1.2})$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ – двумерный вектор координат состояния; u, f – скалярные управляющее и возмущающее воздействия соответственно; \mathbf{A} – собственная матрица объекта

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1 + k_2 k_4}{T_2} & -\frac{k_2}{T_2} \\ k_3 & -k_3 k_5 \end{bmatrix};$$

\mathbf{B} – матрица управлений

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_2}{T_2} \\ 0 \end{bmatrix};$$

\mathbf{M} – матрица возмущений, характеризующая вхождение сигнального возмущающего воздействия f в структуру объекта управления

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_3 \end{bmatrix}.$$

Первая и вторая строки матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{M} относятся соответственно к первому и второму дифференциальным уравнениям системы (П1.1), а столбцы \mathbf{A} – к соответствующей координате вектора \mathbf{x} .

Определим установившиеся значения координат состояния объекта управления при подаче управляющего и возмущающего воздействий путем

векторно-матричных преобразований. Модель ОУ (П1.2) с использованием оператора Лапласа примет следующий вид:

$$p \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u + \mathbf{M} f ,$$

или

$$(p \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{B} u + \mathbf{M} f ,$$

откуда

$$\mathbf{x} = (p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{B} u + \mathbf{M} f) .$$

Разделив правую и левую части последнего выражения на u , при $f = 0$, получим матричную передаточную функцию ОУ по управлению:

$$\mathbf{W}_u(p) = (p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} . \quad (\text{П1.3})$$

Аналогично при $u = 0$ получаем матричную передаточную функцию объекта управления по возмущающему воздействию:

$$\mathbf{W}_f(p) = (p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{M} . \quad (\text{П1.4})$$

Установившиеся значения координат состояния объекта при подаче единичного управляющего воздействия найдем на основании (П1.3) при $p \rightarrow 0$, полагая $u = 1$:

$$\mathbf{x}_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} (p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} . \quad (\text{П1.5})$$

Аналогично определяются установившиеся значения объекта управления при подаче единичного возмущающего воздействия ($f = 1$):

$$\mathbf{x}_{fуст} = \lim_{p \rightarrow 0} (p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{M} . \quad (\text{П1.6})$$

Здесь $(p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ – обратная матрица, определяемая выражением

$$(p \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{|p \mathbf{E} - \mathbf{A}|} (p \mathbf{E} - \mathbf{A})^* .$$

Характеристический полином ОУ зависит от собственной матрицы \mathbf{A} и равен определителю

$$\begin{aligned}
D(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{1+k_2k_4}{T_2} & -\frac{k_2}{T_2} \\ k_3 & -k_3k_5 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ -k_3 & p + k_3k_5 \end{vmatrix} = \\
&= p^2 + \left(\frac{1+k_2k_4}{T_2} + k_3k_5 \right) p + \frac{k_3}{T_2} (k_5(1+k_2k_4) + k_2).
\end{aligned}$$

Получим присоединенную матрицу $(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^*$ из исходной путем замены всех элементов их алгебраическими дополнениями с последующим транспонированием:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^* = \begin{bmatrix} p + k_3k_5 & -\frac{k_2}{T_2} \\ k_3 & p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} \end{bmatrix},$$

тогда

$$\begin{aligned}
(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^* \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} p + k_3k_5 & -\frac{k_2}{T_2} \\ k_3 & p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_1k_2}{T_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1k_2}{T_2} (p + k_3k_5) \\ \frac{k_1k_2k_3}{T_2} \end{bmatrix}, \\
(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^* \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} p + k_3k_5 & -\frac{k_2}{T_2} \\ k_3 & p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_2k_3}{T_2} \\ -k_3 \left(p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} \right) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (П1.5) и последних соотношений установившиеся значения координат состояния при подаче единичного управления

$$\begin{bmatrix} x_{1уст} \\ x_{2уст} \end{bmatrix} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^* \mathbf{B}}{|p\mathbf{E} - \mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_2 k_5}{k_5 (1 + k_2 k_4) + k_2} \\ \frac{k_1 k_2}{k_5 (1 + k_2 k_4) + k_2} \end{bmatrix}.$$

Аналогично на основе (П1.6) получим установившиеся значения координат состояния при подаче единичного возмущения:

$$\begin{bmatrix} x_{1фуст} \\ x_{2фуст} \end{bmatrix} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^* \mathbf{M}}{|p\mathbf{E} - \mathbf{A}|} = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{k_5 (1 + k_2 k_4) + k_2} \\ -\frac{1 + k_2 k_4}{k_5 (1 + k_2 k_4) + k_2} \end{bmatrix}.$$

На примере объекта управления (П1.1) будут рассмотрены задачи синтеза САУ с требуемыми показателями качества и статической точностью регулирования.

Задача 1

Синтезировать алгоритм модального управления заданным объектом при полных измерениях и настройке системы на желаемое распределение корней характеристического полинома, соответствующее стандартной линейной форме Баттерворта. Среднегеометрический корень характеристического полинома принять равным Ω^* .

Перед началом синтеза модального регулятора необходимо произвести проверку условия управляемости, выражаемого равенством (1.7). Для заданного объекта матрица управляемости \mathbf{Y} имеет вид

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{B}; \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} \frac{k_1 k_2}{T_2} & -\frac{k_1 k_2 (1 + k_2 k_4)}{T_2^2} \\ 0 & \frac{k_1 k_2 k_3}{T_2} \end{bmatrix},$$

а ее диагональный минор второго порядка равен

$$\det \mathbf{Y} = \frac{k_1^2 k_2^2 k_3}{T_2^2},$$

т. е.

$$\det \mathbf{Y} \neq 0.$$

Из последнего неравенства видно, что ранг \mathbf{Y} равен порядку объекта управления:

$$\text{rang} \mathbf{Y} = 2 = n,$$

т. е. объект является полностью управляемым.

В задачу синтеза закона модального управления входит нахождение коэффициентов передачи каналов отрицательных обратных связей по координатам состояния α_i , преднамеренное введение в систему которых обеспечивает желаемое распределение корней характеристического уравнения замкнутой системы. Скалярное управляющее воздействие u формируется на основании следующего закона управления:

$$u = v - \mathbf{Kx} = v - [\alpha_1, \alpha_2][x_1, x_2]^T = v - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \quad (\text{П1.7})$$

где v – скалярное задающее воздействие.

Структурная схема синтезированной системы модального управления (СМУ) изображена на рис. П1.9.

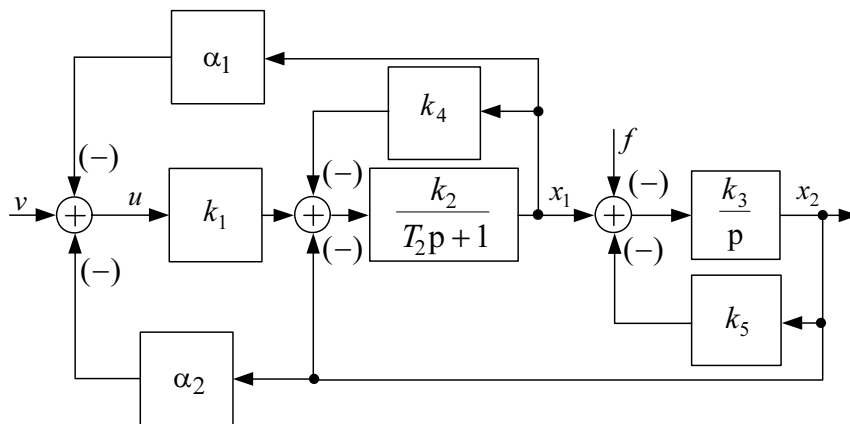


Рис. П1.9. Структурная схема САУ с модальным управлением и полными измерениями

Подстановка принятого алгоритма (П1.7) в математическую модель (П1.2) изменяет ее вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{B}(v - \mathbf{Kx}) + \mathbf{M}f,$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{B}v + \mathbf{M}f,$$

или в операторной форме

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} = \mathbf{B}v + \mathbf{M}f.$$

В результате собственные динамические свойства замкнутой системы модального управления теперь описываются определителем $|p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|$, который является ее характеристическим полиномом:

$$\begin{aligned} D_{\text{СМУ}}(p) &= |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = \\ &= \left| \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1+k_2k_4}{T_2} & -\frac{k_2}{T_2} \\ k_3 & -k_3k_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1k_2}{T_2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} \right|, \\ D_{\text{СМУ}}(p) &= \left| \begin{bmatrix} p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ -k_3 & p + k_3k_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1k_2}{T_2}\alpha_1 & \frac{k_1k_2}{T_2}\alpha_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{array}{cc} p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} + \frac{k_1k_2}{T_2}\alpha_1 & \frac{k_2}{T_2} + \frac{k_1k_2}{T_2}\alpha_2 \\ -k_3 & p + k_3k_5 \end{array} \right|, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} D_{\text{СМУ}}(p) &= p^2 + \left(\frac{1+k_2k_4}{T_2} + \frac{k_1k_2}{T_2}\alpha_1 + k_3k_5 \right) p + \\ &+ k_3k_5 \frac{1+k_2k_4 + k_1k_2\alpha_1}{T_2} + \frac{k_2k_3}{T_2} (1 + k_1\alpha_2). \end{aligned}$$

Приравнивая полученный характеристический полином к стандартному

$$N(p) = p^2 + A_1\Omega p + \Omega^2,$$

получим систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1+k_2k_4}{T_2} + \frac{k_1k_2}{T_2}\alpha_1 + k_3k_5 &= A_1\Omega, \\ k_3k_5 \frac{1+k_2k_4+k_1k_2\alpha_1}{T_2} + \frac{k_2k_3}{T_2}(1+k_1\alpha_2) &= \Omega^2, \end{aligned} \right\}$$

из которой найдем элементы матрицы \mathbf{K} , выбирая среднегеометрический корень равным Ω^* , а также коэффициент формы $A_1 = 1,41$ из табл. П1.2.

Таким образом, после дополнения структуры объекта модальным регулятором, включающим обратные связи по координатам состояния с коэффициентами передачи α_1, α_2 , в синтезированной системе наблюдается нормированный переходной процесс, по форме соответствующий изображенному на рис. П1.2 (кривая 2).

Установившиеся значения координат состояния при подаче единичных задающего и возмущающего воздействий определяются по формулам, аналогичным (П1.5) и (П1.6):

$$\mathbf{x}_{\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} (p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{B},$$

$$\mathbf{x}_{\text{уст}} = \lim_{p \rightarrow 0} (p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{M}.$$

Задача 2

Синтезировать наблюдатель Люенбергера полного порядка с распределением корней характеристического полинома, соответствующим стандартной линейной форме Баттерворта, и среднегеометрическим корнем, равным

$$\Omega_H = (5 \dots 10)\Omega^*.$$

В качестве измеряемой координаты вектора состояния принять x_2 , возмущающее воздействие считать неконтролируемым.

Динамическая подсистема для оценивания вектора координат состояния строится на основе математической модели объекта управления путем ее дополнения «стабилизирующей добавкой» $\mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$. Так как в системе производится прямое измерение x_2 , матрица выхода \mathbf{C} равна

$$\mathbf{C} = [0, \ 1],$$

а сам вектор выходных (измеряемых) переменных

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} = [0, \ 1] \cdot [x_1, \ x_2]^T = x_2.$$

Полагая возмущающее воздействие неконтролируемым, на основании последних соотношений и системы уравнений (1.9) математическую модель наблюдателя Люенбергера полного порядка в пространстве состояний представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \frac{k_1 k_2}{T_2} u - \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} \hat{x}_1 - \frac{k_2}{T_2} \hat{x}_2 + l_1 (y - \hat{y}), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= k_3 \hat{x}_1 - k_3 k_5 \hat{x}_2 + l_2 (y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \hat{x}_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.8})$$

Синтез наблюдателя Люенбергера начинается с проверки условия наблюдаемости, выражаемого требованием равенства ранга матрицы наблюдаемости \mathbf{H} порядку объекта управления. Матрица наблюдаемости для принятого объекта (П1.2) равна

$$\mathbf{H} = [\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & k_3 \\ 1 & \vdots & -k_3 k_5 \end{bmatrix},$$

а ее определитель (диагональный минор второго порядка)

$$\det \mathbf{H} = -k_3,$$

т. е.

$$\det \mathbf{H} \neq 0,$$

что удовлетворяет условию полной наблюдаемости (1.11)

$$\text{rang} \mathbf{H} = 2 = n.$$

Включение в подсистему оценивания координат «стабилизирующей добавки» влияет на собственные динамические свойства наблюдателя, которые должны обеспечивать требуемую форму и качество свободных составляющих переходного процесса в нем. По этой причине элементы матрицы \mathbf{L} определяются

путем приравнивания характеристического полинома наблюдателя полного порядка (НПП)

$$D_{\text{НПП}}(p) = |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}|$$

к нормированному полиному

$$N_{\text{н}}(p) = p^2 + A_1\Omega_{\text{н}}p + \Omega_{\text{н}}^2, \quad (\text{П1.9})$$

коэффициент формы которого согласно условию задачи соответствует стандартной линейной форме Баттерворта $A_1 = 1,41$ и выбирается из табл. П1.2.

Увеличение среднегеометрического корня $\Omega_{\text{н}}$ по отношению к Ω позволяет разнести темпы процессов в синтезированной САУ с модальным регулятором и в подсистеме оценивания координат состояния, в результате чего наличие наблюдателя Люенбергера практически не оказывает влияния на динамику системы управления. Характеристический полином наблюдателя

$$\begin{aligned} D_{\text{НПП}}(p) &= |p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = \\ &= \left| \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1+k_2k_4}{T_2} & -\frac{k_2}{T_2} \\ k_3 & -k_3k_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right|, \\ D_{\text{НПП}}(p) &= \left| \begin{bmatrix} p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} \\ -k_3 & p + k_3k_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & l_1 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{bmatrix} p + \frac{1+k_2k_4}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} + l_1 \\ -k_3 & p + k_3k_5 + l_2 \end{bmatrix} \right|, \end{aligned}$$

или окончательно

$$D_{\text{НПП}}(p) = p^2 + \left(\frac{1+k_2k_4}{T_2} + k_3k_5 + l_2 \right) p +$$

$$+\frac{1+k_2k_4}{T_2}(k_3k_5+l_2)+k_3\left(\frac{k_2}{T_2}+l_1\right). \quad (\text{П1.10})$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты из (П1.9) и (П1.10), получаем систему двух алгебраических выражений для вычисления компонент матрицы коэффициентов \mathbf{L} :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1+k_2k_4}{T_2}+k_3k_5+l_2 &= A_1\Omega_H, \\ \frac{1+k_2k_4}{T_2}(k_3k_5+l_2)+k_3\left(\frac{k_2}{T_2}+l_1\right) &= \Omega_H^2, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} l_2 &= A_1\Omega_i - \frac{1+k_2k_4}{T_2} - k_3k_5, \\ l_1 &= \frac{1}{k_3} \left(\Omega_i^2 - \frac{1+k_2k_4}{T_2}(k_3k_5+l_2) - \frac{k_2k_3}{T_2} \right). \end{aligned} \right\}$$

При дополнении системы модального управления динамической подсистемой оценивания координат состояния, по выходам которой замкнуты обратные связи, закон управления (П1.7) преобразуется к виду

$$u = v - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} = v - \alpha_1\hat{x}_1 - \alpha_2\hat{x}_2.$$

Структурная схема синтезированной замкнутой системы с наблюдателем Люенбергера полного порядка и модальным регулятором представлена на рис. П1.10.

Задача 3

Синтезировать наблюдатель Люенбергера пониженного порядка со среднегеометрическим корнем, заданным в задаче 2. В качестве измеряемой координаты вектора состояния принять x_2 , возмущающее воздействие считать неконтролируемым.

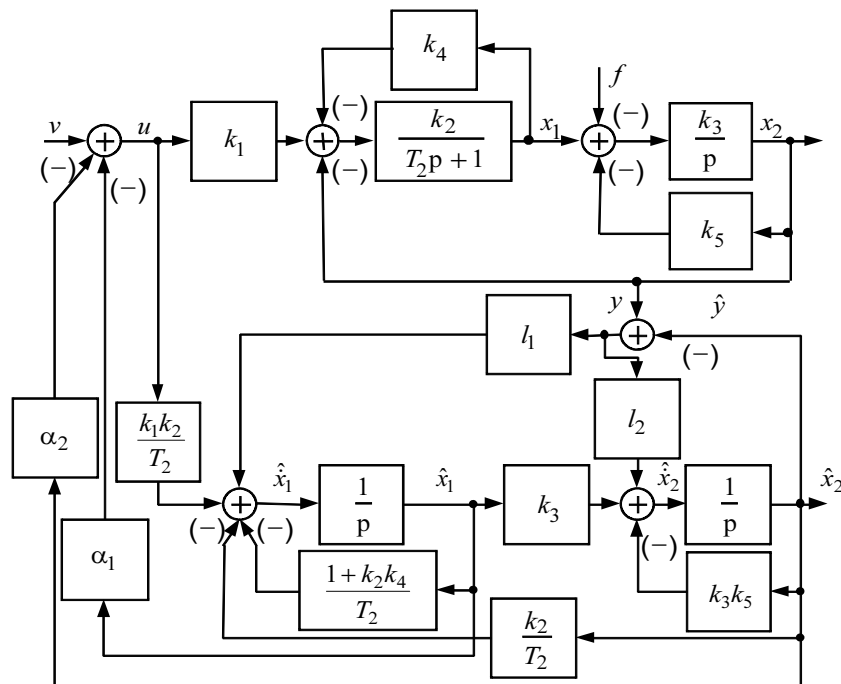


Рис. П1.10. Структурная схема замкнутой системы модального управления с наблюдателем полного порядка

Во многих технических приложениях перед разработчиком стоит задача восстановления лишь части информации о координатах вектора состояния из-за невозможности их прямого измерения. В этом случае из вектора \mathbf{x} можно в явном виде выделить измеряемые и неизмеряемые координаты, причем размерность вектора неизмеряемых переменных $\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}$ определяется как $n - k$ и в соответствии с условиями задачи

$$\left. \begin{aligned} y &= x_2, \\ z &= x_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.11})$$

Разделение координат вектора \mathbf{x} происходит в результате перехода к «новому» пространству состояний

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x},$$

где $\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & : & \mathbf{C}_1^T \end{bmatrix}^T$ – некоторая невырожденная матрица, состоящая из двух блоков \mathbf{C} и \mathbf{C}_1 .

Из второго уравнения системы (П1.11) видно, что матрица \mathbf{C}_1 выбирается в виде $\mathbf{C}_1 = [1, 0]$, т. е.

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} = [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = x_1.$$

Помимо этого \mathbf{C}_1 также должна удовлетворять требованию невырожденности $\tilde{\mathbf{C}}$, которое выражается неравенством $|\tilde{\mathbf{C}}| \neq 0$. В соответствии с изложенным

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \dots \\ \mathbf{C}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а определитель матрицы преобразования к «новому» пространству $\tilde{\mathbf{C}}$ отличен от нуля и равен

$$\det \tilde{\mathbf{C}} = -1,$$

т. е.

$$\det \tilde{\mathbf{C}} \neq 0.$$

Представим математическую модель объекта управления (П1.1) в «новом» пространстве состояний с учетом (П1.11):

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \frac{k_1 k_2}{T_2} u - \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} z - \frac{k_2}{T_2} y, \\ \dot{y} &= k_3 z - k_3 k_5 y - k_3 f. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.12})$$

Таким образом, наблюдатель Люенбергера пониженного порядка можно описать дифференциальным уравнением, вытекающим из первого уравнения системы (П1.12):

$$\hat{\dot{z}} = \frac{k_1 k_2}{T_2} u - \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} \hat{z} - \frac{k_2}{T_2} y + \eta,$$

где η – «стабилизирующая добавка», которая задается в виде

$$\eta = \mathbf{L}(\dot{y} - \hat{y}).$$

Так как матрица \mathbf{L} размерностью $(n-k) \times k$ является скалярной величиной и согласно второму уравнению системы (П1.12) с учетом неконтролируемости возмущающего воздействия

$$\dot{y} = k_3 \hat{z} - k_3 k_5 y,$$

математическую модель наблюдателя пониженного порядка (НПнП) представим в виде

$$\dot{\hat{z}} = \frac{k_1 k_2}{T_2} u - \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} \hat{z} - \frac{k_2}{T_2} y + l(\dot{y} - k_3 \hat{z} + k_3 k_5 y). \quad (\text{П1.13})$$

Полученное дифференциальное уравнение не может быть реализовано, так как содержит неизмеряемую первую производную выхода \dot{y} . Для ее исключения вводится вспомогательная переменная $q = \hat{z} - ly$, которая образуется в результате переноса в последнем уравнении произведения $l\dot{y}$ в левую часть. Окончательно математическая модель наблюдателя Люенбергера пониженного порядка принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{k_1 k_2}{T_2} u - \left(\frac{1 + k_2 k_4}{T_2} + lk_3 \right) \hat{z} + \left(lk_3 k_5 - \frac{k_2}{T_2} \right) y, \\ \hat{z} &= q + ly. \end{aligned} \right\}$$

Для определения неизвестного коэффициента l , входящего в «стабилизирующую добавку» и формирующего желаемые показатели качества процессов в наблюдателе, необходимо записать однородное дифференциальное уравнение относительно \hat{z} , которое получается путем принятия в нем всех членов, содержащих y и u , равными нулю, что эквивалентно записи однородного дифференциального уравнения относительно ошибки наблюдения ε . Однородное уравнение имеет первый порядок

$$\dot{\hat{z}} = - \left(\frac{1 + k_2 k_4}{T_2} + lk_3 \right) \hat{z},$$

откуда характеристический полином наблюдателя редуцированного (пониженного) порядка равен

$$D_{\text{НПнП}}(p) = p + \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} + lk_3.$$

Приравнявая его к нормированному полиному

$$N_H(p) = p + \Omega_H,$$

можно легко определить коэффициент, входящий в «стабилизирующую добавку»

$$l = \frac{1}{k_3} \left(\Omega_H - \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} \right),$$

где по условиям задачи

$$\Omega_H = (5 \dots 10) \Omega^*.$$

Структурная схема системы модального управления, в которой обратная связь по первой координате состояния заведена с наблюдателя пониженного порядка, изображена на рис. П1.11.

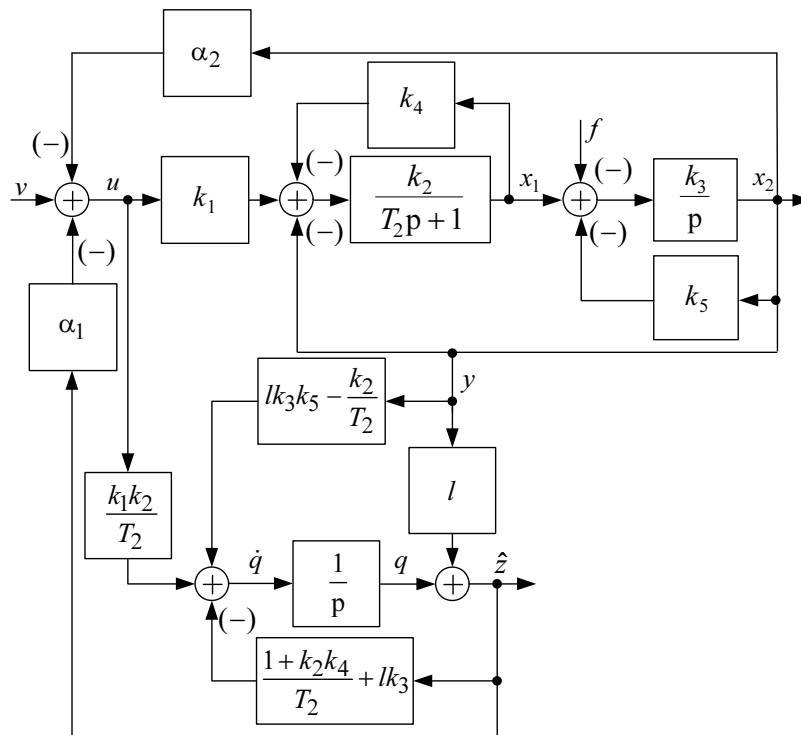


Рис. П1.11. Структурная схема замкнутой системы модального управления с наблюдателем пониженного порядка

В заключение необходимо отметить, что дополнение САУ наблюдателями Люенбергера полного или пониженного порядков, которые используются для замыкания обратных связей по оценкам координат вектора состояния, в случае нулевых начальных условий не сказывается на переходных процессах, т. е. вид переходных процессов по сравнению с процессами, протекающими в системе модального управления при полных измерениях (см. задачу 1), остается неизменным.

Задача 4

Определить ошибки наблюдения координат состояния объекта управления вида (П1.2), обусловленные действием неконтролируемого возмущающего воздействия f в наблюдателях Люенбергера полного и пониженного порядков.

Наличие неконтролируемых возмущений, действующих на объект управления, приводит к возникновению отклонения оценок неизмеряемых координат на выходе наблюдателя от истинных значений переменных ОУ.

Рассчитаем статическую ошибку наблюдения координат состояния $\varepsilon = \hat{x} - x$ объекта (П1.2) в наблюдателе полного порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= \mathbf{C}\hat{x}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1.14})$$

для чего из первого уравнения модели наблюдателя (П1.14) вычтем модель ОУ (П1.2) с учетом $y = \mathbf{C}x$, второго уравнения (П1.14) и свойства линейности рассматриваемых систем. Уравнение ошибки примет вид

$$\dot{\varepsilon} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\varepsilon - \mathbf{M}f,$$

откуда при $t \rightarrow \infty$ ($\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$)

$$\varepsilon_{\text{уст}} = -(\mathbf{LC} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{M}f.$$

Определим обратную матрицу $(\mathbf{LC} - \mathbf{A})^{-1}$:

$$(\mathbf{LC} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{(\mathbf{LC} - \mathbf{A})^*}{|\mathbf{LC} - \mathbf{A}|},$$

где (см. задачу 2)

$$|\mathbf{LC} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \frac{1+k_2k_4}{T_2} & \frac{k_2}{T_2} + l_1 \\ -k_3 & k_3k_5 + l_2 \end{vmatrix} = \frac{1+k_2k_4}{T_2} (k_3k_5 + l_2) + k_3 \left(\frac{k_2}{T_2} + l_1 \right),$$

$$(\mathbf{LC} - \mathbf{A})^* = \begin{bmatrix} k_3k_5 + l_2 & -\left(\frac{k_2}{T_2} + l_1 \right) \\ k_3 & \frac{1+k_2k_4}{T_2} \end{bmatrix}.$$

Ошибки наблюдения координат состояния в установившемся режиме при подаче неконтролируемого единичного возмущающего воздействия:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1\text{уст}} \\ \varepsilon_{2\text{уст}} \end{bmatrix} = -\frac{(\mathbf{LC} - \mathbf{A})^* \mathbf{M}}{|\mathbf{LC} - \mathbf{A}|} = -\frac{1}{|\mathbf{LC} - \mathbf{A}|} \begin{bmatrix} k_3k_5 + l_2 & -\left(\frac{k_2}{T_2} + l_1 \right) \\ k_3 & \frac{1+k_2k_4}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -k_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1+k_2k_4}{T_2} (k_3k_5 + l_2) + k_3 \left(\frac{k_2}{T_2} + l_1 \right)} \begin{bmatrix} -k_3 \left(\frac{k_2}{T_2} + l_1 \right) \\ k_3 \frac{1+k_2k_4}{T_2} \end{bmatrix}.$$

Анализируя результирующие соотношения, а также зависимости, полученные для коэффициентов матрицы \mathbf{L} в задаче 2, можно сделать вывод о том, что уменьшить ошибки наблюдения, возникающие при действии на объект неконтролируемых возмущений, можно путем увеличения среднегеометрического корня наблюдателя Ω_H .

Аналогичные преобразования выполним для наблюдателя пониженного порядка в целях определения статической ошибки наблюдения $\varepsilon = \hat{z} - z$, для чего представим модель объекта управления (П1.12) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= \frac{k_1k_2}{T_2} u - \frac{1+k_2k_4}{T_2} z - \frac{k_2}{T_2} y, \\ 0 &= \dot{y} - k_3z + k_3k_5y + k_3f. \end{aligned} \right\}$$

Сложим первое и второе уравнения полученной системы, предварительно умножив правую и левую части второго уравнения на коэффициент стабилизирующей добавки l :

$$\dot{z} = \frac{k_1 k_2}{T_2} u - \frac{1 + k_2 k_4}{T_2} z - \frac{k_2}{T_2} y + l(\dot{y} - k_3 z + k_3 k_5 y + k_3 f).$$

Вычитая последнее уравнение из (П1.13) с учетом свойства линейности рассматриваемых систем, получим уравнение ошибки наблюдения:

$$\dot{\varepsilon} = -\left(\frac{1 + k_2 k_4}{T_2} + lk_3\right)\varepsilon - lk_3 f,$$

откуда при $t \rightarrow \infty$ ($\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$) и $f = 1(t)$

$$\varepsilon_{\text{уст}} = -\frac{lk_3}{\frac{1 + k_2 k_4}{T_2} + lk_3}.$$

Задача 5

Синтезировать астатический алгоритм управления объектом вида (П1.1) на основе модифицированного модального метода при полных измерениях и настройке замкнутой системы на желаемое распределение корней характеристического полинома и быстродействие, принятые в задаче 1.

Классический модальный метод синтеза обеспечивает желаемую форму и показатели качества переходных процессов лишь в линейных системах, не имеющих форсирующих свойств, требуемая статическая точность регулирования при этом не гарантируется. Модифицированный модальный метод устраняет указанные недостатки, позволяя скомпенсировать влияние «левых» нулей объекта с одновременным обеспечением астатизма системы по управляющему и возмущающему воздействиям как минимум первого порядка. Структурная схема системы, синтезированная модифицированным модальным методом, приведена на рис. П1.12.

На рис. П1.12 используются следующие обозначения: $W_{PC}(p) = \frac{k_{PC}}{pG(p)}$ –

передаточная функция регулятора «статики», $W_{PD}(p) = \frac{H(p)}{G(p)}$ – передаточная

функция регулятора «динамики», $W_o(p) = \frac{G(p)}{D(p)}$ – «правильная» передаточная функция объекта управления, т. е. $\deg G(p) < \deg D(p)$, $H(p)$ – полином, порядок которого $\deg H(p) = n - 1$, для $n = 2$ $H(p) = h_1 p + h_0$.

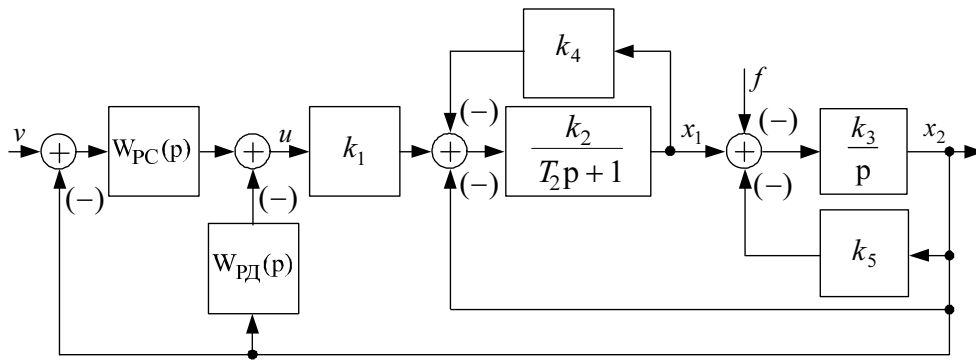


Рис. П1.12. Структурная схема замкнутой системы с модифицированным модальным управлением

Определим передаточную функцию объекта управления по управляющему воздействию при $f = 0$, основываясь на правилах преобразования структурных схем линейной системы с различными способами соединения динамических звеньев [1.3]. Передаточная функция интегрирующего звена, охваченного безынерционной отрицательной обратной связью,

$$W_1(p) = \frac{k_3}{p + k_3 k_5},$$

а охват аperiodического звена безынерционной отрицательной обратной связью представим как

$$W_2(p) = \frac{k_2}{T_2 p + 1 + k_2 k_4}.$$

В результате структурных преобразований передаточная функция объекта управления примет вид

$$W_o(p) = k_1 \frac{W_1(p)W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{k_1 k_2 k_3}{T_2 p^2 + (1 + k_2 k_4 + T_2 k_3 k_5) p + k_3 k_5 (1 + k_2 k_4) + k_2 k_3}.$$

Приведем характеристический полином объекта управления к нормальному виду, поделив числитель и знаменатель передаточной функции на коэффициент при старшей степени p^2 :

$$W_o(p) = \frac{k_1 k_2 k_3 T_2^{-1}}{p^2 + \frac{(1 + k_2 k_4 + T_2 k_3 k_5)}{T_2} p + \frac{k_3 k_5 (1 + k_2 k_4) + k_2 k_3}{T_2}}$$

откуда

$$G(p) = \frac{k_1 k_2 k_3}{T_2},$$

$$D(p) = p^2 + \frac{(1 + k_2 k_4 + T_2 k_3 k_5)}{T_2} p + \frac{k_3 k_5 (1 + k_2 k_4) + k_2 k_3}{T_2} = p^2 + d_1 p + d_0.$$

Аналогично определим передаточную функцию замкнутой системы по задающему воздействию v , используя принятые обозначения:

$$W_3(p) = \frac{k_{PC}}{pD(p) + pH(p) + k_{PC}} = \frac{k_{PC}}{p^3 + (d_1 + h_1)p^2 + (d_0 + h_0)p + k_{PC}}.$$

Приравнявая характеристический полином замкнутой модифицированной системы модального управления к нормированному полиному порядка $n + 1$

$$N(p) = p^3 + A_2 \Omega p^2 + A_1 \Omega^2 p + \Omega^3,$$

получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов регуляторов:

$$\left. \begin{aligned} d_1 + h_1 &= A_2 \Omega, \\ d_0 + h_0 &= A_1 \Omega^2, \\ k_{PC} &= \Omega^3, \end{aligned} \right\}$$

или окончательно

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= A_2 \Omega - d_1, \\ h_0 &= A_1 \Omega^2 - d_0, \\ k_{PC} &= \Omega^3, \end{aligned} \right\}$$

где по условиям задачи коэффициенты $A_1 = A_2 = 2$ выбираются из табл. П1.2, среднегеометрический корень равен Ω^* .

Запишем передаточную функцию регулятора динамики, подставляя значение полинома $G(p)$:

$$W_{PD}(p) = \frac{H(p)}{G(p)} = T_2 \frac{h_1 p + h_0}{k_1 k_2 k_3}.$$

Передаточная функция $W_{PD}(p)$ не является строго реализуемой и обладает форсирующими свойствами. Для исключения указанной особенности запишем выражение для выходного сигнала регулятора «динамики»

$$x_{PD}(p) = W_{PD}(p)x_2(p) = \frac{h_1}{G(p)} p x_2(p) + \frac{h_0}{G(p)} x_2(p),$$

или во временной области с учетом второго уравнения системы (П1.1) при пренебрежении возмущающим воздействием:

$$x_{PD} = \frac{T_2 h_1}{k_1 k_2 k_3} (k_3 x_1 - k_3 k_5 x_2) + \frac{T_2 h_0}{k_1 k_2 k_3} x_2,$$

$$x_{PD} = \frac{h_1 T_2}{k_1 k_2} x_1 + \frac{T_2}{k_1 k_2 k_3} (h_0 - h_1 k_3 k_5) x_2.$$

Структурная схема системы модифицированного модального управления с полными измерениями с учетом последних преобразований примет такой вид, как представлено на рис. П1.13.

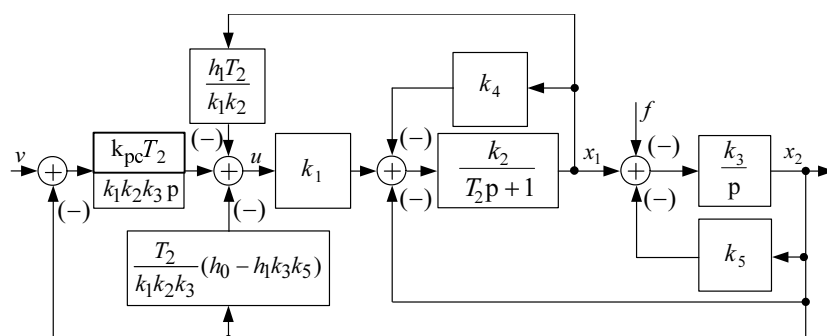


Рис. П1.13. Структурная схема системы с модифицированным модальным управлением и полными измерениями

Синтезированная модифицированным модальным методом система будет одновременно обеспечивать как желаемые показатели качества, так и отсутствие статической ошибки регулирования. Последнее означает, что в случае приложения скачкообразного возмущающего воздействия на объект в системе будет наблюдаться кратковременное динамическое отклонение выходной координаты x_2 от заданного установившегося значения, но по окончании некоторого промежутка времени, определяемого величиной среднегеометрического корня Ω^* , астатическая САУ вернется к исходному состоянию в соответствии с требованием

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = v.$$

П1.3. ЗАДАНИЕ НА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКУЮ РАБОТУ

1. Представить математическую модель объекта управления, заданную структурной схемой, в векторно-матричной форме. Определить установившиеся значения координат состояния объекта при подаче единичных управляющего и возмущающего воздействий.

2. Синтезировать алгоритм модального управления заданным объектом при полных измерениях и настройке системы на желаемое распределение корней характеристического полинома, соответствующее:

- стандартной линейной форме Баттерворта – с 1 по 10;
- биномиальной стандартной линейной форме – с 11 по 20;

- стандартной линейной форме Бесселя – с 21 по 30 варианты;
 - стандартной линейной форме, обеспечивающей наибольшее быстродействие – с 31 по 40 варианты;
 - стандартной линейной форме с $\xi = 0,75$ – с 41 по 50 варианты;
 - стандартной линейной форме Чебышева – с 51 по 60 варианты;
- Среднегеометрический корень характеристического полинома САУ принять равным

$$\Omega = \frac{1}{T_1}, \text{ с}^{-1}.$$

Определить установившиеся значения координат состояния системы модального управления при подаче единичных управляющего и возмущающего воздействий.

3. Синтезировать наблюдатель Люенбергера полного порядка с тем же распределением корней характеристического полинома и среднегеометрическим корнем

$$\Omega_n = (5 \dots 10)\Omega.$$

В качестве измеряемой координаты вектора состояния принять:

- для нечетных вариантов – x_1 ;
- для четных вариантов – x_2 .

Возмущающее воздействие считать неконтролируемым.

4. Синтезировать наблюдатель Люенбергера пониженного порядка с быстродействием, заданным в предыдущем пункте.

5. Определить ошибки наблюдения координат состояния объекта управления, обусловленные действием неконтролируемого возмущающего воздействия f на наблюдатели Люенбергера полного и пониженного порядков.

6. Произвести синтез замкнутой системы при полных измерениях на основании модифицированного модального метода с распределением корней характеристического полинома и быстродействием, заданным в п.1.

7. Исследовать методом цифрового моделирования:

- а) объект управления (по управляющему и возмущающему воздействиям);
- б) систему модального управления с полными измерениями (по управляющему и возмущающему воздействиям);

в) систему «объект управления – наблюдатель полного порядка» (по управляющему и возмущающему воздействиям с нулевыми начальными условиями, по управляющему воздействию с отклонением по начальным условиям);

г) систему модального управления, замкнутую через наблюдатель полного порядка (по управляющему и возмущающему воздействиям с нулевыми начальными условиями, по управляющему воздействию с отклонением по начальным условиям);

д) систему «объект управления – наблюдатель пониженного порядка» (по управляющему и возмущающему воздействиям с нулевыми начальными условиями, по управляющему воздействию с отклонением по начальным условиям);

е) систему модального управления, замкнутую через наблюдатель пониженного порядка (по управляющему и возмущающему воздействиям с нулевыми начальными условиями, по управляющему воздействию с отклонением по начальным условиям);

ж) модифицированную систему модального управления с полными измерениями (по управляющему и возмущающему воздействиям);

з) модифицированную систему модального управления, замкнутую через наблюдатель полного порядка (по управляющему воздействию с отклонением по начальным условиям);

и) модифицированную систему модального управления, замкнутую через наблюдатель пониженного порядка (по управляющему воздействию с отклонением по начальным условиям).

