

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**А.С. Саммаль, С.В. Анциферов,  
К.Е. Залесский, П.В. Деев**

## ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебное пособие для студентов строительных  
специальностей дистанционной формы обучения  
(контрольные работы и примеры их выполнения)*

Тула 2017

УДК 539.3/6

Техническая механика: Учеб. пособие А.С. Саммаль, С.В. Анциферов, К.Е. Залесский, П.В. Деев. – Тул. гос. ун-т. Тула, 2017.- 62 с.

В учебном пособии приводятся методические указания по выполнению контрольных работ, предусмотренных учебными планами по курсу «Техническая механика» для студентов строительных специальностей ТулГУ дистанционной (заочной) формы обучения. Изложенный материал охватывает содержание основных прорабатываемых разделов курса, связанных с расчётом статически неопределимых балок методом сил, оценкой прочности элементов конструкций в условиях сложного сопротивления и циклически изменяющихся напряжений, а также с исследованием напряжённо-деформированного состояния тела в окрестности рассматриваемой точки.

Приведены теоретические сведения, составляющие содержание контрольных заданий, а также примеры решения типовых задач.

Табл.8. Ил.23. Библиогр.:7 назв.

Утверждено решением кафедры механики материалов Тульского государственного университета (протокол №6 от 16.02.2017).

© А.С. Саммаль, С.В. Анциферов,  
К.Е. Залесский, П.В. Деев 2017

© Тульский государственный университет, 2017

## Содержание

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ .....	4
<b>Библиографический список</b> .....	6
ЗАДАЧИ, ВХОДЯЩИЕ В КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ.....	7
ЗАДАЧА № 1 .....	7
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 1</b> .....	7
<b>ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 1</b> .....	12
ЗАДАЧА № 2 .....	19
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 2</b> .....	19
<b>ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 2</b> .....	23
ЗАДАЧА № 3 .....	27
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 3</b> .....	27
<b>ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 3</b> .....	31
ЗАДАЧА № 4 .....	34
<b>МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 4</b> .....	35
<b>ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 4</b> .....	44
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	50

## ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Целью учебного курса «Техническая механика» является формирование у будущего специалиста строительного профиля представлений о подходах, методах и упрощающих принципах, применяемых при инженерных расчётах элементов строительных конструкций, в том числе – статически неопределимых, испытывающих условия сложного нагружения, а также циклически изменяющихся во времени напряжений. С целью выработки навыков выполнения расчётов реальных конструкций в рамках настоящего курса предусмотрено самостоятельное выполнение контрольной работы.

Настоящее пособие предназначено для студентов ТулГУ дистанционной (заочной) формы обучения, совмещающих учебу с профессиональной деятельностью, и содержит требования, предъявляемые к выполненным контрольным работам, основные теоретические сведения, составляющие содержание контрольных заданий, а также примеры их выполнения.

Требования, предъявляемые к выполненным контрольным работам:

1. Каждый студент выполняет контрольную работу в сроки, предусмотренные учебным графиком. Информация о перечне задач, входящих в контрольную работу, помещается на сайте Интернет-института ТулГУ.

2. Контрольные работы выполняются в текстовом или графическом компьютерном редакторе, либо в рукописном виде в тетради, или на листах бумаги формата А4 с последующей оцифровкой изображения. В окончательном виде каждая контрольная работа должна быть представлена в виде одного компьютерного файла. На титульном листе должны быть указаны: учебное заведение, институт, название дисциплины, номер контрольной работы, номера решаемых задач, фамилия, имя и отчество студента, номер учебной группы, номер зачётной книжки, индивидуальный шифр студента, фамилия и инициалы преподавателя проверяющего работу (тьютора). Все листы представленной для проверки контрольной работы должны быть пронумерованы. На втором листе работы должно быть приведено оглавление, в котором указываются номера страниц каждой рассматриваемой задачи. Перед решением каждой задачи необходимо поместить запись, содержащую индивидуальный шифр студента. Далее следует выписать полностью условие задачи, числовые данные и номер расчётной схемы, составить в масштабе аккуратный чертёж и указать на нём все величины, необходимые для расчёта, и в буквенном и в цифровом обозначении.

3. Исходные данные для выполнения контрольных работ должны быть выбраны по таблицам данного учебного пособия в соответствии с индивидуальным шифром студента. Он состоит из шести цифр номера зачётной книжки студента, к которым дополнительно через дефис дописываются две

последние цифры того же номера зачётной книжки. Например, если у студента зачётная книжка имеет номер 361291, то при выполнении контрольных работ он должен использовать индивидуальный шифр, который состоит из набора следующих цифр: 361291-91.

Далее, под цифрами шифра выписываются по порядку начальные буквы русского алфавита:

**361291-91**  
**абгде-жз**

Все исходные данные к задачам представлены в виде таблиц, вертикальные столбцы которых обозначены определёнными буквами. Из каждого такого столбца выбирается то данное, которое расположено в строке с номером, соответствующим числу над соответствующей буквой шифра. Например, для приведённого выше примера индивидуального шифра студента для решения задачи №1 из табл. 1.1 данного пособия выписываем следующие исходные данные:

*номер схемы – 1,  $q = 5 \text{ кН/м}$ ,  $P = 8 \text{ кН}$ ,  $P_1 = 10 \text{ кН}$ ,  $m = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $a = 1,5 \text{ м}$ .*

4. Решения задач должны сопровождаться краткими пояснениями и чертежами, на которых все входящие в расчёт величины следует указывать в числах, соответствующих рассматриваемому варианту задачи. Каждую формулу в расчёте следует сначала записать в буквенном виде, затем подставить соответствующие числовые значения и, не приводя промежуточных вычислений, записать ответ с указанием размерности определяемой величины. Инженерные расчёты производятся в десятичных дробях с точностью до третьей значащей цифры после запятой.

5. В случае, если выполненная контрольная работа содержит ошибки, она возвращается студенту для исправления.

Все исправления следует внести в электронный документ (вместо ошибочных записей). Исправления, представленные отдельно от работы, к рассмотрению не принимаются. Таким образом, окончательный материал должен представлять собой единую, полностью оформленную контрольную работу, содержащую правильное решение. Этот электронный документ повторно отсылается на проверку.

6. Контрольная работа должны быть выполнена и зачтена к моменту проведения промежуточной аттестации.

## Библиографический список

1. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. В двух томах. том 1. Изд. 2-е, стереотип./ С.П. Тимошенко - М.: Наука, 1965. - 364 с.
2. Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов/ А.Ф. Смирнов - М.: Высш. школа, 1975. – 480 с.
3. Александров А.В. Сопротивление материалов/ А.В. Александров - М.: Высшая школа, - 2009.— 560 с.
4. Дарков А.В. Сопротивление материалов/ А.В. Дарков // Учебник для втузов. М.: Изд-во «Альянс», 2014.
5. Атаров Н.М. Сопротивление материалов. Часть 2 (2-е издание) [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Н.М. Атаров [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2013.— 98 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/20031>.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.
6. Костенко Н.А. Сопротивление материалов/ Н.А. Костенко и др. // Учебник для студентов втузов. Изд-во «Высшая школа», 2009. – 488 с.
7. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов с использованием вычислительных комплексов/ Е.Г. Макаров // В 2 кн. Кн.1. Основной курс. Учебное пособие. Изд-во «Высшая школа», 2009. – 406 с.

# ЗАДАЧИ, ВХОДЯЩИЕ В КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

## ЗАДАЧА № 1

Для заданной статически неопределимой стальной балки требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость;
- 2) построить эпюру изгибающих моментов;
- 3) подобрать двутавровое сечение по условию прочности балки;
- 4) определить угол поворота сечения  $L$  и прогиб в сечении  $K$ .

Для всех вариантов принять: расчётное сопротивление  $R = 160$  МПа, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Числовые данные берутся из табл. 1.1, расчётные схемы – по рис. 1.1.

Таблица 1.1

Числовые данные к задаче № 1

Номер строки	Номер расч. схемы по рис. 1.1	Нагрузка				Размер $a$ , м
		$q$ , кН/м	$P$ , кН	$P_1$ , кН	$m$ , кН·м	
1	1	5	10	10	4	1,0
2	2	4	8	5	6	1,5
3	3	8	6	8	4	1,0
4	4	10	8	12	2	0,8
5	5	12	5	7	5	1,2
6	6	6	7	10	7	1,0
7	7	5	10	6	3	1,2
8	8	10	11	9	4	0,8
9	9	8	8	7	5	0,6
0	10	7	5	10	6	1,0
	3	3	ж	б	в	Г

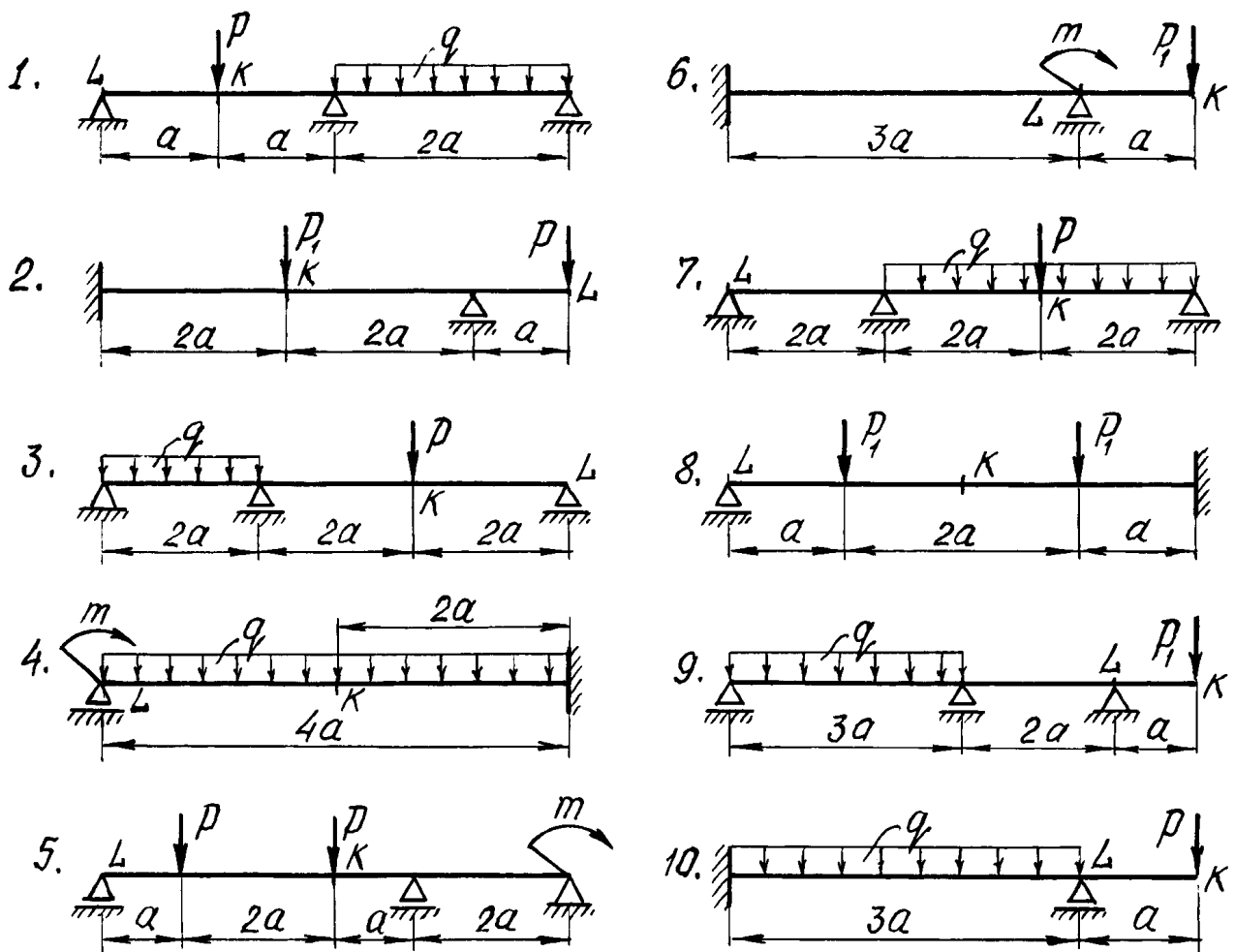
## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 1