Варианты структурных схем и параметров объекта управления

Номер варианта студента по списку	Вариант структурной схемы	Вариант параметров объекта управления
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	5	5
6	6	1
7	7	2
8	8	3
9	9	4

Продолжение таблицы

Номер варианта студента по списку	Вариант структурной схемы	Вариант параметров объекта управления
10	10	5
11	11	1
12	12	2
13	1	3
14	2	4
15	3	5
16	4	1
17	5	2
18	6	3
19	7	4
20	8	5
21	9	1
22	10	2
23	11	3
24	12	4
25	1	5
26	2	1
27	3	2
28	4	3
29	5	4
30	6	5
31	7	1
32	8	2
33	9	3
34	10	4
35	11	5
36	12	1
37	1	2
38	2	3
39	3	4
40	4	5
41	5	1
42	6	2

Окончание таблицы

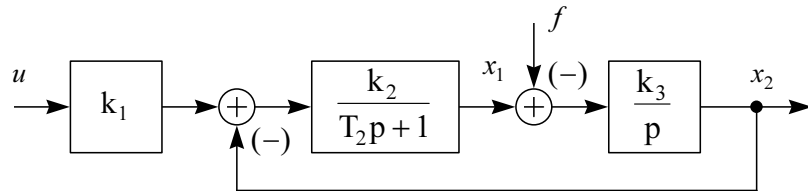
Номер варианта студента по списку	Вариант структурной схемы	Вариант параметров объекта управления
43	7	3
44	8	4
45	9	5
46	10	1
47	11	2
48	12	3
49	1	4
50	2	5
51	3	1
52	4	2
53	5	3
54	6	4
55	7	5
56	8	1
57	9	2
58	10	3
59	11	4
60	12	5

Таблица параметров объектов управления

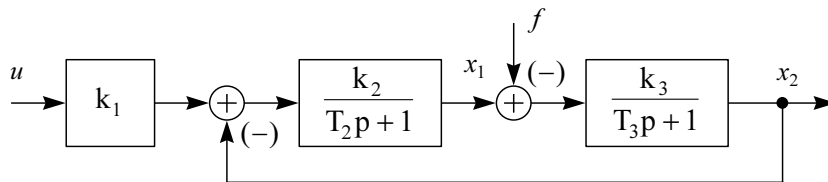
Номер варианта параметров	K_1 , о.е.	K_2 , о.е.	K_3 , о.е.	T_1 , с	T_2 , с	T_3 , с
1	2,2	1,5	2,0	1	3	5
2	1,5	1,0	1,2	0,8	3	1,7
3	2,5	1,4	0,7	1,3	2	1
4	3,0	0,8	1,1	0,7	1	1,6
5	2,5	0,7	1,5	1,5	2	0,8

Структурные схемы объектов управления

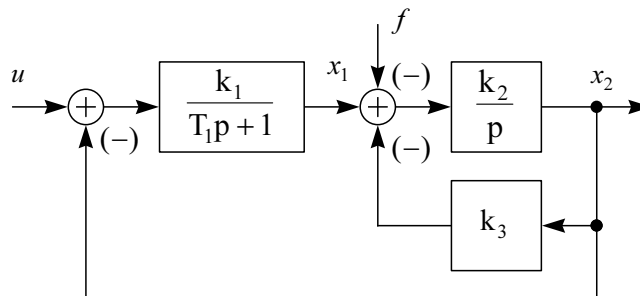
№ 1



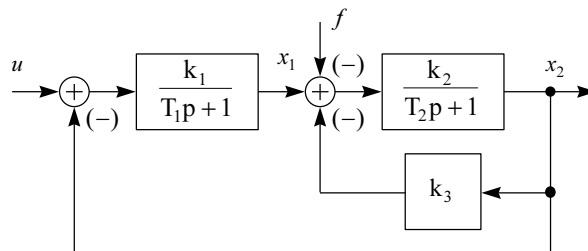
№ 2



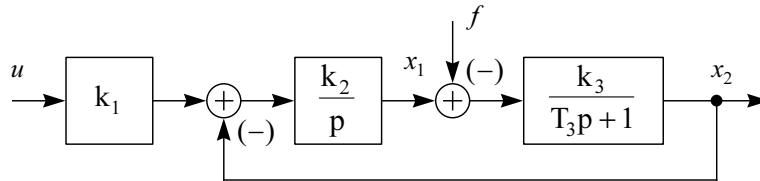
№ 3



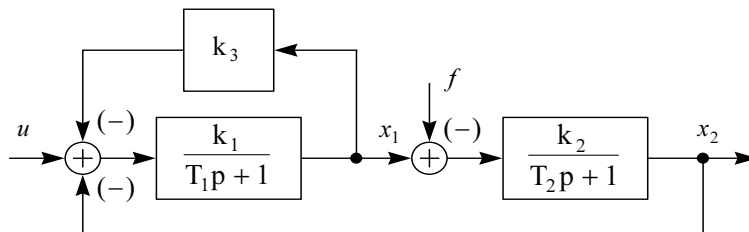
№ 4



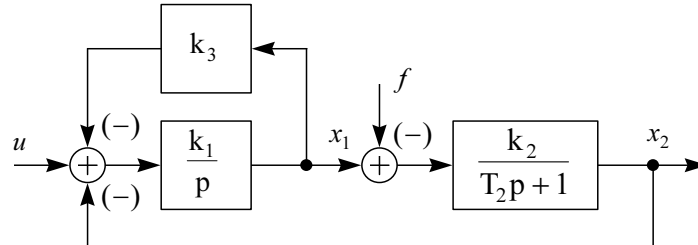
№ 5



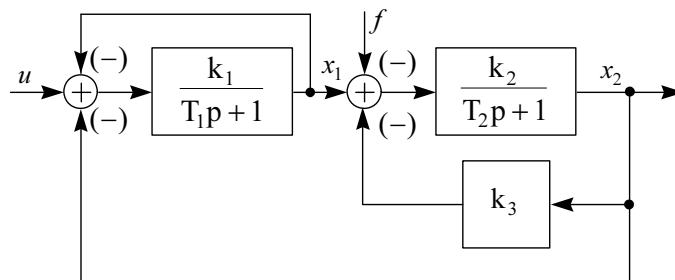
№ 6



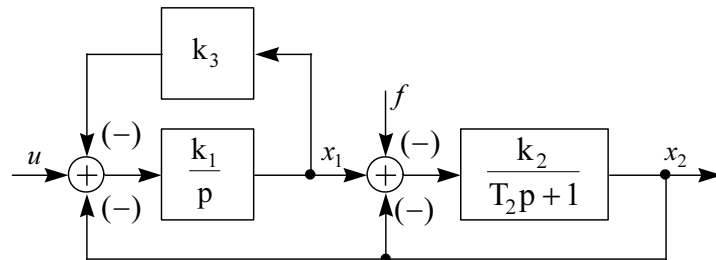
№ 7



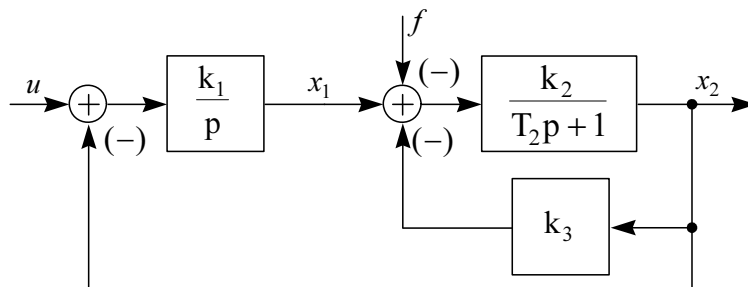
№ 8



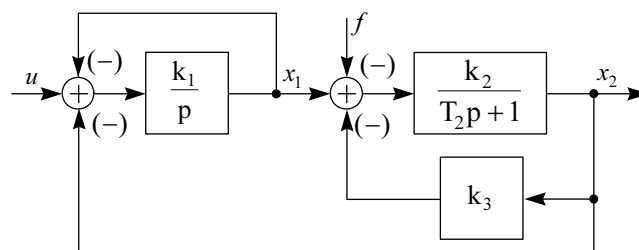
№ 9



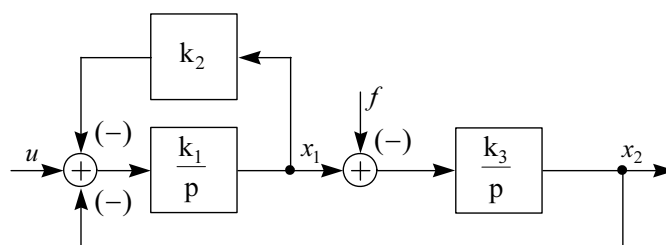
№ 10



№ 11



№ 12



П1.4. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Лабораторный практикум выполняется каждым студентом в соответствии с его вариантом по п. 7 задания на расчетно-графическую работу.

1. При исследовании методом цифрового моделирования объекта управления по управляющему и возмущающему воздействиям следует:

- а) построить переходные характеристики для координат состояния x_1 и x_2 ;
- б) определить прямые показатели качества объекта (перерегулирование, время регулирования, количество колебаний) по обеим координатам состояния;
- в) определить установившиеся значения x_1 и x_2 , сравнить их с расчетными значениями, сделать вывод о точности расчета.

2. В ходе исследования системы модального управления (СМУ) с полными измерениями по задающему и возмущающему воздействиям требуется:

- а) построить переходные характеристики для координат состояния x_1 и x_2 ;
- б) определить прямые показатели качества СМУ по обеим координатам состояния;
- в) сравнить прямые показатели качества объекта управления и системы модального управления, сделать выводы;

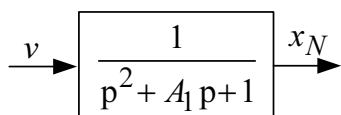


Рис. П1.14. Структурная схема желаемой системы модального управления

- г) построить желаемый переходной процесс, соответствующий выбранной стандартной линейной форме, в относительных единицах по времени, принимая $\Omega^N = 1 \text{ с}^{-1}$. Структурная схема желаемой САУ изображена на рис. П1.14.
- д) сравнить показатели качества реальной (по выходной координате x_2) и желаемой СМУ, рассчитав погрешности настройки по следующим формулам:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{|\sigma_{\max} - \sigma_{\max}^{N*}|}{\sigma_{\max}^N} \cdot 100 \%,$$

$$\varepsilon_{T_{\text{рег}}} = \frac{|T_{\text{рег}}^* - T_{\text{рег}}^{N*}|}{T_{\text{рег}}^{N*}} \cdot 100 \%,$$

где σ_{\max}^N – желаемое перерегулирование, $T_{\text{рег}}^{N*} \equiv T_{\text{рег}}^N$ – желаемое время регулирования в относительных единицах, $T_{\text{рег}}^* = T_{\text{рег}} \cdot \Omega$ – время регулирования по выходной координате в реальной СМУ в относительных единицах; сделать вывод о точности настройки;

е) определить установившиеся значения x_1 и x_2 , сравнить их с расчетными данными, сделать вывод о точности расчета.

3. При исследовании системы «объект управления – наблюдатель полного порядка» построить переходные характеристики для координат состояния объекта управления x_1 и x_2 и их оценок:

а) по управляющему воздействию с нулевыми начальными условиями сделать вывод о правильности структурного синтеза наблюдателя;

б) по возмущающему воздействию с нулевыми начальными условиями определить статические ошибки наблюдения координат состояния объекта управления, сравнить с расчетными значениями, сделать вывод о точности расчета и причине возникновения указанных ошибок;

в) по управляющему воздействию с отклонениями по начальным условиям охарактеризовать работу наблюдателя Люенбергера.

4. Исследуя классическую систему модального управления, замкнутую через наблюдатель полного порядка, построить переходные характеристики для координат состояния x_1 и x_2 и их оценок:

а) по задающему воздействию с нулевыми начальными условиями определить прямые показатели качества по выходной координате x_2 , оценить влияние наблюдателя на качество СМУ;

б) по возмущающему воздействию с нулевыми начальными условиями определить статические ошибки наблюдения, сравнить их с ошибками наблюдения в системе «объект управления – наблюдатель полного порядка», сделать вывод;

в) по задающему воздействию с отклонениями по начальным условиям экспериментально оценить коэффициент разделения движений в СМУ и наблюдателе, сравнить его с коэффициентом разделения движений, принятым при расчетах $k_p = \Omega_n \cdot \Omega^{-1}$, сделать вывод о верности параметрического синтеза наблюдателя.

5. При исследовании системы «объект управления – наблюдатель пониженного порядка» построить переходные характеристики для координат состояния объекта управления x_1 и x_2 и их оценок:

а) по управляющему воздействию с нулевыми начальными условиями сделать вывод о правильности структурного синтеза наблюдателя;

б) по возмущающему воздействию с нулевыми начальными условиями определить статическую ошибку наблюдения неизмеряемой координаты состояния объекта управления, сравнить с расчетным значением, сделать вывод о точности расчета и причине возникновения указанной ошибки;

в) по управляющему воздействию с отклонением по начальным условиям охарактеризовать работу наблюдателя.

6. Исследуя классическую систему модального управления, замкнутую через наблюдатель пониженного порядка, построить переходные характеристики для координат состояния x_1 и x_2 и их оценок:

а) по задающему воздействию с нулевыми начальными условиями определить прямые показатели качества по выходной координате x_2 , оценить влияние наблюдателя на качество СМУ;

б) по возмущающему воздействию с нулевыми начальными условиями определить статическую ошибку наблюдения неизмеряемой координаты, сравнить ее с ошибкой наблюдения в системе «объект управления – наблюдатель пониженного порядка», сделать вывод;

в) по задающему воздействию с отклонением по начальным условиям экспериментально оценить коэффициент разделения движений в СМУ и наблюдателе, сравнить его с коэффициентом разделения движений, принятым при расчетах $k_p = \Omega_n \cdot \Omega^{-1}$, сделать вывод о верности параметрического синтеза наблюдателя;

г) сравнить коэффициент разделения движений, экспериментально определенный для системы модального управления с наблюдателем пониженного порядка, с соответствующим коэффициентом для СМУ, замкнутой через наблюдатель полного порядка, сделать вывод.

7. В ходе исследования системы модифицированного модального управления (СММУ) с полными измерениями по управляющему и возмущающему воздействиям требуется:

а) построить переходные характеристики для координат состояния x_1 и x_2 ;

б) определить прямые показатели качества СММУ по выходной координате состояния x_2 ;

в) построить желаемый переходный процесс, соответствующий выбранной стандартной линейной форме. Структурная схема желаемой СММУ представлена на рис. П1.15.

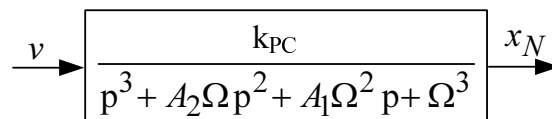


Рис. П1.15. Структурная схема желаемой системы модифицированного модального управления

г) сравнить прямые показатели качества реальной (по выходной координате x_2) и желаемой СММУ, рассчитав погрешности настройки по следующим формулам:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{|\sigma_{\max} - \sigma_{\max}^N|}{\sigma_{\max}^N} \cdot 100 \%,$$

$$\varepsilon_{T_{\text{рег}}} = \frac{|T_{\text{рег}} - T_{\text{рег}}^N|}{T_{\text{рег}}^N} \cdot 100 \%,$$

сделать вывод о точности настройки;

д) определить установившиеся значения x_1 и x_2 ;

е) сравнить классическую и модифицированную системы модального управления в статических и динамических режимах работы САУ, сделать выводы.

8. При исследовании модифицированной системы модального управления, замкнутой через наблюдатель полного порядка, по задающему воздействию с отклонениями по начальным условиям:

а) определить прямые показатели качества по выходной координате;

б) сравнить их с желаемыми настройками, рассчитав погрешности по прямым показателям качества, вносимые наблюдателем полного порядка, сделать вывод о влиянии наблюдателя на качество СММУ.

9. При исследовании модифицированной системы модального управления, замкнутой через наблюдатель пониженного порядка по задающему воздействию с отклонением по начальным условиям:

- а) определить показатели качества по выходной координате;
- б) сравнить их с желаемыми, рассчитав погрешности по показателям качества, вносимые наблюдателем пониженного порядка, сделать вывод о влиянии наблюдателя на качество СММУ;
- в) сравнить наблюдатели Люенбергера полного и пониженного порядков между собой по степени влияния на качество системы модифицированного модального управления, сделать вывод.

Часть 2

МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, МАЛОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ИЗМЕНЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ: ОДНОКАНАЛЬНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ОБЪЕКТЫ

ВВЕДЕНИЕ¹

Центральной проблемой современной теории автоматического управления является синтез и оптимизация процессов управления «в большом», ориентированных на достижение поставленной конечной цели [2.37]. При этом оптимальная САУ может быть структурно представлена в виде совокупности оптимального программатора, генерирующего на основании априорной информации об имеющихся начальных и требуемых конечных условиях управляемого процесса так называемое программное управление – временную «развертку» задающего воздействия по некоторой регулируемой переменной, и замкнутой системы регулирования данной переменной, для которой она является выходной. Так как синтез временного программного управления предполагает достаточно точное знание динамических и статических характеристик подчиненной по отношению к нему замкнутой подсистемы, свойства такой системы регулирования должны быть стабильными и заранее известными (заданными). В условиях действия неконтролируемых внешних возмущений и возможных изменений параметров объекта управления (ОУ) это предполагает использование специальных методов, гарантирующих близость характеристик замкнутой системы к *желаемым*.

¹ Панкратов В.В. Специальные разделы теории автоматического управления: учеб. пособие. Ч. 2. Методы синтеза систем управления, малочувствительных к изменениям параметров: одноканальные непрерывные объекты / В.В. Панкратов, О.В. Нос. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.

Управление «в большом» всегда порождает ряд особенностей в постановках задач синтеза САУ, связанных, в частности, с существенной *нелинейностью* математической модели ОУ, а также ростом числа и значимости факторов *неопределенности* [2.9]. В детерминированных (нестохастических) задачах проектировщику локальных САУ приходится работать с априорной информацией об интервалах неопределенности параметров ОУ, внешних возмущающих воздействий, скоростей их изменения, что в общем случае можно объединить понятием *возмущений – внешних и параметрических*. Одним из вторичных проявлений неопределенности является невозможность прямого измерения всех координат состояния объекта в процессе управления – *неполные измерения*. Таким образом, речь идет о синтезе САУ в условиях *неполной информации* о действующих возмущениях, характеристиках и текущем состоянии ОУ.

В теории автоматического управления разрабатываются две группы методов управления динамическими объектами с изменяющимися параметрами (*нестационарными* объектами). Первую группу образуют не рассматриваемые здесь методы адаптивного управления, хорошо зарекомендовавшие себя в близких к линейным квазистационарных системах с медленно (по отношению к темпу основных переходных процессов САУ) изменяющимися параметрами. Применение методов адаптивного управления к существенно нелинейным объектам в общем случае затруднено, а в каждом конкретном – требует детального обоснования.

Наиболее эффективным подходом к решению задач стабилизации нелинейных и нестационарных динамических объектов, обеспечению заданной статической точности регулирования и требуемых показателей качества переходных процессов САУ в условиях неопределенности справедливым считается принцип «*глубокой*» *обратной связи*. Его основополагающие идеи в различных формах активно эксплуатируются в методах *больших коэффициентов* [2.16, 2.27], *скользящих режимов* [2.40], в *методе локализации* [2.5, 2.6, 2.10] и *методе сигнально адаптивной обратной модели*, которые образуют вторую группу методов синтеза с управлением движениями динамических систем на многообразиях (в классическом пространстве состояний или «расширенном»), основанных на идее локализации возмущений. Если не принимать во внимание некоторые идеальные или нетипичные для приложений ситуации, все четыре указанных метода предполагают преднамеренную организацию в замкнутой системе посредством глубоких обратных связей двухэтапных процессов и движений как минимум двух существенно различающихся темпов – *быстрых* и *медленных*.

На первом этапе переходных процессов в темпе быстрых движений изображающая точка системы выводится в окрестность некоторого желаемого многообразия пространства состояний, уравнение которого принципиально можно выбрать так, что оно будет инвариантным (независимым) по отношению к возмущениям. На втором (основном или медленном) этапе движения САУ протекают в окрестности выбранного многообразия, что обеспечивает их близость к желаемым. Если модель желаемых процессов задана в каноническом для перечисленных выше методов пространстве состояний, образованном выходными переменными, их производными и координатами так называемой вырожденной подсистемы (в данном пособии не рассматривается), медленные движения управляемых переменных обладают свойством малой чувствительности к вариациям характеристик объекта управления и возмущениям, что, по сути, практически отождествляется с *инвариантностью* [2.43]. Под «*малой чувствительностью*» согласно [2.9, 2.20, 2.28] понимается структурное свойство системы, которое заключается в возможности выбора параметров закона управления, обеспечивающих в рамках принятой модели управляемого процесса любую наперед заданную точность формирования предписанных динамических и статических характеристик САУ в условиях *интервальной неопределенности* параметров ОУ. Диапазоны возможных изменений параметров объекта предполагаются известными и замкнутыми, но как угодно широкими. Заметим, что требование малой чувствительности «слабее» требования инвариантности и не подразумевает реализации в непрерывных алгоритмах управления бесконечно больших коэффициентов передачи, а в разрывных – идеальных скользящих режимов. Всегда можно найти такие конечные значения параметров закона управления, которые обеспечат требуемую точность формирования предписанных медленных процессов. Очевидно, что все методы классической теории автоматического регулирования не оперируют понятием малой чувствительности и сопоставление их в этом плане с методами управления движениями на многообразиях некорректно.

Принцип подавления возмущений в системах с глубокими обратными связями по *производным выхода* и *разнотемповыми* процессами можно интерпретировать следующим образом. При построении законов управления в каноническом пространстве состояний в структурах САУ путем соответствующих преобразований можно формально выделить *контур быстрых движений*, в котором именно благодаря этим обратным связям парируется или локализуется (терминология [2.5]) действие сигнальных (внешних) и параметрических возмущений, а также другие собственные свойства ОУ, в частности, влияние

вырожденной подсистемы. Таким образом, в САУ целенаправленно организуется (алгоритмически) специальная подсистема, характеризующаяся следующими свойствами [2.20]. Во-первых, процессы регулирования в ней протекают значительно быстрее, чем основные «рабочие» процессы по выходным переменным. Во-вторых, путем структурных преобразований данная подсистема может быть выделена из общей структурной схемы САУ в виде некоторого контура быстрых движений. И, наконец, в-третьих, благодаря применению глубоких обратных связей по производным выхода, вплоть до относительных старших, или их оценкам в подсистеме быстрых движений могут локализоваться проявления собственных динамических свойств объекта, параметрические и аддитивные возмущения (все или часть).

Кроме отмеченных выше преимуществ методов управления движениями на многообразиях, необходимо особо подчеркнуть возможность оптимизации систем с глубокими обратными связями в смысле наилучшего использования располагаемых ресурсов управления с целью повышения быстродействия многосвязных нелинейных САУ [2.22, 2.26, 2.28], что важно, например, при синтезе систем управления электроприводами переменного тока [2.21, 2.28].

Здесь также уместно заметить, что, не являясь предметно-ориентированными, методы синтеза систем с глубокими обратными связями тем не менее многим обязаны задачам управления электроприводами. Так, например, частный случай метода локализации – принцип управления по старшей производной, применяемый при синтезе одноканальных САУ минимально-фазовыми объектами и рассматриваемый во второй части настоящего учебного пособия, впервые был использован в работах профессора А.С. Вострикова для синтеза системы управления тиристорного электропривода постоянного тока [2.4]. Метод скользящих режимов в своем современном виде оформился не без участия группы электропривода Института проблем управления РАН под руководством кандидата технических наук Д.Б. Изосимова [2.14]. Активно применяется в управлении электроприводами и метод больших коэффициентов (см. [2.26, 2.28], а также более поздние работы авторов пособия).

В части 2 настоящего учебного пособия рассматриваются лишь теоретические основы методов управления с глубокими обратными связями по производным выходной переменной и разнотемповыми процессами. Для более глубокого изучения указанных методов необходимо обратиться к первоисточникам – монографиям и публикациям в периодических изданиях, обширный библиографический список которых приведен в [2.15, 2.40, 2.43].

2.1. ПРОБЛЕМА СИНТЕЗА АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

2.1.1. Модель управляемого процесса и цель управления

Основные положения обсуждаемых методов управления будут рассматриваться применительно к задачам синтеза САУ одноканальными непрерывными объектами, которые могут быть описаны достаточно распространенной в практических приложениях математической моделью

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a(t, x_1, x_2, \dots, x_n) + b(t, x_1, x_2, \dots, x_n)u, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – координаты состояния объекта с начальными условиями $x_i(0) = x_{i0}$, $i = \overline{1, n}$; $x_1 = x$ – выходная (управляемая) переменная; $\dot{(\cdot)} = \frac{d(\cdot)}{dt}$; $t \in [0, \infty)$ – параметр времени; $u \in \Omega_u \subset \mathbb{R}^1$ – скалярное управляющее воздействие с допустимой областью Ω_u . Ограничения, налагаемые на координаты состояния (2.1), при необходимости будут оговариваться дополнительно.

Особенностями объекта управления вида (2.1) являются:

- линейный (аддитивный) характер вхождения управления, причем непрерывная по всем аргументам функция-множитель $b(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ знакопостоянна и изменяется в ограниченном интервале; в дальнейшем без ущерба для общности результатов принимаем, что

$$0 < b_{\min} \leq b(\cdot) \leq b_{\max} < \infty \quad \forall (t, x_1, x_2, \dots, x_n);$$

- *относительный порядок* инерционности выходной переменной по управляющему воздействию равен порядку системы (2.1) n , что свидетельствует об отсутствии у ОУ форсирующих свойств (в линейном случае порядок числителя передаточной функции такого объекта по управлению равен нулю);

- внешние сигнальные воздействия приведены к управлению и входят в функцию $a(t, \dots)$;
- явная зависимость $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ от времени, кроме того, отражает влияние параметрических возмущений.

Так как все координаты состояния (2.1) являются производными выходной переменной различного порядка (от 0-го до $(n-1)$ -го), модель подобного ОУ часто записывают в виде

$$x^{(n)} = a(t, \mathbf{x}) + b(t, \mathbf{x})u, \quad (2.2)$$

где $x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$ – старшая производная управляемой координаты, явно зависящая от управляющего воздействия; $\mathbf{x} = [x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}]^T$ – вектор канонических для методов управления движениями на инвариантных многообразиях координат состояния.

Прямые измерения, как правило, доступна лишь сама выходная переменная $x(t)$, но не ее производные (физические координаты ОУ связаны с каноническими через переменные параметры). Структурная схема ОУ (2.2) изображена на рис. 2.1.

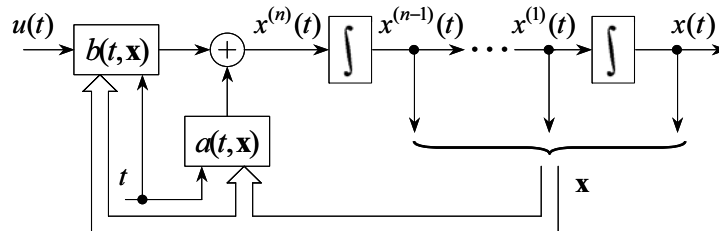


Рис. 2.1. Структурная схема управляемого процесса

В наиболее общем случае *цель управления* (ЦУ) объектом вида (2.2) заключается в слежении выхода за некоторым задающим воздействием $v(t)$:

$$x(t) \xrightarrow{t} v(t), \quad (2.3)$$

причем обычно характер стремления $x(t)$ к $v(t)$ определяется требованиями к прямым показателям качества переходных процессов при ступенчатом изменении задающего воздействия, а также скоростной ошибкой и ошибкой по

ускорению (в режимах линейной и параболической «заводки»). Значительно реже, когда синтезируемая САУ функционирует в режиме гармонических (или мультигармонических) $v(t)$, ее желаемые динамические свойства формулируются в терминах частотных характеристик.

Формально модель желаемых (эталонных) процессов можно представить как дифференциальное уравнение, порядок которого r зависит от применяемого метода синтеза. Уравнение желаемых движений (УЖД) обязательно должно иметь асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее ЦУ (2.3) с заданными динамическими показателями. Как правило, практически достаточный простор для выбора предоставляет метод стандартных линейных форм, который позволяет выбрать УЖД с нормированным характеристическим полиномом, соответствующим какому-либо типовому распределению корней (см., например, П1.1 или [2.33]):

$$x^{(r)} + A_1 \Omega_{\text{ж}} x^{(r-1)} + \dots + A_{r-1} \Omega_{\text{ж}}^{r-1} x^{(1)} + \Omega_{\text{ж}}^r x = \Omega_{\text{ж}}^r v \quad (2.4')$$

или

$$T_{\text{ж}}^r x^{(r)} + A_1 T_{\text{ж}}^{r-1} x^{(r-1)} + \dots + A_{r-1} T_{\text{ж}} x^{(1)} + x = v, \quad (2.4'')$$

где $\Omega_{\text{ж}}$, $T_{\text{ж}} = \Omega_{\text{ж}}^{-1}$ – среднегеометрический корень характеристического полинома и постоянная времени УЖД соответственно; A_i , $i = \overline{1, r-1}$ – коэффициенты формы.

2.1.2. Обратные модели управляемых процессов

Необходимым и достаточным условием реализуемости ЦУ (2.3), которое всегда выполняется для объектов (2.1), (2.2) при отсутствии ограничений на управление и координаты состояния, является их обратимость относительно управляющего воздействия. Действительно, если задана программно генерируемая временная траектория желаемых движений выходной переменной ОУ $x_{\text{ж}}(t)$, подстановка $x(t) = x_{\text{ж}}(t)$ в модель (2.2) дает уравнение *обратной модели* управляемого процесса

$$x_{\text{ж}}^{(n)} = a(t, \mathbf{x}_{\text{ж}}) + b(t, \mathbf{x}_{\text{ж}})u,$$

откуда легко формально выразить временное программное управление

$$u(t) = \frac{x_{\text{ж}}^{(n)}(t) - a(t, \mathbf{x}_{\text{ж}})}{b(t, \mathbf{x}_{\text{ж}})},$$

структурная схема алгоритма формирования которого изображена на рис. 2.2. Очевидно, что все присутствующие в ней операции обратны по отношению к операциям, приведенным на рис. 2.1 [2.15]. Процедуры составления подобных алгоритмов определяют содержание метода обратных моделей.

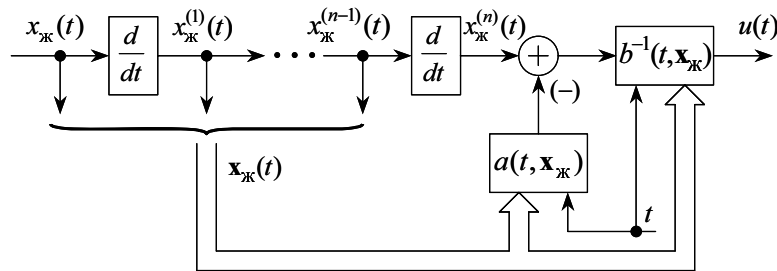


Рис. 2.2. Структурная схема обратной модели ОУ при заданной траектории выхода

Если траектория $x_{\text{ж}}(t)$ является решением УЖД общего для метода обратных моделей вида

$$x_{\text{ж}}^{(n)} = F(v, \mathbf{x}_{\text{ж}}), \quad (2.5)$$

появляется возможность построения алгоритма, не содержащего физически нереализуемых операций идеального дифференцирования, рис. 2.3.

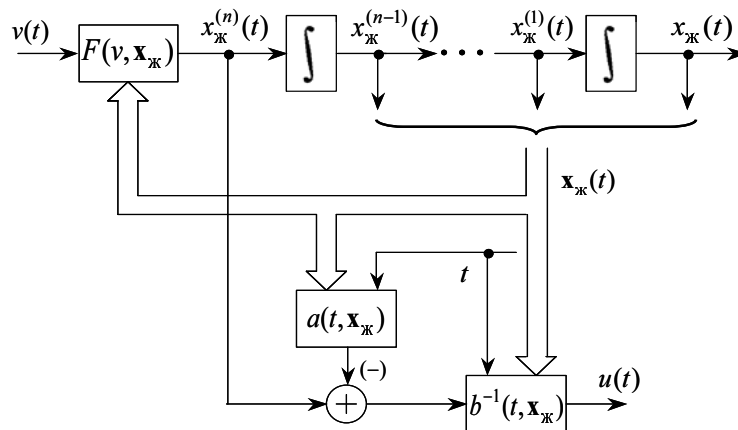


Рис. 2.3. Структурная схема обратной модели ОУ при заданном УЖД

Обратные модели, изображенные на рис. 2.2 и 2.3, генерирующие временное программное управление, соответствуют разомкнутой структуре САУ и принципиально не пригодны при управлении неустойчивыми (и даже неасимптотически устойчивыми) объектами, а также ОУ, подверженными действию существенных неконтролируемых возмущений. В таких ситуациях для учета истинных начального и текущего состояний объекта, а также подавления возмущений при построении САУ необходимо воспользоваться принципом обратной связи по координатам ОУ или их оценкам. Формально «замыкание» системы достигается заменой аргумента $x_{ж}$ в правой части УЖД (2.5) на x –

$$x_{ж}^{(n)} = F(v, \mathbf{x}), \quad (2.6)$$

в результате чего структура САУ принимает вид, показанный на рис. 2.4. Алгоритмы управления данного типа, где функцию вычисления координат состояния обратной модели выполняет сам объект, предложены в [2.2].

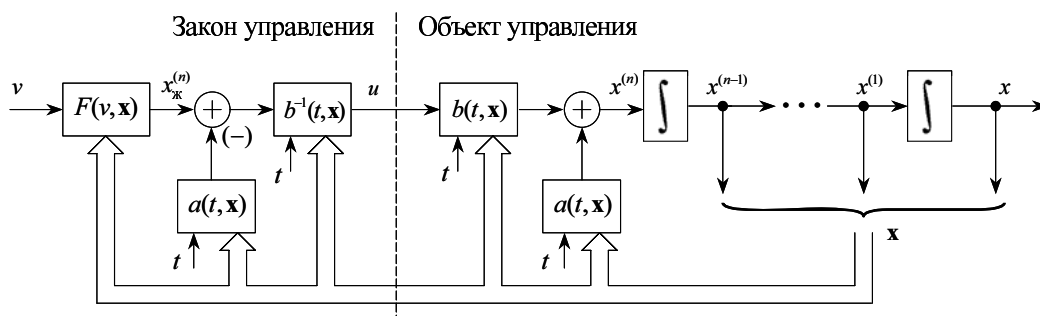


Рис. 2.4. Структурная схема замкнутой системы, синтезированной методом обратной модели

Реализация любой из рассмотренных выше обратных моделей требует достаточно точного знания функций $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, так как основывается на компенсации присущих объекту характеристик введением в канал управления обратных зависимостей. Поэтому их применение в САУ нестационарными объектами предполагает совмещение с методами адаптивного управления. При неизменных параметрах закона (алгоритма) управления (ЗУ) САУ с обратными моделями, представленные на рис. 2.2 – 2.4, не обладают свойством малой чувствительности к различного рода возмущениям (сигнальным и параметрическим), однако несмотря на указанные ограничения, метод обратной модели

довольно широко применяется на практике в подсистемах, которые не имеют неконтролируемых внешних возмущений.

Примеры использования данного метода в системах векторного управления асинхронными электроприводами можно найти в [2.24].

2.1.3. Закон управления как алгоритм решения конечного уравнения

Подавление влияния внешних и параметрических возмущений в условиях неопределенности традиционно достигается в рамках алгоритмов управления по отклонению. Рассмотрим наиболее общие для настоящей части учебного пособия подходы к их синтезу.

Соответствие траекторий выходной переменной ОУ (2.2) решению УЖД (2.5) обеспечивается при равенстве $x^{(n)}$ правой части уравнения (2.6), т. е.

$$x^{(n)}(t, \mathbf{x}, u) = a(t, \mathbf{x}) + b(t, \mathbf{x})u = F(v, \mathbf{x}), \quad (2.7)$$

или

$$F(v, \mathbf{x}) - x^{(n)} = 0.$$

Решение конечного уравнения (2.7)

$$u(t, \mathbf{x}, v) = \frac{F(v, \mathbf{x}) - a(t, \mathbf{x})}{b(t, \mathbf{x})}$$

не может быть найдено аналитически, если информация о функциях $a(t, \mathbf{x})$ и $b(t, \mathbf{x})$ не является полной. Поэтому в современной теории автоматического управления оно вычисляется алгоритмически [2.43] посредством отрицательной обратной связи по старшей производной выхода

$$D(p)u = C(p)\{F(v, \mathbf{x}) - x^{(n)}\}, \quad (2.8')$$

или в более общем виде

$$D(p)u = C(p)\{C_f(p)F(v, \mathbf{x}) - C_b(p)x^{(n)}\}, \quad (2.8'')$$

где $D(p)$, $C(p)$, $C_f(p)$, $C_b(p)$ – динамические операторы, выбор которых должен обеспечить устойчивость и надлежащее качество процессов регулирования в статике и динамике; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Так, например, в основу метода локализации [2.4 – 2.6] положен идеализированный алгоритм управления по старшей производной с $D(p) = C_f(p) = C_b(p) = 1$

$$u = k \left(F(v, \mathbf{x}) - x^{(n)} \right), \quad (2.9)$$

где $k = C(p)$ – коэффициент передачи регулятора, который известен как конечное соотношение метода неявных функций [2.43]. В концепции обратных задач динамики [2.15] и в работах [2.20, 2.32, 2.36, 2.48] используются ЗУ с $D(p) = p$ вида

$$\dot{u} = k \left(F(v, \mathbf{x}) - x^{(n)} \right), \quad (2.10)$$

принадлежащие к классу градиентных. Астатические алгоритмы управления метода большого коэффициента можно представить как

$$u = \frac{k_p p + k_i}{p} \left(x_{\text{ж}}^{(n-1)} - x^{(n-1)} \right), \quad (2.11)$$

где $x_{\text{ж}}^{(n-1)}$ – желаемое значение $(n-1)$ -й производной выхода; $(k_p p + k_i) / p$ – операторная передаточная функция пропорционально-интегрального регулятора,

а в методе скользящих режимов регулятор является релейным элементом

$$u = u_m \text{sign} \left(x_{\text{ж}}^{(n-1)} - x^{(n-1)} \right), \quad (2.12)$$

что, как будет показано в разделе 2.3 настоящей работы, также позволяет приближенно решить уравнение (2.7).

2.1.4. Метод разделения движений в задачах синтеза систем с разнотемповыми процессами

Чтобы с помощью управляющего воздействия, вычисленного путем алгоритмического решения уравнения (2.7), можно было обеспечить предписанное качество процессов замкнутой системы, решение (2.7) должно осуществляться во времени гораздо быстрее темпа основных переходных процессов синтезируемой САУ по всем координатам состояния. Этим обуславливается целесообразность применения на практике *асимптотических* методов анализа и синтеза сингулярно возмущенных систем [2.3].

Для определения основных понятий теории возмущений обратимся сначала к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_{10}$, $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{x}_{20}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = f_1(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mu), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = f_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \end{cases} \quad (2.13)$$

где $\mu > 0$ – малый числовой параметр, а правые части уравнений удовлетворяют условиям теоремы о существовании и единственности решения.

Обозначим решение (2.13) при $\mu > 0$ и $\mu = 0$ в виде

$$\mathbf{x}^\mu(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\mu(t) \\ \mathbf{x}_2^\mu(t) \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{x}^0(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^0(t) \\ \mathbf{x}_2^0(t) \end{bmatrix}$$

соответственно. Тогда задачу Коши (2.13) называют *регулярно возмущенной*, если евклидова норма разности $(\mathbf{x}^\mu(t) - \mathbf{x}^0(t))$ стремится к нулю при $\mu \rightarrow 0$ для любых $t \geq 0$. В противном случае систему вида (2.13) называют *сингулярно возмущенной* [2.3]. Регулярно возмущенные системы рассматриваются в методе малого параметра [см. 2.6 (приложение 1), 2.10], а сингулярно возмущенные – в специальном разделе теории дифференциальных уравнений и методе *разделения движений* [см. 2.6 (приложение 2), 2.10, 2.12], к изложению главной идеи которого мы и переходим.

Сингулярно возмущенной система (2.13) является, если вектор-функция $f_1(\cdot)$ покомпонентно обратно пропорциональна малому параметру. Поэтому рассмотрим так называемую «тихоновскую» систему с малым параметром при части производных [2.39]

$$\begin{cases} \mu \dot{\mathbf{x}}_1 = f_1(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = f_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{cases} \quad (2.14)$$

В методе разделения движений доказано, что при достаточно малых значениях μ качественный анализ решения системы (2.14) можно упростить путем ее *декомпозиции* на две подсистемы более низкого порядка, порождающие быстрые и медленные процессы.

Введем в рассмотрение быстрое время

$$\tau = \frac{(t - \bar{t})}{\mu},$$

где \bar{t} – момент естественного времени, окрестность которого анализируется, а параметр μ выступает в роли масштабирующего коэффициента, и перепишем (2.14) в виде

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_1}{d\tau} = f_1(\mu\tau + \bar{t}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{d\tau} = \mu f_2(\mu\tau + \bar{t}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{cases}$$

Таким образом, использование μ -зависимого преобразования масштаба времени позволило преобразовывать сингулярное возмущение к регулярному. В пределе (в асимптотике) при $\mu \rightarrow 0$ получаем вырожденную подсистему *быстрых движений* (ПБД)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_1}{d\tau} = f_1(\bar{t}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{d\tau} = 0, \quad \mathbf{x}_2(\tau) = \mathbf{x}_2(\bar{t}) = \text{const}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Если для всех возможных $\bar{t} \in [0, \infty)$, $\mathbf{x}_1|_{\tau=0}$, $\mathbf{x}_2|_{\tau=\bar{t}}$ решение (2.15) $\mathbf{x}_1(\tau)$ асимптотически устойчиво и

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1(\tau) = \bar{\mathbf{x}}_1(\bar{t}, \mathbf{x}_2),$$

то результирующее решение (2.14) качественно характеризуется процессами подсистемы *медленных движений* (ПМД), которая следует из (2.14) при $\mu = 0$,

$$\begin{cases} 0 = f_1(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = f_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{cases}$$

Так как из свойств (2.15) следует, что изолированный корень первого алгебраического уравнения последней подсистемы относительно \mathbf{x}_1 равен $\bar{\mathbf{x}}_1(t, \mathbf{x}_2)$, то окончательно ПМД записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1(t, \mathbf{x}_2), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = f_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \end{cases} \quad (2.16)$$

Важно отметить, что анализ и синтез ПМД (2.16) и ПБД (2.15) может выполняться обособленно, при этом свойства синтезируемой ПМД должны соответствовать УЖД, т. е. она не должна зависеть от переменных параметров ОУ и внешних возмущений.

Таким образом, синтез САУ с алгоритмическим способом вычисления управляющего воздействия и разнотемповыми процессами заключается в целенаправленном введении малого параметра в закон управления специальной структуры (в каноническом пространстве состояний), благодаря чему в системе организуется ПБД со свойствами, описанными во введении данной части, а синтез ПМД осуществляется неявно при выборе уравнения желаемых движений.

2.1.5. О принципе глубокой обратной связи

Рассмотрим линейную систему с пропорциональным регулятором и главной обратной связью по производным выхода, структурная схема которой изображена на рис. 2.5. Здесь μ^{-1} – большой коэффициент передачи регулятора; $k_o > 0$; f – возмущение, приведенное ко входу объекта (к управляющему воздействию); свободные члены полиномов $C(p)$ и $D_o(p)$ равны единице. Операторное уравнение САУ имеет вид

$$\left(\frac{1}{k} D_o(p) + C(p) \right) x = \mu f + v, \quad (2.17)$$

где $k = \mu^{-1} k_o$ – коэффициент передачи разомкнутой системы.

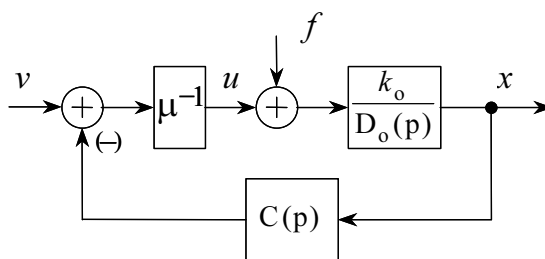


Рис. 2.5. Структурная схема простейшей САУ с глубокой обратной связью

Отсюда следует, что в установившемся режиме при постоянных f и v

$$\left(\frac{1}{k}D_o(0) + C(0)\right)x = \mu f + v,$$

$$\left(\frac{1}{k} + 1\right)x = \mu f + v,$$

$$x = \frac{k_o}{1+k} f + \frac{k}{1+k} v,$$

и действие внешнего возмущения ослабляется за счет обратной связи в $(1+k)$ раз, в связи с чем последнюю величину называют *глубиной* обратной связи. Кроме того, при $\mu \rightarrow 0$ коэффициент передачи разомкнутой системы $k \rightarrow \infty$, и уравнение (2.17) при ограниченных значениях оператора p формально вырождается в

$$C(p)x = v.$$

Следовательно, динамические и статические свойства системы при большой глубине обратной связи определяются исключительно ее оператором $C(p)$. Естественно, вид $C(p)$ при этом не может быть произвольным [2.16]. Во-первых, сам оператор обратной связи должен быть устойчивым. Во-вторых, его порядок взаимосвязан с порядком ОУ и определяется условиями устойчивости (2.17) в асимптотике по малому параметру. Несложно показать, что характеристический полином замкнутой САУ $D_s(p) = D_o(p) + kC(p)$ с устойчивым $C(p)$ имеет «левые» корни с конечным отношением мнимой части к действительной (колебательностью) при неограниченном увеличении k только в том случае, когда степень характеристического полинома ОУ $D_o(p)$ не более чем на единицу превышает степень $C(p)$, т.е. $d = \deg D_o(p) - \deg C(p) \leq 1$. Это соотношение выдерживается во всех методах управления, обсуждаемых во второй части данного учебного пособия. Лишь при его выполнении система обладает свойством малой чувствительности, количественные показатели которой «регулируются» выбором величины μ .

Таким образом, «глубокой» можно назвать обратную связь такой глубины, при которой свойства замкнутого контура в основном определяются оператором обратной связи.

Глубокая обратная связь является главным источником разделения темпов движений. В нашем примере наличие малого параметра k^{-1} при части производных в уравнении замкнутой САУ (2.17) обуславливает выделение группы из d удаленных от начала координат комплексной плоскости корней $D_3(p)$, что свидетельствует о наличии в системе разнотемповых процессов, возникающих именно вследствие большой глубины обратной связи. Здесь уместно упомянуть и о второй причине сингулярных возмущений, связанной с приближенной реализацией форсирующего звена $C(p)$ в обратной связи САУ как дифференцирующего фильтра с малой постоянной времени. Особенности этого способа реализации обратных связей по производным выхода рассматриваются в последующих разделах второй части пособия.

2.2. МЕТОД БОЛЬШИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

2.2.1. Основные положения метода

В методе больших коэффициентов (МБК) эталонные процессы в системе управления объектом вида (2.2) описываются уравнением желаемых движений $(n-1)$ -го порядка

$$F(v, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.18)$$

где согласно (2.11) функция $F(\cdot)$ такова, что

$$F(v, \mathbf{x}) = F^0(v, \mathbf{x}^0) - x^{(n-1)},$$

а $\mathbf{x}^0 = [x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-2)}]^T$ – усеченный (редуцированный) вектор координат состояния. УЖД (2.18) легко составить из уравнений (2.4'), (2.4'') метода стандартных линейных форм.

В основу построения САУ, реализующих (2.18) на основе МБК, положен идеализированный пропорциональный алгоритм управления

$$u = \mu^{-1} F(v, \mathbf{x}), \quad (2.19)$$

где $\mu > 0$ – малый параметр, а μ^{-1} – большой коэффициент передачи регулятора.

Подставив ЗУ (2.19) в модель объекта (2.2), получим уравнение замкнутой САУ

$$x^{(n)} = a(t, \mathbf{x}) + \mu^{-1} b(t, \mathbf{x}) F(v, \mathbf{x}), \quad (2.20)$$

или с учетом структуры $F(v, \mathbf{x})$

$$\frac{\mu}{b(t, \mathbf{x})} x^{(n)} + x^{(n-1)} = \frac{\mu}{b(t, \mathbf{x})} a(t, \mathbf{x}) + F^0(v, \mathbf{x}^0).$$

Исследуем *асимптотические свойства* (2.20) с помощью метода разделения движений. Для этого, обозначив $x^{(n-1)} = y$, при $\mu \rightarrow 0$ выделим подсистему быстрых движений (в естественном времени)

$$T_{\bar{6}} \frac{dy}{dt} + y = F^0(v, \mathbf{x}^0), \quad (2.21)$$

где $T_{\bar{6}} = \mu b^{-1}(t, \mathbf{x}) > 0$ – параметр ПБД, эквивалентный по смыслу постоянной времени стационарного апериодического звена.