### *Основные теоретические сведения и расчётные формулы*

1. *Определение перемещений методом Мора. Вычисление интеграла Мора методом перемножения эпюр*

Расчёт статически неопределимых конструкций требует вычисления перемещений их сечений.

Универсальным способом определения перемещений является энергетический. В применении к балкам и плоским рамам этот метод приводится



**Рис. 1.1. Расчётные схемы статически неопределимых балок к задаче № 1**

к вычислению интеграла Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{Pi} \cdot \bar{M}_i}{E_i \cdot I_i} dz, \quad (1.1)$$

где  $\Delta$  - искомое перемещение (линейное перемещение или угол поворота);

$l_i$  - длина участка балки или рамы;

$E_i I_i$  - изгибная жёсткость этого участка;

$M_{Pi}$  - изгибающий момент от внешней нагрузки в произвольном сечении на участке  $l_i$ ;

$\bar{M}_i$  - изгибающий момент от единичной нагрузки в том же сечении;

$n$  - число участков  $l_i$ , на которые разбивается данная балка или рама.

Для определения перемещения по формуле Мора необходимо:

1) рассмотреть так называемое грузовое (заданное) состояние конструк-



ции, записав выражения для вычисления внутренних усилий, действующих в произвольно выбранном поперечном сечении каждого стержня от действия внешних нагрузок;

2) рассмотреть единичное состояние, для чего снять с конструкции все действующие на неё нагрузки и приложить в сечении, перемещение которого определяется, по заданному направлению единичную силу (при определении линейного перемещения) или единичный момент (при вычислении углового перемещения);

3) записать выражения для изгибающих моментов, действующих в произвольно выбранном поперечном сечении каждого стержня от единичной нагрузки;

4) составить интеграл Мора, и после интегрирования по участкам всей конструкции, вычислить искомое перемещение.

Если искомое перемещение получилось отрицательным, то это означает, что действительное перемещение противоположно принятому направлению единичной нагрузки.

Интеграл Мора можно вычислять графоаналитически, если предварительно построены эпюры моментов от заданной и единичной нагрузок.

Расчётная формула в этом случае имеет вид

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{Pi} \cdot \bar{M}_i}{EI_i} dz = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{Pi} y_i}{EI_i}, \quad (1.2)$$

где  $\omega_{Pi}$  - площадь эпюры  $M_{Pi}$  от заданной нагрузки на участке  $l_i$ ;

$y_i$  - ордината эпюры  $\bar{M}_i$  от единичной нагрузки, расположенная под центром тяжести эпюры  $M_{Pi}$  на участке  $l_i$ .

Этот способ вычисления интеграла Мора называется «перемножением эпюр», или правилом Верещагина.

Метод перемножения эпюр применим для определения перемещений в конструкциях, состоящих из прямолинейных элементов, жёсткость которых в пределах отдельных её участков постоянна.

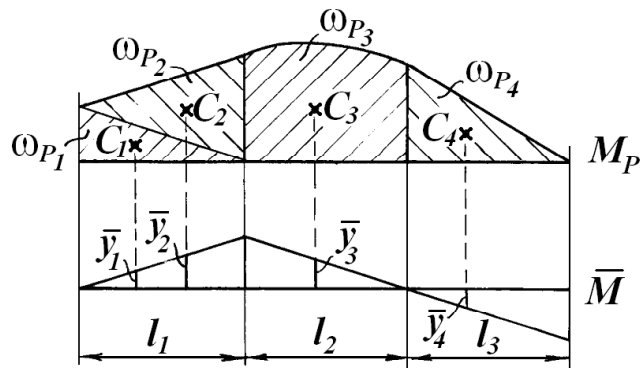
Для определения перемещений по Верещагину необходимо:

1) построить эпюры внутренних силовых факторов от действия внешних сил, при изгибе – эпюру изгибающих моментов;

2) построить эпюры внутренних силовых факторов от действия единичной силы (момента), приложенной в сечении, перемещение которого определяется, по заданному направлению (при изгибе – единичную эпюру изгибающих моментов);

3) вычислить искомое перемещение для каждого участка путем умножения площади нелинейной эпюры на ординату линейной эпюры, взятую под центром тяжести нелинейной, и деления результата на жёсткость рассматриваемого участка.

Ординаты  $\bar{y}_i$  на эпюре  $\bar{M}_i$  вычисляются из подобия соответствующих треугольников (рис. 1.2).



**Рис. 1.2.** Пример применения правила Верещагина

В тех случаях, когда обе эпюры прямолинейны, можно умножить площадь любой из них на ординату другой под центром тяжести первой.

Если эпюра от внешней нагрузки имеет сложный вид, то рекомендуется её представить в таком виде, чтобы вычисление её площади и положения центра тяжести было наиболее простым.

Произведение  $\omega_{P_i} \cdot y_i$  отрицательно, если эпюры от внешних нагрузок и единичной силы (момента) противоположны по знаку, т.е. расположены по разные стороны от оси стержня. Это означает, что направление перемещения противоположно направлению единичной силы (момента).

## 2. Статически неопределимые балки. Метод сил

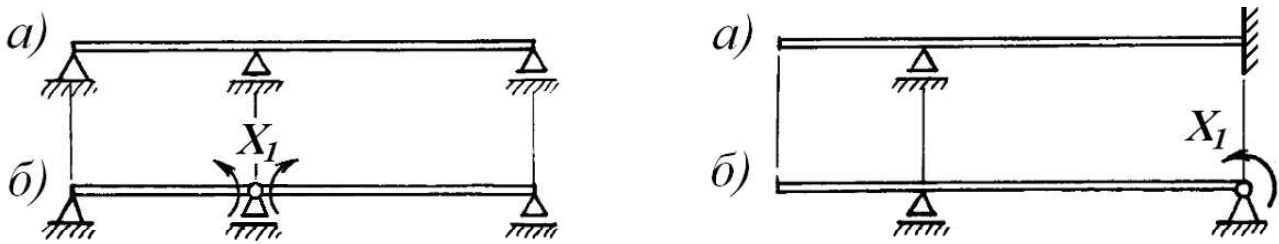
Балка называется статически неопределимой, если внутренние силовые факторы в её поперечном сечении не могут быть определены только из уравнений статики. Статическая неопределимость обусловлена наличием лишних связей, то есть таких связей, которые не являются необходимыми для обеспечения геометрической неизменяемости конструкции. В балках лишними связями служат дополнительные опоры.

Разность между числом опорных реакций балки и числом возможных уравнений статики называется её степенью статической неопределимости, или числом «лишних» неизвестных.

Одним из методов, используемых для расчёта статически неопределимых систем, является метод сил.

Расчёт начинается с выбора так называемой основной системы рассматриваемой конструкции. Статически определимая система, получаемая из заданной отбрасыванием лишних связей, называется основной системой. Как правило, для заданной конструкции можно предложить несколько вариантов основных систем, из которых для дальнейшего расчёта выбирается один. При расчёте статически неопределимой балки удобно удалять внутреннюю связь, помещая шарнир на промежуточной опоре или в жёсткой заделке (рис. 1.3). В этом случае лишней неизвестной будет опорный мо-

мент.



**Рис. 1.3. Схемы статически неопределимых балок (а) и соответствующие им основные системы (б)**

Если основную систему загрузить заданными нагрузками и реакциями отброшенных связей, получим эквивалентную систему, которая при определённых величинах этих реакций деформируется так же, как заданная конструкция. Реакции  $X_i$  отброшенных связей определяется из очевидного условия: перемещения по направлениям  $X_i$  в эквивалентной системе должны равняться нулю. Для конструкции с одной лишней связью это условие записывается в виде одного канонического уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (1.3)$$

где  $\delta_{11}$  - перемещение в основной системе по направлению  $X_1$  от действия единичной силы  $\bar{X}_1 = 1$  или единичного момента  $\bar{X}_1 = 1$ ;

$\Delta_{1P}$  - перемещение в основной системе по направлению  $X_1$  от действия внешних нагрузок.

Для вычисления  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов:  $\bar{M}_1$  - от единичной силы (момента)  $\bar{X}_1 = 1$  и  $M_P$  - от внешних нагрузок. Коэффициент  $\delta_{11}$  при  $X_1$  вычисляется умножением эпюры  $\bar{M}_1$  на эту же эпюру, а  $\Delta_{1P}$  - перемножением эпюр  $M_P$  и  $\bar{M}_1$ . Символически это можно записать так:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}(\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1); \quad \Delta_{1P} = \frac{1}{EI}(M_P \cdot \bar{M}_1). \quad (1.4)$$

Определением реакции  $X_1$  из канонического уравнения заканчивается раскрытие статической неопределимости балки с одной лишней связью. Остальные опорные реакции вычисляются из уравнений равновесия, считая теперь  $X_1$  известной величиной.

Перемещения в статически неопределимой системе после раскрытия её неопределимости находятся непосредственным вычислением интеграла Мора, либо перемножением эпюр.

Для вычисления прогиба в каком-либо сечении балки следует по направлению искомого перемещения к основной системе приложить единичную силу  $\bar{P} = 1$  (при вычислении угла поворота – единичный момент  $\bar{M} = 1$ ) и построить эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}$  от действия этой еди-

ничной нагрузки. Искомое перемещение вычисляется путем перемножения окончательной эпюры изгибающих моментов  $M$  на вновь построенную эпюру  $\bar{M}$ .

### ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 1

Для статически неопределимой балки (рис. 1.4, *a*) требуется:

- 1) раскрыть её статическую неопределимость;
- 2) построить эпюру изгибающих моментов от действия внешних (пролётных) нагрузок;
- 3) подобрать двутавровое сечение балки из условия её прочности;
- 4) определить угол поворота сечения  $L$  и прогиб балки в сечении  $K$ .

Числовые данные к задаче:

$$q = 6 \text{ кН/м}; M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; a = 1,2 \text{ м}; R = 160 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

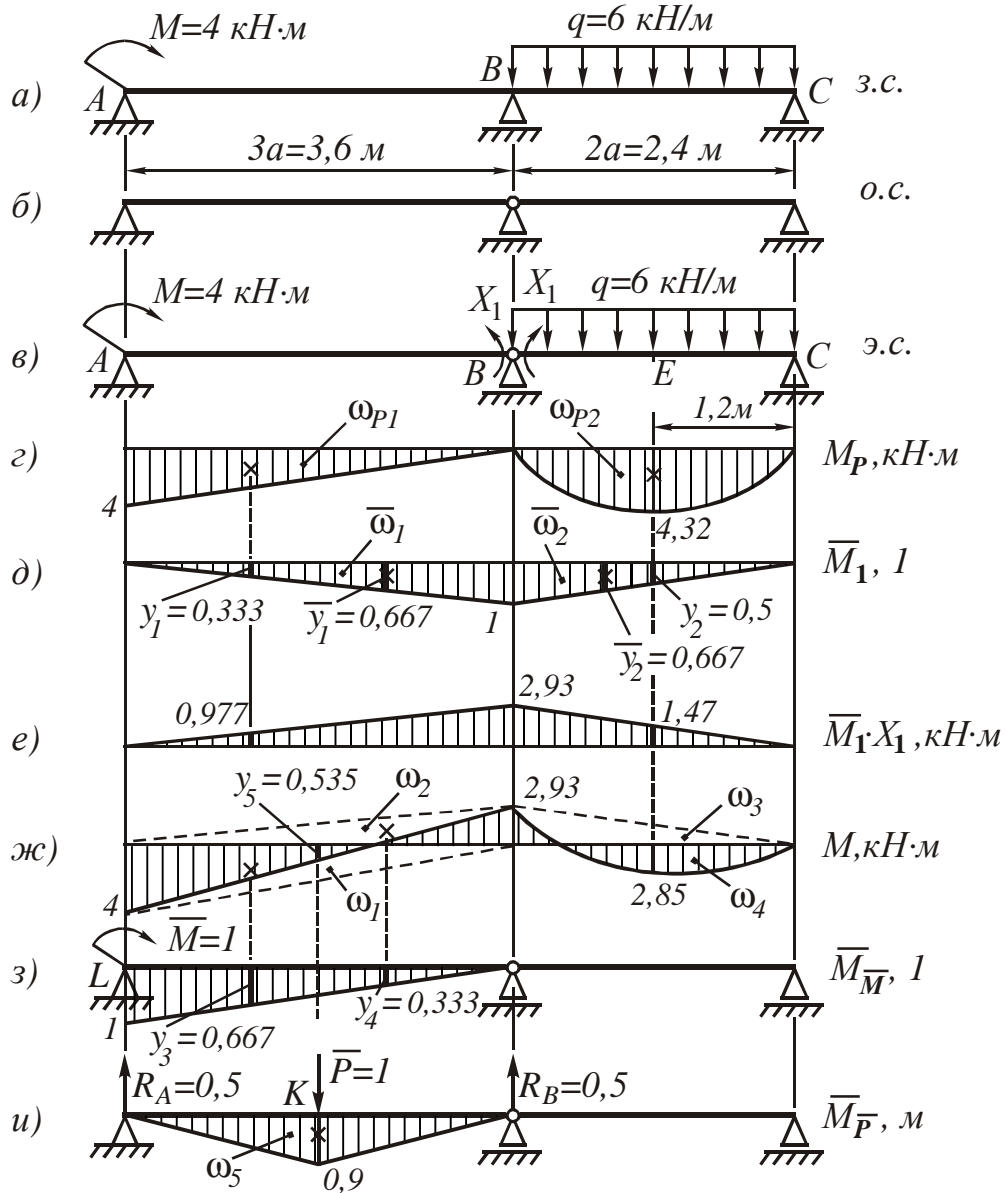
1. Вычисляем степень статической неопределимости балки.

По условиям закрепления имеем четыре опорных реакции: две на опоре  $A$  и по одной на опорах  $B$  и  $C$ . Для плоской системы сил можно составить только три уравнения равновесия, поэтому степень статической неопределимости балки  $n = 4 - 3 = 1$ , т.е. система один раз статически неопределима.

2. Выбираем основную систему (о.с.). Для этого разрезаем балку над средней опорой, тем самым, устраняя лишнюю связь, и вставляем над опорой промежуточный шарнир. «Лишней» неизвестной в этом случае будет изгибающий момент в опоре  $B$ , который обозначаем  $X_1$ . На рис. 1.4, *б* показана основная система. Загружая основную систему пролётными нагрузками и лишней неизвестной, получаем эквивалентную систему (э.с.) (рис. 1.4, *в*). Достоинство принятой основной системы при врезании шарнира именно в сечении над опорой состоит в том, что теперь оба пролёта работают как самостоятельные балки  $AB$  и  $BC$ , и при построении эпюр могут рассматриваться отдельно друг от друга.

3. Строим в основной системе эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_P$ .

Рассмотрим участок  $AB$ . Так как на этом участке нагрузок нет, для построения эпюры достаточно знать величины изгибающих моментов в сечениях  $A$  и  $B$ . На опоре  $A$  по условию  $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ; на опоре  $B$  изгибающий момент равен нулю (опорный момент  $X_1$  не учитываем), эпюра моментов ограничена прямой линией.



**Рис. 1.4. Статически неопределимая балка:**  
**а) - заданная система; б) - основная система;**  
**в) - эквивалентная система; г) - грузовая эпюра  $M_P$ ;**  
**д) - единичная эпюра  $\bar{M}_1$ ; е) - эпюра  $\bar{M}_1 \cdot X_1$ ;**  
**ж) - окончательная эпюра  $M$ ; з) - эпюра от единичного момента  $\bar{M}_M$ ;**  
**и) - эпюра от единичной силы  $\bar{M}_P$**

Рассмотрим участок BC (рис. 1.4, в). Опорный момент  $X_1$  здесь также не учитываем.

Вследствие симметрии пролётной нагрузки реакции опор будут одинаковыми:

$$R_B = R_C = \frac{q \cdot 2a}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1,2}{2} = 7,2 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент в произвольном сечении  $z$

$$M(z) = R_B \cdot z - \frac{qz^2}{2} = 7,2z - \frac{6z^2}{2}$$

и эпюра изгибающего момента ограничена квадратной параболой. Строим эту параболу по трём лежащим на ней точкам:

$$z_B = 0, M_B = 0;$$

$$z = 1,2 \text{ м}, M_{\max} = 7,2 \cdot 1,2 - \frac{6 \cdot 1,2^2}{2} = 4,32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_C = 2,4 \text{ м}, M_C = 0.$$

Эпюра  $M_P$  показана на рис. 1.4, *г*.

4. Строим эпюру  $\bar{M}_1$  от единичного момента  $\bar{X}_1 = 1$ . Внешнюю нагрузку  $M$  и  $q$ , приложенную к балке (рис. 1.4, *в*), не учитываем.

В сечениях  $A$  и  $C$  изгибающие моменты равны нулю, а в сечении  $B$  изгибающий момент равен единице. Эпюра  $\bar{M}_1$  линейна, её вид показан на рис. 1.4, *д*.

5. Составляем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Вычисляем коэффициент  $\delta_{11}$  при неизвестном. Для этого эпюра  $\bar{M}_1$  умножается сама на себя. Разбиваем эпюру на два треугольника высотой, равной 1, и с основаниями 3,6 м и 2,4 м. Площадь каждого из них умножаем на ординату, расположенную в центре тяжести каждого из них (рис. 1.4, *д*):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\bar{\omega}_1 \bar{y}_1 + \bar{\omega}_2 \bar{y}_2);$$

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 1; \quad \bar{y}_1 = \frac{2}{3} = 0,667;$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1; \quad \bar{y}_2 = \frac{2}{3} = 0,667.$$

После подстановки числовых значений имеем

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{EI}.$$

Для определения  $\Delta_{1P}$  перемножаем эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_1$  (рис. 1.4, *г*, *д*). Площадь параболического сегмента вычисляется по формуле

$$\omega_{\text{пар}} = \frac{ql^3}{12},$$

где  $q$  - интенсивность распределённой нагрузки;

$l$  - длина участка балки под нагрузкой.

Вычисляем свободный член канонического уравнения  $\Delta_{1P}$ :

$$\Delta_{1P} = (M_P \cdot \bar{M}_1) = \frac{1}{EI} (\omega_{P1} \cdot y_1 + \omega_{P2} \cdot y_2);$$

$$\omega_{P1} = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 4; \quad y_1 = \frac{1}{3} = 0,333;$$

$$\omega_{P2} = \frac{6 \cdot 2,4^3}{12}; \quad y_2 = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Произведя соответствующие вычисления, получаем

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} + \frac{6 \cdot 2,4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{5,856}{EI}.$$

Тогда каноническое уравнение принимает вид

$$\frac{2}{EI} X_1 + \frac{5,856}{EI} = 0,$$

откуда находим

$$X_1 = -\frac{5,856}{2} = -2,93 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отрицательное значение  $X_1$  говорит о том, что истинное направление момента над промежуточной опорой обратно принятому первоначально и показанному на рис. 1.4, в.

6. Строим эпюру изгибающих моментов.

Считая момент  $X_1$  внешней нагрузкой, можно определить опорные реакции, рассматривая каждый пролет балки отдельно, а затем построить эпюру моментов обычным способом, как это выполнялось для статически определимой балки. В данном случае удобнее воспользоваться уже построенными эпюрами.