При достаточно малом μ ПБД представляет собой асимптотически устойчивую подсистему, переходные процессы в которой завершаются за время

$$t_{\bar{6}} \leq \frac{3\mu}{b_{\min}} = 3T_{\bar{6}\max},$$

следовательно, для $t > t_{\bar{6}}$ справедливо вытекающее из (2.21) статическое соотношение

$$y = F^0(v, \mathbf{x}^0),$$

откуда получаем подсистему медленных движений, совпадающую с УЖД (2.18):

$$F(v, \mathbf{x}) = F^0(v, \mathbf{x}^0) - y = F^0(v, \mathbf{x}^0) - x^{(n-1)} = 0.$$

Тот же вывод о характере ПБД и ПМД можно сделать, применив описанную в подразделе 2.1.4 стандартную процедуру разделения движений.

Следует отметить, что быстрые движения будут «незаметны» на фоне основных (медленных) и не будут влиять на показатели качества переходного процесса в целом только в том случае, если УЖД является дифференциальным

уравнением, и желаемые процессы инерционны. Это ограничивает область применения МБК системами, относительный порядок ОУ которых по выходу $n \geq 2$. При несоблюдении этого требования быстрый темп движений станет единственным, и показатели качества САУ будут существенно зависеть от собственных свойств объекта, переменных параметров и внешних возмущений.

Характерный график переходной характеристики системы с большим коэффициентом в законе управления приведен на рис. 2.6 и содержит движения двух темпов – быстрого и медленного (основного), где $x_{\text{ж}}(t)$ – решение УЖД (2.18), а $x(t)$ – реальная траектория выхода САУ.

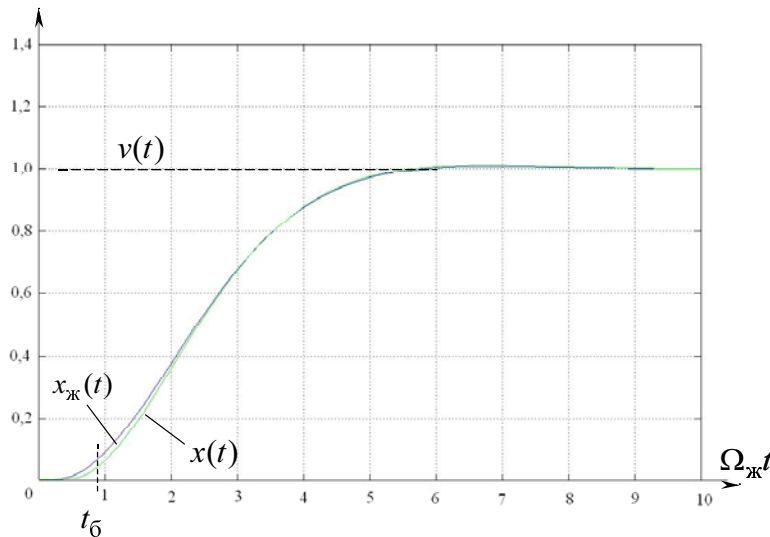


Рис. 2.6. Пример переходной характеристики системы с большим коэффициентом

Структурная схема идеализированной системы (2.2), (2.19) изображена на рис. 2.7. На схеме выделены: $x_{\text{ж}}^{(n-1)} = F^0(v, x^0)$ – желаемое текущее значение $(n-1)$ -й производной выхода в соответствии с УЖД (2.18); КБД – внутренний контур регулирования $x^{(n-1)}$ (контур быстрых движений); КМД – внешний контур задания $x_{\text{ж}}^{(n-1)}$ (контур медленных движений).

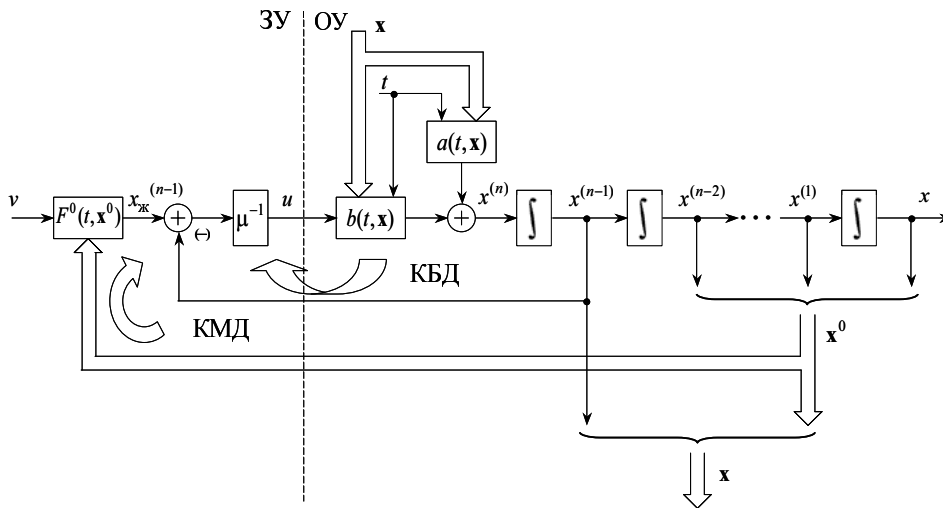


Рис. 2.7. Структурная схема САУ с большим коэффициентом

Из структуры рис. 2.7 видно, что вся «нагрузка» по парированию системой собственных свойств ОУ (включая параметрические и сигнальные возмущения) возлагается на контур быстрых движений, причем степень подавления их влияния определяется глубиной обратной связи КБД, равной $(1 + \mu^{-1}b)$.

2.2.2. Дифференцирующие фильтры и их применение

Идеализированный ЗУ (2.19) предполагает использование обратных связей по выходной переменной ОУ и ее производным вплоть до $(n-1)$ -й. Однако, как уже отмечалось во введении данной части и подразделе 2.1.1, возможность прямых измерений и даже косвенного восстановления производных выхода нестационарных объектов, подверженных действию внешних возмущений, по информации о физических переменных нетипична для реальных приложений. Поэтому для вычисления оценок неизмеряемых производных регулируемой переменной и обеспечения необходимой помехозащищенности САУ используются специальные алгоритмы (динамические подсистемы) и, возможно, реализующие их устройства – *дифференцирующие фильтры* (ДФ).

Высокочастотные помехи, содержащиеся в сигнале датчика $x(t)$, многократно продифференцированные и усиленные регулятором, способны приводить к неработоспособности системы, «забивая» выход регулятора шумами и вводя его в насыщение. Для снижения уровня помех в управляющем воздей-

вии ДФ должен быть фильтром нижних частот и иметь порядок инерционности минимум на единицу выше порядка самой высшей оцениваемой с его помощью производной. Так как в ЗУ (2.19) используется $(n-1)$ -я производная $x(t)$, наименьший порядок ДФ, удовлетворяющий условию фильтрации высокочастотных помех, равен n .

Наиболее глубоко проработана теория линейных ДФ в [2.5, 2.11]. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему n -го порядка, структурная схема которой приведена на рис. 2.8. Ее дифференциальное уравнение имеет следующий вид:

$$T_{\Phi}^n \frac{d^n \hat{x}}{dt^n} + \dots + d_1 T_{\Phi} \frac{d\hat{x}}{dt} + \hat{x} = x, \quad (2.22')$$

или в операторной форме

$$D_{\Phi}(T_{\Phi}p)\hat{x} = x, \quad (2.22'')$$

где $D_{\Phi}(T_{\Phi}p) = T_{\Phi}^n p^n + d_{n-1} T_{\Phi}^{n-1} p^{n-1} + \dots + d_1 T_{\Phi} p + 1$ – характеристический полином; $T_{\Phi} > 0$ – постоянная времени; $d_i, i = \overline{1, n-1}$ – коэффициенты формы.

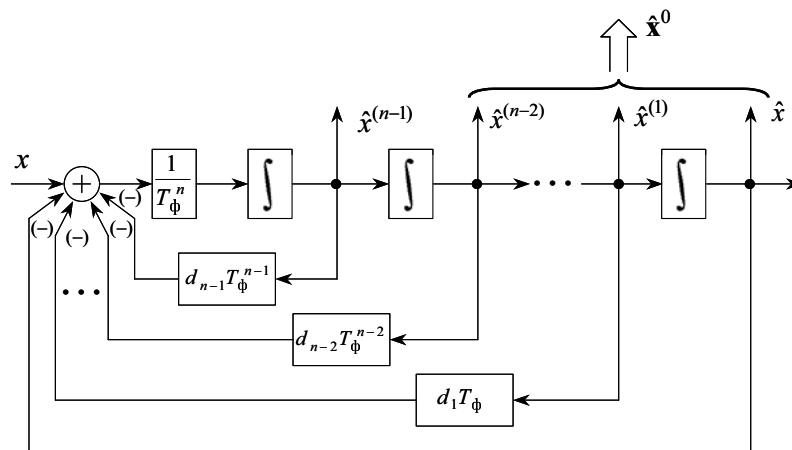


Рис. 2.8. Структурная схема ДФ n -го порядка

Если характеристическое уравнение (2.22)

$$D_{\Phi}(T_{\Phi}p) = 0$$

имеет «левые» корни, то при $x = \text{const}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x,$$

и даже при изменяющемся $x(t)$ выход (2.22) $\hat{x}(t)$ «отслеживает» его с быстродействием, определяемым величиной T_Φ . Это дает основание рассматривать $\hat{x}(t)$ как *оценку* выходной переменной $x(t)$, а ее производные как оценки соответствующих производных выхода, т. е. использовать (2.22) в качестве дифференцирующего фильтра.

Использование в обратной связи системы рис. 2.7 оценок выходной переменной и ее производных, формируемых ДФ, соответствует переходу от (2.19) к *реальному ЗУ*

$$u = \mu^{-1} F(v, \hat{x}) = \mu^{-1} [F^0(v, \hat{x}^0) - \hat{x}^{(n-1)}] \quad (2.23)$$

и структурной схеме САУ, изображенной на рис. 2.9.

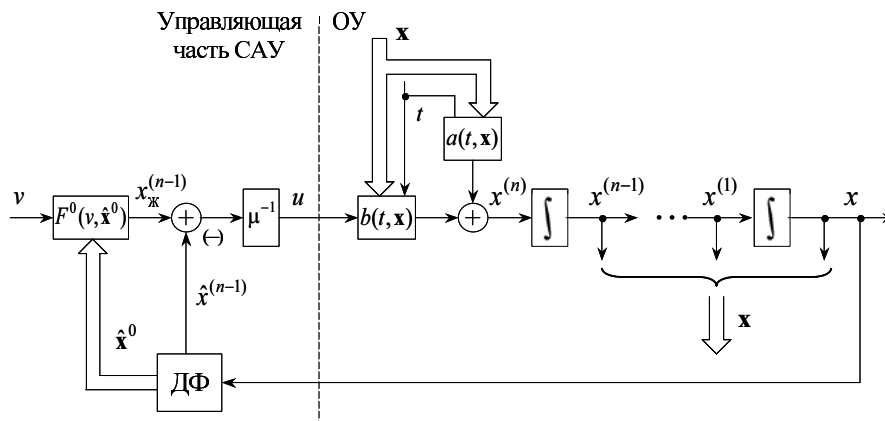


Рис. 2.9. Структурная схема САУ с большим коэффициентом и дифференцирующим фильтром

В результате введения в систему ДФ изменяется структура основного контура САУ – контура быстрых движений. Путем преобразования структурной схемы «ОУ–ДФ» легко показать, что КБД принимает более сложный вид, представленный на рис. 2.10. Интуитивно понятно, что чем меньше постоянная времени ДФ T_Φ , тем качественнее оценивание производных $\hat{x}(t)$ и меньше

влияние фильтра на динамику КБД. К такому же заключению приводит и применение метода разделения движений при

$$T_{\phi} \ll T_{\text{бmin}} = \frac{\mu}{b_{\text{max}}}. \quad (2.24)$$

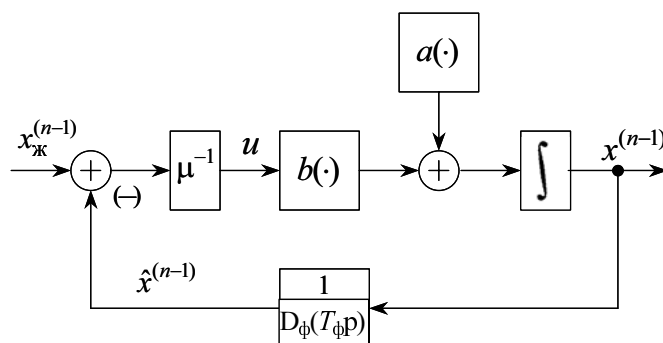


Рис. 2.10. Структурная схема КБД системы с ДФ

Примечание. Структуры алгоритмов приближенного дифференцирования сигналов не ограничиваются линейными ДФ. Лучшие с позиций подавления помех в системах с глубокими обратными связями свойства могут иметь нелинейные ДФ [2.11], в частности, фильтры с элементом насыщения на входе первого интегрирующего звена, формирующего оценку $\hat{x}^{(n-1)}$ (см. рис. 2.8).

2.2.3. Методика расчета систем с большими коэффициентами

В системах (2.2), (2.22), (2.23), соответствующих рис. 2.9, возможна организация движений двух или трех разделяющихся темпов. Наиболее предпочтительным вариантом является построение САУ с *трехтемповыми* процессами и разделением движений в ПМД ПБД и ДФ. В этом случае медленные движения близки к желаемым и обладают свойством малой чувствительности к изменениям параметров объекта, сверхбыстрые процессы соответствуют собственным движениям дифференцирующего фильтра, а нелинейность и нестационарность ОУ вместе с внешними возмущениями подавляются (локализуются) в быстром темпе движений (в КБД), который описывается дифференциальным уравнением первого порядка (2.21) и поэтому не нуждается в стабилизации.

Если спектральный состав помех измерения выходной переменной САУ $x(t)$ таков, что не позволяет выполнить условие (2.24) и требует увеличения T_{ϕ} , приходится отказаться от разделения темпов движений в КБД и ДФ. В результате расчет параметров фильтра выполняется по структурной схеме, изображенной на рис. 2.10.

Необходимо отметить, что и в том и в другом случае обязательным условием близости характеристик САУ к расчетным является разделение движений со всеми сверхбыстрыми процессами, не учтенными в модели ОУ (2.2) (всей совокупностью «немоделируемой» динамики [2.43]).

Процедура расчета предпочтительной трехтемповой системы состоит из следующих этапов.

1. Математическая модель объекта управления преобразуется к форме (2.2), определяются границы интервала возможных изменений функции-коэффициента при управляющем воздействии b_{\min} , b_{\max} .

2. Исходя из требований к показателям качества переходных процессов по задающему воздействию (время регулирования t_p , перерегулирование σ_{\max} % и т. д.) выбирается уравнение желаемых движений $(n-1)$ -го порядка (как правило, линейное и стационарное, для чего можно использовать метод стандартных линейных форм, см. раздел П1.1 и [2.33]). УЖД приводится к виду (2.18).

3. Величина малого параметра закона управления (2.19) или (2.23) определяется из условий разделения темпа желаемых движений, характеризующегося постоянной времени $T_{\text{ж}} = \Omega_{\text{ж}}^{-1}$ уравнений (2.4'), (2.4''), с темпом процессов в КБД, зависящим от параметра $T_{\phi} = \mu b^{-1}(t, \mathbf{x})$:

$$T_{\phi_{\max}} \ll T_{\text{ж}}.$$

В инженерных расчетах обычно отношение «много больше» определяется через понятие степени разделения движений $\eta = 6 \dots 10$:

$$T_{\phi_{\max}} \leq \frac{T_{\text{ж}}}{\eta},$$

откуда следует расчетное соотношение для μ :

$$\mu \leq \frac{b_{\min} T_{\text{ж}}}{\eta}.$$

4. Рассчитывается дифференцирующий фильтр n -го (или, если требуется, более высокого) порядка. Чтобы ДФ не влиял на устойчивость и качество процессов в КБД, его постоянная времени должна удовлетворять условию разделения (2.24)

$$T_{\Phi} \ll T_{\text{бmin}},$$

откуда

$$T_{\Phi} \leq \frac{\mu}{\eta b_{\text{max}}}.$$

Коэффициенты формы ДФ также можно выбрать методом стандартных линейных форм, например, в классе фильтров Баттерворта (см. раздел П1.1 или [2.33]), обеспечивающих наилучшее линейное приближение амплитудно-частотных характеристик ДФ к прямоугольной характеристике идеального фильтра нижних частот. Если известна нижняя граница спектра помех измерения $x(t) - \Omega_{\text{п}}$, при расчете T_{Φ} желательно выполнить условие разделения собственных частот ДФ и помехи

$$\Omega_{\Phi} = T_{\Phi}^{-1} \ll \Omega_{\text{п}}.$$

5. Выполняется проверочное моделирование синтезированной системы с учетом возможных изменений параметров ОУ, реальных ограничений, накладываемых на управляющее воздействие, внешних возмущающих воздействий и помех измерения. При необходимости корректируются эмпирические коэффициенты в условиях разделения движений и частот.

6. Если моделирование показывает, что САУ обладает достаточно малой чувствительностью к изменениям параметров объекта, но ее статическая точность по внешним возмущениям неудовлетворительна, осуществляется переход к астатическому регулированию путем дополнения пропорционального алгоритма управления (2.23) интегральной составляющей (см. подраздел 2.2.4).

7. При необходимости уточняется требуемый ресурс управляющего воздействия $\Omega_{\text{и}}$, методика расчета которого приведена в подразделе 2.2.5. Для ограничения производных $v(t)$ на задающем входе системы может устанавливаться задатчик (формирователь) интенсивности.

Примечания

1. Следует обратить внимание на тот факт, что описанная методика расчета не учитывает собственное быстродействие объекта управления. Практически же это возможно лишь в той ситуации, когда имеет место разделение темпов процессов в

КБД с самыми быстрыми компонентами движений собственно ОУ. Если указанное условие не выполняется, на начальном участке переходной характеристики САУ могут возникать «выбросы» и «перерегулирование». Избежать этих искажений можно за счет формирования интенсивности изменения управляющего воздействия и/или «ускорения» ПБД.

2. Для достижения поставленной перед разработчиком конечной цели управления «в большом» сложным динамическим объектом, включающим в себя (2.2) как подсистему, процессы в САУ, синтезированной МБК, могут быть «подчинены» работе алгоритмов управления более высокого уровня (см. введение к части 2). При обеспечении необходимой степени разделения темпов процессов (на порядок) внешний алгоритм управления также может быть построен на основе идеи больших коэффициентов. Теория синтеза таких многоуровневых САУ с глубокими обратными связями составляет содержание метода блочного управления [2.35], который эффективно используется в системах подчиненного регулирования электроприводов с транзисторными преобразователями².

2.2.4. Астатические законы управления в САУ с большими коэффициентами

Часто диапазоны возможных изменений внешних возмущающих воздействий в системах управления реальными техническими объектами настолько широки, что система (2.2), (2.22), (2.23) с пропорциональным законом управления не удовлетворяет требованиям к статической точности регулирования выходной координаты x . Для упрощения анализа этого явления предположим, что функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ квазистационарны, т. е. их зависимость от времени настолько «медленная», что ею можно пренебречь, или параметры ОУ и внешние возмущения изменяются только при переходе от одного процесса управления к другому (от процесса к процессу). При этом допущении, если сам ОУ не обладает свойством астатизма ($a(\cdot)$ не стремится к 0), то квазиустановившееся значение управляющего воздействия для $v = \text{const}$ определяется выражением

$$u_{\text{уст}} = \mu^{-1} F(v, \mathbf{x}_{\text{уст}}),$$

где $\mathbf{x}_{\text{уст}} = [x_{\text{уст}}, 0, \dots, 0]^T$; $x_{\text{уст}}$ – квазиустановившееся значение выхода в условиях «медленных» возмущений.

² Панкратов В.В. Векторное управление асинхронными электроприводами: учеб. пособие / В.В. Панкратов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999.

С другой стороны, из (2.2) следует, что

$$a(t, \mathbf{x}_{уст}) + b(t, \mathbf{x}_{уст})u_{уст} = 0,$$

поэтому для нахождения $x_{уст}$ необходимо решить уравнение

$$\mu^{-1}F(v, \mathbf{x}_{уст}) = -\frac{a(v, \mathbf{x}_{уст})}{b(v, \mathbf{x}_{уст})}.$$

Очевидно, что вычисленная отсюда статическая ошибка регулирования

$$\delta = v - x_{уст}$$

вполне может не удовлетворять требованиям к статической точности синтезируемой САУ, которые никак не учтены в методике, описанной в подразделе 2.2.3. В данном случае *астатизм* системы, т. е. равенство $\delta = 0$, обеспечивается путем перехода от пропорционального (2.23) к *пропорционально-интегральному* закону управления [2.27, 2.28]

$$u = \mu^{-1} \left\{ F(v, \hat{\mathbf{x}}) + \mu^{-1}c \int_0^t F(v, \hat{\mathbf{x}}) dt \right\}, \quad (2.25)$$

где c – некоторый постоянный коэффициент.

В результате порядок подсистемы быстрых движений повышается с первого (2.21) до второго:

$$T_0^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\xi T_0 \frac{dy}{dt} + y = F^0(v, \mathbf{x}^0),$$

где $T_0 = \frac{\mu}{\sqrt{b(t, \mathbf{x})c}}$ – параметр времени; $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{c}}$ – параметр демпфирования

процессов ПБД, и при расчете КБД САУ (2.2), (2.22), (2.25) могут быть использованы соотношения

$$c \leq \frac{b_{\min}}{4\xi_{\min}^2},$$

$$\mu \leq \frac{T_{\text{ж}} \sqrt{cb_{\text{min}}}}{\eta},$$

здесь $\xi_{\text{min}} = 0,6 \dots 0,8$ – минимально допустимое значение параметра демпфирования.

2.2.5. Предельное управление и учет ресурсных ограничений

В любой реальной технической системе область допустимых управлений Ω_u ограничена ресурсами исполнительных устройств. В связи с большим коэффициентом передачи регулятора это часто приводит к выходу управляющего воздействия на ограничение на начальном участке переходных процессов САУ при отработке быстро изменяющихся задающих воздействий и возмущений, отделенных от управления инерционными звеньями. Пока регулятор находится в насыщении, состояние системы эволюционирует в силу собственных свойств объекта и, естественно, на начальном участке процесса полностью проявляются все особенности и нелинейности ОУ, внешние и параметрические возмущения. Быстрые изменения задающего воздействия, конечно, можно исключить с помощью различных задатчиков интенсивности, но характер возмущений от разработчика не зависит. Предположим, что $v = \text{const}$ и $u_{\text{уст}}$, соответствующее $x_{\text{уст}} = v$, принадлежит множеству Ω_u . Тогда, если сам ОУ устойчив (асимптотически или нейтрально), рано или поздно его изображающая точка достигнет границы области пространства состояний, где желаемая траектория реализуется посредством ограниченного управления, и регулятор выйдет из насыщения. Далее процессы в такой системе будут развиваться согласно УЖД с начальных условий, соответствующих моменту выхода $u(t)$ из ограничения. Понятно, что показатели качества подобного переходного процесса «в большом» будут далеки от желаемых, однако с этим приходится мириться при построении «силовых» систем, где установленная мощность исполнительного устройства (электрического, электромеханического, гидравлического или пневматического преобразователя энергии) является определяющей в себестоимости изделия. Однако в задачах управления некоторыми неустойчивыми объектами, траектории вектора координат состояния которых в переходных процессах «в большом» не стремятся в область линейности регулятора, выход управляющего воздействия на ограничение недопустим. В САУ объектами этого типа и других системах, где неуправляемый

начальный участок переходных процессов нежелателен, ресурс управляющего воздействия (Ω_u) должен рассчитываться на основе модели ОУ (2.2) и УЖД (2.18). Рассмотрим один из эффективных способов решения данной задачи [2.43], который назовем *методом предельного управления*.

Движения идеализированной системы (2.2), (2.19) в соответствии с УЖД (2.18) обеспечиваются при неограниченном увеличении большого коэффициента регулятора ($\mu \rightarrow 0$) и предполагают тождественное равенство нулю левой части выражения (2.18). На этом основании можно записать, что

$$\dot{F}(v, \mathbf{x}) = \frac{dF(v, \mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial F(v, \mathbf{x})}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial F(v, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = 0,$$

где $\frac{\partial F(v, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial F(v, \mathbf{x})}{\partial x}, \frac{\partial F(v, \mathbf{x})}{\partial x^{(1)}}, \dots, \frac{\partial F(v, \mathbf{x})}{\partial x^{(n-1)}} \right]$ – вектор-строка градиента функции $F(\cdot)$ по координатам состояния. С учетом свойств $F(\cdot)$, описанных в комментариях к (2.18), выделим в последнем уравнении слагаемое, содержащее управляющее воздействие:

$$\frac{\partial F(v, \mathbf{x})}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial F^0(v, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{x}^0} \dot{\mathbf{x}}^0 - x^{(n)} = 0,$$

откуда в силу уравнения объекта (2.2) получаем формулу для вычисления текущих значений *предельного* (асимптотического, так как $\mu \rightarrow 0$) управляющего воздействия, соответствующего желаемым процессам:

$$u^a(v, \dot{v}, t, \mathbf{x}) = b^{-1}(t, \mathbf{x}) \left\{ \frac{\partial F(v, \mathbf{x})}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial F^0(v, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{x}^0} \dot{\mathbf{x}}^0 - a(t, \mathbf{x}) \right\}. \quad (2.26)$$

Условие реализуемости желаемого движения заключается в принадлежности предельного управления области допустимых:

$$u^a(v, \dot{v}, t, \mathbf{x}) \in \Omega_u,$$

что, например в случае симметричного ограничения выходного сигнала регулятора на уровнях $\pm u_m$ ($|u| \leq u_m > 0$), требует выполнения неравенства

$$u_m > |u^a(v, \dot{v}, t, \mathbf{x})| \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (2.27)$$

на основе которого и рассчитывается необходимый ресурс управления u_m .

2.2.6. О синтезе квазинепрерывных систем с большими коэффициентами в законе управления

В предыдущих разделах второй части настоящего пособия предполагалось, что все функциональные подсистемы САУ – объект управления, регулятор, дифференцирующий фильтр – непрерывны. Однако на практике в современных технических системах, как правило, используются цифровые управляющие устройства. В этой связи следует очертить область применимости описанных выше алгоритмов управления и методики синтеза САУ при реализации цифрового регулятора. Для этого достаточно определить требования к *периоду дискретизации* управляющего воздействия, при выполнении которых процессы в дискретно-непрерывной системе несущественно отличаются от их непрерывного аналога, т. е. являются *квазинепрерывными* [2.30, 2.31, 2.45–2.47].

Для простоты рассуждений рассмотрим динамику идеализированной системы (2.2), (2.19) при дискретизации управления лишь по времени. Это предполагает, что разрядная сетка цифрового управляющего устройства достаточно широка, а дифференцирующий фильтр реализован как аналоговая подсистема обратной связи с существенно меньшей, чем T_0 , постоянной времени или как быстродействующий цифровой фильтр со значительно меньшим, чем регулятор, периодом дискретизации.

Имея в виду относительную малость периода дискретизации регулятора $T_0 > 0$, дискретную модель контура быстрых движений САУ получим путем разностной аппроксимации непрерывной модели КБД:

$$\begin{cases} u = \mu^{-1} \{ F^0(v, \mathbf{x}^0) - y \}, \\ \dot{y} = a(t, \mathbf{x}) + b(t, \mathbf{x})u, \end{cases}$$

где $y = x^{(n-1)}$, по формуле Эйлера с учетом запаздывания на шаг, присущего системам локальной автоматики, полностью загружающим вычислительные ресурсы цифрового управляющего устройства [2.30]. Тогда

$$\begin{cases} y[k+1] = f(k, \mathbf{x}[k]) + d(k, \mathbf{x}[k])u[k], \\ u[k] = \mu^{-1} \{ F^0(v[k-1], \mathbf{x}^0[k-1]) - y[k-1] \}, \end{cases}$$

здесь $f(k, \mathbf{x}[k]) = y[k] + T_0 a(kT_0, \mathbf{x}[k])$; $d(k, \mathbf{x}[k]) = T_0 b(kT_0, \mathbf{x}[k])$; $k = 0, 1, 2, \dots$ – порядковый номер текущего периода дискретизации.

Подставляя второе уравнение этой системы в первое, получаем дискретную модель ПБД:

$$\begin{aligned} \mu y[l+2] &= \mu y[l+1] + \mu T_0 a((l+1)T_0, \mathbf{x}[l+1]) + \\ &+ T_0 b((l+1)T_0, \mathbf{x}[l+1]) \{F^0(v[l], \mathbf{x}^0[l]) - y[l]\}, \end{aligned}$$

где $l = k - 1$, или через ошибку регулирования $(n - 1)$ -й производной выхода $F[k] = F^0(v[k], \mathbf{x}^0[k]) - y[k]$:

$$\begin{aligned} \mu F^0(v[l+2], \mathbf{x}^0[l+2]) - \mu F[l+2] &= \mu F^0(v[l+1], \mathbf{x}^0[l+1]) - \\ - \mu F[l+1] + \mu T_0 a((l+1)T_0, \mathbf{x}[l+1]) &+ T_0 b((l+1)T_0, \mathbf{x}[l+1]) F[l]. \end{aligned}$$

В асимптотике при $\mu \rightarrow 0$, $T_0 \rightarrow 0$ значения функции $F^0(\cdot)$ «замораживаются», и справедливо приближенное уравнение ПБД

$$\mu F[l+2] = \mu F[l+1] - T_0 b(\cdot) F[l],$$

которое может быть представлено в разностной форме как

$$\mu \Delta F[l+1] = -T_0 b(\cdot) F[l].$$

Несложно показать, что ПБД будет асимптотически устойчива, если

$$\text{sign}(\Delta F[l+1]) = -\text{sign} F[l]$$

и

$$|\Delta F[l+1]| < F[l],$$

т. е. в нашем случае

$$\frac{\mu}{T_0} > b_{\max}$$

или

$$T_0 < T_{\min}.$$

Таким образом, согласно выводам [2.30, 2.31] при синтезе квазинепрерывной САУ целесообразно использовать известное условие разделения частот [2.1]

$$\omega_{\Pi} \leq \frac{f_0}{1,5 \dots 3},$$

где ω_{Π} – частота пропускания (собственная частота) САУ по самым быстрым парциальным составляющим процессов; $f_0 = T_0^{-1}$ – частота дискретизации управлений, которое с запасом обеспечивает выполнение полученных условий устойчивости асимптотической ПБД, так как при этом

$$T_0 \leq \frac{T_{\text{бmin}}}{1,5 \dots 3}.$$

Другие подходы к синтезу квазинепрерывных и дискретных систем с глубокими обратными связями рассмотрены в работах [2.7, 2.43].

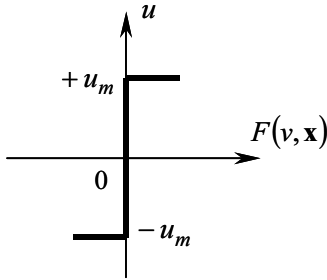
2.3. МЕТОД СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМОВ

2.3.1. Предпосылки и теоретические основы метода

В практических приложениях нередко встречаются технические объекты и системы управления, исполнительные элементы которых функционируют в ключевых режимах и имеют лишь два возможных состояния – «включен» или «выключен». К ним можно отнести различного рода клапаны гидравлических и пневматических систем, элементы силовых полупроводниковых преобразователей систем электропривода и т. п. При реализации в САУ с такими исполнительными устройствами квазинепрерывных алгоритмов управления неизбежно промежуточное преобразование непрерывно изменяющихся сигналов регуляторов в разрывные воздействия, которое обычно осуществляется путем широтно-импульсной модуляции. Вместе с тем существует возможность исключения подобных преобразований, если заранее сориентироваться на построение систем с *прямым разрывным управлением* в скользящих режимах.

Рассмотрим структуру разрывного алгоритма управления объектом (2.2) при УЖД вида (2.18). Если в ЗУ (2.19) метода большого коэффициента учесть ограничение управляющего воздействия на симметричных (в рамках предположений подраздела 2.2.5) уровнях $\pm u_m$, в асимптотике по малому параметру ($\mu \rightarrow 0$) придем к статической характеристике регулятора, приведенной на рис. 2.11. Здесь на вертикальном участке управляющее воздействие может принимать любое значение в интервале $[-u_m, +u_m]$. В отличие от рис. 2.11

статическая характеристика релейного регулятора с двумя разрешенными уровнями $\pm u_m$ имеет разрыв 1-го рода при $F(v, \mathbf{x}) = 0$, и значение управления



на линии «переключения» не определено. Такая зависимость описывается законом управления

$$u = u_m \operatorname{sign} F(v, \mathbf{x}), \quad (2.28)$$

где $\operatorname{sign} F = \begin{cases} 1 & \text{при } F > 0, \\ -1 & \text{при } F < 0 \end{cases}$ — функция знака;

$\operatorname{sign}(0)$ может быть равно $+u_m$ или $-u_m$ в зависимости от предыстории системы и неучтенных в (2.28) «неидеальностей».

Рис. 2.11. Асимптотическая характеристика регулятора (2.19) с учетом ограничений

Известно [2.40], что в динамических системах, содержащих элементы с разрывными характеристиками, может возникать особый вид движений, называемый *скользящим режимом*, при котором на некотором интервале времени выполняется равенство $F = 0$, и управление с формально бесконечной частотой «переключается» с одного разрешенного уровня на другой, рис. 2.12. Чтобы подчеркнуть эту особенность, данный вид движений будем называть *идеальным скользящим режимом* (СР).

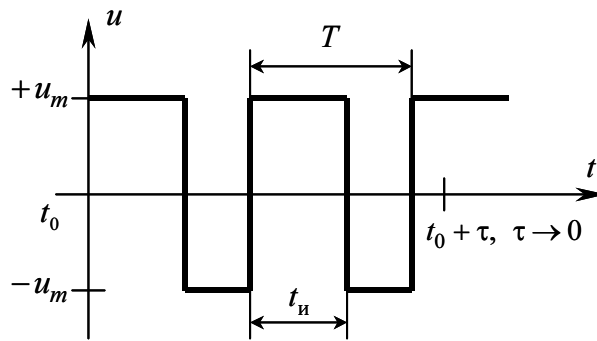


Рис. 2.12. Поведение $u(t)$ в скользящем режиме

Движения в СР обладают рядом привлекательных с позиций разработчика САУ свойств [2.28, 2.40]. Во-первых, посредством СР в САУ существенно нелинейными и нестационарными объектами возможно формирование *за конечное время и при ограниченном управлении* движений управляемых координат «в большом», как угодно близких к решению УЖД (2.18), в том числе линей-

ного и стационарного, например (2.4'), (2.4''). Во-вторых, при построении *поверхности разрыва управлений* в каноническом пространстве состояний ОУ движения в СР *инвариантны* к параметрическим и внешним возмущениям. В-третьих, порядок уравнений, описывающих движения в СР, подобно ПМД систем с большими коэффициентами, ниже порядка модели ОУ (для одноканальных САУ – на единицу). Скользящие режимы в САУ объектами с линейным вхождением управления обладают свойством «грубости» по отношению к неучтенным в модели ОУ и алгоритме (2.28) малым «неидеальностям» (инерционностям датчиков и исполнительных устройств, задержкам «переключения» и т.п.), что позволяет рассматривать их как асимптотическую модель реальных процессов в САУ с разрывными управлениями, а условия возникновения СР, так же как и основные соотношения МБК, имеют вид неравенств и не зависят от вида «неидеальностей» [2.25, 2.28, 2.40].

Заметим, что для объектов вида (2.1) или (2.2), линейных по управлению, перечисленные выше свойства имеют место и в непрерывных САУ с большими коэффициентами при $\mu \rightarrow 0$ и ограничении управляющего воздействия согласно рис. 2.11. Однако в отличие от идеализированной непрерывной системы (2.2), (2.19) САУ с разрывным управлением (2.2), (2.28) в общем случае (при начальном положении изображающей точки вне поверхности разрыва) характеризуется наличием не двухтемповых, а двухэтапных процессов. Пусть неучтенные в модели (2.2), (2.28) малые «неидеальности» имеют порядок ε , тогда на первом этапе движений изображающая точка САУ при полном использовании ресурса управления (максимально быстро) выводится в ε -окрестность поверхности разрыва $F(v, x) = 0$, а на втором (основном) движется, не покидая ее в дальнейшем, в этой ε -окрестности, что соответствует УЖД (2.18). Очевидно, что в «правильно» спроектированной системе первый этап движений должен быть существенно короче общей продолжительности переходного процесса, так как только при этом условии можно говорить о свойстве малой чувствительности САУ. Это требование, так же как и в МБК, ограничивает круг объектов управления малочувствительных САУ со СР требованием $n \geq 2$.

Структурная схема системы управления объектом (2.2) с разрывным ЗУ (2.28) подобна структуре, представленной на рис. 2.7, где пропорциональный регулятор с коэффициентом передачи μ^{-1} следует заменить элементом типа «двухпозиционное реле». Так же как и в МБК, для формирования оценок производных управляемой переменной $x(t)$ и обеспечения необходимой

помехозащищенности САУ, при прямом разрывном управлении используются дифференцирующие фильтры (2.22), рис. 2.8, в результате чего алгоритм управления принимает вид

$$u = u_m \operatorname{sign} F(v, \hat{\mathbf{x}}) = u_m \operatorname{sign} \left[F^0(v, \hat{\mathbf{x}}^0) - \hat{x}^{(n-1)} \right], \quad (2.29)$$

а структурная схема САУ уподобляется изображенной на рис. 2.9.

Область *существования* (и устойчивости) скользящего режима на поверхности разрыва управления $F(v, \mathbf{x}) = 0$ в пространстве состояний идеализированной системы (2.2), (2.28) ограничивается выполнением условия [2.40]

$$\dot{F}F < 0,$$

что требует различия знаков отклонения $F(v, \mathbf{x})$ и его полной производной \dot{F} в окрестности поверхности переключения:

$$\dot{F} < 0 \text{ при } F > 0$$

и

$$\dot{F} > 0 \text{ при } F < 0,$$

и может быть определена с помощью *метода эквивалентного управления* [2.40], подобного методу предельного управления в анализе систем с большими коэффициентами. Под *эквивалентным управлением* $u^{eq}(t)$ понимается среднее значение $u(t)$ в СР, вычисленное на каждом бесконечно малом «периоде переключений» (см. рис. 2.12) по формуле

$$u^{eq}(t) = u_m(2\gamma - 1),$$

где $\gamma = t_{\text{н}} \cdot T^{-1}$ – скважность, и направляющее траекторию изображающей точки САУ вдоль поверхности разрыва $F = 0$ (по касательной к ней). Так как $\gamma \in [0, 1]$, эквивалентное управление может принадлежать интервалу $[-u_m, +u_m]$, причем скользящий режим («переключения») возникает только при $|u^{eq}(t)| < u_m$, что полностью совпадает с требованием (2.27), предъявляемым к предельному управлению систем с большими коэффициентами. При оговоренных в подразделе 2.2.5 условиях $u^{eq}(v, \dot{v}, t, \mathbf{x})$ определяется выражением (2.26).

2.3.2. Реальные скользящие режимы и способы обеспечения их малой чувствительности к состоянию и вариациям параметров объекта управления

Реальные скользящие режимы или по терминологии [2.34] автоколебательные режимы скользящего типа, возникающие в технических системах при практическом применении алгоритмов управления вида (2.28) или (2.29), характеризуются конечными частотами и амплитудами автоколебаний координат состояния. В частности, это объясняется тем, что предельные частоты «переключений» управляющих воздействий всегда ограничены быстродействием исполнительных устройств и не могут быть произвольно увеличены детализацией математических моделей объекта и алгоритма управления. Порожденные данными частотными ограничениями и другими «неидеальностями» САУ сверхбыстрые процессы, как правило, носят сложный и трудно предсказуемый характер, что затрудняет анализ свойств и расчет будущей системы на этапе ее проектирования. В этой связи целесообразно заранее позаботиться о *регулярности* реальных СР путем стабилизации того или иного их параметра.

Наиболее часто на практике ставится задача параметрической стабилизации амплитуды или частоты автоколебаний ошибки регулирования $F(\cdot)$ на входе релейного элемента САУ. Решается она обычно путем преднамеренного введения в систему *доминирующих* статических или динамических «неидеальностей» специального вида, процедуру синтеза которых по аналогии с известным математическим термином можно назвать *технической регуляризацией* САУ [2.28].

Желаемая амплитуда колебаний $F(t) = F(v(t), \mathbf{x}(t))$ в реальном СР обеспечивается введением в характеристику двухпозиционного реле закона управления (2.28) (рис. 2.11) запаздывающей петли гистерезиса, в результате чего она принимает вид, показанный на рис. 2.13.

Если при этом выбрать ε так, чтобы циклическая частота переключений регулятора Ω_0 , оценить которую можно с помощью метода гармонической линеаризации [2.34], во всех возможных режимах работы системы удовлетворяла условиям разделения с собственной частотой желаемых движений $\Omega_{\text{ж}}$ и

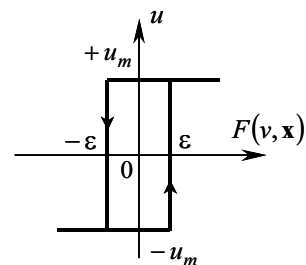


Рис. 2.13. Статическая характеристика релейного регулятора с петлей гистерезиса

собственными частотами процессов в объекте Ω_i (была намного выше их), то показатели качества переходных процессов САУ будут определяться УЖД и, следовательно, обладать малой чувствительностью к изменениям параметров ОУ и внешних воздействий. В этом случае амплитуда колебаний выходной переменной объекта, который вследствие описанных выше условий удовлетворяет гипотезе фильтра нижних частот [2.34], незначительна, а амплитуда колебаний $x^{(n-1)}(t)$ близка к ε . Чтобы аналогичные свойства имела система с ЗУ (2.29) и дифференцирующим фильтром, ДФ должен быть еще более быстродействующим и удовлетворять условию разделения

$$T_{\phi} \ll \frac{1}{\Omega_0}.$$

Понятно, что стабилизация амплитуды автоколебаний $F(t)$ достигается при изменяющейся в зависимости от состояния, параметров ОУ и внешних воздействий частоте «переключений» регулятора. В некоторых системах (например, в САУ быстродействующих электроприводов с транзисторными преобразователями) это нежелательно, и тогда следует использовать другие «неидеальности» – динамические.

Обоснованный в [2.28, 2.29, 2.44] метод технической регуляризации СР ориентирован на параметрическую стабилизацию частоты реального скользящего режима, что приближает режим работы исполнительных элементов САУ к широтно-импульсной модуляции и позволяет обеспечить наибольшие значения $\Omega_{ж}$ (максимальное быстродействие системы по основным – медленным процессам). При этом вводимый в систему с ЗУ (2.29) дифференцирующий фильтр (2.22), порядок которого не ниже 2, используется так же, как специальная динамическая подсистема (доминирующая «неидеальность»), «навязывающая» реальному СР свою собственную частоту $\Omega_{\phi} = T_{\phi}^{-1}$. Главным условием достижения $\Omega_0 \approx \Omega_{\phi}$ в данном случае является разделение движений ДФ с желаемыми и собственными процессами в ОУ:

$$\Omega_{\phi} \gg \max \{ \Omega_{ж}, \Omega_i \}.$$

Пример применения данного метода технической регуляризации СР рассмотрен в подразделе 2.3.4.

2.3.3. Методика расчета систем с прямым разрывным управлением в скользящем режиме

Методика синтеза систем разрывного управления объектами вида (2.2) предельно проста и непосредственно следует из материала двух предыдущих разделов данной части пособия. Первые два этапа процедуры расчета совпадают с этапами методики синтеза систем с большими коэффициентами, описанной в подразделе 2.2.3. Затем следует определить ресурс управления u_m , достаточный для обеспечения рекомендуемого соотношения длительностей первого и второго этапов движений САУ и, конечно, требуемых установившихся режимов работы. Для этого с помощью метода эквивалентного управления нужно проанализировать типичные для проектируемой системы переходные процессы и установившиеся режимы, выбором u_m расширить область существования СР так, чтобы ее проекция на каждую ось пространства состояний охватывала интервал допустимых начальных условий по соответствующей координате, и проконтролировать устойчивость СР в статике. Производные $v(t)$ ограничиваются посредством задатчиков интенсивности.

В системе необходимо предусмотреть доминирующие «неидеальности», видом которых будут определяться свойства сверхбыстрых движений САУ в реальном СР. Системы с параметрической стабилизацией амплитуды автоколебаний дополняются дифференцирующим фильтром. Способ расчета параметров «неидеальностей» и ДФ описан в подразделе 2.3.2.

В завершение выполняется моделирование САУ согласно п. 5 подраздела 2.2.3, по результатам которого уточняются u_m , T_ϕ и другие второстепенные параметры системы.

2.3.4. Иллюстрация основных свойств метода на примере системы второго порядка

Взяв за основу материал [2.38], рассмотрим свойства и процедуру синтеза системы прямого разрывного управления простейшим линейным объектом второго порядка, модель которого в форме (2.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a(t) + b(t)u, \end{cases}$$

где $|a(t)| \leq a_{\max}$, $b(t) \in [b_{\min}, b_{\max}] \forall t \in [0, \infty)$; функции $a(t)$, $b(t)$ непрерывны и квазистационарны, т. е. их первыми производными по времени можно пренебречь, анализируя процессы в масштабе заданного времени регулирования.

Данный ОУ представляет собой последовательное соединение двух интегрирующих звеньев – нестационарного и стационарного, внешнее возмущение $a(t)$ приведено к управляющему воздействию. Обозначая выходную переменную объекта x_1 как x , перейдем к модели объекта в форме (2.2):

$$x^{(2)} = a(t) + b(t)u. \quad (2.30)$$

Уравнение желаемых движений синтезируемой системы должно иметь первый порядок и в соответствии с (2.4") принимается в виде

$$T_{\text{ж}} \dot{x} + x = v, \quad (2.31)$$

причем единственный параметр УЖД $T_{\text{ж}}$ определяется требуемым временем регулирования:

$$T_{\text{ж}} = \frac{t_{\text{р}}}{3}.$$

Приводя УЖД к форме (2.18)

$$F(v, \mathbf{x}) = \frac{v - x}{T_{\text{ж}}} - \dot{x},$$

запишем идеализированный закон управления (2.28) как

$$u = u_m \operatorname{sign} \left\{ \frac{v - x}{T_{\text{ж}}} - \dot{x} \right\}. \quad (2.32)$$

Структурная схема системы (2.30), (2.32) изображена на рис. 2.14.

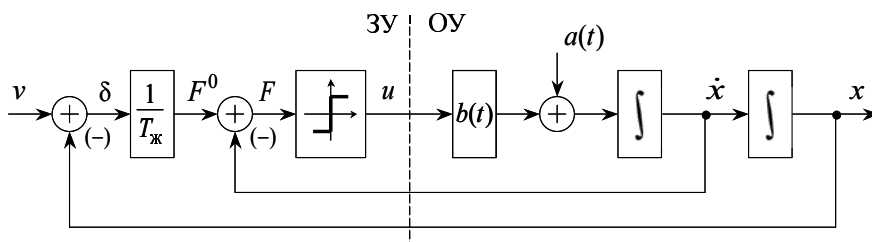


Рис. 2.14. Структурная схема идеализированной САУ

Так как САУ описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} = a + bu_m \operatorname{sign} \left\{ \frac{v-x}{T_{\text{ж}}} - \dot{x} \right\},$$

для анализа процессов в ней используем метод фазовой плоскости. Предположим, что $v = \text{const}$ и спроецируем движение системы на плоскость $(\delta, \dot{\delta})$, образованную ошибкой регулирования и ее производной:

$$\ddot{\delta} = -a - bu_m \operatorname{sign} \left\{ \frac{\delta}{T_{\text{ж}}} + \dot{\delta} \right\}.$$

Введем обозначение $y = \dot{\delta}$ и стандартным образом получим дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{d\delta} = - \frac{a + bu_m \operatorname{sign} \left(\frac{\delta}{T_{\text{ж}}} + y \right)}{y}. \quad (2.33)$$

Справа и слева от линии переключения управления

$$y = - \frac{\delta}{T_{\text{ж}}} \quad (2.34)$$

уравнение (2.33) приводится к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{d\delta} = - \frac{a + bu_m}{y}, \text{ если } y > - \frac{\delta}{T_{\text{ж}}};$$

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{-a + bu_m}{y}, \text{ если } y < - \frac{\delta}{T_{\text{ж}}},$$

решая которые, получаем уравнения фазовых траекторий для правой и левой полуплоскостей соответственно:

$$y^2 = -2(a + bu_m)\delta + C_1,$$

$$y^2 = 2(bu_m - a)\delta + C_2.$$

Здесь C_1, C_2 – постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями.

Таким образом, фазовые траектории системы, изображенные на рис. 2.15, являются парабололами, и на некотором отрезке AB линии переключения левые и правые траектории направлены встречно друг другу. Это свидетельствует о том, что отрезок AB является областью скольжения и, попав на него, изображающая точка более не покидает линии переключения. В свою очередь, движение по линии переключения к началу координат фазовой плоскости удовлетворяет уравнению (2.34), которое совпадает с УЖД (2.31).

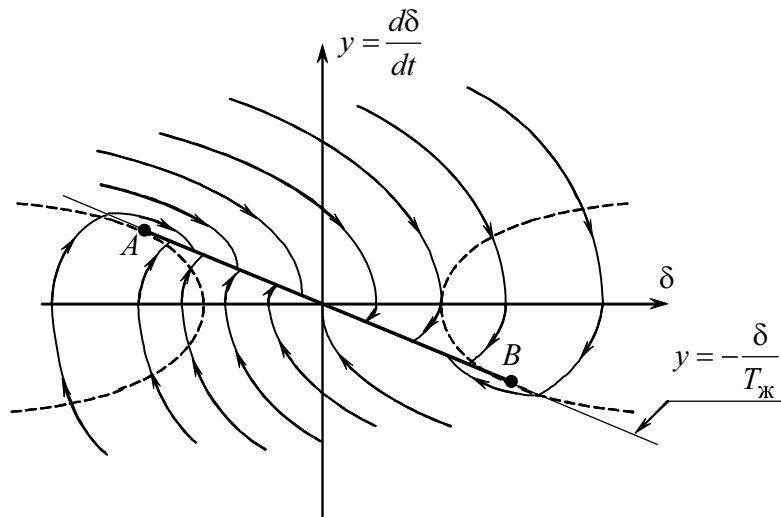


Рис. 2.15. Фазовый портрет идеализированной системы при $a(\cdot) = 0$

В точках A и B , ограничивающих отрезок скольжения, касательные к фазовым траекториям справа и слева соответственно совпадают с линией переключения (см. штриховые линии на рис. 2.15), т. е. в них

$$\frac{dy}{d\delta} = -\frac{1}{T_{ж}}.$$

Отсюда с помощью (2.33) легко выразить ординаты этих точек:

$$y_A = T_{\text{ж}}(a + bu_m), \quad y_B = T_{\text{ж}}(a - bu_m). \quad (2.35)$$

Тот же результат можно получить и с помощью метода эквивалентного управления. Пусть $F(t)|_{t=0} = 0$, тогда в скользящем режиме при $v = \text{const}$

$$\dot{F}(v, \mathbf{x}) = -T_{\text{ж}}^{-1}x^{(1)} - x^{(2)} = -T_{\text{ж}}^{-1}\dot{x} - a - bu^{eq} = 0.$$

Отсюда

$$u^{eq} = -\frac{1}{b} \left\{ a + T_{\text{ж}}^{-1}\dot{x} \right\},$$

и с учетом того, что $\dot{x} = -\dot{\delta} = -y$, условие существования СР при симметричном ресурсе управления

$$|u^{eq}| < u_m \quad (2.36)$$

приводит к соотношениям вида (2.35), ограничивающим отрезок скольжения.

Для определения необходимого ресурса управления следует использовать условие (2.36), откуда при $F(t) = 0$ имеем

$$u_m > \frac{1}{b} \left| a + \frac{\dot{x}}{T_{\text{ж}}} \right| = \frac{1}{b} \left| a + \frac{v - x}{T_{\text{ж}}^2} \right|$$

или

$$u_m > \frac{1}{b_{\min}} \left(a_{\max} + \frac{\delta_{\max}}{T_{\text{ж}}^2} \right),$$

где δ_{\max} – максимально возможное значение скачка задающего воздействия ($|\delta(0)|$), при котором САУ должна оставаться малочувствительной к изменениям параметров.

Это неравенство аналогично требованию, чтобы проекция области скольжения на ось δ при любом сочетании параметров и возмущений «охватывала» отрезок допустимых начальных отклонений.

Регуляризацию реальных СР в системе и вычисление «отфильтрованных» оценок $x(t)$ и его производной выполним на основе линейного ДФ:

$$T_{\Phi}^2 \frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} + d_{\Phi} T_{\Phi} \frac{d \hat{x}}{dt} + \hat{x} = x.$$

Структурная схема САУ при этом принимает вид, приведенный на рис. 2.16.

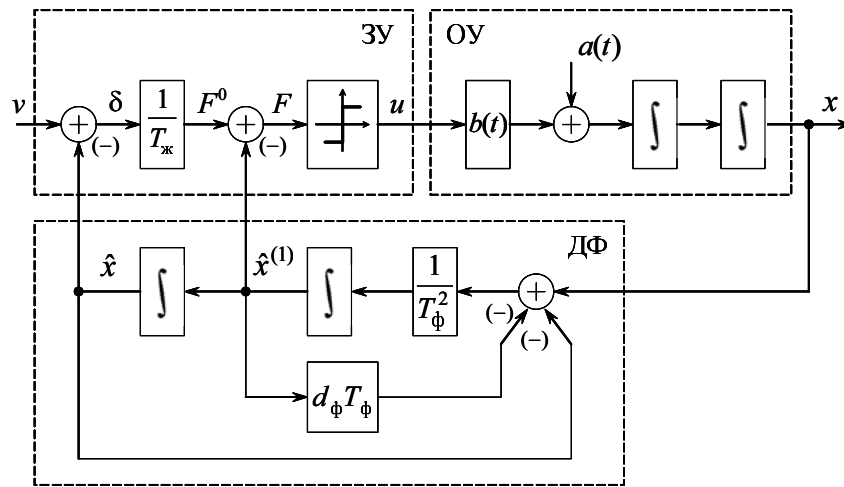


Рис. 2.16. Структурная схема системы с ДФ

Анализ автоколебательных режимов скользящего типа, возникающих в регуляризованной системе, произведем с помощью метода гармонической линеаризации [2.34] при допущении о симметричности автоколебаний ($v = 0$, $a(t) = 0$) и выполнении гипотезы фильтра (одночастотности колебаний $x(t)$). Эти предположения существенно упрощают выкладки, но никак не сказываются на предельных свойствах системы при $T_{\Phi} \rightarrow 0$. Формально заменяя релейный элемент закона управления (2.32) коэффициентом гармонической линеаризации

$$q(A) = \frac{4u_m}{\pi A_0},$$

где A_0 – амплитуда колебаний $F(t)$ по первой гармонике с частотой Ω_0 , получаем характеристический полином линеаризованной системы

$$T_{\phi}^2 p^4 + d_{\phi} T_{\phi} p^3 + p^2 + \left(p + \frac{1}{T_{\text{ж}}} \right) q(A)b,$$

который при наличии автоколебаний должен обращаться в нуль для $p = j\Omega_0$:

$$T_{\phi}^2 \Omega_0^4 - \Omega_0^2 + \frac{q(A)b}{T_{\text{ж}}} + j \left(q(A)b \Omega_0 - d_{\phi} T_{\phi} \Omega_0^3 \right) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$A_0 = \frac{4u_m b T_{\phi} T_{\text{ж}}}{\pi d_{\phi} (T_{\text{ж}} - d_{\phi} T_{\phi})},$$

$$\Omega_0^2 = \frac{T_{\text{ж}} - d_{\phi} T_{\phi}}{T_{\text{ж}} T_{\phi}^2},$$

и, если $T_{\phi} \ll T_{\text{ж}} d_{\phi}^{-1}$, то

$$\Omega_0 \approx \frac{1}{T_{\phi}}.$$

Таким образом, частота автоколебаний в реальном СР при достаточно малом значении T_{ϕ} не зависит от параметров объекта управления, а определяется только собственной частотой ДФ. Если запас по управляющему воздействию $(u_m - |u^{eq}|)$ достаточно велик, то данное свойство имеет место по отношению к параметрам ОУ и внешним возмущениям ($a(t)$) не только в квазиустановившемся режиме, но и в переходном процессе.

Типичные графики переходных процессов синтезированной САУ при отработке скачка задающего воздействия приведены на рис. 2.17. Как и в общем случае, на рисунке явно просматриваются два этапа движений – «попадание» изображающей точки системы на поверхность (линию) разрыва управления и движение в окрестности линии переключения в реальном СР, близкое к траектории желаемых процессов $x_{\text{ж}}(t)$.

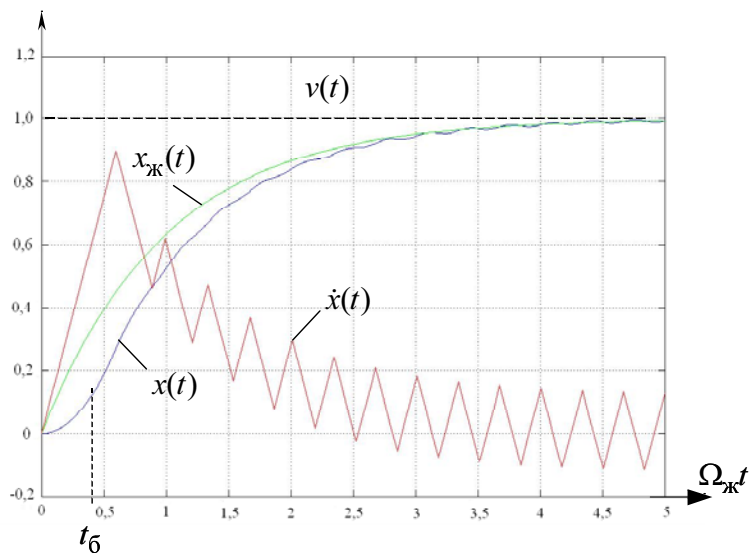
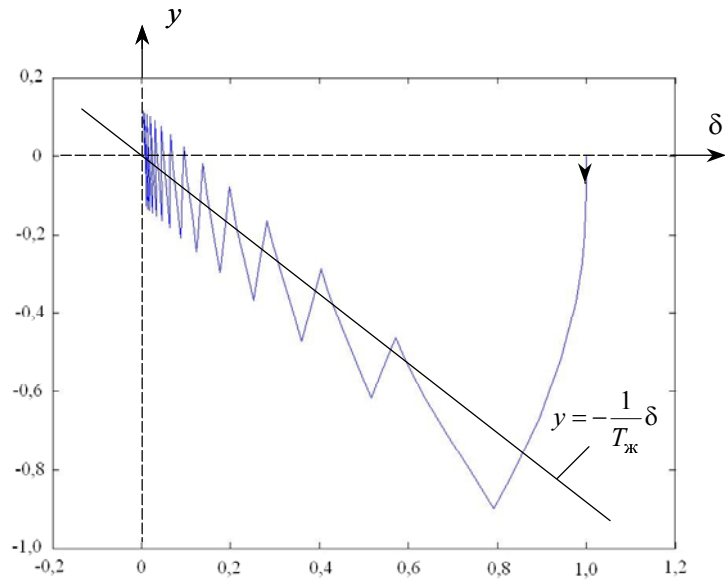


Рис. 2.17. Графики процесса отработки САУ скачка задающего воздействия:

а – на фазовой плоскости; б – во временной области

Используем данный пример для описания одного из эффективных подходов к ограничению «внутренних» координат состояния САУ с прямым разрывным управлением. Если область возможных начальных отклонений системы настолько велика, что ее проекция на линию переключения захватывает недопустимые значения \dot{x} , возникает частная задача ограничения производной выхода системы. В работе [2.18] подобная (но более сложная) задача решается применительно к системе управления позиционным электроприводом постоянного тока. Для этого на границах области допустимых состояний ($\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}$) соответствующая УЖД выходной переменной поверхность разрыва управлений деформируется непосредственно в границу $\Omega_{\mathbf{x}}$, движение по которой в СР осуществляется вплоть до выхода изображающей точки на многообразии $F(v, \mathbf{x})$. В данном простейшем случае такой эффект достигается, например, построением внутреннего (подчиненного) контура управления $\hat{x}^{(1)}$ с релейным регулятором согласно рис. 2.18. Область пространства состояний, в которой релейные элементы P1 и P2 «переключаются» синхронно и линия переключения совпадает с $F = 0$, ограничена значениями разрывного воздействия на выходе P1, равными $\pm |\dot{x}|_{\max}$. За ее пределами уравнение линии переключения заменяется на $y = -|\dot{x}|_{\max} \cdot \text{sign}(\delta)$. Графики переходных процессов в такой системе с учетом ограничения $\dot{x}(t)$ иллюстрируются на рис. 2.19.

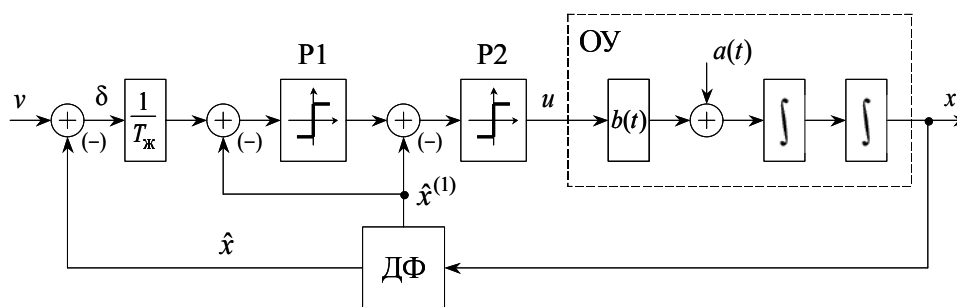


Рис. 2.18. Структурная схема САУ с ограничением $|\dot{x}|$

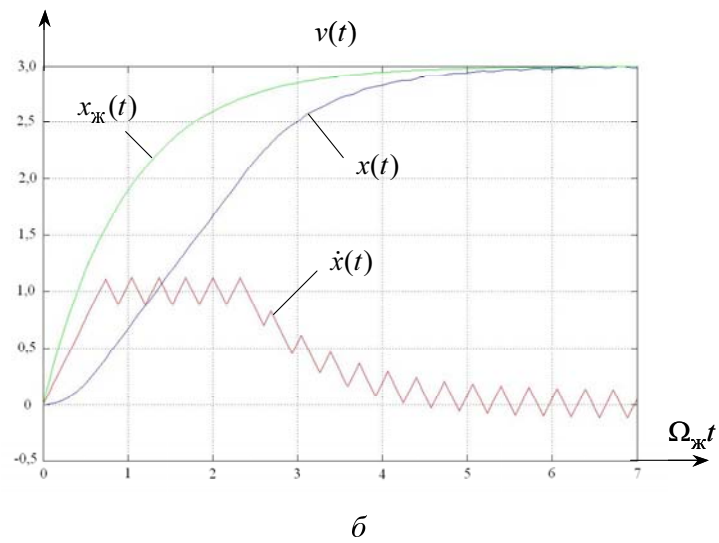
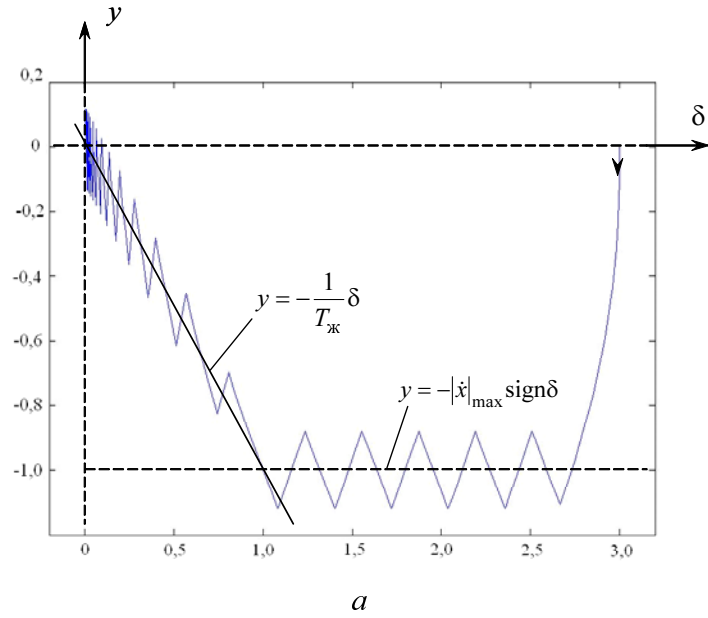


Рис. 2.19. Графики процесса обработки САУ скачка задающего воздействия, сопровождающегося ограничением \dot{x}

2.4. МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ

2.4.1. Идеиные основы метода

Вновь обратимся к изображенной на рис. 2.4 (подраздел 2.1.2) структурной схеме замкнутой САУ с обратной моделью объекта в законе управления. В данной структуре управляющее воздействие формируется по уравнению ОУ (2.2) в зависимости от желаемого текущего значения старшей производной выходной переменной $x_{\text{ж}}^{(n)}$, генерируемого согласно УЖД вида (2.6). Если входящие в модель объекта функции $a(t, \mathbf{x})$, $b(t, \mathbf{x})$ известны недостаточно полно или их параметры не определены в существенных интервалах, реализация подобных алгоритмов управления с обратными моделями становится невозможной. В этом случае для обеспечения соответствия $x^{(n)}$ заданному значению можно воспользоваться главным принципом теории автоматического регулирования – принципом обратной связи. Именно такая идея построения законов управления с глубокой обратной связью по старшей производной управляемой переменной или – при интерпретации ЗУ в пространстве состояний – по вектору скорости ОУ положена в основу метода локализации [2.5, 2.6].

Рассмотрим пропорциональный закон управления по отклонению старшей производной выхода

$$u = k \left(x_{\text{ж}}^{(n)} - x^{(n)} \right),$$

или согласно (2.6)

$$u = k \left(F(v, \mathbf{x}) - x^{(n)} \right). \quad (2.37)$$

Здесь $k > 0$ – большой коэффициент передачи регулятора.

Наличие обратной связи по $x^{(n)}$ свидетельствует о том, что в ЗУ (2.37) осуществляется мгновенный учет правой части уравнения ОУ и, следовательно, всех содержащихся в ней возмущений. Подставляя (2.37) в уравнение объекта (2.2), получаем модель движений замкнутой системы с управлением по старшей производной выхода:

$$\dot{x}^{(n)} = a(t, \mathbf{x}) + b(t, \mathbf{x})k \left(F(v, \mathbf{x}) - x^{(n)} \right),$$

или

$$x^{(n)} = \frac{a(t, \mathbf{x})}{1 + b(t, \mathbf{x})k} + \frac{b(t, \mathbf{x})k}{1 + b(t, \mathbf{x})k} F(v, \mathbf{x}). \quad (2.38)$$

Если теоретически неограниченно увеличивать глубину обратной связи ($k \rightarrow \infty$), то модель (2.38) вырождается в полностью соответствующее УЖД (2.5) соотношение

$$x^{(n)} = F(v, \mathbf{x}), \quad (2.39)$$

а $u(t)$ стремится к решению конечного уравнения (2.7). Структурная схема системы (2.2), (2.37) приведена на рис. 2.20.

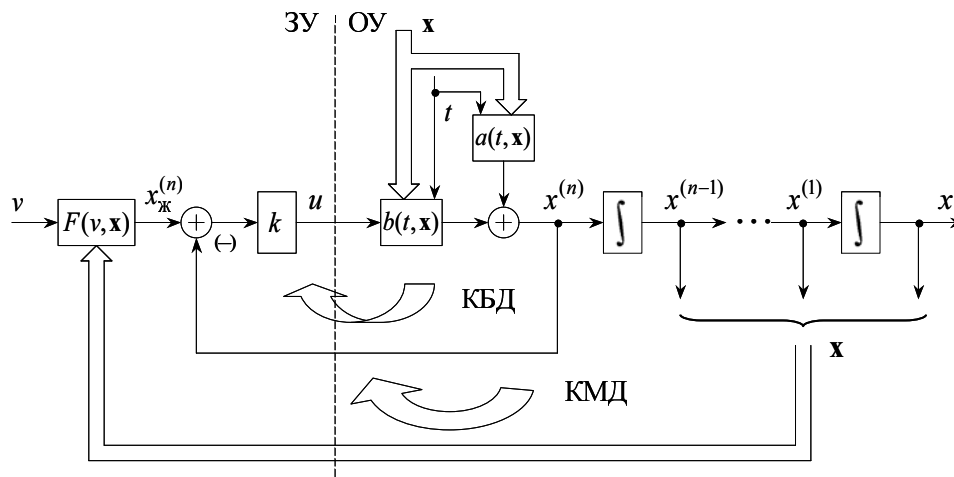


Рис. 2.20. Структурная схема идеализированной системы с управлением по старшей производной выхода

Особенностью системы, приведенной на рис. 2.20, является наличие формально безынерционного контура быстрых движений, в котором происходит мгновенное парирование влияния собственных нелинейных свойств ОУ и различного рода возмущений на поведение $x^{(n)}(t)$. При бесконечной глубине обратной связи КБД $(1 + bk)$ движения во внешнем по отношению к нему КМД подчинены УЖД (2.39), следовательно, САУ оказывается инвариантной к нелинейности, нестационарности ОУ и внешним возмущениям.

Заметим, что порядок ПМД (2.39) совпадает с порядком ОУ (2.2), и метод локализации (МЛ) является единственным методом синтеза САУ с глубокими обратными связями, способным обеспечить малую чувствительность медленных процессов в системах управления объектами, относительный порядок инерционности которых по выходу n равен единице. При $n \geq 2$ МЛ предоставляет большую, чем МБК и метод СР, свободу выбора характера желаемых процессов.

2.4.2. Особенности синтеза контура быстрых движений в системах с управлением по старшей производной

В предыдущем разделе было отмечено, что КБД идеализированной системы (2.2), (2.37) формально безынерционен, т. е. представляет собой так называемое «алгебраическое кольцо». Это не только затрудняет цифровое моделирование идеализированной САУ, но и обуславливает необходимость ее «технической регуляризации». Действительно, в любой реальной системе неизбежно присутствуют неучтенные в модели ОУ (2.2) малые инерционности датчиков и исполнительных устройств, пренебрежение влиянием которых при анализе «безынерционного» КБД противоречит методу малого параметра и принципиально недопустимо. Несложно показать (например, с помощью критерия Найквиста), что при $bk > 1$ и наличии в канале прямой или обратной связи КБД даже сколь угодно малого, но конечного запаздывания подсистема быстрых движений становится неустойчивой. Тот же эффект очевиден при $bk \rightarrow \infty$ и неучтенной инерционности порядка, превышающего 2.

Регуляризацию САУ, так же как и при применении метода скользящих режимов, можно выполнить с помощью дифференцирующего фильтра. В этом случае ДФ не только позволяет внести доминирующую инерционность в КБД системы с управлением по старшей производной и вычислить необходимые для построения реального ЗУ

$$u = k \left(F(v, \hat{x}) - \hat{x}^{(n)} \right), \quad (2.40)$$

оценки производных выходной переменной $x(t)$, но и обеспечить требуемую помехозащищенность САУ. Минимальный порядок инерционности ДФ при этом увеличивается до $(n + 1)$:

$$D_{\Phi}(T_{\Phi}p) = T_{\Phi}^{n+1}p^{n+1} + d_n T_{\Phi}^n p^n + \dots + d_1 T_{\Phi} p + 1.$$

Так как для достижения малой чувствительности системы (2.2), (2.22"), (2.40) необходимо существенно разнести темпы процессов в ПМД и ПБД, влияние ДФ на динамику «регуляризованной» САУ будет «заметно» лишь в КБД, структурная схема которого приведена на рис. 2.21.

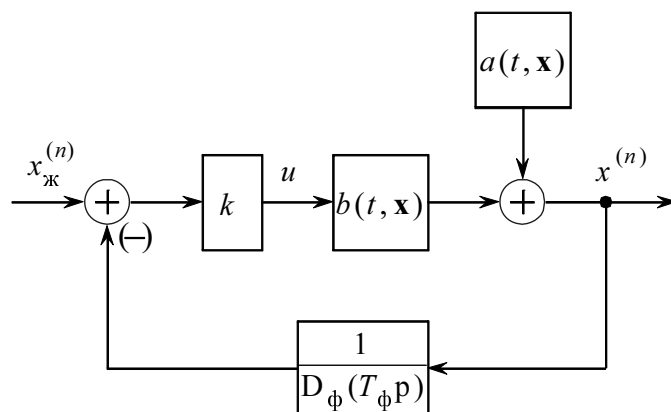


Рис. 2.21. Структурная схема КБД с учетом дифференцирующего фильтра

Вследствие разделения темпов движений функции $b(\cdot)$ и $a(\cdot)$ в подсистеме быстрых процессов «заморожены», и синтез КБД допустимо производить по его линейной квазистационарной модели, рассматривая характеристический полином контура быстрых движений

$$D_{\sigma}(p) = D_{\phi}(T_{\phi}p) + b(\cdot)k. \quad (2.41)$$

Вид (2.41) еще раз подчеркивает тот факт, что в отличие от систем с большими коэффициентами, КБД САУ с законом управления вида (2.40) в качестве преобладающего инерционного звена содержит ДФ, синтезировать который можно только во взаимосвязи с регулятором.

Во многих приложениях достаточную для практики глубину обратной связи (степень подавления возмущений и нестационарности КБД) обеспечивает выбор величины коэффициента передачи регулятора из интервального равенства [2.5, 2.6]

$$b(\cdot)k = 20 \dots 100,$$

откуда непосредственно следует, что

$$k = \frac{20 \dots 100}{b_{\min}}.$$

Зафиксировав начальное приближение коэффициента k , можно из (2.41) выразить постоянную времени и коэффициенты формы процессов КБД:

$$T_{\sigma} = \frac{T_{\Phi}}{n+1 \sqrt{1 + b(\cdot)k}},$$

$$d_{\sigma r} = \frac{d_r}{(1 + b(\cdot)k)^{1 - \frac{r}{n+1}}}, \quad r = \overline{1, n}.$$

Здесь величина T_{σ} должна удовлетворять условию разделения темпа быстрых движений с желаемыми, откуда по аналогии с п. 3 подраздела 2.2.3 получаем

$$T_{\Phi} \leq \frac{T_{\text{ж}}}{\eta} n+1 \sqrt{1 + b_{\min}k},$$

а значения d_r следует рассчитывать по требованиям к $d_{\sigma r}$ при $b = b_{\max}$. Как правило, и сам синтезируемый ДФ должен быть устойчив. В некоторых случаях динамику КБД удастся улучшить применением последовательного корректирующего устройства [2.5].

Замечания

1. Во избежание значительных перерегулирований по выходу при скачкообразных изменениях задающего воздействия и значительных n рекомендуется «перенести» ДФ в прямой канал САУ [2.43], переходя к законам управления вида

$$\left(T_{\Phi}^{n+1} p^{n+1} + d_n T_{\Phi}^n p^n + \dots + d_1 T_{\Phi} p + d_0 \right) u = k \left(F(v, \mathbf{x}) - x^{(n)} \right),$$

которые при $d_0 = 1$ порождают статические, а при $d_0 = 0$ астатические системы.

2. При синтезе квазинепрерывных систем допустимо воспользоваться условием разделения частот, аналогичным рекомендуемому в подразделе 2.2.6 или методикой [2.43]. Некоторые вопросы синтеза дискретных систем методом локализации рассмотрены в [2.7].

3. Если синтезируемая система не подвержена действию быстро изменяющихся внешних и параметрических возмущений, можно воспользоваться методикой синтеза КБД, предложенной в [2.17]. Эта методика увязывает между собой величины k и T_Φ через некоторый малый параметр μ :

$$T_\Phi = \mu ,$$

$$k = \frac{k^0}{\mu} ,$$

$$k^0 = \text{const} > 0 ,$$

и позволяет обеспечить устойчивость и требуемое качество процессов ПБД при формально неограниченном увеличении глубины обратной связи в КБД. Данный позитивный эффект достигается изменением характера вхождения малой постоянной времени T_Φ в собственный оператор ДФ:

$$D_\Phi(\mu p) = \mu^n T_0 p^{n+1} + d_n \mu^{n-1} T_0 p^n + \dots + d_2 \mu T_0 p^2 + d_1 T_0 p + 1 ,$$

где T_0 – некоторая конечная постоянная времени ($T_0 = k^0$), благодаря чему при $\mu \rightarrow 0$ асимптотический характеристический полином КБД принимает вид

$$D_\Phi(\mu p) = \mu^{n+1} p^{n+1} + d_n \mu^n p^n + \dots + d_2 \mu^2 p^2 + d_1 \mu p + b ,$$

устойчивость и качество которого $\forall b \in [b_{\min}, b_{\max}]$ необходимо обеспечить выбором коэффициентов формы ДФ.

2.4.3. О синтезе астатических систем со старшей производной выхода в законе управления

Как и в системах с большими коэффициентами (см. подраздел 2.2.4), астатизм САУ с управлением по старшей производной может быть достигнут путем дополнения алгоритма управления (2.40) составляющей, пропорциональной интегралу ошибки

$$u = k_{\text{п}} \varepsilon + k_{\text{и}} \int_0^t \varepsilon dt ,$$

где $\varepsilon = F(v, \hat{x}) - \hat{x}^{(n)}$; $k_{\Pi}, k_{\text{и}}$ – коэффициенты передачи пропорциональной и интегральной частей регулятора. Это на единицу повышает порядок характеристического полинома КБД и значительно усложняет его стабилизацию и синтез в условиях интервальной неопределенности $b(\cdot)$. Несмотря на указанный недостаток, пропорционально-интегральные регуляторы старшей производной активно используются в задачах синтеза систем управления электроприводами, малочувствительных к изменениям параметров [2.8, 2.19, 2.41, 2.42].

Существенными, по мнению авторов, преимуществами обладает другой подход к обеспечению астатизма САУ, впервые предложенный в работе [2.36]. Он заключается в переходе от пропорционального алгоритма управления вида (2.37) к интегральному

$$\dot{i} = k \left(F(v, \mathbf{x}) - x^{(n)} \right). \quad (2.42)$$

Это не только повышает порядок КБД, но и придает ему качественно новые свойства, подобные свойствам контура быстрых движений системы с большими коэффициентами [2.13, 2.20, 2.32, 2.48]. При преднамеренной организации в САУ (2.2), (2.42), дополненной дифференцирующим фильтром, трехтемповых процессов расчет коэффициента передачи интегрального регулятора старшей производной k и параметров ДФ можно производить последовательно исходя из условий разделения темпов желаемых, быстрых и сверхбыстрых процессов (см. пп. 3, 4 подраздела 2.2.3), где вместо малого параметра μ следует иметь в виду k^{-1} . Необходимо также отметить, что применение интегрального закона управления позволяет на единицу понизить порядок дифференцирования в канале обратной связи САУ путем отдельного интегрирования слагаемых в правой части (2.42) и соответственно понизить порядок ДФ [2.13, 2.20, 2.28, 2.32, 2.48]. Структурно это соответствует переносу обратной связи по оценке $x^{(n)}$ через интегратор закона управления в направлении распространения воздействий [2.15], в результате чего структурная схема системы принимает вид, приведенный на рис. 2.22.

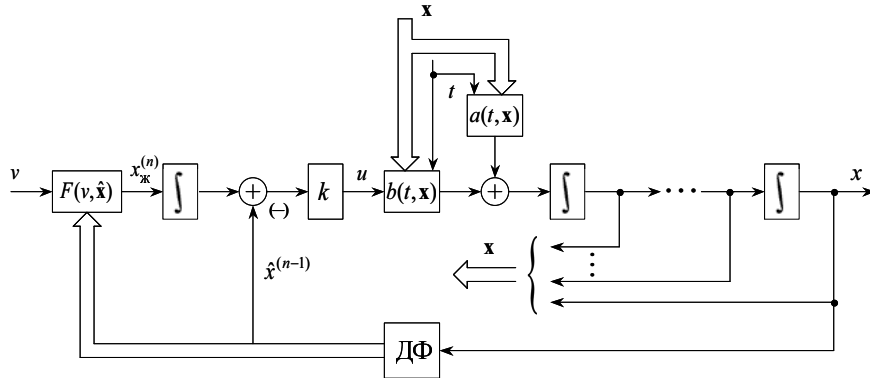


Рис. 2.22. Структурная схема преобразованной системы с интегральным законом управления по старшей производной

Подробные результаты исследования эффективности применения (2.42) в системах электропривода переменного тока можно найти в работах [2.20, 2.23, 2.28].

2.5. МЕТОД СИГНАЛЬНО АДАПТИВНОЙ ОБРАТНОЙ МОДЕЛИ

В данном разделе на примере одноканального нелинейного нестационарного объекта с полным относительным порядком по выходу рассматриваются теоретические основы разработанного авторами метода синтеза малочувствительных систем управления с многотемповыми процессами и глубокими обратными связями, основанного на использовании обратных моделей управляемого процесса с сигнальной адаптацией.

2.5.1. Идея метода

Рассмотрим ОУ вида (2.2), предполагая, что в структуре функций $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ можно выделить известные (расчетные) составляющие $a_0(\cdot)$, $b_0(\cdot)$ и «возмущения» $\delta a(\cdot)$, $\delta b(\cdot)$:

$$a(t, \mathbf{x}) = a_0(t, \mathbf{x}) + \delta a(t, \mathbf{x}),$$

$$b(t, \mathbf{x}) = b_0(t, \mathbf{x}) + \delta b(t, \mathbf{x}),$$

причем $|\delta b(\cdot)| < |b_0(\cdot)| \forall (t, \mathbf{x})$ из области допустимых.

Зададим УЖД в форме

$$x^{(n)} = F(v, \mathbf{x}), \quad (2.43)$$

по структуре соответствующей (2.5) или асимптотическому движению в методе локализации (2.39), и, приравнявая правые части (2.2) и (2.43), определим закон управления как обратную модель управляемого процесса

$$u = \frac{1}{b_0(t, \mathbf{x})} (F(v, \mathbf{x}) - a_0(t, \mathbf{x}) - \hat{y}(t)), \quad (2.44)$$

где $\hat{y}(t)$ – оценка «возмущений», формируемая наблюдателем

$$\mu \dot{\hat{y}} + \hat{y} = x^{(n)} - a_0(t, \mathbf{x}) - b_0(t, \mathbf{x})u,$$

уравнения которого после исключения старшей производной выхода можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\mu^{-1} (a_0(t, \mathbf{x}) + b_0(t, \mathbf{x})u + \hat{y}), \\ \hat{y} = \eta + \mu^{-1} x^{(n-1)}. \end{cases} \quad (2.45)$$

Здесь $\mu > 0$ – малый параметр, определяющий скорость процесса сигнальной адаптации алгоритма управления (2.44) и порождающий «глубокую» обратную связь.

Из структуры алгоритма (2.44), (2.45) следует, что функция компенсации системой отклонений характеристик ОУ от расчетных (включая параметрические и сигнальные возмущения) возлагается на контур быстрых движений, замкнутый по цепи сигнальной адаптации обратной модели. Следует особо отметить, что эта «нагрузка» на обратную связь меньше, чем на регуляторы «по отклонению старшей производной выхода», так как с ее помощью парировются не все собственные свойства объекта, а лишь их отклонения от «невозмущенных».

Идеализированный закон управления (2.44) – (2.45) предполагает использование обратных связей по выходной переменной ОУ и ее производным вплоть до $(n-1)$ -й. Однако, как уже отмечалось во введении и подразделе 2.1.1, возможность прямых измерений и даже косвенного восстановления производных выхода нестационарных объектов, подверженных действию внешних возмущений, по информации о физических переменных нетипична для реальных приложений. Поэтому для вычисления оценок неизмеряемых производных регулируемой переменной и обеспечения необходимой помехозащищенности САУ предполагается использовать дифференцирующие фильтры. Так же как и в методе больших коэффициентов, наиболее предпочтительным вариантом является построение САУ с трехтемповыми процессами и разделением движений в подсистемах медленных и быстрых движений, а также ДФ. В этом случае возмущения подавляются (локализуются) в быстром темпе движений, который (в естественном масштабе времени) описывается дифференциальным уравнением первого порядка

$$\mu \dot{\hat{y}} + (1 + \delta b(\cdot) b_0^{-1}) \hat{y} = \delta a(\cdot) + (\delta b(\cdot) b_0^{-1}) F(\cdot) - a_0(\cdot),$$

и поэтому не требует стабилизации. Здесь следует отметить, что обязательным условием близости характеристик САУ к желаемым является разделение темпа быстрых движений со всеми сверхбыстрыми процессами, не учтенными в модели ОУ (2.2). Немаловажно, что при выполнении сформулированных выше рекомендаций закон управления (2.44) – (2.45) легко может быть включен в состав некоторого внешнего по отношению к обратной модели (2.44) контура регулирования с последовательной коррекцией.

Для подтверждения соответствия основных (медленных) процессов замкнутой системы желаемым несложно получить квазиравновесный корень подсистемы быстрых движений

$$\hat{y}^a = \frac{b_0}{b} \left(\delta a + \frac{\delta b}{b_0} (F - a_0) \right),$$

подстановка которого в (2.44) дает асимптотическое управление

$$u^a = \frac{1}{b}(F - a),$$

совпадающее с точной обратной моделью ОУ. Это свидетельствует об инвариантности медленных движений САУ к неопределенным «возмущениям», а также астатизме системы по задающему воздействию.

Поясняя идею метода сигнально адаптивной обратной модели, рассмотрим САУ простейшим объектом первого порядка

$$\dot{x} = ax + bu + f(t),$$

где $a = a_0 + \delta a$, $b = b_0 + \delta b$ – интервально неопределенные константы, нижним индексом «0» отмечены их расчетные (номинальные) значения; причем $b_0 > 0$, $|\delta b| < |b_0|$; $f(t)$ – внешнее возмущающее воздействие.

В данном случае УЖД и точная обратная модель ОУ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(v, x) = a^* + b^* v, \\ u &= b_0^{-1} \left((a^* - a_0)x + b^* v - y \right), \end{aligned}$$

где $y = \delta a \cdot x + \delta b \cdot u + f = \dot{x} - a_0 x - b_0 u$ – приведенное «возмущение».

Структурная схема соответствующей данным уравнениям идеализированной системы приведена на рис. 2.23.