Эквивалентная система находится под действием заданных пролётных нагрузок и вычисленного момента  $X_1$ . Следовательно, окончательная эпюра изгибающих моментов может быть представлена суммой двух эпюр

$$M = M_P + \bar{M} \cdot X_1.$$

Первая эпюра уже построена (рис. 1.4, з), а вторая получается умножением ординат эпюры  $\bar{M}_1$  (рис. 1.4, д) на вычисленное значение  $X_1$ . Эпюра  $\bar{M} \cdot X_1$  показана на рис. 1.4, е. Геометрически складываем эпюры  $M_P$  и  $\bar{M} \cdot X_1$  (рис. 1.4, з, е), суммируя ординаты эпюр в характерных точках:

$$\begin{aligned} M_A &= 4 + 0 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_E &= 4,32 - 1,47 = 2,85 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_B &= 0 - 2,93 = -2,93 \text{ кН} \cdot \text{м}; & M_C &= 0. \end{aligned}$$

По найденным значениям  $M$  строим окончательно эпюру изгибающих моментов (рис. 1.4, ж).

Для проверки правильности расчётов и построения эпюры изгибающих моментов можно использовать условие равенства нулю угла поворота

смежных сечений балки над средней опорой (перемещение по направлению отброшенной связи). Этот угол вычисляется перемножением окончательной эпюры моментов (рис. 1.4, ж) на эпюру  $\bar{M}_1$  (рис. 1.4, д). При перемножении эпюру  $M$  удобно представить в виде трёх треугольников, показанных пунктирными линиями на рис. 1.4, ж, и параболического сегмента.

Угол поворота смежных сечений балки над средней опорой вычислим методом перемножения эпюр:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} (\omega_1 y_1 + \omega_2 \bar{y}_1 + \omega_3 \bar{y}_2 + \omega_4 y_2).$$

Площади эпюр и соответствующие ординаты под их центрами тяжести

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 4 = 7,2; \quad y_1 = \frac{1}{3};$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 2,93 = -5,274; \quad \bar{y}_1 = \frac{2}{3};$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 2,93 = -3,516; \quad \bar{y}_2 = \frac{2}{3};$$

$$\omega_4 = \frac{ql^3}{12} = \frac{6 \cdot 2,4^3}{12} = 6,912; \quad y_2 = \frac{1}{2}$$

определяются по соответствующим эпюрам (рис. 1.4, ж) и (рис. 1.4, д).

Итак,

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EI} (\omega_1 y_1 + \omega_2 \bar{y}_1 + \omega_3 \bar{y}_2 + \omega_4 y_2) = \\ &= \frac{1}{EI} \left( 7,2 \cdot \frac{1}{3} - 5,274 \cdot \frac{2}{3} - 3,516 \cdot \frac{2}{3} + 6,912 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{5,856 - 5,860}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Небольшая погрешность вычислений

$$\Delta = \frac{|5,856 - 5,860|}{|5,856|} \cdot 100\% = 0,068\%,$$

не превышающая 5 % , возникла в результате округлений. Полученный результат свидетельствует о том, что эпюра изгибающих моментов построена правильно.

7. Подбираем сечение балки по условию прочности.

При изгибе условие прочности имеет вид

$$\frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq R \quad \text{или} \quad W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{R}.$$

По эпюре  $M$  (рис. 1.4, ж) находим максимальный момент  $M_x^{\max} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , а по условию задачи  $R = 160 \text{ МПа}$ . Подставляя эти числа в последнюю формулу, получим величину требуемого момента сопротивления двутавра:



$$W_x \geq \frac{4 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 25 \text{ см}^3.$$

По таблицам сортамента прокатной стали подбираем номер двутавра и выписываем его геометрические характеристики:

$$\text{двутавр №10, } W_x = 39,7 \text{ см}^3, I_x = 198 \text{ см}^4.$$

(Момент сопротивления выбранного двутавра значительно больше требуемого расчётного, но меньшего размера в таблице нет, поэтому принимаем двутавр №10).

#### 8. Определяем перемещения.

Определяем угол поворота сечения  $L$  (рис. 1.4, з).

Для этого приложим в сечении  $L$  основной системы единичный момент  $\bar{M} = 1$  и построим эпюру моментов  $\bar{M}\bar{M}$ . Угол поворота сечения  $L$  вычисляем, перемножая эпюры  $M$  и  $\bar{M}\bar{M}$  (рис. 1.4, ж, з):

$$\theta_L = M \cdot \bar{M}\bar{M} = \frac{1}{EI_x} (\omega_1 y_3 + \omega_2 y_4);$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 4; \quad y_3 = \frac{2}{3} = 0,667;$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 2,93; \quad y_4 = \frac{1}{3} = 0,333;$$

$$\theta_L = M \cdot \bar{M}\bar{M} = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 2,93 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{3,042}{EI_x};$$

$$\theta_L = \frac{3,042 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 7,68 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Результат получен со знаком плюс, следовательно, поворот сечения  $L$  происходит по направлению единичного момента  $\bar{M} = 1$ , то есть по часовой стрелке.

Определяем прогиб в сечении  $K$  (рис. 1.4, и).

Приложим в сечении  $K$  основной системы единичную силу  $\bar{P} = 1$  и построим от неё эпюру моментов  $\bar{M}\bar{P}$ . Так как сила  $\bar{P} = 1$  приложена в середине пролёта  $AB$ , опорные реакции будут равны и направлены вверх:

$$R_A = R_B = 0,5.$$

Определяем моменты в характерных точках участка  $AB$ :

$$M_A = 0; \quad M_K = 0,5 \cdot 1,8 = 0,9 \text{ м}; \quad M_B = 0.$$

Прогиб в сечении  $K$  вычисляется перемножением эпюр  $M$  и  $\bar{M}\bar{P}$  (рис. 1.4, ж, и). Так как из-за симметрии эпюры  $\bar{M}\bar{P}$  положение её центра тяжести находится элементарно – он находится посередине пролёта  $AB$ , а эпюра  $M$  на этом участке линейная, то удобнее умножить единичную эпю-

ру  $\overline{M_P}$  на окончательную  $M$ . В этом случае площадь берётся с эюры  $\overline{M_P}$ , а соответствующая ордината с эюры  $M$  равна величине средней линии трапеции, то есть алгебраической полусумме её оснований:

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 0,9; \quad y_5 = \frac{4 - 2,93}{2} = 0,535.$$

Прогиб в долях жёсткости будет равен

$$f_K = \frac{1}{EI_x} (\omega_5 \cdot y_5) = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 0,9 \cdot 0,535 \right) = \frac{0,867}{EI_x}.$$

Окончательно

$$f_K = \frac{0,867}{EI_x} = \frac{0,867 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 2,19 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,19 \text{ мм}.$$

Результат получен со знаком плюс, следовательно, прогиб направлен в сторону приложенной единичной силы, то есть вниз.

## ЗАДАЧА № 2

Стальной вал постоянного сечения вращается с частотой  $n$  (об/мин) и передает мощность  $N$  (кВт). Требуется подобрать диаметр вала из условия его прочности при совместном действии изгиба и кручения, если известны предел текучести материала  $\sigma_T$  и коэффициент запаса прочности  $n_T = 3$ .

Числовые данные берутся из табл. 2.1, расчётные схемы по рис. 2.2.

Необходимые характеристики материала приведены в табл. 2.2.

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 2

#### *Основные теоретические сведения и расчётные формулы*

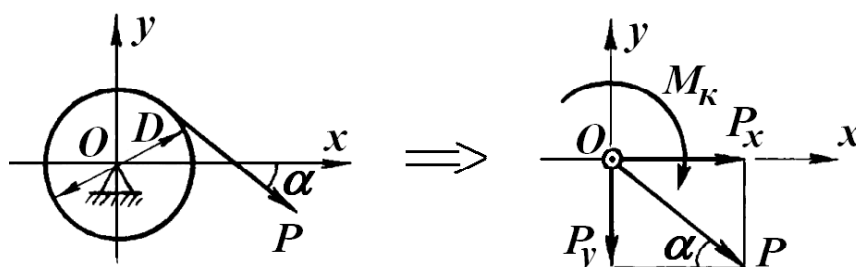
Расчёт вала на статическую прочность начинается с определения действующих на него нагрузок. Нагрузки на вал передаются через шкивы или шестерни. Зная величину передаваемой мощности  $N$  и число оборотов в минуту  $n$ , можно определить величину крутящего момента, действующего на участке вала между шкивами по формуле

$$M_{кр} = 1,02 \cdot \frac{30 \cdot N}{\pi \cdot n} \text{кН} \cdot \text{м}; \left( 1 \text{ кВт} = 102 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 1,02 \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right). \quad (9.1)$$

По величине крутящего момента вычисляются окружные усилия, приложенные к шкивам и передающиеся на вал. Эти усилия раскладываются на вертикальные и горизонтальные составляющие.

Усилия, передающиеся на вал через шестерню зубчатого зацепления (рис. 2.1):

$$M_k = P \frac{D}{2}; P = \frac{2M_k}{D}; \quad P_x = P \cos \alpha; P_y = P \sin \alpha.$$