Очевидно, что ПБД идеализированной САУ содержит алгебраические кольца, общая глубина обратной связи в которых составляет $(1 + \delta b / b_0)$. Для регуляризации ПБД (внесения в нее доминирующей инерционности и «развязки» алгебраических колец) в систему вводится фильтр первого порядка

$$\mu \dot{\hat{y}} + \hat{y} = \dot{x} - a_0 x - b_0 u,$$

который после формального исключения неизмеряемой старшей производной выхода преобразуется к асимптотическому наблюдателю «возмущения» типа (2.45)

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\mu^{-1}(a_0x + b_0u + \hat{y}), \\ \hat{y} = \eta + \mu^{-1}x, \end{cases}$$

что сопровождается заменой закона управления на приближенный

$$u = b_0^{-1}(b^*v + (a^* - a_0)x - \hat{y}).$$

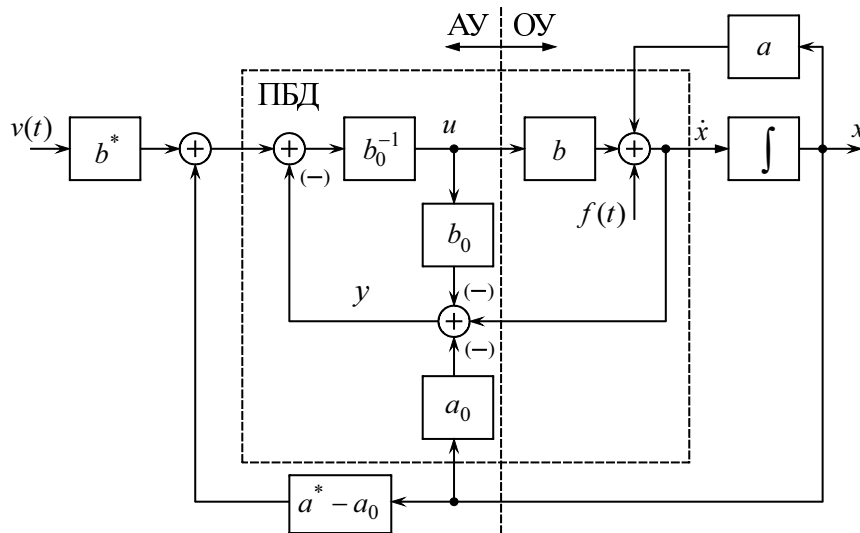


Рис. 2.23. Структурная схема идеализированной САУ линейным объектом первого порядка

Математическая модель регуляризованной замкнутой САУ принимает вид сингулярно возмущенной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + f + bb_0^{-1}(b^*v + (a^* - a_0)x - \hat{y}), \\ \mu\dot{y} = \delta a \cdot x + f - \hat{y} + \delta b \cdot b_0^{-1}(b^*v + (a^* - a_0)x - \hat{y}), \end{cases}$$

анализ которой методом разделения движений позволяет выделить асимптотически устойчивую ПБД (в естественном масштабе времени)

$$\mu \left(1 + \frac{\delta b}{b_0} \right)^{-1} \dot{\hat{y}} + \hat{y} = y^*$$

с квазиравновесным состоянием

$$\hat{y}^a = y^* = \left(1 + \frac{\delta b}{b_0} \right)^{-1} \left[\left(\delta a + \frac{\delta b}{b_0} (a^* - a_0) \right) x + \frac{\delta b \cdot b^*}{b_0} v + f \right]$$

и подсистему медленных движений, совпадающую с УЖД.

Инженерные условия разделения темпов движений в данном случае можно представить в форме неравенств

$$T^* = |a^*|^{-1} \geq \eta_1 \cdot \mu / \min \left(1 + \frac{\delta b}{b_0} \right) \geq \eta_2 \cdot \max(\tau),$$

где $\eta_1, \eta_2 = (6 \dots 10)$ – степени разделения темпов движений (быстрых и медленных, сверхбыстрых и быстрых); τ – постоянные времени неучтенных в модели ОУ малых инерционностей, включая (для САУ более высокого порядка) постоянную времени ДФ.

2.5.2. Модельный пример САУ нестационарным линейным объектом

Если как расчетная, так и «возмущенная» модели ОУ линейны, составляющие правой части уравнения (2.2) принимают вид

$$a(\cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i0} x^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} \delta a_i(t) x^{(i)} + f(t),$$

$$b(\cdot) = b_0 + \delta b(t),$$

где все отмеченные индексом «0» параметры постоянны, а $f(t)$ – неопределенное аддитивное внешнее возмущающее воздействие.

Желаемые движения САУ также зададим линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$F(\cdot) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^* x^{(i)} + b^* v.$$

В данном случае алгоритм управления (2.44), (2.45) можно представить как

$$u = b_0^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (a_i^* - a_{i0}) x^{(i)} + b^* v - \hat{y} \right),$$

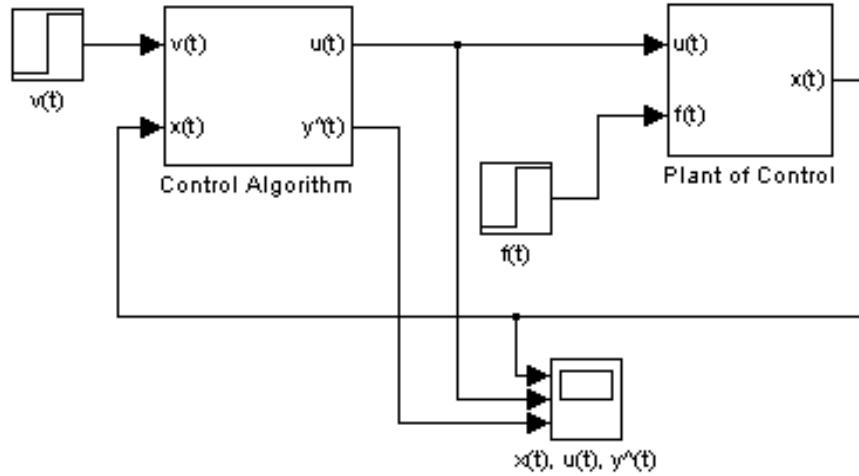
$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\mu^{-1} \left(b_0 u + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i0} x^{(i)} + \hat{y} \right), \\ \hat{y} = \eta + \mu^{-1} x^{(n-1)}. \end{cases}$$

Для иллюстрации возможностей метода приведем результаты моделирования в программной среде MATLAB-Simulink системы управления квазистационарным объектом второго порядка, параметры которого изменяются относительно медленно или от процесса к процессу. Структурные схемы исследуемой САУ и ее подсистем изображены на рис. 2.24, а переходные характеристики – на рис. 2.25.

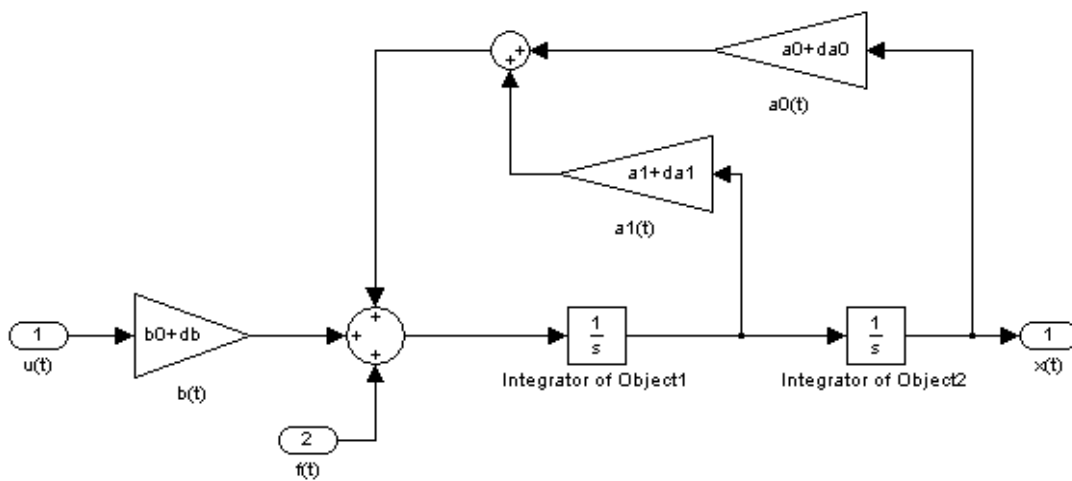
При моделировании были использованы следующие параметры объекта управления и желаемых процессов САУ:

$$a_{00} = 0, a_{10} = 0, b_0 = 1, a_0^* = -1, a_1^* = -\sqrt{2}, b^* = 1.$$

Алгоритм наблюдения синтезирован из условий разделений темпов быстрых и желаемых движений, а также требуемой степени парирования «возмущений» с малым параметром $\mu = 0,05$. Постоянная времени дифференцирующего фильтра второго порядка, настроенного на стандартную линейную форму Баттерворта (см. раздел П1.1 и [2.33]), выбиралась равной $T_\phi = 0,01$ с.



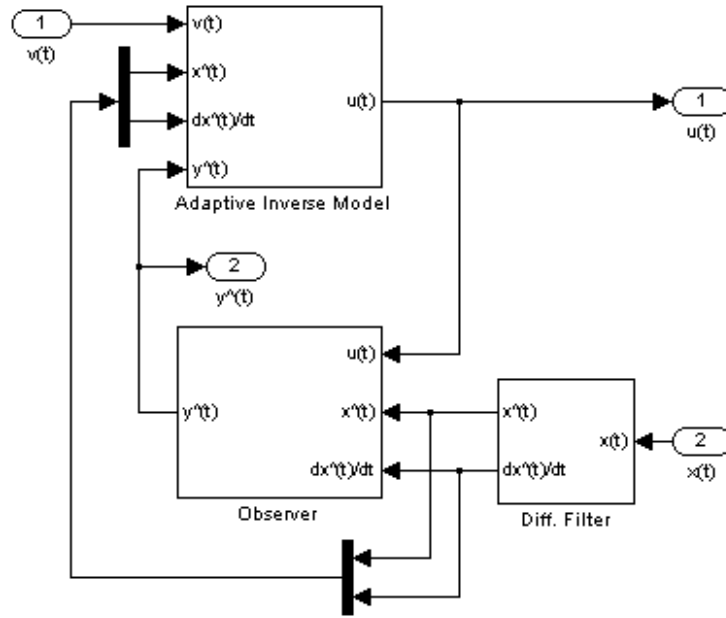
a



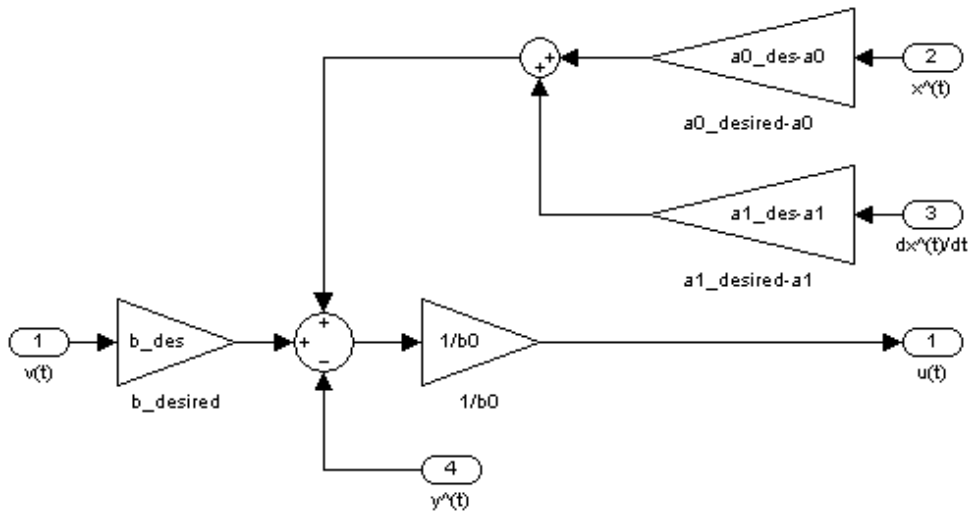
б

Рис. 2.24. Структурные схемы:

a – исследуемой модельной САУ; *б* – объекта управления; *в* – алгоритма управления (укрупненная); *г* – адаптивной обратной модели; *д* – наблюдателя «возмущений»; *е* – дифференцирующего фильтра (см. также с. 136 и 137)



6



2

Рис. 2.24. Продолжение

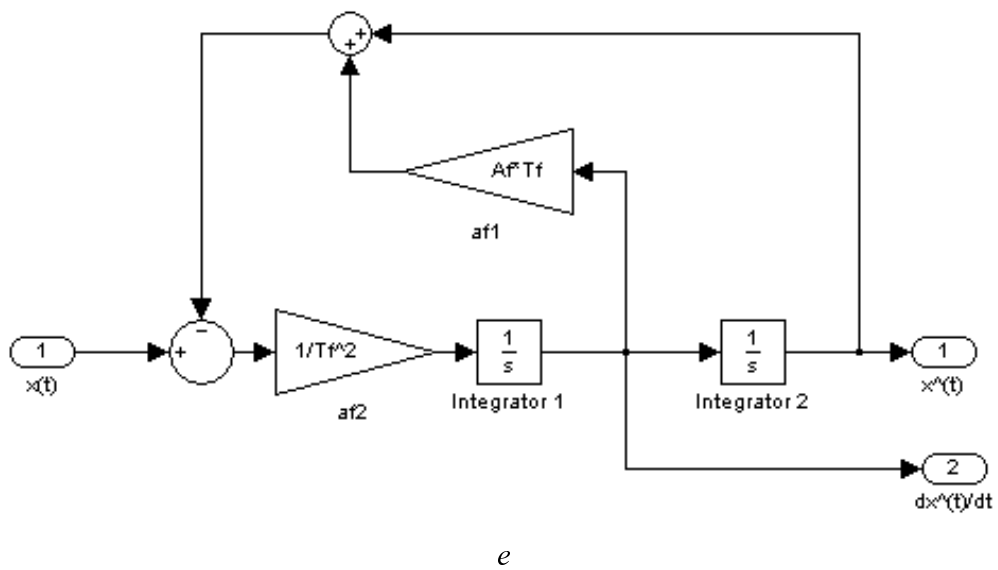
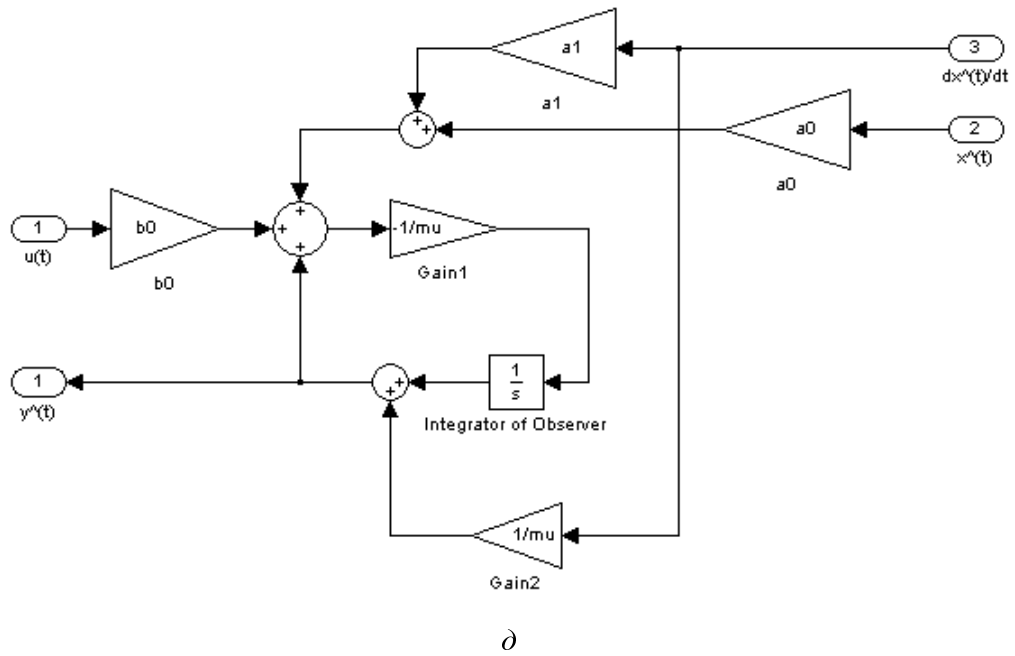


Рис. 2.24. Окончание

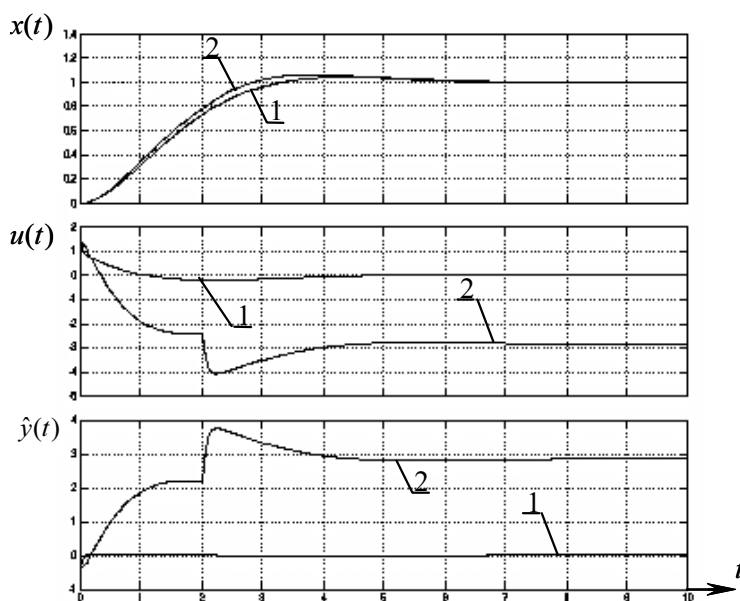


Рис. 2.25. Переходные характеристики модельной системы для выходной переменной $x(t)$, управляющего воздействия $u(t)$ и оценки приведенных «возмущений» $\hat{y}(t)$:

графики 1 – возмущения отсутствуют; графики 2 – введены параметрические возмущения: $\delta a_0 = 1$, $\delta a_1 = 2$, $\delta b = -0,3$, при $t = 2$ с приложено сигнальное возмущающее воздействие $f = 1$

Изложенный метод синтеза малочувствительных систем автоматического управления на основе обратных моделей объекта, дополненных быстродействующим алгоритмом сигнальной адаптации, эффективен не только в САУ с линейными ОУ – квазистационарными или с изменяющимися в темпе основных процессов регулирования параметрами, но и в существенно нелинейных. Областью его преимущественного использования, по-видимому, должны стать внутренние подсистемы САУ, построенные по принципу подчиненного регулирования, в частности, системы управления моментом, магнитным потокосцеплением или токами электрических машин, где применение метода локализации зачастую ничем не оправдано. По сравнению с методами больших коэффициентов и скользящих режимов предлагаемый подход позволяет достичь большей гибкости в выборе траекторий желаемых процессов и обеспечить малую чувствительность, в том числе САУ объектами с порядком инерционности по выходу, равным единице.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

К разделу 2.1

1. Приведите примеры известных вам технических объектов и систем, математическая модель которых может быть представлена в форме (2.2).
2. Какая производная регулируемой переменной называется старшей?
3. Приведите примеры стандартных линейных форм. Как выбираются их параметры?
4. В каких случаях допустимо использовать алгоритмы временного программного управления?
5. Какие обратные модели способны стабилизировать неустойчивый объект?
6. Получите математические модели подсистем быстрых и медленных процессов в микродвигателе постоянного тока с независимым возбуждением, учитывая, что $T_{\text{я}} \ll T_{\text{м}}$.
7. Какая обратная связь может быть названа «глубокой»?

К разделу 2.2

8. Запишите в форме (2.18) соответствующее линейной форме Баттерворта уравнение желаемых движений системы управления объектом третьего порядка, синтезируемой методом больших коэффициентов.
9. Изобразите структурную схему идеализированной системы управления объектом второго порядка, синтезированной методом больших коэффициентов.
10. Перечислите функции, выполняемые дифференцирующими фильтрами в САУ с большими коэффициентами.
11. Какими свойствами обладают системы с большими коэффициентами и трехтепловыми процессами?
12. Как определить начальное приближение величины малого параметра для системы с большими коэффициентами?

К разделу 2.3

13. Дайте определение идеальному скользящему режиму.
14. Какими свойствами обладают движения в СР?
15. Каковы условия устойчивости СР в одноканальной САУ с разрывным управлением?
16. Как определить область скольжения с помощью метода эквивалентного управления?

17. Как стабилизировать частоту или амплитуду автоколебаний в реальном СР?

18. Изобразите структурную схему САУ объектом второго порядка с разрывным управлением.

К разделу 2.4

19. Запишите и поясните идеализированный закон управления по старшей производной выхода. Почему его нельзя использовать на практике?

20. Какие функции выполняет ДФ в САУ с управлением по старшей производной?

21. В чем особенность синтеза ДФ для САУ с управлением по старшей производной?

К разделу 2.5

22. Изобразите структурную схему САУ с идеализированным законом управления (2.44), (2.45).

23. В чем преимущества сигнально адаптивных обратных моделей перед алгоритмом управления с большим коэффициентом?

Ко всему теоретическому материалу второй части учебного пособия в целом

24. В чем заключается свойство малой чувствительности САУ к параметрическим возмущениям?

25. Каковы общие особенности методов синтеза систем с глубокими обратными связями?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

2.1. *Архангельский В. И.* Алгоритмы и техническая реализация систем прямого цифрового управления / В. И. Архангельский. – М. : Изд-во ЦНИИТЭИ приборостроения, 1978.

2.2. *Бойчук Л. М.* Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления / Л. М. Бойчук. – М. : Энергия, 1971.

2.3. *Васильева А. Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений : науч.-теор. пособие / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – М. : Высш. шк., 1990.

2.4. *Востриков А. С.* Метод синтеза систем электропривода с заданными переходными процессами : дис. ... канд. техн. наук / А. С. Востриков. – Новосибирск, 1968.

2.5. *Востриков А. С.* Синтез систем управления методом локализации : дис. ... д-ра техн. наук / А. С. Востриков. – Новосибирск, 1989.

- 2.6. *Востриков А. С.* Синтез систем регулирования методом локализации : монография / А.С. Востриков. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007.
- 2.7. Дискретные системы автоматического управления на основе метода локализации / А. С. Востриков, А. А. Воевода, В. С. Мучкин, В. Н. Клевакин. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. электротехн. ин-т, 1990.
- 2.8. *Востриков А. С.* Синтез и расчет регуляторов асинхронного электропривода на основе управления по вектору скорости / А. С. Востриков, Ф. К. Фоттлер, В. В. Панкратов // Динамические режимы работы электрических машин и электроприводов : тез. докл. 6-й Всесоюзная науч.-техн. конф. (Бишкек, 2 – 5 окт. 1991 г.):– Бишкек : Изд-во БПИ, 1991. – С. 9–10.
- 2.9. *Востриков А. С.* О грубости систем с глубокими обратными связями по отношению к возмущениям / А. С. Востриков, В. В. Панкратов // Электротехника. – 2000. – № 11. – С. 3–6.
- 2.10. *Востриков А. С.* Теория автоматического регулирования : учеб. пособие / А. С. Востриков, Г. А. Французова. – М. : Высш. шк., 2006.
- 2.11. *Гаврилов Е. Б.* Исследование электромеханических систем стабилизации процесса шлифования с дифференцирующими фильтрами в обратной связи : дис. ... канд. техн. наук / Е. Б. Гаврилов. – Новосибирск, 1979.
- 2.12. *Геращенко Е. И.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем / Е. И. Геращенко, С. М. Геращенко. – М.: Наука, 1975.
- 2.13. *Зима Е. А.* Синтез астатических многосвязных систем методом локализации / Е. А. Зима, В. В. Панкратов // Актуальные проблемы электронного приборостроения : материалы VI междунар. конф. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. – Т. 6. – С. 27–31.
- 2.14. *Изосимов Д. Б.* Синтез управления в электроприводах / Д. Б. Изосимов // Электротехника. – 1994. – №7. – С. 11–15.
- 2.15. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели / П. Д. Крутько. – М. : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.
- 2.16. *Мееров М. В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности / М. В. Мееров. – М. : Госуд. изд-во физ.-мат. лит., 1959.
- 2.17. *Наджар Мохамад.* Операторная методика синтеза квазистационарных нелинейных систем на основе принципа локализации : дис. ... канд. техн. наук / Наджар Мохамад. – Новосибирск, 1994.
- 2.18. *Панкратов В. В.* Выбор рациональных структур скользящих электроприводов / В. В. Панкратов // Автоматизированный электропривод промышленных установок : межвуз. сб. науч. тр. / Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1990. – С. 94–100.
- 2.19. *Панкратов В. В.* К вопросу о синтезе систем электропривода, малочувствительных к изменениям параметров / В. В. Панкратов // Автоматизированные электромеханические системы : межвуз. сб. науч. тр. / Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1991. – С. 76–82.

2.20. *Панкратов В. В.* Построение систем асинхронного электропривода на основе метода локализации : дис. ... канд. техн. наук / В. В. Панкратов. – Новосибирск, 1992.

2.21. *Панкратов В. В.* Оптимизация поверхностей разрыва управлений в асинхронном электроприводе со скользящими режимами / В. В. Панкратов, Ф. К. Фоттлер // Изв. вузов. Электромеханика. – 1992. – № 5. – С. 71–77.

2.22. *Панкратов В. В.* Метод оптимизации поверхностей разрыва управлений в многосвязных САУ со скользящими режимами / В. В. Панкратов // Изв. вузов. Электромеханика. – 1993. – № 4. – С. 44–50.

2.23. *Панкратов В. В.* Система регулирования скорости асинхронного электропривода, малочувствительная к изменениям параметров / В. В. Панкратов // Автоматизированные электромеханические системы : межвуз. сб. науч. тр. / Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1993. – С. 29–38.

2.24. *Панкратов В. В.* Синтез систем управления асинхронным двигателем методом обратной модели / В. В. Панкратов // Автоматизированные электромеханические системы : сб. науч. тр. / Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1995. – С. 46–54.

2.25. *Панкратов В. В.* Обоснование разрывного алгоритма управления электромеханическим объектом на основе условий локальной устойчивости скользящего режима / В. В. Панкратов // Автоматизированные электромеханические системы : сб. науч. тр. / Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1995. – С. 11–15.

2.26. *Панкратов В. В.* Синтез оптимальных алгоритмов управления многосвязным динамическим объектом «в большом» методом непрерывной иерархии / В. В. Панкратов // Изв. вузов. Электромеханика. – 1996. – № 1-2. – С. 58–65.

2.27. *Панкратов В. В.* Синтез нелинейных систем методом больших коэффициентов / В. В. Панкратов // Сб. науч. тр. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1996. – № 1. – С. 31–38.

2.28. *Панкратов В. В.* Методы синтеза систем автоматического управления электроприводами переменного тока, малочувствительных к изменениям параметров : дис. ... д-ра техн. наук / В. В. Панкратов. – Новосибирск, 1997.

2.29. *Панкратов В. В.* Метод технической регуляризации скользящих режимов в многосвязных нелинейных системах с разрывным управлением / В. В. Панкратов // Актуальные проблемы электронного приборостроения : тр. IV междунар. конф. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1998. – Т. 13. – С. 73–76.

2.30. *Панкратов В. В.* Синтез нелинейных дискретно-непрерывных систем методом больших коэффициентов / В. В. Панкратов // Информационные системы и технологии : тр. междунар. науч.-техн. конф. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. – Т. 2. – С. 426–430.

2.31. *Панкратов В. В.* Синтез дискретных регуляторов методом больших коэффициентов / В. В. Панкратов, О. В. Нос, Е. А. Зима // Сб. науч. тр. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2000. – №1. – С. 58–64.

2.32. *Панкратов В. В.* Синтез астатических систем на основе метода локализации / В. В. Панкратов, Е. А. Зима // Проблемы синтеза и проектирования систем автоматического управления : материалы науч.-практ. семинара, 13–15 июня 2001 г., Новосибирск, Россия. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – С. 39–42.

2.33. *Панкратов В. В.* Специальные разделы теории автоматического управления : учеб. пособие / В. В. Панкратов, О. В. Нос. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – Ч. 1. Модальное управление и наблюдатели.

2.34. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах / Е. П. Попов. – М. : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973.

2.35. *Принцип* блочного управления I,II / С. В. Дракунов [и др.] // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 5, 6.

2.36. *Сарычев С. П.* К синтезу систем с астатическим законом управления по вектору скорости / С. П. Сарычев // Автоматизация производственных процессов / Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1978. – С. 109–116.

2.37. *Справочник* по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987.

2.38. *Теория* автоматического управления: метод. указания к лабораторным работам № 5, 6 / В. В. Наумов, В. В. Панкратов, Ф. К. Фоттлер. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 1994.

2.39. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при производных / А. Н. Тихонов // Мат. сборник. – 1952. – Т. 31(73), № 3. – С. 575–586.

2.40. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления / В. И. Уткин. – М. : Наука, 1981.

2.41. *Фоттлер Ф. К.* Синтез регуляторов асинхронного электропривода на основе управления по вектору скорости / Ф. К. Фоттлер, В. В. Панкратов // Вторая Всесоюзная науч.-техн. конф. по электромеханотронике (Санкт-Петербург, 23-25 октября 1991 г.) : тез. докл. – СПб. : ЛДНТП, 1991. – С. 212–214.

2.42. *Фоттлер Ф. К.* Синтез системы регулирования скорости асинхронного электропривода с векторным управлением при переменных параметрах двигателя и механизма / Ф. К. Фоттлер, В. В. Панкратов // Автоматическое управление объектами с переменными характеристиками : межвуз. сб. науч. тр. / Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – С. 134–143.

2.43. *Юркевич В. Д.* Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами / В. Д. Юркевич. – СПб. : Наука, 2000.

2.44. *Pankratov V. V.* Method of an engineering regularization of sliding modes in multi-input nonlinear systems with two-position control law / V. V. Pankratov // Proc. of the 4-th International Scientific – Technical conference «Actual Problems of Electronics Instrument Engineering». – Novosibirsk : NSTU, 1998. – Vol. 1. Selected papers on English. – P. 361 – 363.

2.45. *Pankratov V. V.* Synthesis of the discrete controllers by method of large gain factors / V. V. Pankratov // The Third Russian – Korean International Symposium On Science and Technology KORUS'99, Novosibirsk, Russia. – Novosibirsk : NSTU, 1999. – P. 224.

2.46. *Pankratov V. V.* The synthesis method of discrete controllers for nonlinear systems / V. V. Pankratov, E. A. Zima // Actual Problems of Electronics Instrument Engineering : Proc. of the 5-th International Scientific – Technical conference. – Novosibirsk, Russia : NSTU, 2000. – Vol. 1. – P. 123–128.

2.47. *Pankratov V. V.* Synthesis of the discrete-continuous systems by the high gain method / V. V. Pankratov, Ye. A. Zima // Automation, Control, and Information Technology : Proceedings of the IASTED International Conference (June 10 – 13, 2002, Novosibirsk, Russia). – Calgary, Canada : ACTA Press, 2002. – P. 306–309.

2.48. *Zima Ye. A.* Synthesis of astatic multivariable systems by the localization method / Ye. A. Zima, V. V. Pankratov // Actual Problems of Electronics Instrument Engineering : Proc. of the 6-th International Scientific – Technical conference. – Novosibirsk, Russia : NSTU, 2002. – Vol. 1. – P. 236–240.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П2.1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БОЛЬШИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ НА БАЗЕ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Одним из основных типов силовых исполнительных устройств, используемых при автоматизации технологических процессов и управлении техническими системами, является электропривод (ЭП), включающий в себя электро-механический преобразователь постоянного или переменного тока. В общепромышленных механизмах наибольшее распространение получили асинхронные двигатели с короткозамкнутым ротором (АД), которые в связи с отсутствием контактных узлов и постоянных магнитов обладают рядом эксплуатационных преимуществ перед электрическими машинами других типов.

В любых режимах работы АД, кроме идеального холостого хода, электрическая частота вращения ротора отличается от частоты вращения магнитного поля статора. Для численной оценки отставания (опережения) ротора используется понятие скольжения, представляющее собой следующее отношение:

$$s = \frac{\omega_s - \omega_e}{\omega_s}, \quad (\text{П2.1})$$

где ω_s – угловая скорость магнитного поля статора; $\omega_e = p_{\Pi} \omega$ – электрическая угловая скорость вращения ротора, равная произведению числа пар полюсов p_{Π} на текущую угловую скорость ω .

Через скольжение можно выразить механическую частоту вращения вала АД:

$$\omega = \frac{1}{p_{\Pi}} \omega_s (1 - s) = \frac{1}{p_{\Pi}} (\omega_s - \omega_c), \quad (\text{П2.2})$$

здесь $\omega_c = s \omega_s$ – электрическая угловая скорость скольжения.

Рассмотрим математическую модель АД при допущении о безынерционности процессов формирования электромагнитного момента, статическое значение которого определяется в соответствии с формулой Клосса:

$$M_e = \frac{2M_{kp}(1+as_{kp})}{\frac{s}{s_{kp}} + \frac{s_{kp}}{s} + 2as_{kp}} = \frac{2M_{kp}(1+as_{kp})ss_{kp}}{s^2 + s_{kp}^2 + 2as_{kp}^2s}, \quad (\text{П2.3})$$

где M_{kp} – критический (максимальный) электромагнитный момент АД

$$M_{kp} = \frac{mU_s^2}{2\omega_0 \left(R_s \pm \sqrt{R_s^2 + (x_{\sigma s} + x_{\sigma r})^2} \right)},$$

m – число фаз статора АД; U_s – действующее значение фазного напряжения статора; $x_{\sigma s}, x_{\sigma r}$ – индуктивные сопротивления статора и ротора, вызванные соответствующими потоками рассеяния; ω_0 – синхронная угловая скорость АД; s_{kp} – критическое скольжение, определяемое по формуле

$$s_{kp} = \pm \frac{R_r}{\sqrt{R_s^2 + (x_{\sigma s} + x_{\sigma r})^2}};$$

$a = R_s R_r^{-1}$ – безразмерный коэффициент, представляющий собой отношение активных сопротивлений фазных обмоток статора R_s и ротора R_r . Здесь знак «+» соответствует двигательному режиму работы АД, а знак «-» генераторному.

Математическое описание механических процессов в преобразователе энергии основывается на уравнении движения ЭП

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_c, \quad (\text{П2.4})$$

где $J = \text{const}$ – суммарный момент инерции ротора и приведенного к валу двигателя момента инерции механизма; M_c – приведенный момент сопротивления.

Среди всех параметрических способов регулирования скорости АД наибольшее распространение получило частотное управление в соответствии с законом М.П. Костенко, при котором перегрузочная способность по моменту поддерживается постоянной во всем диапазоне, т. е. $M_{kp} = \text{const}$, в результате чего электромагнитный момент АД (П2.3) является функцией только одного параметра, а именно скольжения (угловой скорости скольжения).

Рассмотрим техническую систему, в функции которой входит стабилизация уровня жидкости в цилиндрическом аппарате (рис. П2.1) с воздействием на частоту вращения центробежного насоса, который имеет жесткую кинематическую связь с частотно-регулируемым АД. Возмущающим воздействием в данном объекте управления является расход жидкости из накопительного резервуара Q_2 , вытекающей под действием силы тяжести, причем в зависимости от положения заслонки регулирующего клапана объемный расход может изменяться в ходе технологического процесса. При синтезе алгоритма управления приемем допущение о том, что динамические процессы в преобразователе частоты, питающем АД, описываются безынерционным звеном с коэффициентом передачи $k_{\dot{r}}$.

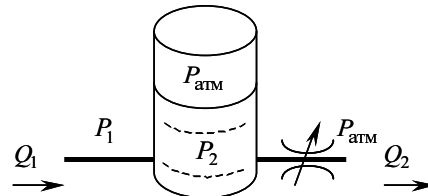


Рис. П2.1. Функциональная схема цилиндрического аппарата

Процесс изменения уровня жидкости заданной плотности ρ в цилиндрическом аппарате с известными площадью поперечного сечения S , а также коэффициентами местных сопротивлений ξ_1, ξ_2 и диаметрами d_1, d_2 сужающих устройств, описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dV}{dt} = Q_1 - Q_2,$$

где V – объем жидкости в аппарате, м^3 ; Q_1, Q_2 – объемные расходы жидкости через сужающие устройства, $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$, которые, в свою очередь, определяются разностью приложенных давлений и находятся как

$$Q_1 = k_1 \sqrt{P_1 - P_2},$$

$$Q_2 = k_2 \sqrt{P_2 - P_{\text{атм}}} = k_2 \sqrt{\rho gh};$$

$P_1, P_2 = P_{\text{атм}} + \rho gh$ – давления на входе и выходе сужающих устройств; k_1, k_2 – коэффициенты пропускной способности, зависящие от геометрических размеров входного и выходного сужающих устройств (клапанов) и плотности жидкости

$$k_i = \sqrt{\frac{2\pi^2 d_i^4}{16\xi_i \rho}}.$$

Учитывая, что объем цилиндрического резервуара определяется формулой

$$V = Sh,$$

окончательно получаем

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_1 - Q_2}{S}, \quad (\text{П2.5})$$

что соответствует типовому интегрирующему звену.

Нелинейность рассматриваемого объекта проявляется в виде степенной зависимости момента сопротивления ЭП от частоты вращения ротора (вентиляторная нагрузка), которая определяется конструктивными особенностями насоса, и в общем виде записывается как

$$M_c = M_0 + (M_{\text{сн}} - M_0) \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{н}}} \right)^r,$$

где M_0 – начальный момент сопротивления при $\omega \approx 0$; $M_{\text{сн}}, \omega_{\text{н}}$ – номинальные значения соответственно момента сопротивления и угловой скорости ротора АД; r – показатель степени, который может принимать различные, в том числе дробные значения.

Момент сопротивления центробежного насоса подчиняется квадратичной зависимости, причем в дальнейшем будем полагать, что $M_0 = 0$, т. е.

$$M_c = \frac{M_{\text{сн}}}{\omega_{\text{н}}^2} \omega^2. \quad (\text{П2.6})$$

Воспользовавшись формулами (П2.1) – (П2.6), можно составить следующую систему дифференциальных уравнений объекта управления в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{\omega} = \frac{1}{J} (M_e(s) - M_c(\omega^2)), \\ \dot{h} = \frac{1}{S} (k_0 \omega - Q_2), \end{cases} \quad (\text{П2.7})$$

где k_0 – коэффициент передачи центробежного насоса, определяемый как отношение установившегося значения объемного расхода Q_1 через входной клапан к угловой скорости насоса ω .

Скольжение, в свою очередь, определяется как

$$s = \frac{k_{\Pi} \omega_s^* - p_{\Pi} \omega}{k_{\Pi} \omega_s^*},$$

где ω_s^* – управляющее воздействие (выход регулятора), являющееся заданием на угловую скорость магнитного поля статора.

На рис. П2.2 изображена структурная схема объекта управления, соответствующая системе дифференциальных уравнений (П2.7), на которой приняты следующие обозначения: **ПЧ** – преобразователь частоты; **АД** – асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором; **Н** – центробежный насос; **Р** – цилиндрический резервуар, заполняемый жидкостью.

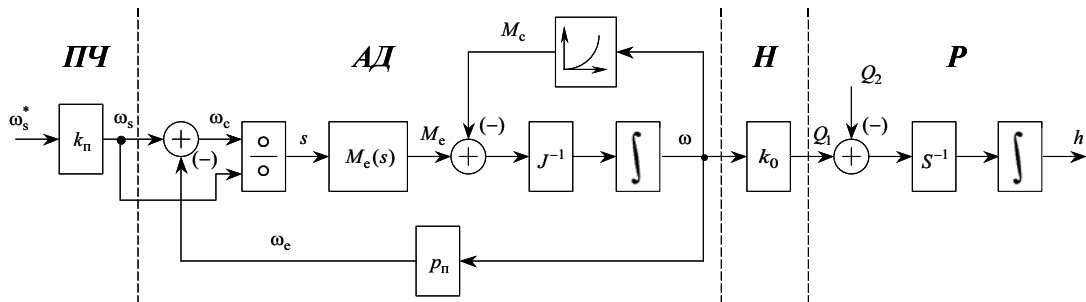


Рис. П2.2. Структурная схема объекта управления

Как видно из (П2.3), управляющее воздействие ω_s^* входит в первое уравнение системы (П2.7) нелинейно. Для приведения математической модели объекта к виду (2.2) воспользуемся стандартным допущением, согласно которому рабочий участок механической характеристики АД при частотном регулировании скорости вращения ограничен ее линейной областью, для которой справедливо

$$M_e = \frac{M_{eH}}{\omega_{cH}} \omega_c = \frac{M_{eH}}{\omega_{cH}} (k_{\Pi} \omega_s^* - p_{\Pi} \omega), \tag{П2.8}$$

M_{eH}, ω_{cH} – соответственно номинальные значения электромагнитного момента и угловой скорости скольжения.

Из второго уравнения (П2.7) можно выразить угловую скорость ротора АД

$$\omega = \frac{1}{k_0} (Sh + Q_2),$$

откуда при $Q_2 = \text{const}$ с учетом формул (П2.6) и (П2.8) получим

$$h^{(2)} = \frac{M_{\text{ен}} k_{\text{п}} k_0}{JS\omega_{\text{сн}}} \omega_s^* - \frac{M_{\text{ен}} p_{\text{п}}}{JS\omega_{\text{сн}}} (Sh^{(1)} + Q_2) - \\ - \frac{M_{\text{сн}}}{JSk_0\omega_{\text{н}}^2} \left((Sh^{(1)})^2 + 2SQ_2h^{(1)} + Q_2^2 \right).$$

Окончательно дифференциальное уравнение объекта управления второго порядка в канонической форме записи относительно старшей производной выхода имеет вид

$$h^{(2)} = - \left[\frac{M_{\text{ен}} p_{\text{п}}}{J\omega_{\text{сн}}} + \frac{M_{\text{сн}}}{Jk_0\omega_{\text{н}}^2} (Sh^{(1)} + 2Q_2) \right] h^{(1)} - \\ - \left[\frac{M_{\text{ен}} p_{\text{п}}}{JS\omega_{\text{сн}}} + \frac{M_{\text{сн}}}{JSk_0\omega_{\text{н}}^2} Q_2 \right] Q_2 + \frac{M_{\text{ен}} k_{\text{п}} k_0}{JS\omega_{\text{сн}}} \omega_s^*.$$

В качестве координат канонического вектора координат состояния x примем управляемую переменную и ее первую производную:

$$x_1 = h, \quad \dot{x}_1 = x_2 = \dot{h},$$

откуда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a(t, x_2, x_2^2) + bu. \end{cases}$$

Таким образом, объект управления с управляющим воздействием $u = \omega_s^*$ можно описать нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка вида (2.2), в котором управляемой переменной является уровень жидкости в аппарате $x_1 = h$, а сигнальное возмущение Q_2 входит в функцию $a(\cdot)$ через независимый параметр t .

Произведем расчет астатической САУ уровнем жидкости, в которой требуется наполнить цилиндрический резервуар с площадью поперечного сечения $S = 0,1 \text{ м}^2$ до уровня $h = 1 \text{ м}$ за время $t_p = 60 \text{ с}$. Центробежный насос имеет следующие номинальные данные: подача – $Q_{1н} = 24 \text{ м}^3 \cdot \text{ч}^{-1} = 0,00667 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$; КПД – 0,5; частота вращения – 1450 об/мин. Насос приводится в движение АД единой серии типа 4А90Л4У3 мощностью 2,2 кВт с синхронной частотой вращения 1500 об/мин, который имеет следующие параметры:

- номинальное скольжение $s_n = 5,1 \%$;
- критическое скольжение $s_{кр} = 33 \%$;
- число пар полюсов $p_n = 2$;
- номинальная угловая скорость ротора $\omega_n = 149,07 \text{ с}^{-1}$;
- момент инерции ротора $J_r = 0,0056 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;
- кратность критического момента $m_{кр} = 2,4$;
- активное сопротивление фазной обмотки статора $R_s = 4,15 \text{ Ом}$;
- активное сопротивление фазной обмотки ротора $R_r = 2,45 \text{ Ом}$;
- номинальный электромагнитный момент на валу АД

$$M_{ен} = \frac{P_n}{\omega_n} = \frac{2200}{149,07} = 14,76 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Приведенный к валу АД момент инерции насоса с достаточной степенью точности можно принять равным одной десятой части от момента инерции ротора, в результате чего суммарный момент инерции ЭП

$$J = 1,1 \cdot J_r = 6,16 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Остальные параметры объекта и системы управления находятся из следующих формул:

- коэффициент передачи преобразователя частоты:

$$k_n = \frac{\omega_{сн}}{\omega_{сн}^*} = \frac{2\pi \cdot 50}{10} = 31,415 \text{ (В} \cdot \text{с)}^{-1},$$

где $\omega_{сн}^* = 10 \text{ В}$ – номинальное задающее воздействие на частоту магнитного поля статора (выход регулятора уровня);

– коэффициент передачи центробежного насоса

$$k_0 = \frac{Q_{1н}}{\omega_n} = \frac{0,00667}{149,07} = 4,472 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3;$$

– коэффициент объекта при управлении u

$$b = \frac{M_{сн} k_{п} k_0}{JS \omega_{сн}} = \frac{M_{сн} k_{п} k_0}{JS \omega_{сн} s_{н}} =$$

$$= \frac{14,76 \cdot 31,415 \cdot 4,472 \cdot 10^{-5}}{6,16 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \cdot 314,15 \cdot 0,051} = 2,101 \text{ Н} \cdot (\text{В} \cdot \text{кг})^{-1}.$$

Как видно из математической модели объекта управления, функция-множитель $b(\cdot)$ является постоянной величиной и не зависит от вектора x и переменной t , в результате чего

$$b_{\max} = b_{\min} = b. \quad (\text{П2.9})$$

В соответствии с методикой синтеза МБК порядок УЖД выбирается на единицу меньше, чем порядок объекта управления $n = 2$. Для данного случая уравнение желаемых движений соответствует стационарному апериодическому звену и имеет следующий вид:

$$T_{ж} k_h h^{(1)} + k_h h = v, \quad (\text{П2.10})$$

где $T_{ж}$ – желаемая постоянная времени, определяющая быстродействие медленных движений; $v = k_h h$ – задающее воздействие на регулируемое значение уровня жидкости; k_h – коэффициент передачи датчика уровня

$$k_h = \frac{U_h}{h} = \frac{1}{1} = 1 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1},$$

здесь $U_h = 1 \text{ В}$ – сигнал отрицательной обратной связи с выхода датчика при $h = 1 \text{ м}$.

Учитывая, что первая производная h , участвующая в УЖД вида (П2.10), недоступна прямому измерению, для ее текущей оценки воспользуемся дифференцирующим фильтром второго порядка (порядок на единицу выше оце-

ниваемой производной), настроенным на биномиальное распределение корней (см. раздел П1.1 или [2.33]) с коэффициентом формы $d_\phi = 2$, структурная схема которого приведена на рис. П2.3.

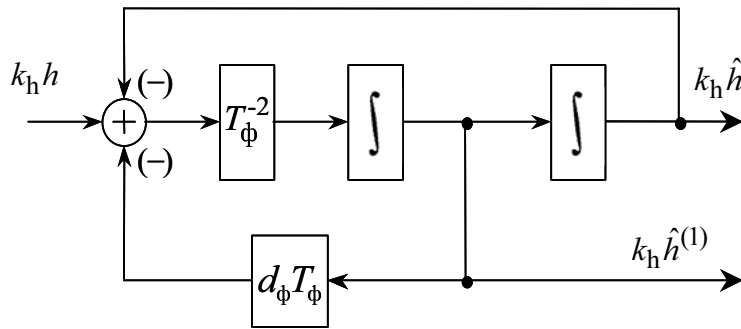


Рис. П2.3. Дифференцирующий фильтр второго порядка

При включении в структуру САУ динамической подсистемы оценки координат УЖД (2.18) преобразуется к виду

$$F(v, \hat{x}) = F^0(v, \hat{x}^0) - \hat{x}^{(1)} = \frac{v - k_h \hat{h}}{T_{\text{ж}}} - k_h \hat{h}^{(1)} = 0.$$

Укрупненная структурная схема САУ с дифференцирующим фильтром изображена на рис. П2.4, где использованы следующие обозначения: **КУ** – последовательное корректирующее устройство; **ОУ** – объект управления; **ДФ** – дифференцирующий фильтр второго порядка; **ДУ** – безынерционный датчик уровня жидкости.

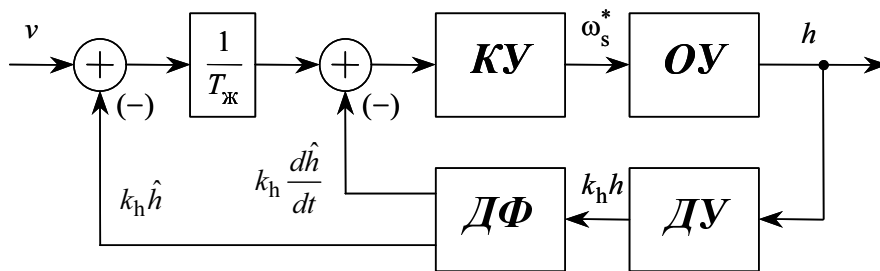


Рис. П2.4. Структурная схема САУ уровнем жидкости

Желаемую постоянную времени апериодического процесса по выходной переменной h определим из заданных технических требований, предъявляемых к синтезируемой САУ:

$$t_p \approx (3 \dots 4)T_{\text{ж}},$$

откуда

$$T_{\text{ж}} = \frac{t_p}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ с.}$$

Малый параметр закона управления и постоянная времени быстрых процессов определяются на основании рекомендаций, приведенных в п. 3 подраздела 2.2.3:

$$\mu = \frac{bT_{\text{ж}}}{\eta} = \frac{2,101 \cdot 15}{10} \approx 3,15,$$

откуда коэффициент передачи пропорционального закона управления (2.23) равен

$$\mu^{-1} = 0,317,$$

а постоянная времени ПБД

$$T_{\text{б}} = \frac{\mu}{b} = \frac{T_{\text{ж}}}{\eta} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ с.}$$

Как указано в теоретической части настоящего пособия (см. раздел 2.2), постоянная времени $T_{\text{б}}$ должна быть разнесена с минимальной постоянной времени объекта управления, которой в данном случае является электромеханическая постоянная времени АД:

$$T_{\text{м}} = \frac{J\omega_{\text{сн}}s_{\text{н}}}{M_{\text{сн}}\rho_{\text{п}}} = \frac{6,16 \cdot 10^{-3} \cdot 314,15 \cdot 0,051}{14,76 \cdot 2} = 3,34 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Последнее показывает, что данное требование не выполнено, и по этой причине малый параметр необходимо рассчитывать через величину $T_{\text{м}}$:

$$\mu = bT_{\sigma} = \frac{bT_M}{\eta} = \frac{2,101 \cdot 3,34 \cdot 10^{-3}}{6} \approx 2 \cdot 10^{-3},$$

откуда

$$\mu^{-1} = 854,7.$$

Для обеспечения астатизма по управляющему и возмущающему воздействиям дополним пропорциональный закон управления с коэффициентом μ^{-1} интегральной составляющей (см. подраздел 2.2.4), коэффициент передачи которой определим как

$$k_{\text{и}} = \mu^{-1} c_{\text{и}},$$

где $c_{\text{и}}$ – постоянный коэффициент:

$$c_{\text{и}} \leq \frac{b_{\min}}{4\xi_{\min}^2}.$$

Выбирая коэффициент демпфирования $\xi_{\min} = 2^{-0,5}$ из условия настройки ПБД на фильтр Баттерворта второго порядка (см. П1.1 или [2.33]) и учитывая (П2.9), получаем

$$k_{\text{и}} = \mu^{-1} \frac{b}{4\xi_{\min}^2} = \frac{854,7 \cdot 2,101}{4 \cdot (2)^{-1}} = 897,2.$$

В итоге закон управления преобразуется к форме (2.25)

$$\begin{aligned} u = \omega_s^* &= \mu^{-1} \left\{ F(v, \hat{\mathbf{x}}) + \mu^{-1} c_{\text{и}} \int_0^t F(v, \hat{\mathbf{x}}) dt \right\} = \\ &= \mu^{-1} \left\{ F(v, \hat{\mathbf{x}}) + k_{\text{и}} \int_0^t F(v, \hat{\mathbf{x}}) dt \right\}, \end{aligned}$$

а структурная схема синтезированного пропорционально-интегрального последовательного корректирующего устройства принимает вид, изображенный на рис. П2.5.

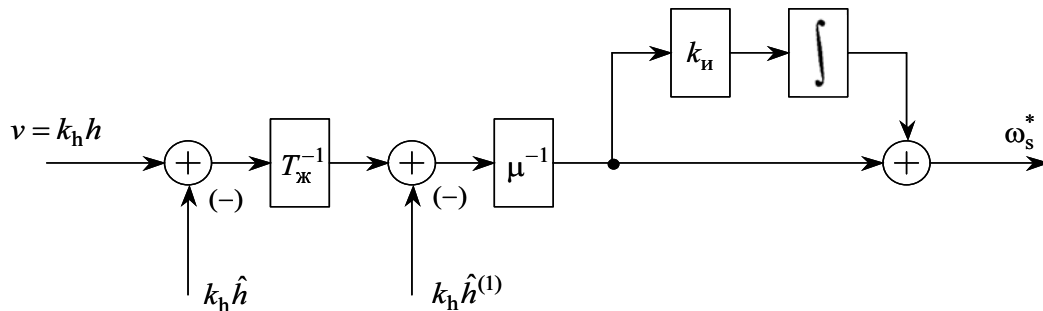


Рис. П2.5. Структурная схема ПИ-регулятора уровня жидкости

При определении постоянной времени дифференцирующего фильтра необходимо учитывать требование разнесения в (6...10) раз величины T_Φ по отношению к постоянной времени контура быстрых процессов T_6 , выражаемое неравенством

$$T_\Phi \ll T_6 = \frac{T_6}{\eta} = \frac{T_M}{\eta^2} = \frac{3,34 \cdot 10^{-3}}{36} \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

В целях проверки правильности результатов синтеза непрерывного ПИ-закона управления на основе метода больших коэффициентов было проведено цифровое моделирование режимов работы САУ с использованием программного продукта «MATLAB 7.7 (R2008b)», определение параметров которой представлено в виде m-файла в конце раздела П2.1. На рис. П2.6 изображена структурная схема набора модели САУ в приложении «Simulink», где нелинейным блоком «Sat» осуществляется ограничение выходной частоты силового преобразователя ЭП на уровне 50 Гц.

На рис. П2.7 и П2.8 представлены переходные процессы по уровню жидкости и угловой скорости АД при скачкообразном приложении задающего воздействия, соответствующего 1 м. Как видно из рис. П2.7, изменение уровня жидкости в резервуаре протекает в соответствии с заданным уравнением желаемых движений (П2.10) и имеет время регулирования

$$t_p \approx 3 \cdot T_{\text{ж}} = 45 \text{ с.}$$

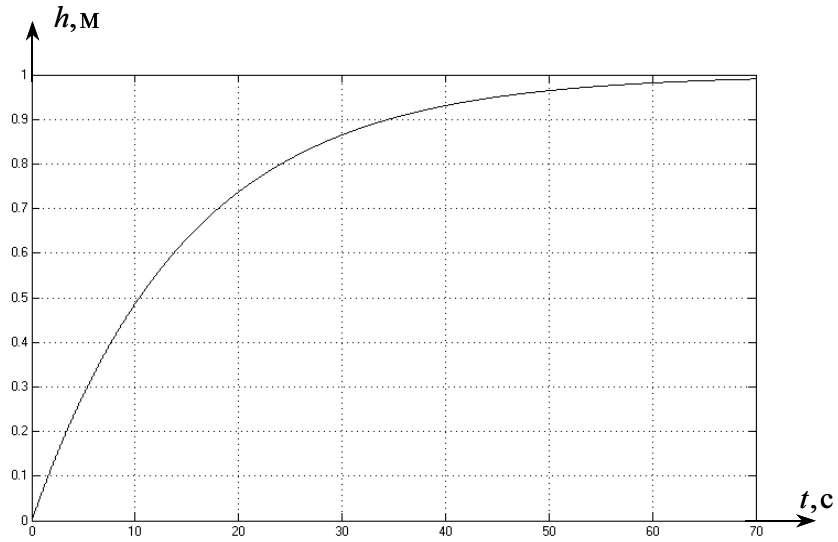


Рис. П2.7. Переходный процесс наполнения резервуара до уровня $h = 1$ м

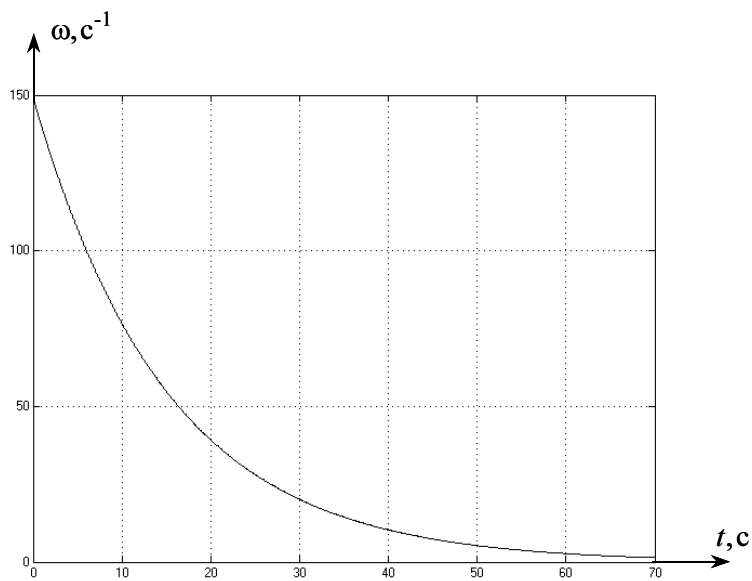


Рис. П2.8. Изменение угловой скорости вала АД (насоса) в процессе наполнения резервуара

Для иллюстрации быстрых процессов в объекте управления, вызванных малой постоянной времени T_M , на рис. П2.9 представлен переходный процесс изменения ω при пуске АД на номинальную скорость с учетом ограничения выходной частоты силового преобразователя (начальный участок графика, изображенного на рис. П2.8).

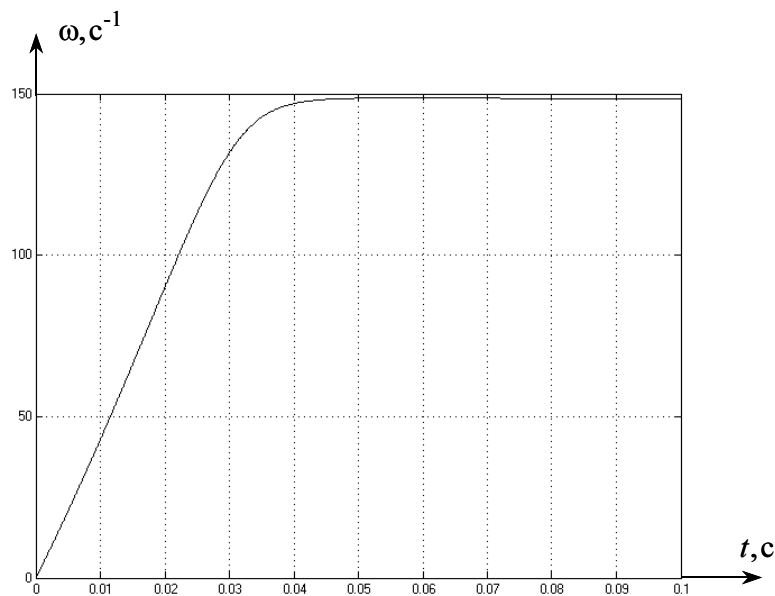


Рис. П2.9. Пуск АД на номинальную скорость с учетом ограничения выходной частоты силового преобразователя

На рис. П2.10 и П2.11 изображены графики переходных процессов при наполнении резервуара с нулевых начальных условий и при последующем приложении возмущающего воздействия Q_2 , соответствующего номинальному расходу. Как следует из графиков, действие возмущения локализуется в темпе быстрых движений с обеспечением нулевой ошибки регулирования по выходной переменной h в статическом режиме работы САУ.

Таким образом, синтезированная САУ уровнем жидкости с пропорционально-интегральным законом управления вида (2.25) обеспечивает желаемые показатели качества переходных процессов, заданные дифференциальным уравнением (П2.10), а также астатическое регулирование выходной переменной h .

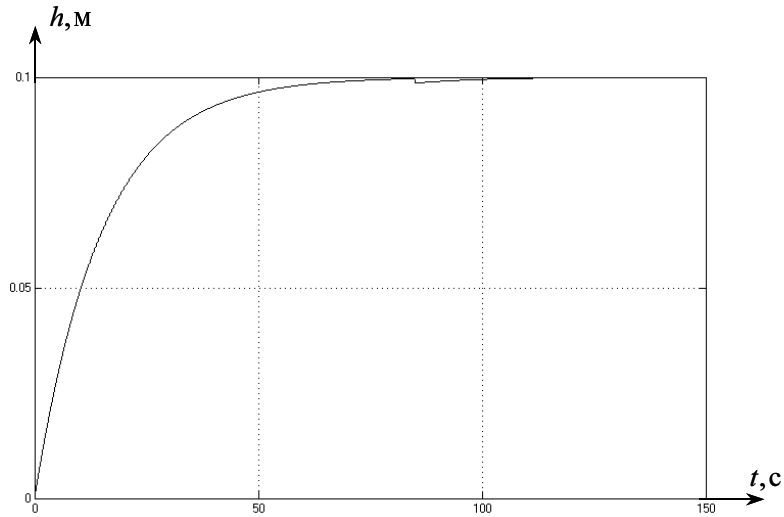


Рис. П2.10. Переходный процесс изменения уровня жидкости при наполнении до уровня $h = 0,1$ м с последующим приложением номинального возмущения Q_2

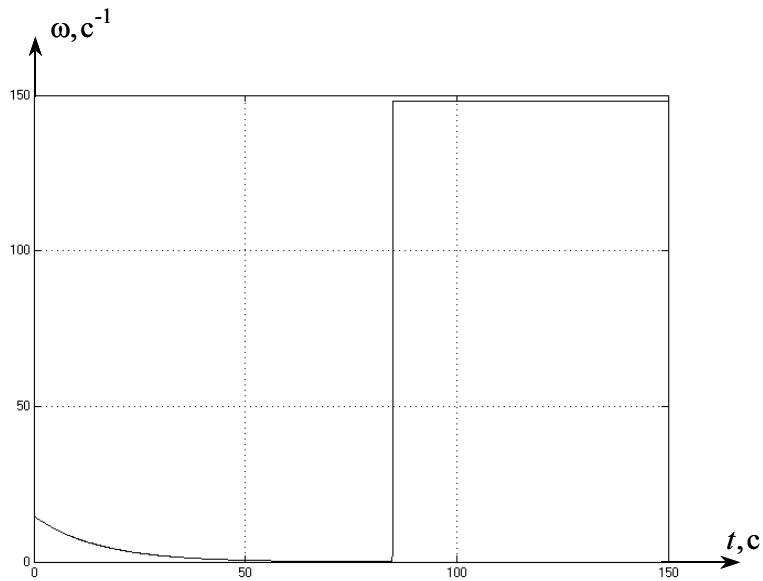


Рис. П2.11. Переходный процесс по угловой скорости ротора АД при наполнении резервуара с последующим открытием выходного клапана

Расчет параметров САУ стабилизации уровня жидкости в цилиндрическом резервуаре, представленный в виде m-файла «MATLAB 7.7 (R2008b)», приведен ниже.

```
% Параметры цилиндрического резервуара и центробежного насоса
% площадь поперечного сечения
S=0.1;
% уровень наполнения
h=1.0;
% время наполнения
t=60.0;
% номинальная подача
Q=24/3600;

% Параметры АД типа 4A90L4Y3
% номинальная мощность
P=2200.0;
% число пар полюсов
z=2.0;
% номинальное скольжение
sn=0.051
% угловая скорость магнитного поля статора
ws=2.0*pi*50.0;
% номинальная угловая скорость ротора
wn=ws*(1.0-sn)/z;
% момент инерции ротора
Jr=0.0056;
% суммарный момент инерции электропривода
J=1.1*Jr;
% номинальный электромагнитный момент АД
Me=P/wn;
% критическое скольжение
sk=0.33;
% кратность критического момента
mкр=2.4;
% критический момент
Mк=mкр*Me;
% активное сопротивление фазной обмотки статора
Rs=4.15;
% активное сопротивление фазной обмотки ротора
Rr=2.45;
% безразмерный коэффициент
a=Rs/Rr;
% электромеханическая постоянная времени электропривода
```



```

Tm=J*ws*sn/(Me*z);
% Параметры ОУ и САУ
% коэффициент передачи преобразователя частоты
kr=2.0*pi*50/10;
% коэффициент передачи насоса
ko=Q/wn;
% коэффициент передачи объекта
b=Me*kr*ko/(J*S*ws*sn);
% коэффициент передачи датчика уровня
kh=1.0;
% желаемая постоянная времени
Tg=t/4.0;
% коэффициент разделения движений
n=6.0;
% постоянная времени подсистемы быстрых движений
Tb=Tm/n;
% малый параметр
m=b*Tb;
% коэффициент демпфирования при настройке на фильтр Баттерворта второго порядка
ksi=1.0/sqrt(2.0);
% коэффициент передачи интегральной составляющей ЗУ
ki=b/(4.0*m*ksi*ksi);

% Параметры дифференцирующего фильтра второго порядка
% постоянная времени
Tf=0.0001;
% коэффициент формы
d=2.0;

```

П2.2. СИНТЕЗ ТРЕХКОНТУРНОЙ СИСТЕМЫ ПОЗИЦИОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА ПОСТОЯННОГО ТОКА С ПРЯМЫМ РАЗРЫВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Современные высококачественные ЭП реализуются в рамках замкнутых систем подчиненного регулирования с каскадным включением последовательных корректирующих устройств (регуляторов), осуществляющих одновременное управление несколькими координатами электромеханического преобразователя энергии. В многоконтурных САУ такого типа задающее воздействие на внутренний контур формируется с выхода регулятора внешнего контура. Система управления позиционным ЭП постоянного тока, реализованная по дан-

ному принципу, включает в себя внешний контур регулирования углового положения вала двигателя φ , подчиненный ему контур регулирования угловой скорости ω и внутренний по отношению к двум предыдущим замкнутый контур регулирования тока якоря $i_{\text{я}}$.

В быстродействующих позиционных ЭП постоянного тока, предназначенных для точного воспроизведения ступенчатых задающих воздействий на положение, питание обмотки якоря, как правило, осуществляется от транзисторного импульсного усилителя мощности, работающего в режиме широтно-импульсного преобразователя (ШИП). Благодаря высокой частоте коммутации полупроводниковых ключей, составляющей единицы – десятки килогерц, достигается широкая полоса пропускания во всех контурах регулирования. Учитывая, что напряжение якоря (управление) носит дискретный характер, САУ положением целесообразно реализовывать в классе законов с прямым разрывным управлением. Кроме того, как указывалось в теоретической части (см. подраздел 2.3.4), метод скользящих режимов позволяет достаточно просто ограничивать координаты состояния объекта, такие как максимальное мгновенное значение скорости и максимальное значение тока якоря. На основании изложенного ранее синтез системы управления позиционного ЭП выполним на основе релейных регуляторов положения, скорости и тока.

Рассмотрим линеаризованную математическую модель двигателя постоянного тока независимого возбуждения (ДПТ НВ), полученную на основании следующих допущений:

- 1) потери в стали, обусловленные гистерезисом кривой намагничивания магнитопровода и вихревыми токами, не учитываются;
- 2) реакция якоря полностью скомпенсирована и процесс коммутации идеален;
- 3) момент сопротивления холостого хода входит в общий приведенный момент сопротивления нагрузки;
- 4) кинематическая связь между двигателем и механизмом абсолютно жесткая;
- 5) ДПТ НВ работает при постоянстве номинального магнитного потока $\Phi_{\text{н}} = \text{const}$.

Последнее допущение позволяет рассматривать математическую модель объекта управления только относительно обмотки якоря, уравнение электрического равновесия которой имеет вид

$$u_{\text{я}} = R_{\text{я}}i_{\text{я}} + L_{\text{я}} \frac{di_{\text{я}}}{dt} + e_{\text{в}}, \quad (\text{П2.11})$$

где $u_{\text{я}}, i_{\text{я}}$ – напряжение и ток обмотки якоря; $R_{\text{я}}, L_{\text{я}}$ – активное сопротивление и индуктивность якорной цепи; $e_{\text{в}}$ – ЭДС вращения, наведенная в обмотке якоря

$$e_{\text{в}} = c\Phi_{\text{н}}\omega,$$

здесь ω – угловая скорость якоря; c – конструктивный коэффициент, зависящий от числа пар полюсов, а также количества активных проводников и параллельных ветвей обмотки якоря.

Электромагнитный момент, развиваемый электрической машиной, определяется по формуле

$$M_{\text{е}} = c\Phi_{\text{н}}i_{\text{я}}, \quad (\text{П.2.12})$$

а скорость вращения связана с углом поворота вала (положением) на основании равенства

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (\text{П.2.13})$$

Уравнениям (П.2.4), (П.2.11) – (П.2.13), которые описывают процессы электромеханического преобразования энергии в ДПТ НВ, соответствует структурная схема, изображенная на рис. П.2.12.

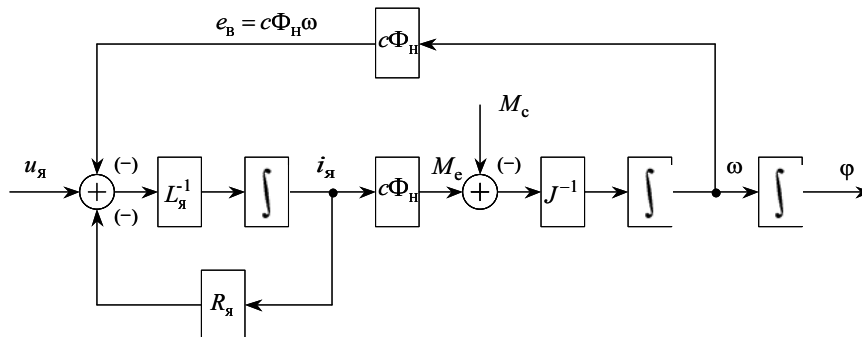


Рис. П.2.12. Структурная схема линейризованного ДПТ НВ при $\Phi_{\text{н}} = \text{const}$ и $J = \text{const}$

Рассмотрим процедуру синтеза трехконтурной релейной САУ положением на основе метода скользящих режимов для ДПТ НВ типа 2ПО160ЛГУХЛ4, имеющего следующие параметры:

- номинальная мощность $P_{\text{н}} = 7,1$ кВт;

– номинальное напряжение обмотки якоря $u_{ян} = 220 \text{ В}$;
 – суммарное активное сопротивление якорной цепи с учетом добавочных полюсов $R_я = 0,397 \text{ Ом}$;

– номинальная угловая скорость $\omega_н = 157,08 \text{ с}^{-1}$;

– индуктивность обмотки якоря $L_я = 0,0063 \text{ Гн}$;

– номинальное значение коэффициента полезного действия $\eta_н = 85,5 \%$;

– момент инерции якоря $J_г = 0,083 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$;

– номинальный ток обмотки якоря

$$i_{ян} = \frac{P_н}{\eta_н \cdot u_{ян}} = \frac{7100}{0,855 \cdot 220} = 37,75 \text{ А} ;$$

– максимально-допустимый ток $i_я$, определяемый из условий безопасной работы щеточно-коллекторного узла

$$i_{я\max} = 2,5 \cdot i_{ян} = 2,5 \cdot 37,75 = 94,37 \text{ А} ;$$

– произведение конструктивной постоянной электрической машины на номинальное значение магнитного потока

$$c\Phi_н = \frac{u_{ян} - i_{ян}R_я}{\omega_н} = \frac{220 - 37,75 \cdot 0,397}{157,08} = 1,305 \text{ В} \cdot \text{с} ;$$

– номинальный электромагнитный момент ДПТ НВ

$$M_{ен} = c\Phi_н i_{ян} = 1,305 \cdot 37,75 \approx 49,3 \text{ Н} \cdot \text{м} .$$

Обмотка якоря электрической машины подключена к безынерционному ШИП (импульсному усилителю мощности) с коэффициентом передачи $k_п$ и частотой коммутации силовых полупроводниковых ключей $f_k = 10 \text{ кГц}$ (период коммутации $T_k = 1 \cdot 10^{-4} \text{ с}$). Суммарный момент инерции ЭП принимается равным $J = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Синтез последовательных корректирующих устройств в системах подчиненного регулирования производится последовательно от внутреннего контура к внешнему. В соответствии с принятой математической моделью обмотки якоря по току $i_я$ (рис. П2.12), представляющей собой апериодическое звено, и требованием к выбору порядка уравнения желаемых движений в методе сколь-

зующих режимов, медленные процессы контура регулирования тока якоря описываются алгебраическим уравнением

$$F_1 = v_1 - k_i i_{я} = 0, \quad (\text{П2.14})$$

где $v_1 = k_i \cdot i_{я\max} = \pm 10 \text{ В}$ – задающее воздействие на максимально-допустимый ток, зависящее от уровней ограничения релейного регулятора скорости; k_i – коэффициент передачи в канале отрицательной обратной связи по току якоря

$$k_i = \frac{U_{i\max}}{i_{я\max}} = \frac{10}{94,37} = 0,106 \text{ В} \cdot \text{А}^{-1},$$

$U_{i\max} = 10 \text{ В}$ – величина сигнала отрицательной обратной связи при $i_{я\max}$.

Уравнение желаемых движений в замкнутом контуре скорости имеет первый порядок и соответствует стационарному апериодическому звену:

$$F_2 = v_2 - k_\omega T_{ж2} \dot{\omega} - k_\omega \omega = 0, \quad (\text{П2.15})$$

где $v_2 = \pm 10 \text{ В}$ – задающее воздействие на угловую скорость (выход регулятора положения); $T_{ж2}$ – желаемая постоянная времени в контуре регулирования ω , которая выбирается из условия разделения частот по отношению к T_k :

$$T_k \ll T_{ж2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с};$$

k_ω – коэффициент передачи в канале отрицательной обратной связи по угловой скорости

$$k_\omega = \frac{U_\omega}{\omega_n} = \frac{10}{157,08} = 0,0637 \text{ В} \cdot \text{с},$$

здесь $U_\omega = 10 \text{ В}$ – сигнал в канале отрицательной обратной связи, соответствующий номинальной скорости.

Желаемые движения во внешнем контуре регулирования положения имеют второй порядок и должны обеспечивать отсутствие перерегулирования в переходных процессах по φ :

$$F_3 = v_3 - k_\varphi T_{ж3}^2 \ddot{\varphi} - 2\xi_3 T_{ж3} k_\varphi \dot{\varphi} - k_\varphi \varphi = 0, \quad (\text{П2.16})$$

где v_3 – задающее воздействие на угол поворота вала; $\xi_3 = 1$ – коэффициент демпфирования, обеспечивающий монотонность переходных процессов в совокупности с максимальным быстродействием; k_ϕ – коэффициент передачи в канале отрицательной обратной связи по углу поворота вала, принимаемый в дальнейшем равным единице; $T_{ж3}$ – желаемая постоянная времени контура, удовлетворяющая неравенству

$$T_{ж2} \ll T_{ж3} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

В уравнениях (П2.15) и (П2.16) присутствует первая производная скорости, которая, как правило, недоступна прямому измерению. Для ее текущей оценки воспользуемся предположением, что в механизме имеет место постоянный реактивный момент нагрузки типа «сухое» трение (рис. П2.13), на основании чего $\dot{\omega}$ можно оценить по формулам (П2.4) и (П2.12) как

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J} (c\Phi_n i_{я} - M_c). \quad (\text{П2.17})$$

На рис. П2.14 изображена функциональная схема позиционного ЭП постоянного тока с каскадным включением последовательных корректирующих устройств, на которой приняты следующие обозначения: **РП**, **РС**, **РТ** – соответственно релейные регуляторы положения, скорости и тока якоря; **ШИИП** – широтно-импульсный преобразователь (импульсный усилитель мощности) на базе полностью управляемых полупроводниковых ключей; **ВУ** – вычислительное устройство первой производной скорости, построенное на основании (П2.17); **М** – двигатель постоянного тока независимого возбуждения; **LM** – обмотка возбуждения ДПТ НВ; **ВА**, **BR**, **BS** – датчики тока, скорости и положения соответственно.

Максимальная частота автоколебаний в реальном скользящем режиме работы контура тока якоря (минимальный период коммутации транзисторных ключей) задается шириной петли гистерезиса релейного регулятора тока, соответствующего рис. 2.13. Уровни выходного напряжения ШИП выбраны по номинальному значению напряжения обмотки якоря с некоторым запасом и составляют ± 225 В. Так как на высоких частотах динамические свойства обмотки якоря по току $i_{я}$ описываются интегрирующим звеном с коэффициентом

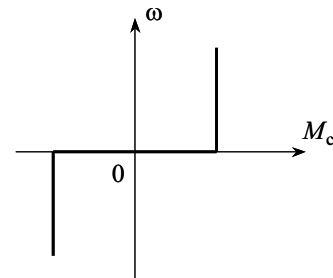


Рис. П2.13. Механическая характеристика нагрузки типа «сухое» трение

том передачи $L_{\text{я}}^{-1}$, заданная частота коммутации силовых ключей будет иметь место при следующей полуширине петли гистерезиса:

$$\varepsilon = \frac{u_{\text{я}} k_{\omega}}{4 \cdot L_{\text{я}} f_{\text{k}}} = \frac{225 \cdot 0,06365}{4 \cdot 0,0063 \cdot 10^4} = 0,0568 \text{ В.}$$

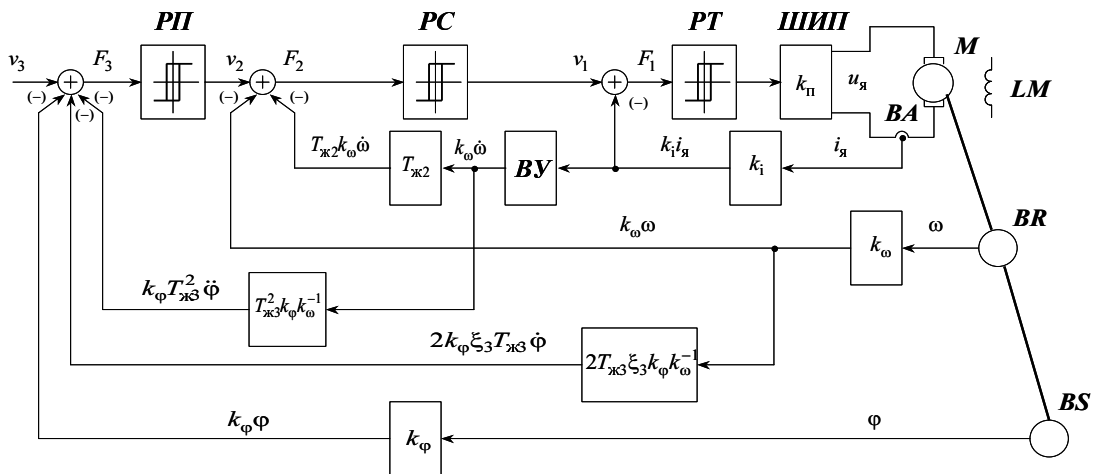


Рис. П2.14. Функциональная схема трехконтурного позиционного ЭП с прямым разрывным управлением

Ширина петель гистерезиса релейных регуляторов скорости и положения также выбирались из требования неперевышения частотой коммутации силовых транзисторов ШИП заданного значения $f_{\text{k}} = 10$ кГц с учетом уравнений желаемых движений и параметров системы.

Исследование динамических и статических режимов работы синтезированного позиционного ЭП постоянного тока производилось методом цифрового моделирования с использованием программы «Simulink», структурная схема набора модели САУ в которой приведена на рис. П2.15, а формулы для вычисления численных значений системы представлены в виде m-файла в конце раздела П2.2. В зависимости от величины скачка задающего воздействия на положение в ЭП можно выделить режимы отработки «малых» перемещений, когда ни одна из регулируемых переменных не выходит на ограничение, режимы «средних» перемещений, при которых имеет место интервал токоограничения, и режимы «больших» перемещений, сопровождаемых выходом ЭП на ограничения по току якоря и угловой скорости.

На рис. П2.16 – П2.18 приведены переходные процессы по положению φ , угловой скорости ω и току якоря $i_{\text{я}}$ при скачкообразном приложении v_3 и нулевых начальных условиях, иллюстрирующие перечисленные выше режимы работы позиционного ЭП постоянного тока. Приведенный момент сопротивления, изображенный на рис. П2.13, принимался равным половине номинального значения электромагнитного момента ДПТ НВ.

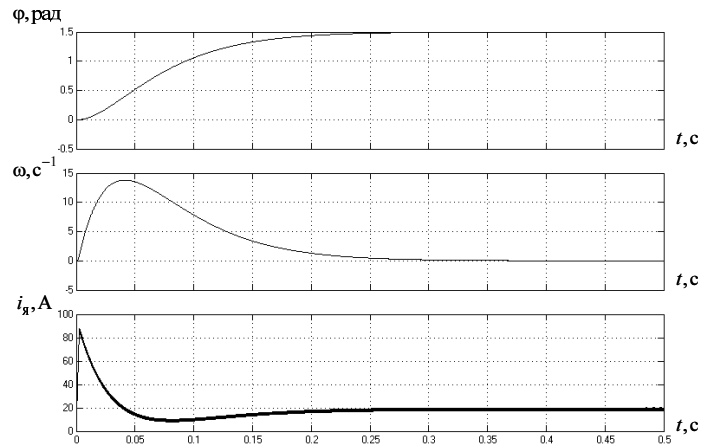


Рис. П2.16. Переходные процессы по координатам объекта в режиме «малых» перемещений

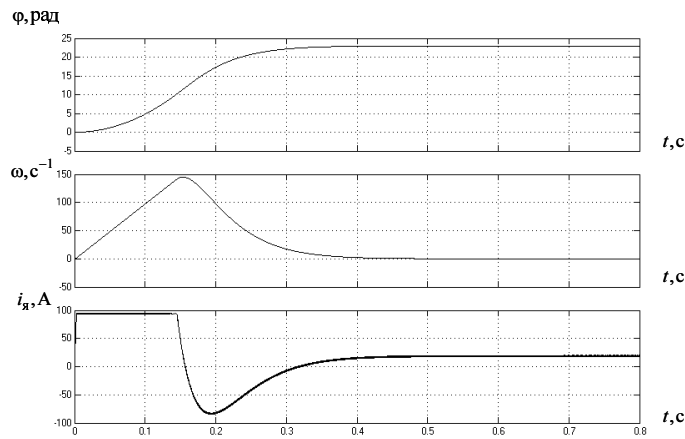


Рис. П2.17. Переходные процессы позиционного ЭП в режиме «средних» перемещений

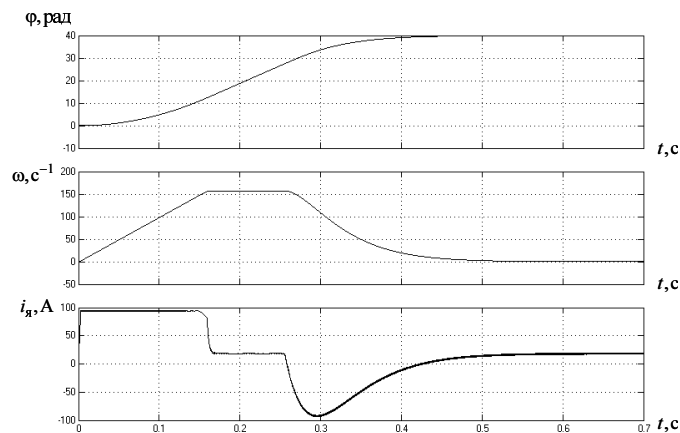


Рис. П2.18. Переходные процессы по координатам состояния объекта в режиме «больших» перемещений

Как видно из графиков переходных процессов по регулируемым переменным, в синтезированной трехконтурной САУ положением обеспечиваются желаемые показатели качества переходных процессов, заданные уравнениями (П2.14) – (П2.16), и ограничение промежуточных переменных, а именно тока обмотки якоря и угловой скорости двигателя.

Формулы для расчета параметров структурной схемы трехконтурной системы позиционного электропривода постоянного тока с прямым разрывным управлением, изображенной на рис. П2.15, представлены в виде следующего m-файла «MATLAB 7.7 (R2008b)»:

```
% Параметры ДПТ НВ типа 2ПО160ЛГУХЛ4
% номинальная мощность
P=7100.0;
% номинальное напряжение обмотки якоря
u=220.0;
% номинальная угловая скорость якоря
wn=157.08;
% суммарное активное сопротивление якорной цепи
Ra=0.397;
% индуктивность якоря
La=0.0063;
% номинальное КПД
kpd=0.855;
% номинальный ток якоря
Ia=P/(kpd*u);
```

```

% максимально-допустимый ток якоря
Im=2.5*Ia;
% произведение конструктивной постоянной на магнитный поток
сF=(u-Ia*Ra)/wn;
% номинальный электромагнитный момент
Me=сF*Ia;
% суммарный момент инерции электропривода
J=0.1;
% электромагнитная постоянная времени якорной цепи
Ta=La/Ra;

% Параметры САУ положением
% желаемая постоянная времени контура регулирования скорости
Tg2=0.002;
% желаемая постоянная времени контура регулирования положения
Tg3=0.04;
% коэффициента передачи по току
ki=10.0/Im;
% коэффициента передачи по скорости
kw=10.0/wn;
% коэффициента передачи по угловому положению
kf=1.0;
% коэффициент демпфирования контура регулирования положения
ksi=1.0;

```

П2.3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЕМ ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНОГО МЕХАНИЗМА

Важная роль в производственных процессах отводится подъемно-транспортным устройствам, которые предназначены для перемещения грузов различного назначения. На рис. П2.19 представлена упрощенная кинематическая схема синусного кулачкового механизма, осуществляющего поднятие (опускание) груза массой m_T . На входном валу 1 закреплен рычаг 2 с радиусом R , на конце которого установлен ролик 3, приводящий в движение тарелку толкателя 4. В зависимости от угла поворота вала $\varphi = \omega t$ происходит поступательное движение груза 5 по вертикальной оси со скоростью V . Отличительной особенностью данного типа подъемных механизмов является тот факт, что режимы работы исполнительного двигателя протекают в условиях нагрузок, значительно изменяющихся в зависимости от углового положения приводного

чительно изменяющихся в зависимости от углового положения приводного вала.

При вращении вала механизма с некоторой угловой скоростью груз перемещается в соответствии с законом

$$l = R \sin \varphi, \tag{П2.18}$$

откуда поступательная скорость движения

$$V = \frac{dl}{dt} = \omega R \cos \varphi,$$

где φ – угол поворота вала, отсчитываемый от горизонтальной оси.

На основании законов сохранения мощности и энергии можно записать следующие формулы для определения приведенных к входному валу момента сопротивления M_c и момента инерции механизма J_M :

$$M_c = \frac{F \rho_M}{\eta_M} = \frac{mg \rho_M}{\eta_M},$$

$$J_M = m \rho_M^2,$$

где $g = 9,81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ – ускорение свободного падения; m – суммарная масса груза и подвижных частей механизма; η_M – коэффициент полезного действия механизма; ρ_M – радиус приведения, представляющий собой отношение скоростей поступательного и вращательного движений:

$$\rho_M = \frac{V}{\omega} = R \cos \varphi,$$

откуда

$$M_c = \frac{mgR}{\eta_M} \cos \varphi, \tag{П2.19}$$

$$J_M = mR^2 \cos^2 \varphi. \tag{П2.20}$$

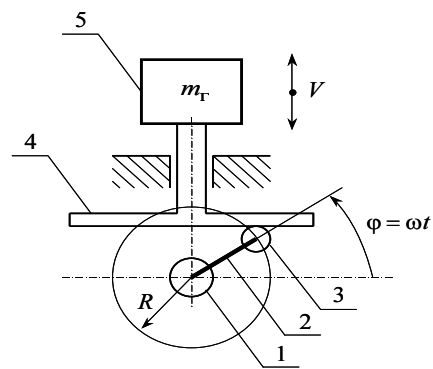


Рис. П2.19. Синусный кулачковый механизм

Допустим, что синусный кулачковый механизм приводится в движение через редуктор с передаточным числом i посредством ДПТ НВ, обмотка якоря которого запитана от быстродействующего регулируемого источника тока (РИТ). При синтезе воспользуемся математической моделью объекта управления, в которой параметры двигателя приведены к механизму и со стороны выходного вала редуктора определяются как

$$M_e^* = iM_e,$$

$$J_r^* = J_r i^2.$$

Тогда в соответствии с уравнением Лагранжа второго рода можно записать следующее уравнение движения ЭП:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \frac{dJ}{d\varphi} = iM_e - M_c,$$

и с учетом формул (П2.12), (П2.19) и (П2.20), а также зависимости

$$\frac{dJ}{d\varphi} = \frac{d(J_r^* + J_M)}{d\varphi} = -2mR^2 \sin \varphi$$

окончательно получить

$$(J_r^* + mR^2 \cos^2 \varphi) \cdot \ddot{\varphi} = ic\Phi_H i_{я} + \dot{\varphi}^2 mR^2 \sin \varphi - \frac{mgR}{\eta_M} \cos \varphi.$$

Последнее дифференциальное уравнение после преобразования к канонической форме записи относительно старшей производной углового перемещения примет следующий вид:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2 mR^2 \sin \varphi - mgR\eta_M^{-1} \cos \varphi}{J_r^* + mR^2 \cos^2 \varphi} + \frac{ic\Phi_H}{J_r^* + mR^2 \cos^2 \varphi} i_{я}. \quad (\text{П2.21})$$

Таким образом, рассматриваемый подъемно-транспортный механизм кулачкового типа описывается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка, в котором управляющим воздействием является ток якоря двигателя $i_{я}$, а выходной координатой – угол поворота вала φ . Выражению (П2.21) соответствуют структурная схема, изображенная на рис. П2.20, и уравнение вида (2.2)

$$\ddot{\phi} = a(t, \phi, \dot{\phi}) + b(t, \phi)i_{я},$$

где в качестве координат канонического вектора состояния x выступают угол поворота вала и его первая производная.