**Рис. 2.1. Приведение окружных усилий, действующих на шестерню зубчатого зацепления, к оси вала**

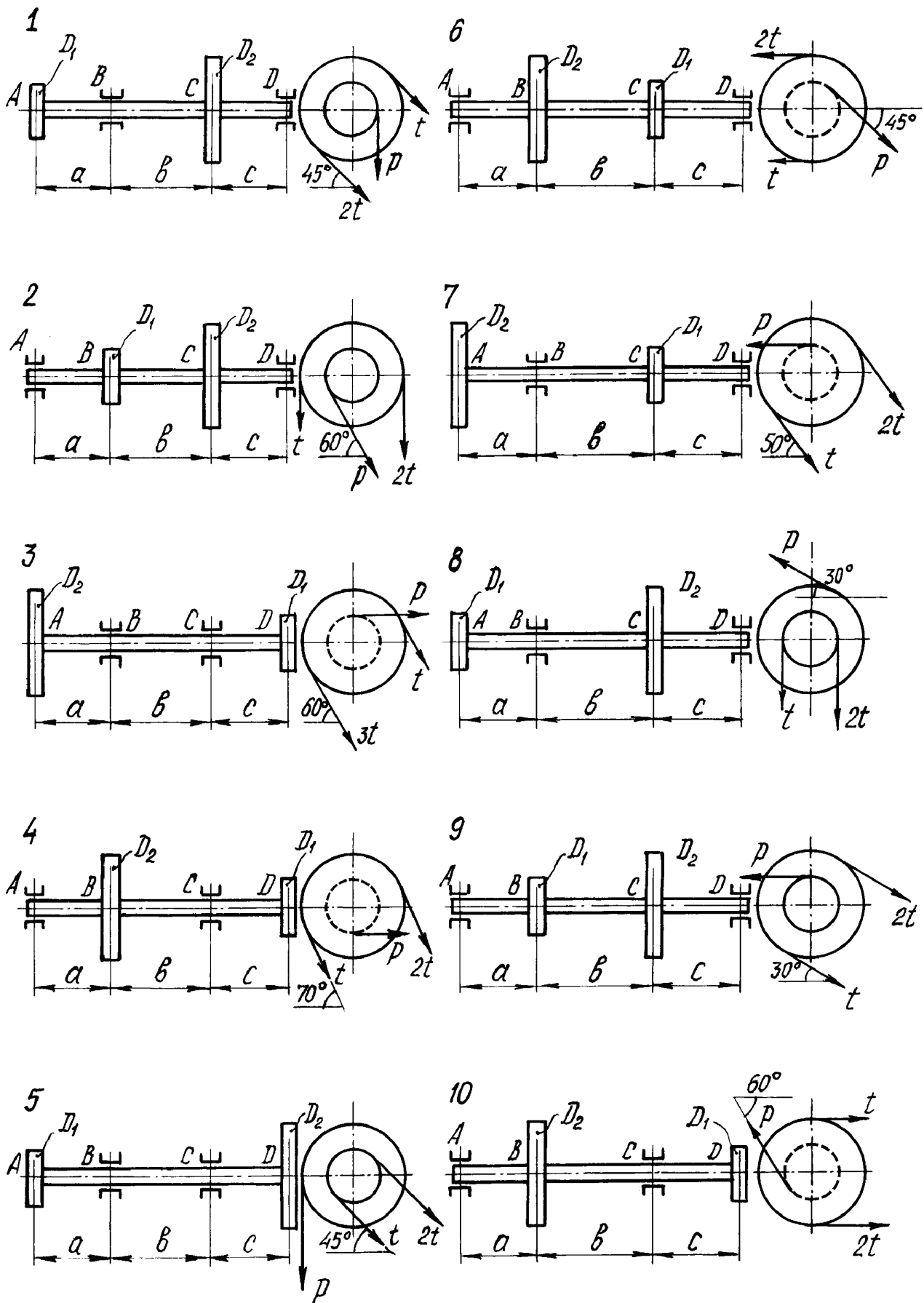


Рис. 2.2. Расчётные схемы валов

Таблица 2.1

## Числовые данные к задаче № 2

Номер строки	Номер расч. схемы по рис. 38	Размер, м					N, кВт	n, об/мин	Марка стали
		a	b	c	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>			
1	1	0,5	0,3	0,3	0,4	0,6	20	120	5
2	2	0,4	0,5	0,5	0,2	0,6	15	380	45
3	3	0,3	0,7	0,3	0,3	0,5	10	380	40X
4	4	0,4	0,3	0,5	0,2	0,4	16	280	3
5	5	0,6	0,8	0,4	0,4	0,6	18	280	40XH
6	6	0,4	0,5	0,3	0,3	0,6	12	120	35
7	7	0,5	0,3	0,3	0,2	0,5	14	120	4
8	8	0,6	0,4	0,5	0,5	0,5	20	280	30XГТ
9	9	0,4	0,6	0,3	0,4	0,4	15	380	3
0	10	0,8	0,4	0,7	0,3	0,5	17	380	30
	з	ж	а	б	в	г	д	ж	е

Таблица 2.2

## Механические характеристики сталей

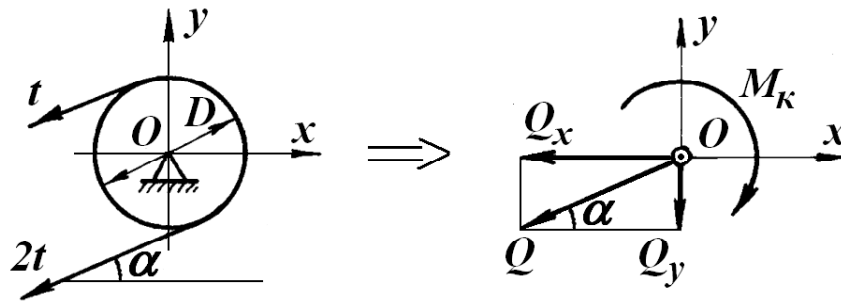
Марка стали	Предел текучести $\sigma_T$ , МПа	Предел прочности $\sigma_B$ , МПа	Предел выносливости	
			при изгибе $\sigma_{-1}$ , МПа	при кручении $\tau_{-1}$ , МПа
3	250	420	195	115
4	280	460	220	-
5	280	520	220	130
30	300	500	235	125
30XГТ	750	950	450	260
35	320	540	260	155
40X	500	730	320	200
40XH	650	820	360	210
45	280	560	250	150

*Примечание.* Если  $\tau_{-1}$  в таблице не дано, то используется эмпирическая формула  $\tau_{-1} \approx 0,6 \sigma_{-1}$ .

Усилия, передающиеся на вал через шкив ремённой передачи (рис. 2.3):

$$M_{кр} = 2t \frac{D}{2} - t \frac{D}{2} = t \frac{D}{2}; \quad t = \frac{2M_{кр}}{D};$$

$$Q = 3t; \quad Q_x = Q \cos \alpha; \quad Q_y = Q \sin \alpha.$$



**Рис. 2.3. Приведение окружных усилий, действующих на шкив ремённой передачи, к оси вала**

Нагрузки, действующие на вал, вызывают его кручение и изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Для расчёта вала на прочность следует построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной  $M_x$  и горизонтальной  $M_y$  плоскостях и эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$ .

Условие прочности вала записывается для опасного сечения, в котором расчётный (приведенный) момент имеет максимальную величину.

По третьей гипотезе прочности расчётный момент в опасном сечении вычисляется по формуле

$$M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}, \quad (9.2)$$

где  $M_p$  - расчётный момент;

$M_x, M_y$  - изгибающие моменты в рассматриваемом сечении вала;

$M_{кр}$  - крутящий момент в этом же сечении.

Если положение опасного сечения не очевидно, вычисляются расчётные моменты для нескольких сечений вала и для дальнейшего расчёта выбирается сечение с наибольшим расчётным моментом.

Из условия прочности вала

$$\frac{M_p^{\max}}{W_u} = \frac{M_p^{\max}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq [\sigma], \quad (9.3)$$

где  $M_p^{\max}$  - максимальный расчётный момент;

$W_u$  - момент сопротивления сечения при изгибе;

$[\sigma]$  - допускаемое напряжение, определяемое по пределу текучести  $\sigma_T$

и запасу прочности  $n_T$  отношением  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$

вычисляется требуемое значение диаметра вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_p^{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (9.4)$$

## ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 2

Стальной вал постоянного сечения (рис. 2.6, а) вращается с постоянной угловой скоростью  $n = 120$  об/мин и передает через шкив диаметром  $D_2 = 0,6$  м, мощность  $N = 20$  кВт.

Подобрать диаметр вала из условия его прочности, если вал изготовлен из стали марки Ст. 50 с пределом текучести материала  $\sigma_T = 380$  МПа и коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести  $n_T = 3$ .

Остальные числовые данные к задаче:

$$a = 0,3 \text{ м}; \quad b = 0,3 \text{ м}; \quad c = 0,2 \text{ м}; \quad D_1 = 0,3 \text{ м}.$$

1. Определение нагрузок, передающихся на вал.

На рис. 2.6, а показаны усилия, приложенные к шкиву (сечение  $D$ ) и к шестерне (сечение  $B$ ).

Крутящий момент, передаваемый через шкив на вал:

$$M_K = 1,02 \cdot \frac{30 \cdot N}{\pi \cdot n} = 1,02 \cdot \frac{30 \cdot 20}{\pi \cdot 120} = 1,62 \text{ кНм}.$$

Нагрузки, действующие на вал, определяются с учётом того, что окружные усилия, приложенные к шкивам (рис. 2.4, 2.5), при переносе их в центр поперечного сечения вала приводятся к силам, изгибающим его в двух плоскостях, и скручивающему моменту (рис. 2.6, б).

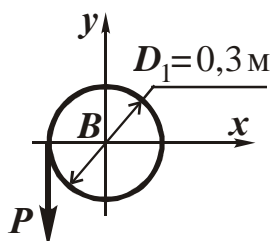


Рис. 2.4. Шестерня  $B$

$$M_K = P \frac{D_1}{2}; \quad P = \frac{2M_K}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,62}{0,3} = 10,8 \text{ кН};$$

$$P_6 = P_y = P = 10,8 \text{ кН};$$

$$P_2 = P_x = 0.$$

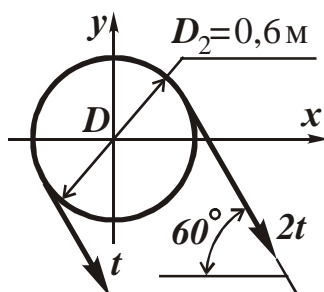


Рис. 2.5. Шкив  $D$

$$M_K = 2t \frac{D_2}{2} - t \frac{D_2}{2} = t \frac{D_2}{2}$$

$$t = \frac{2M_K}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,62}{0,6} = 5,4 \text{ кН}$$

$$Q = t + 2t = 3t = 3 \cdot 5,4 = 16,2 \text{ кН};$$

$$Q_6 = Q_y = Q \sin 60^\circ = 16,2 \sin 60^\circ = 14,03 \text{ кН};$$

$$Q_2 = Q_x = Q \cos 60^\circ = 16,2 \cos 60^\circ = 8,10 \text{ кН}.$$

Расчётная схема вала показана на рис. 2.6, б.

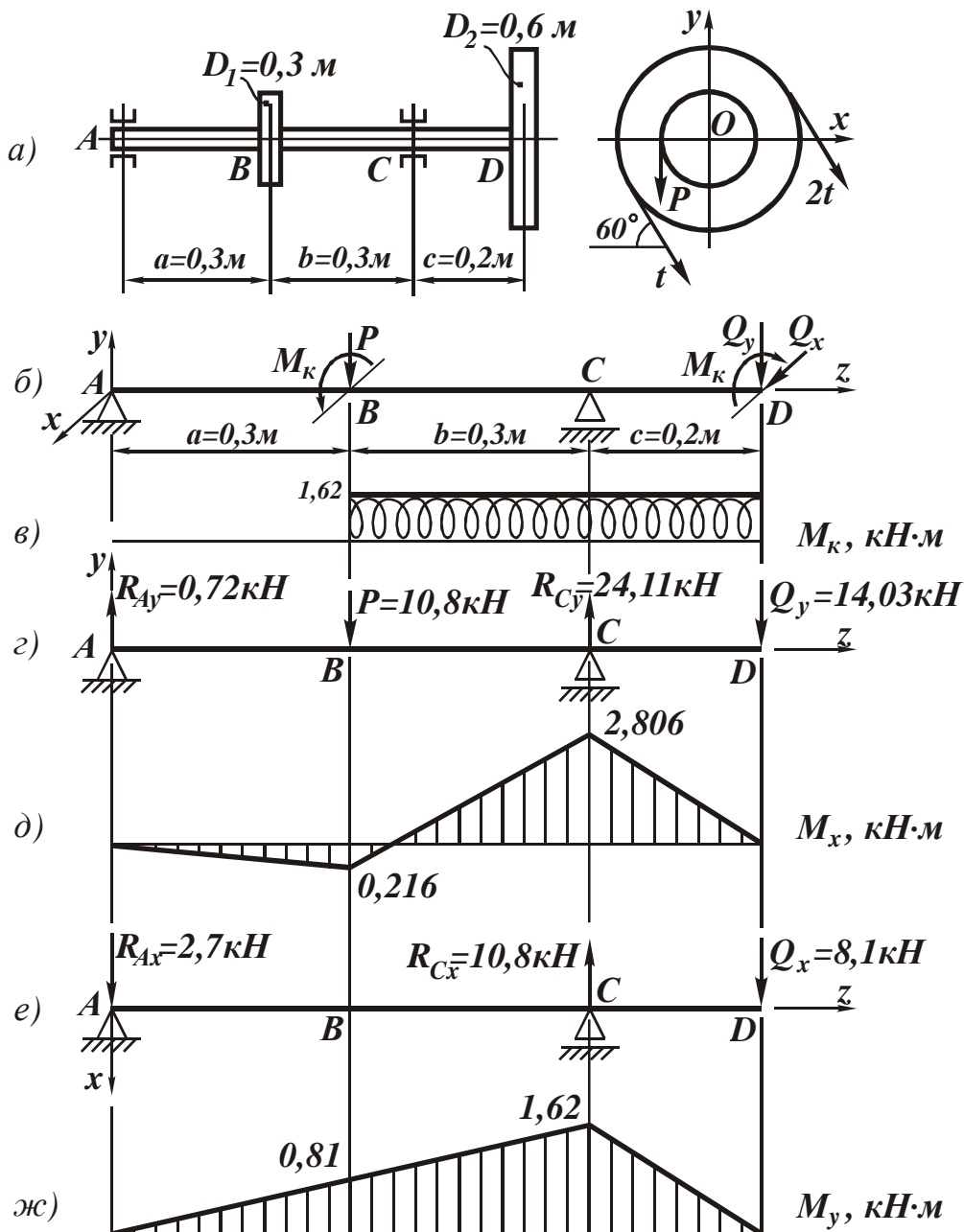


Рис. 2.6. Расчётная схема и эпюры моментов внутренних усилий в поперечных сечениях вала

## 2. Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов.

Из условий нагружения вала следует, что он испытывает кручение на участке  $BD$  постоянным крутящим моментом  $M_{кр} = 1,62 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , эпюра которого показана на рис. 2.6, в.

Схема нагрузок, приложенных к валу в вертикальной плоскости, представлена на рис. 2.6, г. Для построения эпюры изгибающих моментов от действия этих сил, вал рассматривается как простая двухопорная балка, для которой следует вычислить вертикальные опорные реакции:



$$\begin{aligned}\sum m_A &= 0; 10,8 \cdot 0,3 + 14,03 \cdot 0,8 - R_{yC} \cdot 0,6 = 0; \\ R_{yC} &= 24,11 \text{ кН}; \\ \sum m_C &= 0; R_{yA} \cdot 0,6 - 10,8 \cdot 0,3 + 14,03 \cdot 0,2 = 0; \\ R_{yA} &= 0,72 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Проверка вычислений опорных реакций:

$$\sum Y = 0; 0,72 - 10,8 + 24,11 - 14,03 = 0.$$

Вычисляем изгибающие моменты от действия вертикальных сил в характерных сечениях вала:

$$\begin{aligned}M_x^A &= 0; M_x^B = R_{yA} \cdot a = 0,72 \cdot 0,3 = 0,216 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_x^D &= 0; M_x^C = -Q_{yC} = -14,03 \cdot 0,2 = -2,80 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

По вычисленным значениям построена эпюра изгибающих моментов  $M_x$ , от действия сил, расположенных в вертикальной плоскости (рис. 2.6, д).

На рис. 2.6, е показаны нагрузки, приложенные к валу в горизонтальной плоскости (для наглядности чертежа схема повернута на  $90^\circ$ ).

Для построения эпюры изгибающих моментов от действия этих сил вычисляются горизонтальные опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum m_A &= 0; R_{xC} \cdot 0,6 - 8,1 \cdot 0,8 = 0; R_{xC} = 10,8 \text{ кН}; \\ \sum m_C &= 0; R_{xA} \cdot 0,6 + 8,1 \cdot 0,2 = 0; R_{xA} = -2,7 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Проверка определения горизонтальных опорных реакций:

$$\sum X = 0; R_{xA} + R_{xC} - Q_x = -2,7 + 10,8 - 8,1 = 0.$$

Изгибающие моменты в характерных сечениях вала:

$$\begin{aligned}M_y^A &= 0; M_y^B = R_{xA} \cdot a = -2,7 \cdot 0,3 = -0,81 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_y^D &= 0; M_y^C = -Q_x \cdot 0,2 = -8,1 \cdot 0,2 = -1,62 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

По вычисленным значениям момента строится эпюра  $M_y$  (рис. 2.6, ж).

3. Подбор поперечного сечения (определение диаметра вала).

Материал вала – сталь марки Ст. 50, допускаемое напряжение для которой

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{380}{3} = 126,7 \text{ МПа}.$$

Опасным для вала является сечение С, так как в этом сечении действует крутящий момент, а изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях максимальны (рис. 2.6, в, д, ж).

Величины моментов в сечении С :

$$M_{x_C} = 2,806 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{y_C} = 1,62 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{кр_C} = 1,62 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчётный момент по третьей гипотезе прочности

$$M_p^{\max} = M_p^C = \sqrt{M_{x_C}^2 + M_{y_C}^2 + M_{кр_C}^2} = \sqrt{2,806^2 + 1,62^2 + 1,62^2} = 3,62 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Искомый диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_p^{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,62 \cdot 10^3}{\pi \cdot 126,7 \cdot 10^6}} = 0,0663 \text{ м}.$$

Принимаем диаметр вала  $d=66$  мм.

*Указание:* величину диаметра вала принимать, округляя до ближайшего чётного целого числа (мм), а также оканчивающегося на 5.

### ЗАДАЧА № 3

Для стального вала постоянного сечения, рассмотренного в предыдущей задаче, выполнить проверочный расчёт на прочность при напряжениях в его поперечных сечениях, циклически изменяющихся во времени. Считается, что нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу, а касательные – по пульсационному.

В расчёте учесть влияние на прочность вала концентрации напряжений, создаваемой наличием шпоночных канавок в сечениях, где имеются шкивы, и влияние прессовой насадки подшипников – в опорных сечениях. Обработка поверхности вала – тонкая обточка.

Нормативный запас усталостной прочности принять  $[n] = 1,5$ .

Усилия, приложенные к валу и входящие в расчёт, берутся из решения задачи № 2; механические характеристики материала – из табл. 2.2. Необходимые справочные данные приводятся в методических указаниях к данной задаче.

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 3

#### *Основные теоретические сведения и расчётные формулы*

Основные понятия.

Многие детали машин в процессе эксплуатации подвергаются действию напряжений, циклически изменяющихся во времени (рис. 3.1), что приводит к появлению микротрещин, их росту и, как следствие этого, к разрушению материала. Разрушение под действием повторно-переменных напряжений называется *усталостным разрушением* или *усталостью материала*.

Способность материала сопротивляться усталостному разрушению называется *выносливостью*. Проверочный расчёт на выносливость сводится к вычислению запаса усталостной прочности и сравнению его с нормативным.

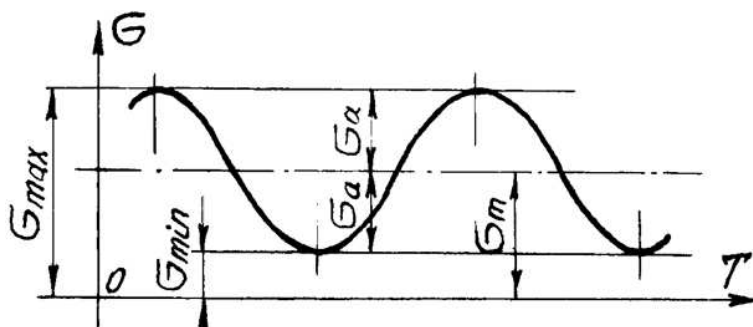


Рис. 3.1. График изменения циклического напряжения во времени

## 1. Характеристики циклов напряжений.

Напряжения, периодически изменяющиеся во времени, называются циклическими. На рис. 3.1 показана зависимость циклического напряжения от времени.

Основные характеристики цикла:

$\sigma_{min}$  - минимальное напряжение цикла;

$\sigma_{max}$  - максимальное напряжение;

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \text{ - среднее напряжение цикла;} \quad (3.1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \text{ - амплитудное напряжение цикла.}$$

Каждый цикл характеризуется его коэффициентом асимметрии

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \quad (3.2)$$

Частными случаями циклов являются симметричный и пульсационный, графики которых приведены на рис. 3.2.

Основные характеристики этих циклов следующие:

симметричный цикл

$$\sigma_{min} = -\sigma_{max}; \quad \sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_{max}; \quad r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = -1; \quad (3.3)$$

пульсационный цикл

$$\sigma_{min} = 0; \quad \sigma_m = \sigma_a = 0,5\sigma_{max}; \quad r = 0. \quad (3.4)$$

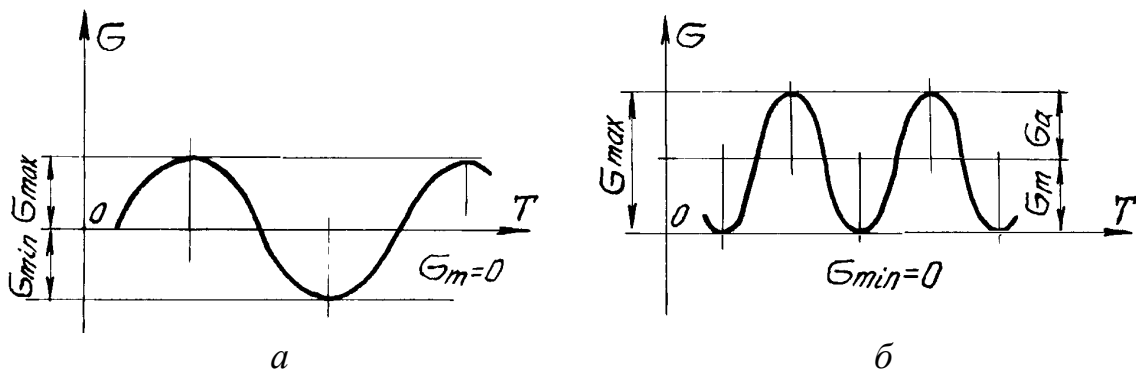


Рис. 3.2. Циклы напряжений: *а* - симметричный; *б* - пульсационный

## 2. Предел выносливости.

Максимальное напряжение цикла, при котором стандартный образец выдерживает неограниченное число циклов нагружений, не разрушаясь, называется *пределом выносливости* материала. Для предела выносливости принято обозначение  $\sigma_r$  ( $r$  - коэффициент асимметрии цикла).