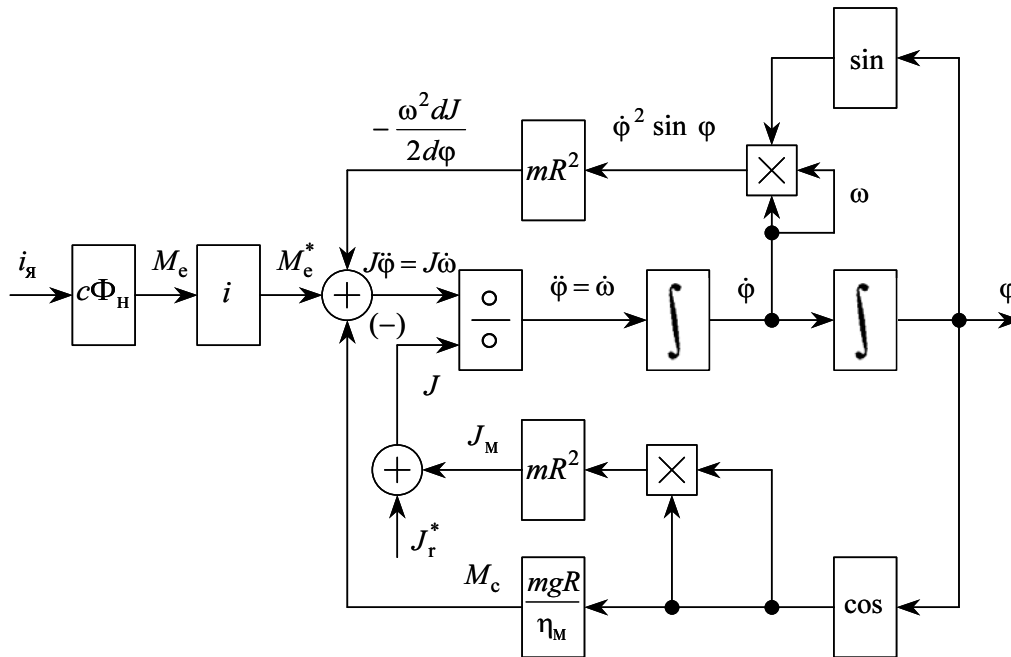


Рис. П2.20. Структурная схема объекта управления

Пересчет угла поворота ϕ в поступательное перемещение поднимаемого груза l выполняется на основании формулы (П2.18).

Рассмотрим методику синтеза закона управления по старшей производной вида (2.37) применительно к синусному кулачковому механизму со следующими параметрами:

- максимальная грузоподъемность $m_{\max} = 9$ кг;
- масса толкателя $m_M = 1$ кг;
- радиус рычага, массой которого в дальнейшем пренебрегаем, $R = 0,5$ м;
- минимально- и максимально-допустимые углы поворота вала, соответствующие начальному и конечному положениям груза:

$$\phi_{\min} = 10^\circ \approx 0,1745 \text{ рад,}$$

$$\varphi_{\max} = 75^\circ \approx 1,309 \text{ рад.}$$

Будем также полагать, что в качестве исполнительного двигателя используется ДПТ НВ типа 2ПО160ЛУХЛ, параметры которого приведены в разделе П2.2, жестко связанный с механизмом через редуктор с передаточным числом $i = 30$, причем потери в передаточном устройстве и механизме отсутствуют. Требуется синтезировать САУ углом поворота приводного вала кулачкового механизма, обеспечивающую перемещение груза из начального состояния в конечное за интервал времени 0,5 с.

РИТ может быть реализован на базе быстродействующего замкнутого контура регулирования тока якоря с прямым разрывным управлением (см. раздел П2.2) или с непрерывным регулятором, обеспечивающим широкую полосу пропускания частот. Коэффициент передачи РИТ определим как

$$k_{\text{рит}} = \frac{i_{\text{яmax}}}{U_{3\text{max}}} = \frac{94,37}{10} \approx 9,44 \text{ А} \cdot \text{В}^{-1},$$

где $U_{3\text{max}} = 10 \text{ В}$ – уровень ограничения выхода регулятора положения, соответствующий максимально допустимому току якоря $i_{\text{яmax}}$.

Порядок уравнения желаемых движений в методе локализации выбирается равным порядку объекта управления $n = 2$, причем УЖД должно обеспечивать монотонный переходной процесс, исключая удары груза об ограничивающую поверхность:

$$F(\nu, \mathbf{x}) = \nu - k_\varphi T_{\text{ж}}^2 \ddot{\varphi} - 2\xi_{\text{ж}} T_{\text{ж}} k_\varphi \dot{\varphi} - k_\varphi \varphi = 0, \quad (\text{П2.22})$$

где ν – задающее воздействие на угол поворота вала; $\xi_{\text{ж}}$ – коэффициент демпфирования; $T_{\text{ж}}$ – желаемая постоянная времени медленных процессов; k_φ – коэффициент передачи датчика положения, принимаемый в дальнейшем равным единице.

Максимальное быстродействие медленных процессов при отсутствии перерегулирования будет достигаться при $\xi_{\text{ж}} = 1$, когда характеристическое уравнение УЖД (П2.22) имеет пару кратных отрицательных вещественных

корней. Данному распределению корней соответствует следующая переходная функция:

$$\varphi_{\text{ж}}(t) = k_{\varphi}^{-1} \left(1 - \frac{t + T_{\text{ж}}}{T_{\text{ж}}} \right) e^{-\frac{t}{T_{\text{ж}}}}. \quad (\text{П2.23})$$

Как указывалось в теоретической части пособия (см. раздел 2.4), формально контур быстрых движений является безынерционным, и для его технической регуляризации в структуру САУ требуется ввести доминирующую инерционность. Выполнить данное требование можно за счет включения в канал отрицательной обратной связи линейного дифференцирующего фильтра с характеристическим полиномом порядка $n + 1 = 3$:

$$D_{\varphi}(T_{\varphi}p) = T_{\varphi}^3 p^3 + d_{2\varphi} T_{\varphi}^2 p^2 + d_{1\varphi} T_{\varphi} p + 1,$$

в котором величины $d_{1\varphi}$, $d_{2\varphi}$ выбираются из условий настройки КБД на ограниченные снизу значения коэффициентов формы при $b = b_{\text{max}}$, а постоянная времени T_{φ} находится из условия разделения темпов быстрых и медленных движений при $b = b_{\text{min}}$.

С учетом изложенного выше, пропорциональный закон управления (2.40) примет следующий вид:

$$u = i_{\text{я}} = k_{\text{рит}} U_{\text{з}} = k \left(F(v, \hat{\mathbf{x}}) - \hat{x}^{(2)} \right), \quad (\text{П2.24})$$

где $k = k_{\text{р}} k_{\text{рит}}$ – коэффициент передачи, представляющий собой произведение коэффициента передачи регулятора $k_{\text{р}}$ на коэффициент передачи РИТ $k_{\text{рит}}$.

Структурная схема САУ положением входного вала механизма, реализующая алгоритм (П2.24), изображена на рис. П2.21. Здесь приняты следующие обозначения: **РП** – регулятор положения (угла поворота вала) с коэффициентом $k_{\text{р}}$; **ДФ** – дифференцирующий фильтр третьего порядка; **РИТ** – быстродействующий (безынерционный) РИТ; **ДП** – датчик положения с $k_{\varphi} = 1$; **ОУ** – объект управления (рис. П2.20) с приведенными к механизму значениями $M_{\text{е}}^*$ и $J_{\text{г}}^*$.

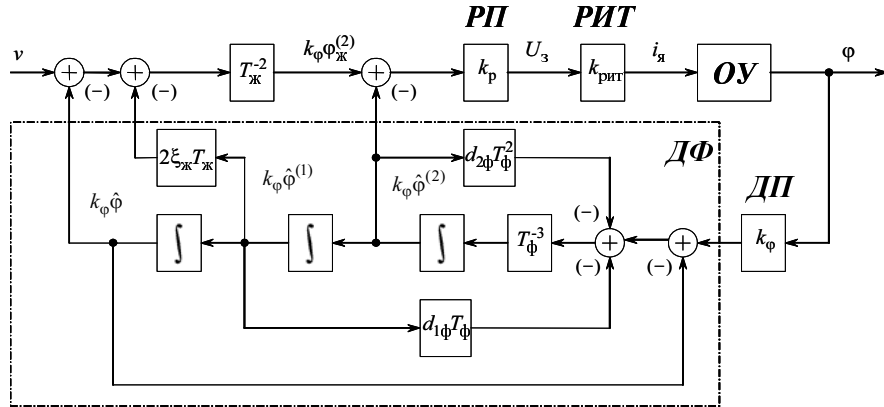


Рис. П2.21. Структурная схема САУ положением приводного вала синусного кулачкового механизма

Численное значение коэффициента передачи пропорционального закона управления определяется из интервального выражения (см. подраздел 2.4.2) с использованием минимально возможной величины функции-множителя $b_{\min}(\cdot)$:

$$b_{\min} = \frac{ic\Phi_{\text{H}}}{J_{\text{r}}i^2 + (m_{\text{max}} + m_{\text{M}})R^2 \cos^2 \varphi_{\min}} =$$

$$= \frac{30 \cdot 1,305}{0,083 \cdot 30^2 + (9 + 1) \cdot 0,5^2 \cdot 0,985^2} = 0,5076,$$

откуда

$$k = \frac{20 \dots 100}{b_{\min}} = \frac{100}{0,5076} = 197.$$

Коэффициент передачи П-регулятора положения

$$k_{\text{p}} = \frac{k}{k_{\text{рит}}} = \frac{197}{9,44} = 20,875.$$

Желаемую постоянную времени определим из условия вхождения переходного процесса в 5%-ю окрестность от установившегося значения для случая биномиального распределения корней линейного звена второго порядка, описываемого (П2.22). В соответствии с заданными техническими требованиями постоянная времени желаемых процессов из (П2.23) находится как

$$T_{\text{ж}} \approx 0,1 \text{ с},$$

а постоянная времени фильтра (см. подраздел 2.4.2) ограничивается неравенством

$$T_{\phi} \leq \frac{T_{\text{ж}}}{\eta} \sqrt[n+1]{1 + b_{\text{min}} k} = \frac{0,1}{10} \sqrt[3]{1 + 100} \approx 0,0465 \text{ с}.$$

В целях исключения влияния на качество быстрых процессов присутствующих малых инерционностей объекта управления постоянную времени фильтра в дальнейших расчетах примем равной

$$T_{\phi} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

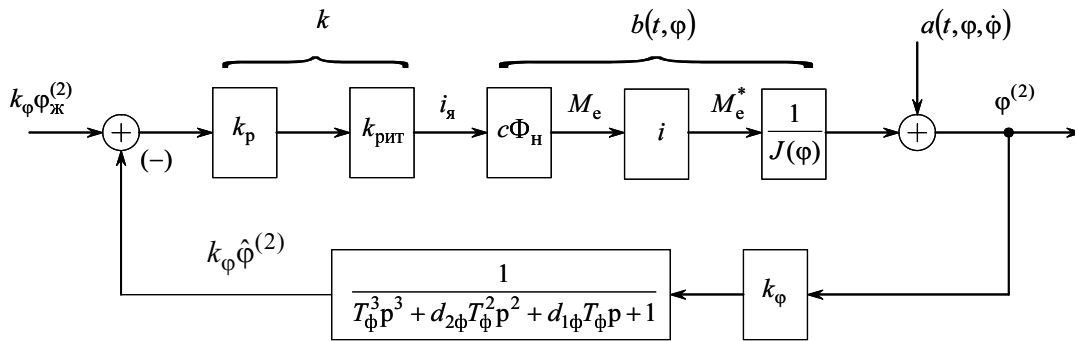


Рис. П2.22. Структурная схема КБД синтезируемой САУ

Коэффициенты формы ДФ $d_{1\phi}$, $d_{2\phi}$ находятся на основании структурной схемы КБД, изображенной на рис. П2.22. Характеристический полином быстрых движений при $T_{\text{бmin}}$ в данном случае определяется как

$$D_{\text{б}}(p) = T_{\phi}^3 p^3 + d_{2\phi} T_{\phi}^2 p^2 + d_{1\phi} T_{\phi} p + 1 + k_{\phi} k b_{\text{max}},$$

или

$$D_{\text{б}}(p) = \frac{T_{\phi}^3}{1 + k_{\phi} k b_{\text{max}}} p^3 + \frac{d_{2\phi} T_{\phi}^2}{1 + k_{\phi} k b_{\text{max}}} p^2 + \frac{d_{1\phi} T_{\phi}}{1 + k_{\phi} k b_{\text{max}}} p + 1, \tag{П2.25}$$

где b_{\max} – максимальное значение функции-множителя при управлении $i_{\text{я}}$:

$$b_{\max} = \frac{ic\Phi_{\text{н}}}{J_{\text{r}}i^2 + m_{\text{м}}R^2 \cos^2 \varphi_{\max}} =$$

$$= \frac{30 \cdot 1,305}{0,083 \cdot 30^2 + 1 \cdot 0,5^2 \cdot 0,259^2} = 0,524.$$

Характеристический полином (П2.25) в общем виде записывается как

$$D_{\text{б}}(p) = T_{\text{б}}^3 p^3 + d_{2\text{б}} T_{\text{б}}^2 p^2 + d_{1\text{б}} T_{\text{б}} p + 1, \quad (\text{П2.26})$$

где $d_{2\text{б}} = d_{1\text{б}} = 2$ – коэффициенты формы, выбираемые из требования настройки КБД на фильтр Баттерворта третьего порядка (см. раздел П1.1 или [2.33]), причем

$$T_{\text{б}} = \frac{T_{\text{ф}}}{\sqrt[3]{1 + k_{\text{ф}} k b_{\max}}} = \frac{0,001}{\sqrt[3]{1 + 1 \cdot 197 \cdot 0,524}} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Приравнивая коэффициенты полиномов (П2.25) и (П2.26), с учетом последней формулы окончательно получаем

$$d_{2\text{ф}} = d_{2\text{б}} \sqrt[3]{1 + k_{\text{ф}} k b_{\max}} = 2 \cdot \sqrt[3]{1 + 1 \cdot 197 \cdot 0,524} = 9,41,$$

$$d_{1\text{ф}} = d_{1\text{б}} (1 + k_{\text{ф}} k b_{\max})^{2/3} = 2 \cdot (1 + 1 \cdot 197 \cdot 0,524)^{2/3} = 44,3.$$

На рис. П2.23 изображена структурная схема набора математической модели САУ в приложении «Simulink», расчет параметров которой приведен в конце данного раздела, где с помощью нелинейного блока «Saturation» реализовано ограничение выхода регулятора положения, соответствующее требованию неперевышения током якоря величины $i_{\text{яmax}}$:

$$-10\text{В} \leq U_3 \leq +10\text{В}.$$

На рис. П2.24, П2.25 представлены графики переходных процессов по управляющему воздействию $i_{\text{я}}$ и выходной координате φ в режимах подъема максимального груза из начального положения φ_{\min} в конечное φ_{\max} и возврата механизма без нагрузки в исходное состояние. При цифровом моделировании начальные условия в объекте управления и дифференцирующем фильтре устанавливались в соответствии с заданным режимом работы механизма.

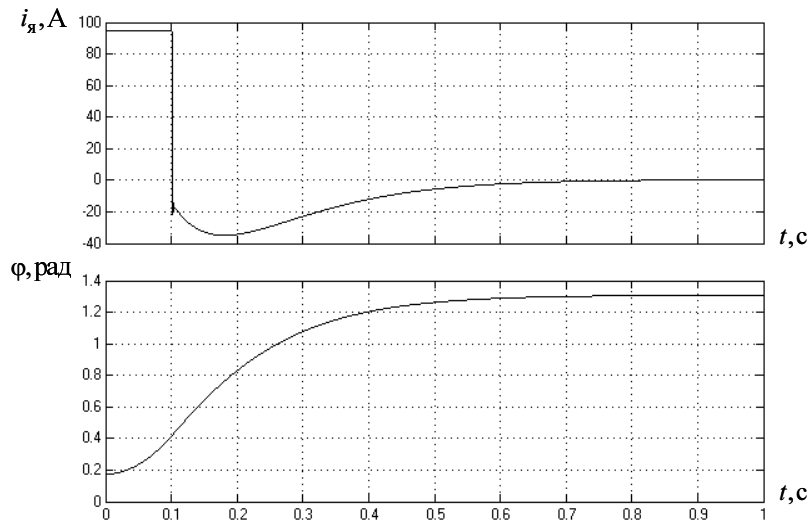


Рис. П2.24. Подъем максимального груза из начального положения ϕ_{\min} в конечное ϕ_{\max}

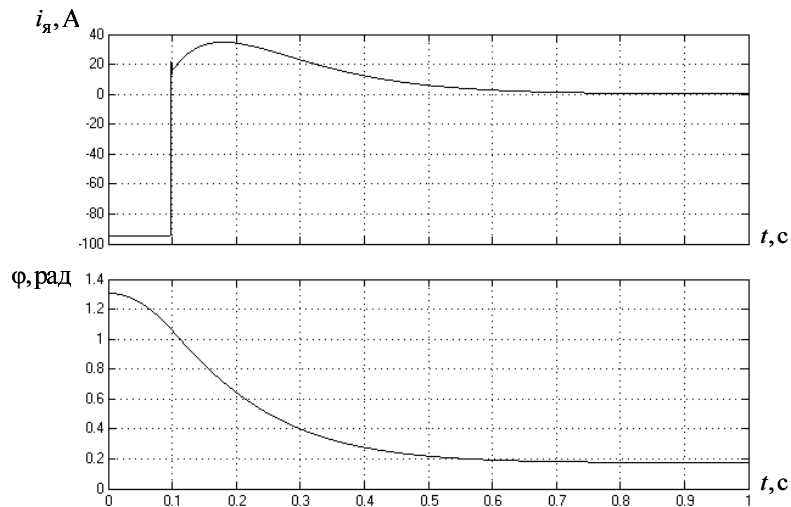


Рис. П2.25. Спуск тарелки синусного кулачкового механизма из ϕ_{\max} в исходное положение ϕ_{\min} без груза

Как видно из графиков, синтезированная САУ обеспечивает желаемые показатели качества переходных процессов, заданные дифференциальным

уравнением (П2.22), со статической ошибкой менее 1 %. При этом во всех рассматриваемых режимах ток якоря двигателя не превышает предельного значения (ограничение $i_{я}$ проявляется на начальном участке переходного процесса).

Для обеспечения астатизма по выходной переменной φ можно дополнить пропорциональный закон управления (П2.24) интегральной составляющей или перейти к интегральному алгоритму управления вида (2.42) с преднамеренной организацией в САУ положением трехтемповых процессов. В последнем случае базовый закон управления углом поворота приводного вала синусного кулачкового механизма примет следующий вид:

$$\dot{i} = k \left(F(v, \hat{x}) - \hat{x}^{(2)} \right) = k_p k_{\text{рит}} \left(F(v, \hat{\varphi}, \hat{\varphi}^{(1)}) - \hat{\varphi}^{(2)} \right), \quad (\text{П2.27})$$

которому соответствует структурная схема САУ, изображенная на рис. П2.26.

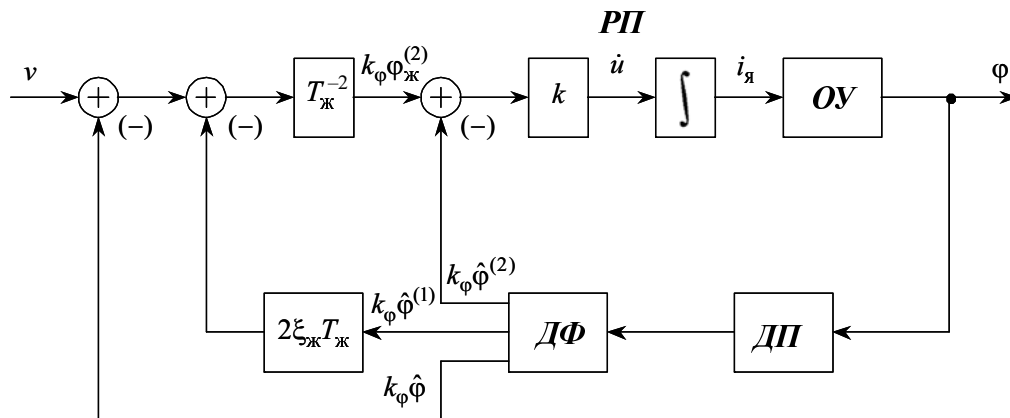


Рис. П2.26. Укрупненная структурная схема САУ положением с законом управления вида (П2.27)

Перенесем интегратор регулятора положения Π за сумматор старшей производной и понизим на единицу порядок дифференцирующего фильтра в канале отрицательной обратной связи. В результате структурная схема астатической САУ преобразуется к окончательному виду, представленному на рис. П2.27.

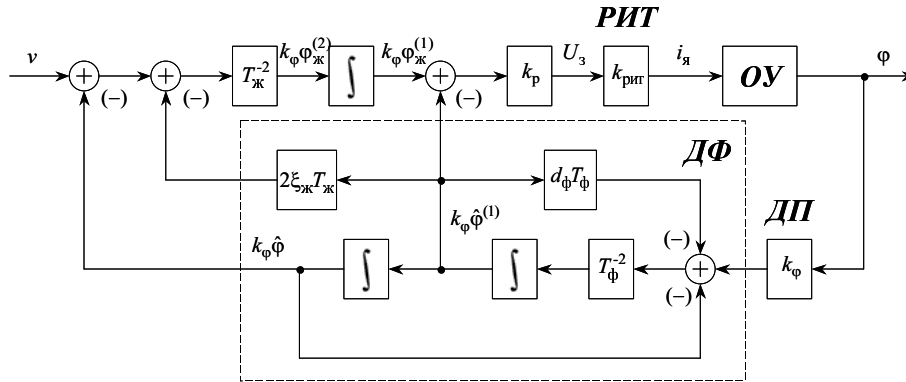


Рис. П2.27. Структурная схема САУ с преобразованным астатическим законом управления

Для определения постоянной времени быстрых движений воспользуемся требованием разделения темпов процессов в КМД и КБД, откуда

$$T_{\sigma} \leq \frac{T_{\text{ж}}}{\eta} = \frac{0,1}{10} = 0,01 \text{ с.}$$

Как было указано ранее (см. подраздел 2.4.3), коэффициент передачи И-регулятора, обеспечивающий требуемую постоянную времени T_{σ} , находится как отношение

$$k = \frac{\eta}{T_{\text{ж}} b_{\min}} = \frac{1}{T_{\sigma} b_{\min}} = \frac{1}{0,01 \cdot 0,5076} = 197,$$

откуда коэффициент регулятора

$$k_{\text{р}} = \frac{k}{k_{\text{рип}}} = \frac{197}{9,44} = 20,875.$$

Следует обратить внимание на совпадение значения коэффициента $k_{\text{р}}$ с величиной коэффициента передачи регулятора в рассмотренном выше пропорциональном законе управления, что с учетом понижения порядка дифференцирования свидетельствует о лучшей помехозащищенности САУ с И-регулятором.

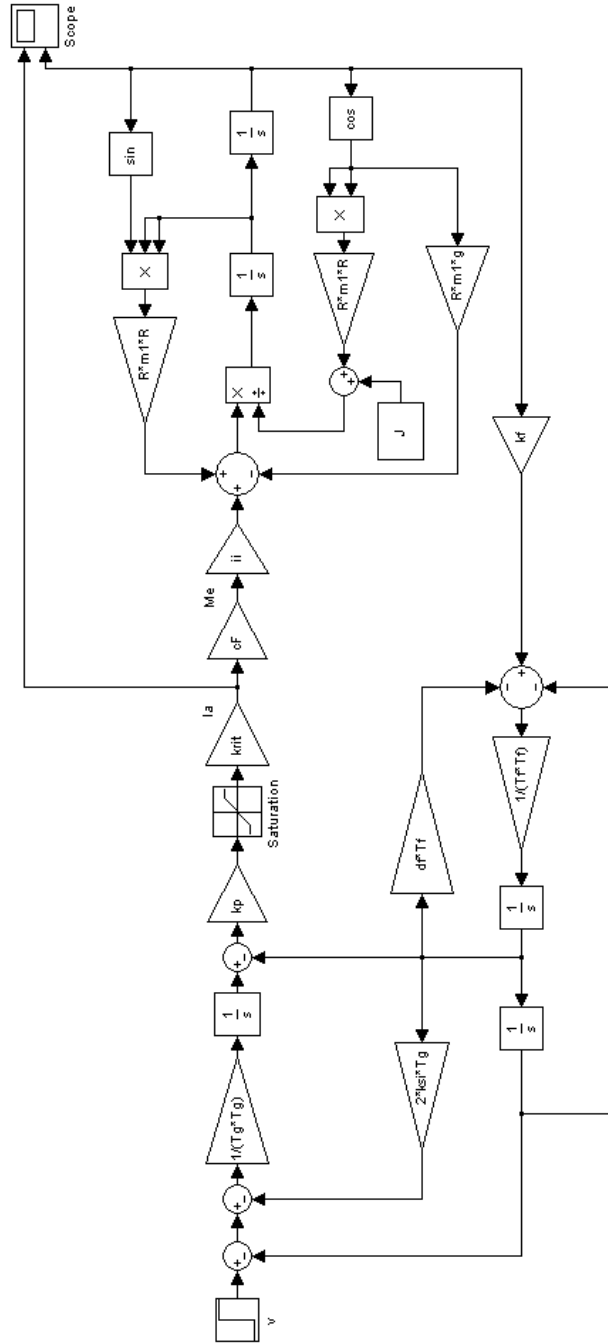


Рис. П2.28. Структурная схема набора астагической САУ положением синусного кулачкового механизма в «Simulink»

Сверхбыстрые процессы, вызванные наличием в структуре САУ дифференцирующего фильтра второго порядка (см. рис. П2.3), должны быть разнесены с быстрыми движениями при значении b_{\max} :

$$T_{\Phi} \leq \frac{T_{\text{бmin}}}{\eta} = \frac{1}{10kb_{\max}} = \frac{1}{10 \cdot 197 \cdot 0,524} \approx 1 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

На рис. П2.28 изображена структурная схема набора математической модели синтезированной астатической САУ положением подъемного механизма в «Simulink», а на рис. П2.29 и П2.30 – графики переходных процессов по току якоря и положению выходного вала редуктора для режимов работы, описанных ранее. Настройка ДФ производилась на биномиальное распределение корней с $d_{\Phi} = 2$. Как видно из графиков, синтезированный закон управления вида (П2.27) обеспечивает монотонный переходный процесс по углу поворота вала с заданным быстродействием и нулевой статической ошибкой.

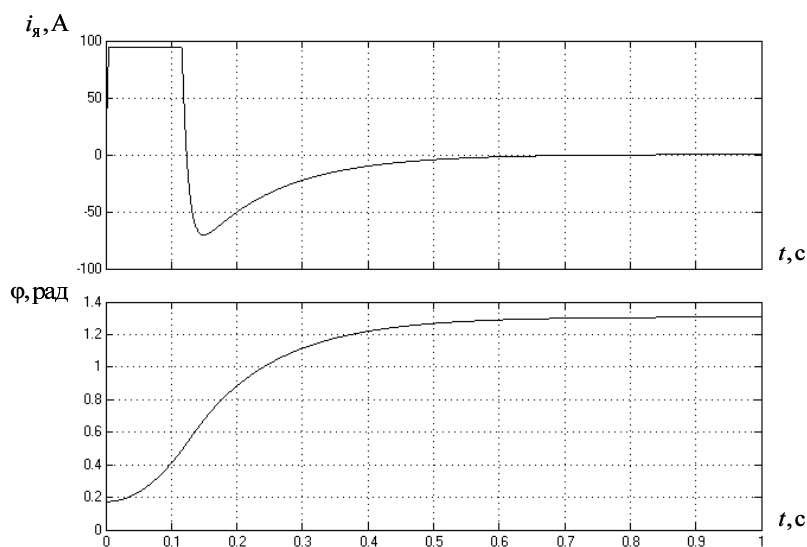


Рис. П2.29. Подъем максимального груза в астатической САУ положением механизма

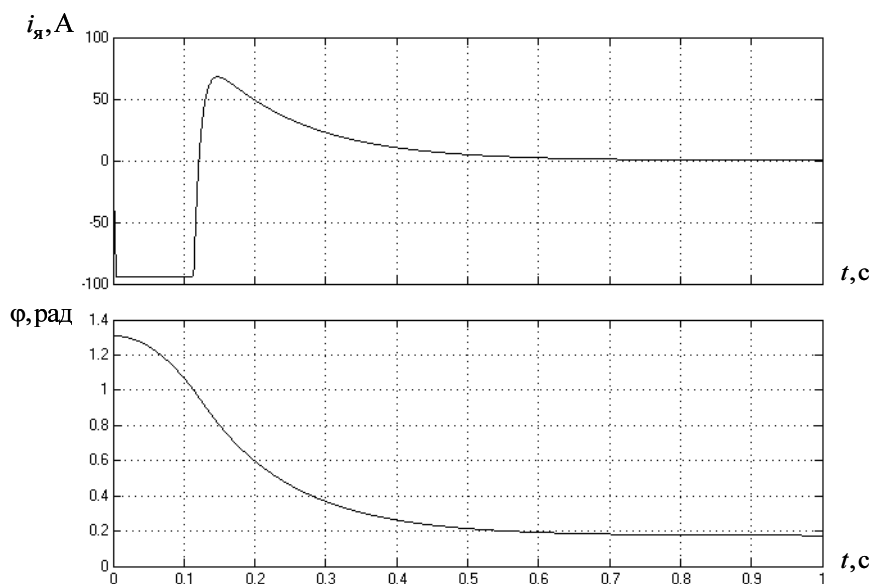


Рис. П2.30. Возврат подъемно-транспортного механизма в исходное положение на холостом ходу

Формулы для расчета численных значений статического и астатического законов управления положением синусного кулачкового механизма, синтезированных на основании метода локализации, представлены в виде следующего m-файла «MATLAB 7.7 (R2008b)»:

```
% Параметры синусного кулачкового механизма
% масса толкателя
m1=1.0;
% максимальная грузоподъемность
m2=9.0;
% суммарная масса груза и механизма
m=m1+m2;
% радиус рычага
R=0.5;
% минимальный угол поворота вала
f1=10.0*pi/180.0;
% максимальный угол поворота вала
f2=75.0*pi/180.0;

% Параметры электромеханической системы постоянного тока
% передаточное число механической передачи
ii=30.0;
```

```
% максимально-допустимый ток якоря
Im=94.37;
% произведение конструктивной постоянной на магнитный поток
cF=1.305;
% момент инерции якоря ДПТ НВ
Ja=0.083;
% приведенный к механизму момент инерции якоря
J=Ja*ii*ii;

% Параметры ОУ и САУ положением вала
% ускорение свободного падения
g=9.81;
% минимальное значение функции-множителя при управлении
b1=ii*cF/(J+m*R*R*cos(f1)*cos(f1));
% максимальное значение функции-множителя при управлении
b2=ii*cF/(J+m1*R*R*cos(f2)*cos(f2));
% коэффициент передачи датчика положения
kf=1.0;
% коэффициент передачи безынерционного РИТ
krit=Im/10.0;
% желаемая постоянная времени
Tg=0.1;
% коэффициент демпфирования желаемых движений
ksi=1.0;
% коэффициент передачи П-регулятора положения
kp=100.0/(b1*krit);

% Параметры дифференцирующих фильтров Баттерворта второго и
третьего порядков
% постоянная времени дифференцирующего фильтра
Tf=0.001;
% коэффициент формы дифференцирующего фильтра второго порядка
df=2.0;
% коэффициенты формы дифференцирующего фильтра третьего по-
рядка
df1=2.0*((1.0+kf*kp*krit*b2)^(2.0/3.0));
df2=2.0*((1.0+kf*kp*krit*b2)^(1.0/3.0));
```

Часть 3

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

ВВЕДЕНИЕ

Как правило, цель автоматического управления техническими объектами и технологическими процессами – перевод ОУ из некоторого начального состояния в требуемое конечное, стабилизация регулируемых переменных, обеспечение желаемых прямых или косвенных показателей качества переходных процессов и т. д. – может быть достигнута множеством способов и реализующих их алгоритмов управления. Поэтому перед разработчиками САУ всегда стоит задача выбора из множества возможных законов управления одного – *оптимального*, т. е. наилучшего в определенном смысле. Именно на его основе может быть построена оптимальная САУ, обеспечивающая предельно эффективное достижение цели управления. Показатель эффективности в теории автоматического управления формулируется в виде *функционала качества J*, требование минимизации или максимизации численного значения которого (в зависимости от физического смысла) на траекториях движений САУ

$$J \rightarrow \min(\max)$$

называют *критерием оптимальности*. В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь задач минимизации *J*, так как задачи максимизации сводятся к ним изменением знака функционала качества.

Следует подробнее остановиться на понятии функционала, который представляет собой математическую категорию более сложную, чем функция. Известная из курса математического анализа функция $f(x)$ каждому численному значению аргумента x (в общем случае – векторного) из области определения ставит в соответствие число – значение функции f . В функционалах роль аргумента играют функции некоторого класса, каждой из которых соответствует

численное значение \mathbf{J} . Характерным примером функционала является определенный интеграл

$$\mathbf{J} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx .$$

Приведем примеры критериев оптимальности.

1. Так как мощность джоулевых потерь в электрической цепи пропорциональна квадрату электрического тока

$$\Delta p = i^2 R ,$$

где R – активное сопротивление цепи, то потери энергии на интервале времени $t \in (t_H, t_K)$ определяются как

$$Q = R \int_{t_H}^{t_K} i^2(t) dt ,$$

где t_H, t_K – начальный и конечный моменты времени процесса управления.

На этом основании критерий оптимальности вида

$$\mathbf{J} = \int_{t_H}^{t_K} i^2(t) dt \rightarrow \min$$

является критерием минимума потерь энергии.

2. Если подынтегральная функция критерия тождественно равна единице, то

$$\mathbf{J} = \int_{t_H}^{t_K} 1 \cdot dt = t_K - t_H .$$

Поэтому такой критерий оптимальности соответствует требованию минимальной продолжительности процесса управления, т. е. предельному быстродействию САУ.

3. Пусть

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} \Delta\omega(t) dt ,$$

где $\Delta\omega(t)$ – динамическое отклонение (просадка) частоты вращения (угловой скорости) электропривода от заданного значения под влиянием возмущающе-

го воздействия (момента сопротивления нагрузки), тогда критерий оптимальности вида $J \rightarrow \min$, рассматриваемый в контексте имеющихся технических ограничений, соответствует минимальной ошибке по положению вала в следящем электроприводе.

Как уже указывалось во введении ко второй части настоящего пособия, обобщенная структура оптимальной САУ имеет вид, изображенный на рис. 3.1. Здесь П – *оптимальный программатор*, на основании априорной информации о характеристиках ОУ и желаемых значениях выходных переменных системы $y_{ж}$ генерирующий временную «развертку» задающего воздействия v^{opt} на замкнутую через *оптимальный регулятор* Р систему регулирования у.

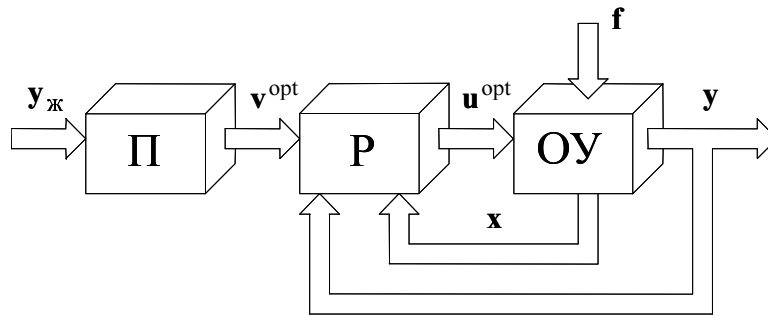


Рис. 3.1. Обобщенная структурная схема оптимальной САУ

Оптимальные программатор и регулятор в структуре (рис. 3.1) реализуют два принципиально различных вида законов оптимального управления:

- *разомкнутое временное программное управление*;
- *замкнутое оптимальное управление* (с обратными связями).

Критерии оптимальности этих подсистем САУ также обычно различаются. Например, «внутренняя» замкнутая система регулирования может быть оптимизирована по какому-либо динамическому критерию (быстродействие, точность, максимальная степень устойчивости и т.д.), а «внешняя» разомкнутая – по энергетическому (минимум затрат энергии, минимум потерь, максимальная производительность).

В настоящем пособии анализируются три основных подхода к синтезу оптимальных законов автоматического управления.

1. Классическое вариационное исчисление. Здесь рассматриваются:
 - простейшая задача, решение которой базируется на уравнениях Эйлера;

– задача об условном экстремуме функционала (непосредственно задача оптимального управления динамическим объектом) и метод множителей Лагранжа.

2. Неклассическое вариационное исчисление, основанное на принципе максимума Л.С. Понтрягина и расширяющее класс допустимых управлений до соответствующего задачам предельного быстрогодействия.

3. Метод динамического программирования Р. Беллмана.

Вариационные методы требуют решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяют непосредственно найти временное программное управление. Лишь в некоторых простых случаях от него удастся перейти к замкнутым алгоритмам оптимального управления, например, с помощью метода фазовой плоскости. В методе динамического программирования сразу ищется оптимальное управление с обратной связью, однако его нахождение связано с решением гораздо более сложной системы дифференциальных уравнений в частных производных.

В теории оптимального управления существуют различные формы записи функционалов качества. В этом пособии рассматриваются только так называемые задачи Лагранжа, функционал качества в которых имеет форму определенного интеграла

$$\mathbf{J} = \int_{t_n}^{t_k} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt,$$

здесь \mathbf{x}, \mathbf{u} – векторы-столбцы координат состояния и управляющих воздействий ОУ,

так как известные из теории управления задачи Майера и Больца сводятся к ним путем «расширения» пространства состояний объекта [3.3, 3.7].

3.1. ЭЛЕМЕНТЫ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.1.1. Задача о безусловном экстремуме функционала – простейшая задача вариационного исчисления

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Пусть задан функционал

$$\mathbf{J} = \int_{x_1}^{x_2} f_0(x, y(x), y'(x)) dx,$$

подынтегральная функция которого непрерывно дифференцируема по всем аргументам и зависит от неизвестной функции $y(x)$ и ее первой производной $y'(x) = dy(x)/dx$. Требуется найти такую непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$, которая, проходя через требуемые граничные точки (граничные условия)

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1, \\ y(x_2) = y_2, \end{cases}$$

доставляла бы экстремум функционалу \mathbf{J} . Так как никаких других ограничений на искомую функцию не налагается, такие задачи называются задачами о *безусловном* экстремуме функционала.

Так же как и при анализе функций на экстремум, для нахождения решения этой задачи – *экстремали* $y^{\text{opt}}(x)$ – используется необходимое условие экстремума функционала, определяемое теоремой Эйлера [3.1].

Теорема. Если функция $y^{\text{opt}}(x)$ доставляет экстремум интегралу \mathbf{J} , то она удовлетворяет дифференциальному уравнению (уравнению Эйлера)

$$\frac{\partial f_0}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f_0}{\partial y'} = 0.$$

В общем случае уравнение Эйлера – это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, при решении которого постоянные интегрирования находятся из граничных условий.

Энциклопедическим примером применения уравнения Эйлера является задача о нахождении кратчайшего пути между двумя точками на плоскости. Известно, что длина кривой $y(x)$, соединяющей точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , находится как

$$l = \mathbf{J} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

здесь $f_0 = \sqrt{1 + (y')^2}$.

Уравнение Эйлера для этого функционала принимает вид

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\sqrt{1 + (y')^2} \right) = 0,$$

откуда получаем

$$\frac{dy}{dx} = C,$$

следовательно, $y = Cx + d$, т. е. минимальный путь между заданными точками проходит по отрезку соединяющей их прямой линии.

Так как в теории автоматического управления все процессы протекают во времени, t является единственной независимой переменной, и простейшая задача вариационного исчисления принимает вид

$$\mathbf{J} = \int_{t_H}^{t_K} f_0(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \text{extr},$$

где $x(t_H) = x_H$, $x(t_K) = x_K$, $\dot{x}(t) = dx/dt$, а уравнение Эйлера записывается как

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение Эйлера является лишь необходимым, но недостаточным условием экстремума функционала, и в некоторых случаях оно может иметь решения, не совпадающие с экстремалами. Тогда при выполнении усиленных необходимых условий Лежандра

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}^2} > 0$$

для минимума функционала и

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \dot{x}^2} < 0$$

для максимума *достаточные условия* экстремума определяются не рассматриваемыми здесь условиями Якоби.

Если функционал качества \mathbf{J} зависит от производных $x(t)$ высших порядков, т. е.

$$\mathbf{J} = \int_{t_H}^{t_K} f_0(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \cdot dt, \quad x^{(i)} = d^i x / dt^i,$$

то необходимое условие экстремума описывается уравнением Эйлера–Пуассона:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial f_0}{\partial x^{(n)}} = 0,$$

или

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial f_0}{\partial x^{(i)}} = 0. \quad (3.2)$$

Уравнения Эйлера вида (3.1) справедливы и в случае, когда искомая функция является векторной:

$$\mathbf{J} = \int_{t_n}^{t_k} f_0(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt,$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T,$$

где T – индекс матричного транспонирования, тогда необходимые условия экстремума \mathbf{J} определяются системой уравнений

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

3.1.2. Нахождение оптимального характеристического полинома линейной системы

Потребуем, чтобы на траекториях $x(t)$ отработки рассогласований по начальным условиям (так называемая свободная составляющая движений – отклонение от равновесного состояния) одноканальной линейной САУ достигался минимум линейно-квадратичного функционала качества

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} \left(x^2 + a_1 \dot{x}^2 + \dots + a_n \left(x^{(n)} \right)^2 \right) dt, \quad (3.4)$$

где $a_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n}$ – весовые коэффициенты.

В данном случае уравнение Эйлера–Пуассона (3.2) имеет вид

$$2x - 2a_1 \ddot{x} + \dots + (-1)^{(n)} 2a_n x^{(2n)} = 0.$$

Его характеристический полином, определяющий моды экстремалей

$$D_{\text{эп}}(p) = 1 - a_1 p^2 + \dots + (-1)^n a_n p^{2n},$$

обладает следующими особенностями [3.1]:

– содержит только четные степени оператора дифференцирования (Лапласа) p ;

– имеет коэффициенты с чередующимися знаками.

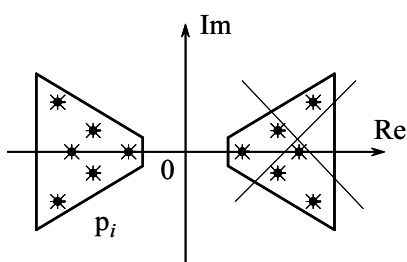


Рис. 3.2. Иллюстрация к формированию оптимального характеристического полинома

Вследствие этого корни полинома $D_{\text{эп}}(p)$ образуют две группы, симметричные относительно мнимой оси комплексной плоскости, рис. 3.2. Отбрасывая «правые» («неустойчивые») корни, из оставшихся $p_i, i = \overline{1, n}$ согласно теореме Безу формируем оптимальный характеристический полином САУ:

$$D^{\text{opt}}(p) = \prod_{i=1}^n (p - p_i).$$

Теперь оптимальный в смысле (3.4) характер собственных движений САУ вполне управляемым линейным объектом легко обеспечить, например, посредством модального метода синтеза.

3.1.3. Оптимальное по критерию минимума потерь энергии управление позиционным электроприводом постоянного тока. Синтез с помощью уравнения Эйлера–Пуассона

Предполагая, что обмотка якоря двигателя постоянного тока с магнитоэлектрическим или независимым электромагнитным возбуждением запитана от быстродействующего регулируемого источника тока, математическую модель объекта управления при общепринятых допущениях представим в виде

$$\begin{cases} J \frac{d\omega}{dt} = c\Phi_{\text{H}} i_{\text{я}} - M_{\text{с}}, \\ \frac{d\alpha}{dt} = \omega, \end{cases}$$

где $\omega(t), \alpha(t)$ – частота вращения и угол поворота ротора (якоря) двигателя; M_c – приведенный к валу двигателя момент сопротивления нагрузки; J – суммарный момент инерции маховых масс ротора двигателя и нагрузки (приведенный); $c\Phi_H$ – положительный коэффициент; $i_{\text{я}} = k_T u$ – ток обмотки якоря, равный произведению управляющего воздействия u на коэффициент передачи источника тока k_T .