Для симметричного цикла  $r = -1$ ,

Поэтому предел выносливости, определяемый при чистом изгибе, обозначается  $\sigma_{-1}$ , а при чистом кручении  $\tau_{-1}$ .

### 3. Коэффициент снижения предела выносливости.

На величину предела выносливости материала, кроме коэффициента асимметрии цикла, влияет целый ряд различных факторов, в первую очередь *концентрация напряжений, размеры образца или детали, качество обработки поверхности.*

Для того чтобы учесть влияние этих факторов, вводятся соответствующие коэффициенты, величины которых определяются экспериментально или из теоретических предпосылок и приводятся в справочной литературе. При решении рассматриваемой задачи используются табл. 3.1-3.4, в которых приводятся:

$k_{\sigma}$ ,  $k_{\tau}$  - эффективные коэффициенты концентрации для нормальных и касательных напряжений и коэффициенты снижения предела выносливости при прессовой посадке подшипников (табл. 3.1, 3.2);

$\psi_{\tau}$  - коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла (табл. 3.3).

$\epsilon_{\sigma}$ ,  $\epsilon_{\tau}$  - коэффициенты влияния абсолютных размеров сечения соответственно для нормальных и касательных напряжений (табл. 3.4).

Коэффициент влияния качества обработки поверхности  $\beta$  определяется по графикам, приведенным на рис. 3.3.

Совместное влияние всех указанных факторов на величину предела выносливости детали учитывается коэффициентами снижения предела выносливости по нормальным и касательным напряжениям  $k_{\sigma_{\partial}}$ ,  $k_{\tau_{\partial}}$ , вычисляемым по эмпирическим формулам:

$$k_{\sigma_{\partial}} = \frac{k_{\sigma}}{\epsilon_{\sigma}} + \frac{1}{\beta} - 1; \quad k_{\tau_{\partial}} = \frac{k_{\tau}}{\epsilon_{\tau}} + \frac{1}{\beta} - 1. \quad (3.5)$$

### 4. Запас усталостной прочности (выносливости).

Запас усталостной прочности по нормальным напряжениям при симметричном цикле нагружения определяется по формуле

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma_{\partial}} \sigma_a}, \quad (3.6)$$

где  $\sigma_{-1}$  - предел выносливости материала;

$\sigma_a$  - амплитудное напряжение цикла.

Запас усталостной прочности по касательным напряжениям при несимметричном цикле определяется по формуле

$$n_{\sigma} = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau_{\partial}} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}, \quad (3.7)$$

где  $\tau_{-1}$  - предел выносливости материала при кручении;

$\tau_a$ ,  $\tau_m$  - амплитудное и среднее напряжения цикла.

Запас выносливости вала при совместном действии изгиба и кручения определяется по эмпирической формуле

$$n = \frac{n_{\sigma}n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} . \quad (3.8)$$

Очевидно, что вычисленный запас выносливости должен быть не менее нормативного.

**Таблица 3.1**

**Эффективные коэффициенты концентрации напряжений  $k_{\sigma}$ ,  $k_{\tau}$**   
**для валов со шпоночными канавками**

Эффективные коэффициенты концентрации $k_{\sigma}$ , $k_{\tau}$	Предел прочности материала $\sigma_{\sigma}$ , МПа							
	400	500	600	700	800	900	1000	1200
$k_{\sigma}$ - при изгибе	1,30	1,38	1,46	1,54	1,62	1,69	1,77	1,92
$k_{\tau}$ - при кручении	1,20	1,37	1,54	1,71	1,88	2,05	2,22	2,39

**Таблица 3.2**

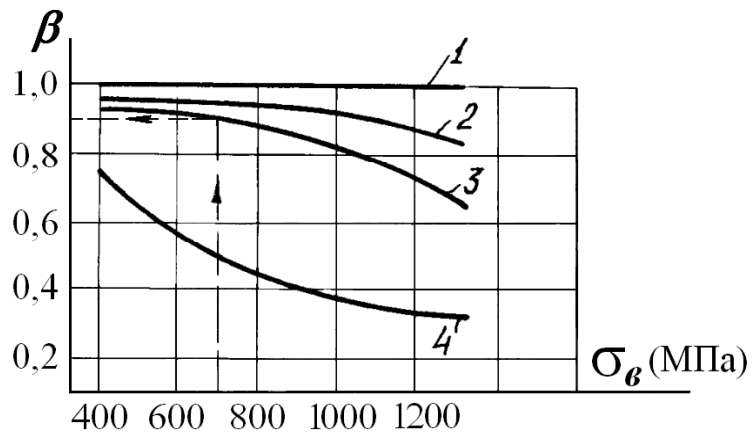
**Коэффициенты снижения предела выносливости вала**  
**при прессовой посадке подшипника**

Коэффициенты	Диаметр, мм	Коэффициенты $k_{\sigma}/\epsilon_{\sigma}$ и $k_{\tau}/\epsilon_{\tau}$ для предела прочности материала $\sigma_{\sigma}$ , МПа							
		400	500	600	700	800	900	1000	1200
$k_{\sigma}/\epsilon_{\sigma}$	30	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,25
	50	2,75	3,05	3,36	3,66	3,96	4,28	4,60	5,20
	$\geq 100$	2,95	3,28	3,60	3,94	4,25	4,60	4,90	5,60
$k_{\tau}/\epsilon_{\tau}$	30	1,75	1,90	2,05	2,20	2,35	2,50	2,65	2,95
	50	2,05	2,23	2,52	2,60	2,78	3,07	3,26	3,62
	$\geq 100$	2,17	2,37	2,56	2,78	2,95	3,16	3,34	3,76

**Таблица 3.3**

**Значения коэффициентов чувствительности материала**  
**к асимметрии цикла  $\Psi_{\sigma}$ ,  $\Psi_{\tau}$**

Материал	$\Psi_{\sigma}$	$\Psi_{\tau}$
Углеродистая сталь $\sigma_{\sigma}=400...500$ МПа	0,05	0,0
Углеродистая и легированная сталь $\sigma_{\sigma}=500...800$ МПа	0,10 - 0,15	0,05
Легированная сталь $\sigma_{\sigma}=800...1200$ МПа	0,15 - 0,20	0,05 - 0,10



**Рис. 3.3. Зависимость коэффициента качества обработки поверхности  $\beta$  от предела прочности материала:**  
**1 - зеркальное полирование; 2 - тонкое шлифование;**  
**3 - тонкая обточка; 4 - наличие окалины**

**Таблица 3.4**

**Значение масштабного фактора  $\epsilon_\sigma = \epsilon_\tau$**   
**в зависимости от диаметра вала  $d$**

Материал	Коэффициенты $\epsilon_\sigma = \epsilon_\tau$ при диаметре $d$ , мм							
	10	20	30	40	50	70	100	200
Углеродистая сталь $\sigma_g = 400 \dots 500$ МПа	0,98	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76	0,70	0,63
Углеродистая и легированная сталь $\sigma_g = 500 \dots 800$ МПа	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73	0,68	0,61
Легированная сталь $\sigma_g = 800 \dots 1200$ МПа	0,95	0,86	0,81	0,77	0,74	0,69	0,65	0,59
Легированная сталь $\sigma_g = 1200 \dots 1400$ МПа	0,94	0,83	0,77	0,73	0,70	0,66	0,62	0,57

### **ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 3**

Произвести проверку на усталостную прочность вала, рассмотренного в задаче № 2. В расчёте принять, что нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу, а касательные – по пульсационному.

Учесть факторы, снижающие предел выносливости: концентрацию напряжений, размеры и способ обработки поверхности детали. Нормативный запас усталостной прочности  $[n] = 1,5$ . Обработка поверхности вала – тонкая обточка.

Необходимые данные для проверочного расчёта вала взяты из условия задачи № 2.

### 1. Определение максимальных напряжений в сечении.

Для рассчитываемого вала опасным является сечение  $C$ , где моменты максимальные (рис. 2.6).

Диаметр вала был определен при решении предыдущей задачи № 2.

$$d = 66 \text{ мм} = 66 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Вычисляем моменты сопротивления сечения вала при его изгибе и кручении:

$$W_{изг} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi(66 \cdot 10^{-3})^3}{32} = 28,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{кр} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi(66 \cdot 10^{-3})^3}{16} = 56,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По эпюрам моментов (рис. 2.6 *в, ж, д*) находим крутящий и изгибающие моменты, действующие в сечении  $C$ : крутящий момент  $M_k = 1,62 \text{ кНм}$ ; изгибающие моменты  $M_x = 2,806 \text{ кНм}$  и  $M_y = 1,62 \text{ кНм}$ .

Максимальные нормальные напряжения от совместного действия изгибов в двух плоскостях:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_{изг}} = \frac{\sqrt{(2,806 \cdot 10^3)^2 + (1,62 \cdot 10^3)^2}}{28,2 \cdot 10^{-6}} = 114,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 114,9 \text{ МПа}.$$

Максимальные касательные напряжения от кручения

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_{кр}} = \frac{1,62 \cdot 10^3}{56,4 \cdot 10^{-6}} = 28,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28,7 \text{ МПа}.$$

### 2. Определение характеристик циклических напряжений.

По условию задачи нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу, следовательно

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_{\max} = 114,9 \text{ МПа}; \quad r = -1.$$

Касательные напряжения изменяются по пульсационному циклу

$$\tau_m = \tau_a = 0,5\tau_{\max} = 0,5 \cdot 28,7 = 14,35 \text{ МПа}; \quad r = 0.$$

### 3. Механические характеристики материала.

Необходимые характеристики материала выписываются из табл. 2.2 (в данном примере – из справочника): для стали марки Ст.50:  $\sigma_T = 380 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_s = 700 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{-1} = 300 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{-1} = 180 \text{ МПа}$ .

### 4. Вычисление коэффициентов снижения предела выносливости.

Из табл. 3.1–3.4 выписываются коэффициенты, необходимые для расчёта. Сечение  $C$  является опорным, и концентрация напряжений создаётся прессовой посадкой подшипника.