Цель управления позиционным электроприводом заключается в повороте вала двигателя, изначально находящегося в состоянии покоя:

$$\omega(0) = 0; \quad \alpha(0) = 0; \quad t_H = 0,$$

на заданный угол α_3 за время $T > 0$ с остановкой в конце перемещения:

$$\omega(T) = 0; \quad \alpha(T) = \alpha_3; \quad t_K = T.$$

В подобных системах преобладающей составляющей момента сопротивления нагрузки является так называемое «сухое трение», когда

$$M_c(t) = M_T \cdot \text{sign}(\omega(t)); \quad M_T > 0.$$

Если для определенности положить $\alpha_3 > 0$, то в процессе всего перемещения $M_c = M_T = \text{const} > 0$. Это существенно упрощает аналитическое решение задачи.

Потребуем, чтобы джоулевы потери энергии в обмотке якоря двигателя в процессе перемещения были минимально возможными, т.е.

$$Q = R_{\text{я}} \int_0^T i_{\text{я}}^2(t) dt \rightarrow \min,$$

здесь $R_{\text{я}}$ – активное сопротивление электрической цепи обмотки якоря, и формализуем задачу оптимального управления следующим образом.

Модель объекта управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\mu + bu, \end{cases}$$

где $x_1 = \alpha$; $x_2 = \omega$, $\mu = M_T J^{-1} = \text{const} > 0$; $b = c\Phi_H k_T J^{-1}$,

граничные условия:

– начальные

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0; \end{cases}$$

– конечные

$$\begin{cases} x_1(T) = \alpha_3 > 0, \\ x_2(T) = 0; \end{cases}$$

критерий оптимальности:

$$\mathbf{J} = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min.$$

Так как подынтегральная функция критерия оптимальности $f_0 = u^2$ может быть выражена через управляемую переменную $x = x_1$

$$f_0 = u^2 = \left(\frac{\dot{x}_2 + \mu}{b} \right)^2 = \left(\frac{\ddot{x} + \mu}{b} \right)^2,$$

то сформулированная задача допускает простое решение с помощью уравнения Эйлера–Пуассона (3.2), которое в данном случае принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial f_0}{\partial \ddot{x}} \Big|_{x(t)=x^{\text{opt}}(t)} = 0,$$

или

$$\left(x^{\text{opt}} \right)^{(4)} = 0.$$

Последовательно интегрируя последнее выражение, получаем:

$$\ddot{x}^{\text{opt}}(t) = C_1,$$

$$\dot{x}^{\text{opt}}(t) = C_1 t + C_2,$$

$$\dot{x}^{\text{opt}}(t) = x_2^{\text{opt}}(t) = \frac{C_1}{2}t^2 + C_2t + C_3,$$

$$x^{\text{opt}}(t) = x_1^{\text{opt}}(t) = \frac{C_1}{6}t^3 + \frac{C_2}{2}t^2 + C_3t + C_4.$$

Из начальных условий имеем $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Из конечных условий:

$$\begin{cases} \frac{C_1}{2}T^2 + C_2T = 0, \\ \frac{C_1}{6}T^3 + \frac{C_2}{2}T^2 = \alpha_3, \end{cases}$$

отсюда

$$C_1 = -\frac{12\alpha_3}{T^3}, \quad C_2 = \frac{6\alpha_3}{T^2}.$$

То есть оптимальные траектории координат объекта:

$$x_1^{\text{opt}}(t) = \frac{\alpha_3}{T^2}t^2 \left(3 - \frac{2t}{T} \right),$$

$$x_2^{\text{opt}}(t) = \frac{6\alpha_3}{T^2}t \cdot \left(1 - \frac{t}{T} \right).$$

Так как в силу уравнений ОУ

$$u(t) = b^{-1}(\ddot{x}(t) + \mu),$$

оптимальное временное программное управление определяется зависимостью

$$u^{\text{opt}}(t) = b^{-1} \left[\frac{6\alpha_3}{T^2} \left(1 - \frac{2t}{T} \right) + \mu \right],$$

которая характеризует так называемую «треугольную» диаграмму тока

$$i_{\text{я}}^{\text{opt}}(t) = k_{\text{T}}u^{\text{opt}}(t).$$

Графики полученных оптимальных траекторий координат состояния ОУ и временного программного управления изображены на рис. 3.3.

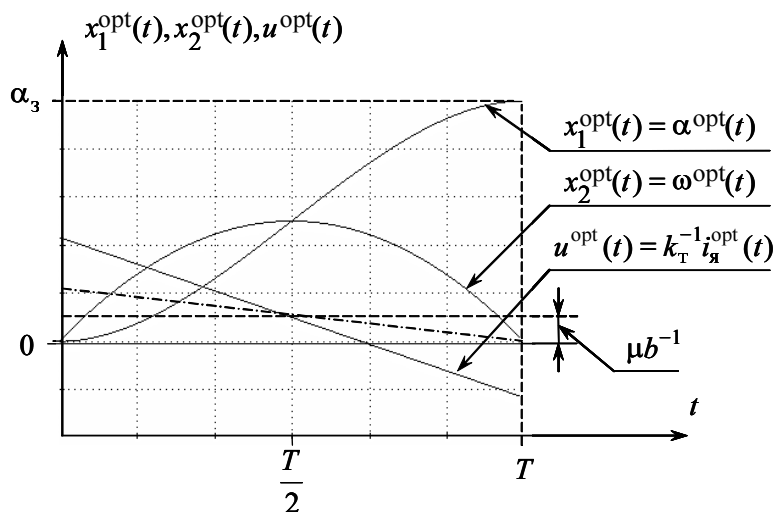


Рис. 3.3. Траектории оптимального по критерию минимума потерь позиционного электропривода

Примечания

1. Синтезированная формально «треугольная» токовая диаграмма может быть реализована практически лишь при обработке электроприводом «малых» перемещений, когда ни ток якоря, ни частота вращения не достигают предельно допустимых значений. При «средних» перемещениях в «углах» графика $u^{\text{opt}}(t)$ появляются участки токоограничения, а при «больших» – участок движения с максимальной скоростью, на котором $u^{\text{opt}}(t) = \mu b^{-1}$ [3.4] (см., например, П2.2) и ток равен статическому значению $i_c = M_T (c\Phi_H)^{-1}$.

2. Если продолжительность процесса позиционирования T также можно варьировать, минимум потерь достигается в так называемом режиме «минимум – минимум», когда управляющее воздействие не меняет знак, см. штрихпунктирную линию на рис. 3.3 [3.4].

3.1.4. Постановка задачи оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем

С наиболее общими постановками задач оптимального управления читатель может ознакомиться в учебниках [3.3, 3.7]. В рамках же настоящего пособия мы ограничимся наиболее простой из них, в которой граничные условия и продолжительность переходного процесса заранее заданы.

Пусть объект управления описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши n -го порядка:

$$\dot{x}_i = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.5)$$

Здесь $x_i, i = \overline{1, n}$ – координаты состояния ОУ; $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – вектор-столбец координат состояния; $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ – вектор-столбец управляющих воздействий; функции $f_i(\cdot)$ непрерывны по всем аргументам.

Требуется найти оптимальное временное программное управление $u_j^{\text{opt}}(t), j = \overline{1, m}$, или управление с обратной связью $u_j^{\text{opt}}(t, \mathbf{x}), j = \overline{1, m}$, а также оптимальные траектории координат состояния объекта $x_i^{\text{opt}}(t), i = \overline{1, n}$, переводящие его из известного начального состояния $\mathbf{x}(t_H) = \mathbf{x}_H$ в заданное конечное $\mathbf{x}(t_K) = \mathbf{x}_K$ за время $T = t_K - t_H > 0$ и обеспечивающие минимально возможное значение функционала качества

$$\mathbf{J} = \int_{t_H}^{t_K} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt. \quad (3.6)$$

Таким образом, граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t_H) = \mathbf{x}_H = [x_{1H}, x_{2H}, \dots, x_{nH}]^T, \\ \mathbf{x}(t_K) = \mathbf{x}_K = [x_{1K}, x_{2K}, \dots, x_{nK}]^T, \end{cases} \quad (3.7)$$

а критерий оптимальности –

$$\mathbf{J} \rightarrow \min. \quad (3.8)$$

Кроме того, необходимо, чтобы в процессе управления ни координаты состояния, ни управляющие воздействия не выходили из областей допустимых значений:

$$\mathbf{x}^{\text{opt}}(t) \in \Omega_x, \quad \mathbf{u}^{\text{opt}}(t) \in \Omega_u \quad \forall t \in (t_H, t_K). \quad (3.9)$$

Как видно, даже такая довольно простая задача оптимального управления существенно отличается от простейшей задачи вариационного исчисления, и ее решение требует использования специальных методов, к изложению сути которых мы и переходим.

3.1.5. Задача об условном экстремуме функционала Метод множителей Лагранжа

Даже без учета ограничений вида (3.9) задача оптимального управления (3.5)–(3.8) налагает дополнительные связи (по сути – ограничения) на поведение искомых функций $u_j^{\text{opt}}(t)$ и $x_i^{\text{opt}}(t)$. Все они должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений объекта (3.5). В классическом вариационном исчислении это требование соответствует задаче об *условном* экстремуме функционала.

Известен метод (прием) Лагранжа [3.7], позволяющий свести исходную задачу об условном экстремуме к простейшей задаче вариационного исчисления. Для этого переходят к новому функционалу качества

$$\mathbf{J}' = \int_{t_H}^{t_K} \mathbf{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) dt, \quad (3.10)$$

подынтегральная функция которого

$$\mathbf{L}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) = \psi_0 f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) [f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{x}_i] \quad (3.11)$$

называется функцией Лагранжа или лагранжианом.

Здесь $\psi_0 = \text{const} < 0$; $\psi_i(t) \neq 0 \forall t \in (t_H, t_K)$ – множители Лагранжа (не равные тождественно нулю функции времени); а выражение в квадратных скобках соответствует правой части уравнений объекта (3.5), преобразованных к виду

$$0 = f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{x}_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

В простейшей задаче (3.10)–(3.11) искомыми функциями уже являются $x_i^{\text{opt}}(t)$, $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ и $u_j^{\text{opt}}(t)$, $j = \overline{1, m}$. Система дифференциальных уравнений Эйлера (3.3) в данном случае записывается следующим образом:

а) для достижения экстремума функционала (3.10) по траекториям $x_i(t)$ должна выполняться система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}; \quad (3.12)$$

б) по функциям $\psi_i(t)$ – в силу независимости (3.11) от $\dot{\psi}(t)$ – система

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\psi}_i} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \psi_i} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

которая совпадает с уравнениями ОУ;

в) аналогично по управляющим воздействиям $u_j^{\text{opt}}(t)$ –

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{u}_j} = \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial u_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.13)$$

Таким образом, для нахождения оптимальных траекторий координат состояния объекта и закона временного программного управления в задаче (3.5) – (3.8) нужно решить систему $2n$ дифференциальных уравнений (3.5), (3.12) с учетом требований (3.13) при граничных условиях (3.7).

В теории автоматического управления систему уравнений Эйлера–Лагранжа обычно записывают в более простой форме, используя функцию Гамильтона – гамильтониан:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{L} + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \dot{x}_i, \\ \mathbf{H} &= \psi_0 \cdot f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

причем полагают $\psi_0 \equiv -1$.

Тогда необходимые условия экстремума функционала (3.10) и, следовательно, оптимальности в задачах (3.5) – (3.8) принимают следующий вид:

а) системы уравнений, совпадающей с моделью объекта (3.5),

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \psi_i}, \quad i = \overline{1, n};$$

б) так называемой сопряженной системы

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (3.15)$$

в) условий стационарности

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.16)$$

3.1.6. Синтез оптимального по критерию минимума потерь энергии управления позиционным электроприводом на основе метода Лагранжа

Математическую формулировку данной задачи заимствуем из подраздела 3.1.3.

Модель объекта управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\mu + bu, \end{cases} \quad \mu = \text{const} > 0,$$

граничные условия:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(T) = \alpha_3 > 0, \\ x_2(T) = 0, \end{cases}$$

критерий оптимальности:

$$\mathbf{J} = \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min.$$

Сначала составим гамильтониан (3.14)

$$\mathbf{H} = -u^2 + \psi_1(t)x_2 + \psi_2(t)(-\mu + bu).$$

Затем из условий стационарности (3.16)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u} = -2u + \psi_2(t)b = 0$$

выразим оптимальное программное управление

$$u^{\text{opt}}(t) = \frac{b\psi_2(t)}{2}.$$

В данном примере $\psi_2(t)$ сразу определяется из решения сопряженной системы (3.15), которая принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= C_1, \\ \psi_2(t) &= -C_1t + C_2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$u^{\text{opt}}(t) = \frac{b}{2}(C_2 - C_1t).$$

Подставляя выражение полученного оптимального управления в уравнения объекта, получаем

$$\begin{aligned}x_2^{\text{opt}}(t) &= -\mu t + \frac{b^2}{2}C_2t - \frac{b^2}{4}C_1t^2 + C_3, \\ x_1^{\text{opt}}(t) &= -\frac{\mu}{2}t^2 + \frac{b^2}{4}C_2t^2 - \frac{b^2}{12}C_1t^3 + C_3t + C_4,\end{aligned}$$

и находим постоянные интегрирования $C_1 \dots C_4$ из граничных условий.

Предоставляем читателям проделать последние выкладки самостоятельно. Разумеется, что полученные зависимости должны совпасть с результатами подраздела 3.1.3.

3.2. ЭЛЕМЕНТЫ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.2.1. Принцип максимума Л.С. Понтрягина

Метод множителей Лагранжа позволяет без привлечения каких-либо дополнительных соображений и требований учесть ограничения (3.9) на оптимальные траектории координат состояния объекта и управляющие воздействия, если они могут быть представлены в так называемой классической форме

$$\varphi_l(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \quad l = \overline{1, k},$$

т. е. в виде равенств [3.2, 3.3, 3.7].

Гораздо сложнее решаются задачи с ограничениями вида неравенств, что свойственно большинству технических приложений. В этих случаях экстремали могут выходить за границы областей Ω_x и Ω_u , и оптимальные траектории состоят из участков экстремалей и кривых, проходящих по границам допусти-

мых областей. Нахождение точек их «склеивания» представляет довольно сложную задачу, решаемую либо из условий непрерывности координат и их производных, либо (в случае разрывных управлений) из условий Вейерштрасса-Эрдмана, которые в настоящем пособии не обсуждаются.

Исходя из потребностей практики, в 50-х гг. XX века группой отечественных ученых-математиков под руководством Л.С. Понтрягина была разработана более общая теория оптимальных процессов [3.5], позволяющая расширить класс искомых оптимальных управлений до кусочно-непрерывных и учитывать ограничения неклассического вида.

Основной результат этой теории составляет следующая теорема.

Теорема (принцип максимума)

Для того чтобы допустимая для задачи (3.5) – (3.9) пара $(\mathbf{x}^{\text{opt}}(t), \mathbf{u}^{\text{opt}}(t))$ была ее решением, необходимо, чтобы существовали такие не обращающиеся одновременно в нуль константа $\psi_0 \leq 0$ и решение $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ сопряженной системы (3.15) при $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{\text{opt}}(t)$ и $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{\text{opt}}(t)$, что при любом $t \in (t_K, t_H)$, кроме точек разрыва $\mathbf{u}^{\text{opt}}(t)$, функция Гамильтона (3.14) достигает своего максимума по управлению, т.е.

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u} \in \Omega_u} \mathbf{H}(t, \mathbf{x}^{\text{opt}}, \mathbf{u}) = \mathbf{H}(t, \mathbf{x}^{\text{opt}}, \mathbf{u}^{\text{opt}}).$$

В неособых случаях по-прежнему принимают $\psi_0 \equiv -1$.

Примечание. Если максимальное значение гамильтониана достигается внутри области допустимых управлений Ω_u , а не на ее границе, то ограничение $\mathbf{u} \in \Omega_u$ несущественно, и требование принципа максимума сводится к рассмотренному выше условию стационарности (3.16), являющемуся необходимым условием экстремума \mathbf{H} по u_j , $j = \overline{1, m}$.

Особое значение принцип максимума приобретает в задачах предельного быстрого действия при ограниченных ресурсах управляющих воздействий, когда ограничение $\mathbf{u} \in \Omega_u$ имеет вид

$$|u_j| \leq U_{j \max} = \text{const} > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.17)$$

т. е. область допустимых управлений Ω_u представляет собой m -мерный прямоугольный гиперпараллелепипед. При оптимизации по быстродействию $f_0 \equiv 1$ (см. введение части 3), поэтому гамильтониан

$$\mathbf{H} = -1 + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

содержит неинформативное слагаемое «-1», которое исключают, переходя к анализу H -функции Понтрягина

$$H = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (3.18)$$

относительно которой записываются и условие принципа максимума

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u} \in \Omega_u} H(t, \mathbf{x}^{\text{opt}}, \mathbf{u}) = H(t, \mathbf{x}^{\text{opt}}, \mathbf{u}^{\text{opt}}),$$

и сопряженная система

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.19)$$

3.2.2. Линейная задача максимального быстродействия

Рассмотрим задачу оптимального по быстродействию управления линейным объектом

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j, \quad i = \overline{1, n}$$

при граничных условиях

$$x_i(t_H) = x_{iH}, \quad x_i(t_K) = x_{iK}, \quad i = \overline{1, n}$$

и ограничениях на управляющие воздействия вида (3.17). В данном случае функция Понтрягина (3.18)

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left(\sum_{j=1}^m b_{ij} u_j \right), \end{aligned}$$

где $\psi_i(t)$ являются решениями сопряженной системы (3.19),

будет принимать максимальное по u_j значение, если максимально ее последнее слагаемое

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t) \left(\sum_{j=1}^m b_{ij} u_j \right) = \sum_{j=1}^m u_j(t) \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i(t),$$

а оно, в свою очередь, будет максимально, если максимальны все слагаемые вида

$$u_j(t) \sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i(t).$$

Следовательно, оптимальное по быстрдействию программное управление

$$u_j^{\text{opt}}(t) = U_{j \max} \text{sign} \left(\sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i(t) \right), \quad j = \overline{1, m},$$

т. е. принимает только граничные, максимальные по модулю значения $\pm U_{j \max}$,

а его знак совпадает со знаком $\sum_{i=1}^n b_{ij} \psi_i(t)$.

Этот вывод справедлив для всех линейных объектов, удовлетворяющих не рассматриваемому здесь условию нормальности (общности положения) [3.3, 3.7], в частности, для всех вполне управляемых одноканальных ОУ ($m = 1$) (см. первую часть настоящего пособия). В последнем случае остается открытым лишь вопрос о числе «переключений» оптимального управления с одного граничного уровня на другой, ответ на который для частного вида объектов дает следующая теорема.

Теорема об n интервалах (А.А. Фельдбаум)

Оптимальное по быстрдействию управление одноканальным, полностью управляемым линейным объектом n -го порядка, имеющим только действительные корни характеристического уравнения, является кусочно-постоянным, принимает только граничные значения и имеет не более n интервалов постоянства (не более $n - 1$ «переключений»).

Примечания

1. Если среди корней характеристического уравнения объекта есть комплексно-сопряженные, число интервалов и «переключений» может быть больше, чем n и $n - 1$ соответственно.

2. Знак управляющего воздействия на первом интервале определяется знаком коэффициента передачи ОУ и требуемым направлением движения:

$$u_{(1)} = U_{\max} \text{sign}(k_{\text{ОУ}}(x_{\text{ВЫХ.К}} - x_{\text{ВЫХ.Н}})).$$

3.2.3. Синтез оптимального по быстродействию программного управления позиционным электроприводом

Вновь обратимся к задаче позиционирования электропривода постоянного тока, которая рассматривалась в подразделах 3.1.3 и 3.1.6.

Модель объекта:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\mu + bu, \end{cases} \quad \mu = \text{const} > 0,$$

граничные условия:

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, & x_1(T) = \alpha_3 > 0, \\ x_2(0) = 0, & x_2(T) = 0. \end{cases}$$

Новый критерий оптимальности (по быстродействию):

$$\mathbf{J} = \int_0^T dt = T \rightarrow \min.$$

Объект является полностью управляемым, и его характеристическое уравнение имеет пару кратных нулевых корней. Таким образом, условия теоремы об n интервалах выполнены, и оптимальное по быстродействию программное управление $|u^{\text{opt}}(t)| = U_{\text{max}} = |k_{\text{T}}^{-1} i_{\text{ядоп}}|$, где $i_{\text{ядоп}}$ – максимально-допустимый ток якоря, причем $u^{\text{opt}}(t)$ имеет два интервала постоянства. Так как коэффициент передачи ОУ по управляющему воздействию $b > 0$ и $x_1(T) - x_1(0) = \alpha_3 > 0$, то на первом интервале оптимальное управление положительно. Следовательно, график $u^{\text{opt}}(t)$ имеет вид, изображенный на рис. 3.4, и для решения задачи остается лишь определить продолжительность оптимального процесса позиционирования T и момент «переключения» управляющего воздействия $t_{\text{п}}$.

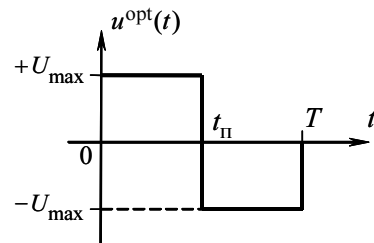


Рис. 3.4. Оптимальное по быстродействию программное управление током позиционного электропривода

Подставим $u^{\text{opt}}(t)$ в уравнения ОУ, и решим их. Для первого интервала имеем:

$$x_{2(1)}^{\text{opt}}(t) = (bU_{\max} - \mu)t + C_1,$$

$$x_{1(1)}^{\text{opt}}(t) = \frac{bU_{\max} - \mu}{2}t^2 + C_1t + C_2,$$

где с учетом начальных условий $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Для второго интервала:

$$x_{2(2)}^{\text{opt}}(t) = -(bU_{\max} + \mu)t + C_3,$$

$$x_{1(2)}^{\text{opt}}(t) = -\frac{bU_{\max} + \mu}{2}t^2 + C_3t + C_4,$$

причем из конечных условий

$$x_{2(2)}^{\text{opt}}(T) = x_2(T) = C_3 - (bU_{\max} + \mu)T = 0,$$

$$x_{1(2)}^{\text{opt}}(T) = x_1(T) = C_4 + C_3T - \frac{bU_{\max} + \mu}{2}T^2 = \alpha_3$$

следует, что

$$C_3 = T(bU_{\max} + \mu),$$

$$C_4 = \alpha_3 - \frac{T^2}{2}(bU_{\max} + \mu).$$

Искомые величины t_{Π} и T определим из условия непрерывности траекторий координат состояния объекта в момент переключения управления:

$$x_{2(1)}^{\text{opt}}(t_{\Pi}) = (bU_{\max} - \mu)t_{\Pi} = x_{2(2)}^{\text{opt}}(t_{\Pi}) = (bU_{\max} + \mu)(T - t_{\Pi}),$$

$$x_{1(1)}^{\text{opt}}(t_{\Pi}) = \frac{t_{\Pi}^2}{2}(bU_{\max} - \mu) = x_{1(2)}^{\text{opt}}(t_{\Pi}) = \alpha_3 + (bU_{\max} + \mu)\left(Tt_{\Pi} - \frac{T^2 + t_{\Pi}^2}{2}\right),$$

откуда

$$t_{\Pi} = \frac{bU_{\max} + \mu}{2bU_{\max}} T,$$

$$T = \sqrt{\frac{4bU_{\max}\alpha_3}{b^2U_{\max}^2 - \mu^2}}.$$

Графики оптимальных траекторий координат изображены для случая $\mu = 0$ на рис. 3.5.

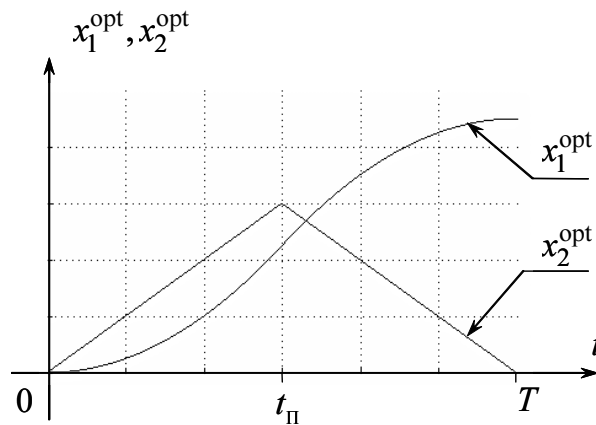


Рис. 3.5. Оптимальные по быстродействию траектории координат позиционного электропривода

3.2.4. Синтез оптимального по быстродействию закона управления позиционным электроприводом в классе алгоритмов с обратной связью

Рассмотренная в предыдущем разделе задача оптимального по быстродействию управления объектом второго порядка довольно проста и с помощью метода фазовой плоскости может быть решена в классе систем с обратной связью. Для этого введем обозначения:

$x = \alpha_3 - x_1$ – ошибка САУ по углу поворота ротора двигателя,

$\alpha_3 = \text{const} > 0$;

$y = x_2 = \dot{x}_1 = -\dot{x}$ – частота вращения ротора.

Тогда математическая модель объекта и граничные условия принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = -\mu + bu, \end{cases} \quad \mu = \text{const} > 0,$$

$$\begin{cases} x(0) = \alpha_3 = \text{const} > 0, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x(T) = 0, \\ y(T) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второй, заключительный, интервал оптимального управления, на котором $u^{\text{opt}} = -U_{\text{max}}$.

Дифференциальное уравнение фазовой траектории для этого участка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bU_{\text{max}} + \mu}{y}$$

легко решить путем разделения переменных:

$$\frac{y^2}{2} = (bU_{\text{max}} + \mu)x + C.$$

Так как с учетом конечных условий данная фазовая траектория должна проходить через начало координат плоскости (x, y) , то постоянная интегрирования $C = 0$. На рис. 3.6 полученная фазовая траектория обозначена как 2^+ , что означает второй интервал управления при отработке положительных перемещений. Траектории первого интервала управления для различных значений $\alpha_3 > 0$ обозначены 1^+ .

Опираясь на примечание 2 к теореме об n интервалах, несложно показать, что в случае $\alpha_3 < 0$ траектории будут симметричны рассматриваемым относительно начала координат, см. 1^- и 2^- , причем изменения знака управляющего воздействия всегда осуществляются на линии переключения (ЛП): выше ее $u^{\text{opt}} = -U_{\text{max}}$, ниже — $u^{\text{opt}} = +U_{\text{max}}$. Это позволяет построить оптимальную САУ согласно структурной схеме, приведенной на рис. 3.7.

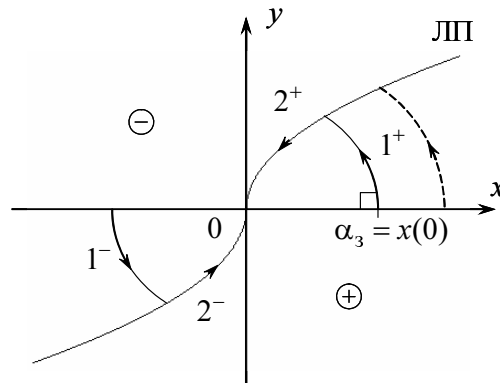


Рис. 3.6. Фазовый портрет оптимальной по быстродействию системы позиционирования

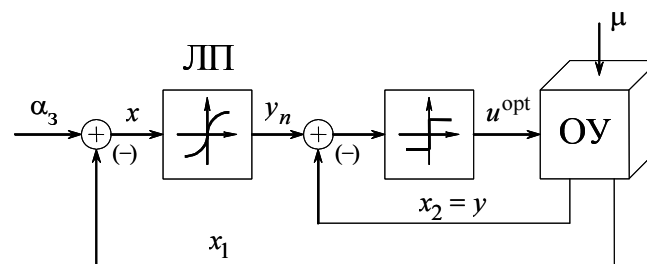


Рис. 3.7. Структурная схема замкнутой оптимальной по быстродействию позиционной САУ

Более подробно с постановками и решением задач предельного быстродействия электроприводами можно ознакомиться в классической монографии [3.6].

3.3. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.3.1. Предварительные замечания

Динамическим программированием называется разработанный в начале 50-х гг. XX века Р. Беллманом (США) и его учениками метод оптимизации многошаговых (динамических) управляемых процессов. В основу метода положены:

- а) принцип оптимальности;
- б) инвариантное погружение;

в) функциональное уравнение Беллмана, полученное исходя из принципа инвариантности и инвариантного погружения.

Вывод и подробное обсуждение первых двух из перечисленных положений можно найти в книге [3.3]. В рамках же настоящего учебного пособия ограничимся лишь анализом функционального уравнения Беллмана, которым будем непосредственно пользоваться для решения задач оптимального управления.

В отличие от методов вариационного исчисления динамическое программирование позволяет напрямую без каких-либо промежуточных преобразований определить оптимальное управление как функцию координат состояния объекта, т. е. синтезировать оптимальное управление с обратной связью. Более того, если подынтегральная функция критерия оптимальности является положительно-определенной (а это, как правило, так), то оптимизирующая функция Беллмана, определяемая в результате синтеза (см. ниже), автоматически становится функцией Ляпунова для замкнутой САУ, благодаря чему оптимальное управление будет *стабилизирующим*, т.е. гарантирует устойчивость замкнутой системы.

С формальной точки зрения метод динамического программирования сложнее вариационных, так как требует решения не системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а нелинейного дифференциального уравнения в частных производных. Это является «платой» за названные выше преимущества и часто обуславливает необходимость численного решения задач оптимального управления.

3.3.2. Функциональное уравнение Беллмана и алгоритм синтеза оптимальных управлений

Вновь обратимся к задаче оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем (3.5) – (3.9), сформулированной в разделе 3.1.4. Введем в рассмотрение вспомогательную (оптимизирующую) функцию

$$S(t', \mathbf{x}(t')) = \min_{\mathbf{u} \in \Omega_{\mathbf{u}}} \int_{t'}^{t_k} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt, \quad (3.20)$$

которая для каждого фиксированного момента времени $t' \in (t_n, t_k)$ принимает значения, равные минимально возможной (оптимальной) «части» функциона-

ла качества, «накапливаемой», начиная с момента t' и до конца оптимального процесса управления, причем

$$\begin{aligned} S(t_H, \mathbf{x}(t_H)) &= \mathbf{J}, \\ S(t_K, \mathbf{x}(t_K)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Функция (3.20) называется *функцией Беллмана*. Через нее записывается необходимое условие оптимальности алгоритмов управления в смысле задачи (3.5) – (3.9):

$$\min_{u \in \Omega_u} \left[f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{dS(t, \mathbf{x}(t))}{dt} \right] = 0, \quad (3.22)$$

или, по-другому,

$$\min_{u \in \Omega_u} \left[f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(t, \mathbf{x}(t))}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial S(t, \mathbf{x}(t))}{\partial t} \right] = 0,$$

которое называется *функциональным уравнением Беллмана*.

Так как функция Беллмана не зависит от управляющего воздействия, слагаемое $\partial S(t, \mathbf{x}(t)) / \partial t$ в последнем уравнении можно вынести за операцию минимизации и представить уравнение Беллмана в виде

$$\min_{u \in \Omega_u} \left[f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(t, \mathbf{x}(t))}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \right] = - \frac{\partial S(t, \mathbf{x}(t))}{\partial t}. \quad (3.23)$$

Утверждение. Для того чтобы допустимая пара (\mathbf{x}, \mathbf{u}) была решением задачи оптимального управления (3.5) – (3.9), необходимо, чтобы существовала дифференцируемая функция $S(t, \mathbf{x}(t))$, удовлетворяющая уравнению Беллмана (3.22) при конечном условии (3.21).

Примечания

1. В общем случае вопрос о нахождении функции Беллмана, удовлетворяющей (3.22), остается открытым. Исключения составляют так называемые линейно-квадратичные задачи оптимального управления (см. ниже), для которых она имеет вид квадратичной формы вектора координат состояния объекта \mathbf{x} .

2. Если подынтегральная функция функционала качества $f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ является положительно-определенной, т. е. $f_0 > 0 \forall (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \neq 0$ и $f_0 = 0$ при $\mathbf{x} = 0, \mathbf{u} = 0$, то в силу уравнения Беллмана (3.22) оптимизирующая функция $S(t, \mathbf{x})$ будет отрицатель-

но определена и может рассматриваться как функция Ляпунова. Благодаря этому замкнутая оптимальная САУ всегда будет устойчива.

3. Если минимум левой части (3.23) достигается во внутренних точках множества Ω_u (ограничения на управляющие воздействия несущественны), то это уравнение можно записать в виде двух:

$$f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(t, \mathbf{x}(t))}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = -\frac{\partial S(t, \mathbf{x}(t))}{\partial t}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \left[f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(t, \mathbf{x}(t))}{\partial x_i} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \right] = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.25)$$

где равенство (3.25) выражает необходимое условие экстремума левой части (3.23) по управляющему воздействию u_j и заменяет опущенную в уравнении (3.24) операцию минимизации.

В этом случае оптимальное управление находится следующим образом. Сначала из условия (3.25) определяется оптимальное управление как функция S , т. е. $\mathbf{u}^{\text{opt}}(S)$. Затем, подставляя $\mathbf{u}^{\text{opt}}(S)$ в уравнение (3.24) и решая его, нужно найти функцию Беллмана. И, наконец, подставляя $S(t, \mathbf{x})$ в $\mathbf{u}^{\text{opt}}(S)$, следует найти оптимальное управление как функцию координат состояния.

4. Если правые части дифференциальных уравнений ОУ и подынтегральная функция критерия оптимальности не зависят явно от времени t , и конечный момент процесса управления не фиксирован (например, как при синтезе линейных САУ, когда $t_k \rightarrow \infty$), то функция Беллмана не зависит явно от времени, и $\partial S / \partial t = 0$.

5. Для оптимальности синтезированного методом динамического программирования закона управления достаточно того, чтобы решение уравнения Беллмана $S(t, \mathbf{x})$ было гладкой функцией, и кусочно-непрерывное управление $\mathbf{u}^{\text{opt}}(t, \mathbf{x})$ порождало единственную траекторию $\mathbf{x}^{\text{opt}}(t)$, удовлетворяющую уравнениям объекта и граничным условиям задачи (3.5) – (3.9).

3.3.3. Линейно-квадратичные задачи оптимального управления

Наиболее успешно метод динамического программирования применяется при решении так называемых линейно-квадратичных (ЛК) задач оптимального управления, для которых функция Беллмана имеет вид положительно-определенной квадратичной формы координат объекта. В этом случае матема-

тическая модель ОУ считается линейной, а подынтегральная функция функционала качества – линейно-квадратичной.

Рассмотрим простейшую стационарную ЛК-задачу, метод решения которой был разработан А.М. Летовым и называется *аналитическим конструированием оптимальных регуляторов* (АКОР). Пусть объект описывается системой линейных стационарных дифференциальных уравнений, представленной в векторно-матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (3.26)$$

где $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ – алгебраические векторы-столбцы координат состояния и управляющих воздействий; \mathbf{A} , \mathbf{B} – матрицы соответствующих размерностей (см. часть 1 настоящего пособия).

Требуется перевести ОУ из начального состояния $\mathbf{x}_H = \mathbf{x}(0)$ в равновесное $\mathbf{x}_K = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0$ (под координатами состояния понимаются отклонения переменных объекта от их установившихся значений), обеспечивая при этом минимум функционала качества

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u}) dt, \quad (3.27)$$

где \mathbf{R} , \mathbf{Q} – положительно-определенные симметричные матрицы. Ограничения на управления и координаты объекта не учитываются.

В данном случае уравнение Беллмана (3.23) записывается как

$$\min_u \left(\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{x}}^T \frac{dS(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^T} \right) = 0,$$

а функция Беллмана отыскивается в виде положительно-определенной квадратичной формы координат состояния

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x},$$

где \mathbf{P} – также положительно-определенная симметричная матрица.

Раскладываем уравнение Беллмана на два, соответствующие (3.24) и (3.25). Из условия экстремума левой части второго из них по управляющим воздействиям

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}^T} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{u} + (\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu})^T \cdot 2\mathbf{Px} \right) = 2\mathbf{Qu} + 2\mathbf{B}^T \mathbf{Px} = 0$$

получаем выражение для оптимальной обратной связи

$$\mathbf{u}^{\text{opt}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x},$$

а затем, подставляя его в первое уравнение [вида (3.24)], формируем равенство для определения матрицы \mathbf{P} [3.2, 3.3, 3.7]

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = -\mathbf{R}, \quad (3.28)$$

которое называется *алгебраическим уравнением Риккати*.

Уравнение (3.28) нелинейно и при $n > 2$ решается численными методами, причем из его решений выбирается лишь одно, удовлетворяющее критерию положительной определенности матриц (критерию Сильвестра).

Следует заметить, что задача (3.26) – (3.27) может быть решена и с помощью метода Лагранжа–Понтрягина. При этом гамильтониан

$$\mathbf{H} = -\left(\mathbf{x}^T\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{Q}\mathbf{u}\right) + (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\Psi}(t),$$

где $\boldsymbol{\Psi}(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)]^T$ – вектор функций-множителей Лагранжа.

Из условия стационарности (3.16)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}^T} = -2\mathbf{Q}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\Psi}(t) = 0$$

имеем

$$\mathbf{u}^{\text{opt}}(t) = \frac{1}{2}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\Psi}(t),$$

и, задавая зависимость вектора $\boldsymbol{\Psi}$ от координат состояния как

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = -2\mathbf{P}\mathbf{x}(t),$$

приходим к закону управления с обратной связью

$$\mathbf{u}^{\text{opt}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x}.$$

Для нахождения матрицы \mathbf{P} используем сопряженную систему (3.15)

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}^T} = 2\mathbf{R}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\Psi} = 2\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{x} + 2\mathbf{R}\mathbf{x}$$

и равенство

$$\dot{\Psi}(t) = -2\mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = -2\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) = -2\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}) \cdot \mathbf{x},$$

приравнивая правые части которых снова приходим к уравнению Риккати (3.28).

В качестве примера применения метода АКОР вновь обратимся к задаче управления позиционным электроприводом. Математическую модель объекта, уже использованную нами в разделах 3.1.3, 3.1.6, 3.2.3 и 3.2.4, запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = bu, \end{cases}$$

где не учтено влияние момента сопротивления, и под первой координатой состояния понимается отклонение углового положения ротора двигателя от заданного¹: $x_1 = \alpha - \alpha_3$.

Квадратичный функционал качества (3.27) зададим как

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (x_1^2(t) + rx_2^2(t) + qu^2(t)) dt, \quad r, q > 0 - \text{константы.}$$

В данном случае входящие в уравнение Риккати (3.28) матрицы имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = q.$$

Оптимальный закон управления

$$u^{\text{opt}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = -\frac{1}{q} \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{b}{q} (p_{21}x_1 + p_{22}x_2),$$

здесь элементы матрицы \mathbf{P} должны удовлетворять (3.28):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \\ & -\frac{1}{q} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

¹ Оптимальное управление электротехническими объектами / В.И. Ловчаков, Б.В. Сухинин, В.В. Сурков. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. – 149 с.

Это матричное уравнение равносильно системе четырех скалярных равенств

$$\begin{aligned} p_{12}p_{21}\frac{b^2}{q} &= 1; & p_{11} - p_{12}p_{22}\frac{b^2}{q} &= 0; & p_{11} - p_{21}p_{22}\frac{b^2}{q} &= 0; \\ p_{12} + p_{21} - p_{22}^2\frac{b^2}{q} &= -r, \end{aligned}$$

которая имеет решения

$$\begin{aligned} p_{12} = p_{21} &= \pm \frac{\sqrt{q}}{b}; & p_{22} &= \pm \frac{\sqrt{q(r + p_{12} + p_{21})}}{b}; \\ p_{11} &= \frac{p_{12}p_{22}b^2}{q} = \frac{p_{21}p_{22}b^2}{q}. \end{aligned}$$

Из них критерию Сильвестра удовлетворяет только одно:

$$\begin{aligned} p_{12} = p_{21} &= \frac{\sqrt{q}}{b}; & p_{22} &= \frac{\sqrt{q(r + 2p_{12})}}{b} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{q(br + 2\sqrt{q})}{b}}; \\ p_{11} &= \sqrt{r + 2\sqrt{q} \cdot b^{-1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, оптимальный закон управления имеет вид

$$u^{\text{opt}}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\sqrt{q}}x_1 - \sqrt{\frac{br + 2\sqrt{q}}{bq}}x_2.$$

Предоставляем читателям возможность самостоятельно проанализировать показатели качества переходных процессов отработки начальных условий по x_1 при различных значениях весовых коэффициентов r, q .

В заключение отметим, что фактически нами решена задача обеспечения в позиционной системе характеристического полинома, оптимального в смысле критерия вида (3.4)

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} \left(x^2 + r\dot{x}^2 + \frac{q}{b^2}\ddot{x}^2 \right) dt \rightarrow \min, \quad x = x_1,$$

что подчеркивает логическую взаимосвязь линейно-квадратичных задач с материалом раздела 3.1.2.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Сформулируйте понятие оптимальности САУ.
2. Что такое критерий оптимальности? Приведите примеры.
3. Изобразите обобщенную структурную схему оптимальной САУ.
4. Какие виды законов оптимального управления Вы знаете?
5. Сформулируйте простейшую задачу вариационного исчисления.
6. Запишите и поясните уравнение Эйлера.
7. Каковы особенности модальных характеристик уравнения Эйлера–Пуассона для линейно-квадратичных функционалов?
8. Сформулируйте задачу оптимального по критерию минимума потерь управления током позиционного электропривода.
9. Изобразите и поясните траектории координат позиционного электропривода при «треугольной» диаграмме тока.
10. Сформулируйте задачу оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем.
11. Запишите и поясните H -функцию Понтрягина.
12. Каковы свойства оптимального по быстродействию управления линейными объектами?
13. Сформулируйте теорему об n интервалах.
14. Сформулируйте задачу оптимального по быстродействию управления током позиционного электропривода.
15. Изобразите и поясните траектории координат позиционного электропривода при оптимальном по быстродействию управлении.
16. Изобразите структурную схему замкнутой системы позиционного электропривода, оптимальной по быстродействию.
17. Дайте определение функции Беллмана.
18. Запишите функциональное уравнение Беллмана.
19. В каких случаях и почему метод динамического программирования гарантирует устойчивость оптимальной САУ?
20. Сформулируйте задачу АКОР.
21. Изобразите структурную схему системы, синтезированной методом АКОР.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 3.1. *Абдуллаев Н. Д.* Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов / Н. Д. Абдуллаев, Ю. П. Петров. – Л. : Энергоатомиздат, 1985.
- 3.2. *Александров А. Г.* Оптимальные и адаптивные системы : учеб. пособие для вузов / А. Г. Александров. – М. : Высш. шк., 1989. – 263 с.
- 3.3. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы : учеб. пособие / Д. П. Ким. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007.
- 3.4. *Петров Ю. П.* Оптимальное управление электроприводом / Ю. П. Петров. – М. ; Л. : Госэнергоиздат, 1961.
- 3.5. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – 4-е изд. – М. : Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.
- 3.6. *Смольников Л. П.* Синтез квазиоптимальных систем автоматического управления / Л. П. Смольников. – Л. : Энергия, 1967.
- 3.7. *Теория автоматического управления* : учеб. для вузов в 2-х ч. / А. А. Воронов [и др.] ; под ред. А. А. Воронова. – М. : Высш. шк., 1986. – Ч II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

**Панкратов Владимир Вячеславович
Нос Олег Викторович
Зима Елена Алексеевна**

**ИЗБРАННЫЕ РАЗДЕЛЫ
ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Художественный редактор *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Н.В. Гаврилова*

Подписано в печать 01.11.2011
Формат 70 × 100 1/16. Бумага офсетная
Уч.-изд. л. 18,06. Печ. л. 14,0.
Тираж 3000 экз. (1-й з-д – 1–200 экз.)
Изд. № 165. Заказ № 1699

Издательство Новосибирского государственного
технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20
Тел. (383) 346-31-87
E-mail: office@publish.nstu.ru

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20