Используя данные табл. 3.2 (при  $\sigma_s = 700$  МПа и  $d = 66$  мм), путём линейной интерполяции находим

$$\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma} = 3,75; \quad \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau} = 2,66.$$

По рис. 3.3 определяем коэффициент влияния качества обработки поверхности при тонкой обточке:

$$\beta = 0,90.$$

Коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла берётся из табл. 3.4:

$$\psi_\tau = 0,05.$$

Коэффициенты снижения предела выносливости с учётом всех рассмотренных факторов имеют следующие значения:

$$k_{\sigma\partial} = \frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma} + \frac{1}{\beta} - 1 = 3,75 + \frac{1}{0,9} - 1 = 3,86;$$

$$k_{\tau\partial} = \frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau} + \frac{1}{\beta} - 1 = 2,66 + \frac{1}{0,9} - 1 = 2,77.$$

#### 5. Определение запаса усталостной прочности.

Запас усталостной прочности при изгибе и кручении:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma\partial} \sigma_a} = \frac{300}{3,86 \cdot 114,9} = 0,68;$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau\partial} \tau_a + \psi_\tau \cdot \tau_m} = \frac{180}{2,77 \cdot 14,35 + 0,05 \cdot 14,35} = 4,45.$$

Запас усталостной прочности при совместном действии изгиба и кручения:

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{0,68 \cdot 4,45}{\sqrt{0,68^2 + 4,45^2}} = 0,67 < [n] = 1,5.$$

Запас усталостной прочности вала не обеспечен, так как он меньше нормативного. Диаметр вала необходимо увеличить или ввести упрочняющую обработку.

*Примечание.* Если опасным является сечение, в котором насажен шкив, то концентрация напряжений создаётся за счёт шпоночной канавки и для определения коэффициентов  $k_\sigma$ ,  $k_\tau$ ,  $\varepsilon_\sigma$  и  $\varepsilon_\tau$  нужно использовать табл. 3.1 и табл. 3.3.

## ЗАДАЧА № 4

С заданной точкой М детали связана система декартовых координат  $x, y, z$ . Расчётом определены координатные напряжения в этой точке:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  (табл. 4.1). Провести исследование напряжённно-деформированного состояния окрестности точки М. Материал детали считать упругим и изотропным, с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$ .

Исследование напряжённно-деформированного состояния окрестности точки М детали выполнить в следующей последовательности.

1) Изобразить в аксонометрии единичный элемент, выделенный в окрестности точки М координатными сечениями, и показать напряжения, действующие на гранях этого элемента.

2) Записать тензор напряжений в этой точке в осях  $x, y, z$ .

3) Определить алгебраические инварианты тензора напряжений  $I_1, I_2, I_3$ .

4) Записать алгебраические уравнения для определения главных напряжений и главных осей тензора напряжений. Вычислить главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

5) Вычислить направляющие косинусы главных осей напряжений  $I, II, III$  и изобразить в пространстве  $x, y, z$  оси главных напряжений  $I, II, III$ .

6) Записать тензор напряжений в точке М в главных осях  $I, II, III$ . Определить алгебраические инварианты этого тензора  $I_1^{(0)}, I_2^{(0)}, I_3^{(0)}$ . Проверить правильность вычисления главных напряжений, сравнив величины алгебраических инвариантов  $I_1^{(0)}, I_2^{(0)}, I_3^{(0)}$  с величинами  $I_1, I_2, I_3$  соответственно.

7) Определить нормальное  $\sigma_{окт}$  и касательное  $\tau_{окт}$  октаэдрические напряжения. В пространстве главных осей  $I, II, III$  изобразить одну из октаэдрических площадок и показать нормальное и касательное напряжения, действующие на этой площадке.

8) Определить величину наибольшего касательного напряжения  $\tau_{max}$ . В пространстве главных осей  $I, II, III$  изобразить площадку, на которой действует наибольшее касательное напряжение и показать это напряжение.

9) Воспользовавшись соотношениями обобщённого закона Гука, определить величины главных деформаций  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ .

10) Вычислить относительное изменение объема  $\Delta$ .

11) Определить удельную потенциальную энергию упругой деформации окрестности точки М:

- энергию изменения объёма  $W_V$ ,
- энергию формоизменения  $W_\Phi$ ,
- полную удельную энергию  $W$ .

12) Определить расчётное напряжение в точке М по гипотезе наибольших касательных напряжений  $\sigma_p^{III}$ .

13) Определить расчётное напряжение в точке М по гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения  $\sigma_p^{IV}$ .

14) Определить расчётное напряжение в точке М по гипотезе прочности Мора  $\sigma_p^V$ .

Числовые данные принимаются по табл. 4.1.

**Таблица 4.1**

**Числовые данные к задаче № 4**

Но- мер стро- ки	Величины напряжений, МПа						$\sigma_{0p} / \sigma_{0c}$
	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$\tau_{xy}$	$\tau_{yz}$	$\tau_{xz}$	
1	-22	56	-71	0	0	-30	0,50
2	52	-12	30	0	23	0	0,46
3	-100	28	-64	-33	0	0	0,43
4	80	-46	57	0	0	15	0,40
5	-32	78	-67	0	-40	0	0,37
6	60	-66	19	50	0	0	0,33
7	-90	30	-47	0	0	-28	0,30
8	70	-22	82	0	54	0	0,27
9	-42	48	-51	-15	0	0	0,23
0	74	-38	32	0	0	42	0,20
	д	е	ж	з			ж

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 4

### *Основные теоретические сведения и расчётные формулы*

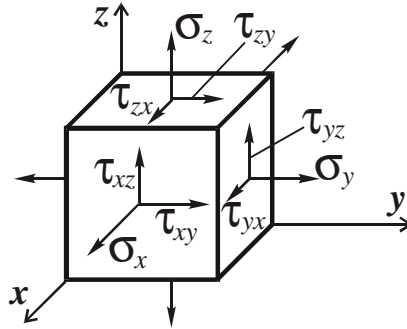
#### 1. Тензор напряжений

Напряжённое состояние малой окрестности точки деформируемого твёрдого тела определяется шестью независимыми компонентами тензора напряжений.

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Индексация напряжений иллюстрируется рис. 4.1, где  $x, y, z$  – координатные оси, связанные с рассматриваемой точкой М деформируемого тела.

Первый индекс у напряжения соответствует наименованию оси, нормальной к площадке, второй – оси, определяющей направление этого напряжения. Нормальное напряжение считают положительным, если оно направлено в направлении внешней нормали к площадке.



**Рис. 4.1. Напряжения на гранях выделенного элемента**

За положительное направление касательного напряжения принимают направление соответствующей координатной оси, если положительное направление нормального напряжения на рассматриваемой площадке совпадает с положительным направлением соответствующей ему координатной оси. Все напряжения, показанные на рис. 4.1, являются положительными.

В соответствии с законом парности, касательные напряжения, симметричные относительно главной диагонали тензора напряжений, равны между собой.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (4.2)$$

## 2. Главные напряжения

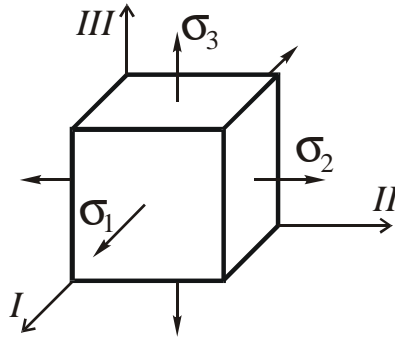
У любой точки деформированного тела можно выделить три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются главными, а нормальные напряжения, действующие на этих площадках, называются главными нормальными или просто главными напряжениями. Направления главных напряжений называются главными направлениями, или главными осями тензора напряжений в рассматриваемой точке тела.

Главные напряжения обозначают  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Нумерация главных напряжений выбирается так, чтобы между алгебраическими величинами этих напряжений были обеспечены соотношения  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Если в рассматриваемой точке тела в качестве координатных осей принять главные оси напряжений, то тензор напряжений получит вид

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

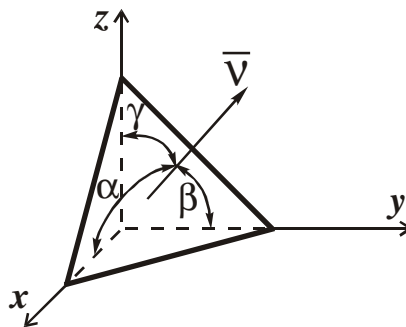
Элемент, выделенный в окрестности рассматриваемой точки главными площадками, показан на рис. 4.2.



**Рис. 4.2. Главные напряжения**

При выбранных координатных осях  $x, y, z$  положение произвольной наклонной площадки определяется единичным вектором внешней нормали  $\bar{v}$  к этой площадке, составляющим с координатными осями углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  (рис. 4.3). Косинусы этих углов называются направляющими косинусами:

$$l = \cos \alpha, \quad m = \cos \beta, \quad n = \cos \gamma. \quad (4.4)$$



**Рис. 4.3. Вектор внешней нормали к произвольной наклонной площадке**

При выбранных координатных осях  $x, y, z$  и известных компонентах тензора напряжений в этих осях, для определения положения главных площадок используют систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \Sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \Sigma)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \Sigma)n &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\Sigma$  - главные напряжения,

и соотношение между направляющими косинусами

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (4.6)$$

Вследствие условия (4.6) система уравнений (4.5) имеет ненулевое решение для  $l$ ,  $m$  и  $n$ .

Следовательно, определитель системы (4.5) должен быть равен нулю. Приравняв нулю определитель системы уравнений (4.5), после его раскрытия получим кубическое уравнение для определения величин главных напряжений

$$\Sigma^3 - I_1 \cdot \Sigma^2 + I_2 \cdot \Sigma - I_3 = 0. \quad (4.7)$$

Уравнение (7) называют характеристическим уравнением. Коэффициенты характеристического уравнения определяются выражениями

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Эти коэффициенты называются алгебраическими инвариантами тензора напряжений, т.к. при повороте координатных осей их величины остаются неизменными.

Характеристическое уравнение имеет три вещественных корня  $\Sigma$ , дающих три значения главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Подставляя поочередно значения главных напряжений в два независимые уравнения системы (4.5) и используя уравнение (4.6), получим три системы уравнений, дающие три тройки значений  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , определяющие направления главных осей напряжений и положение трёх главных площадок.

Из трёх главных напряжений одно является наибольшим нормальным напряжением в рассматриваемой точке, одно – наименьшим, а одно имеет промежуточную величину.

$$\sigma_1 = \sigma_{\max}, \quad \sigma_3 = \sigma_{\min}. \quad (4.9)$$

Если напряжённое состояние задано в главных осях, т.е. известны главные напряжения  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  и главные направления  $I, II, III$ , то инварианты тензора напряжений (3) имеют вид

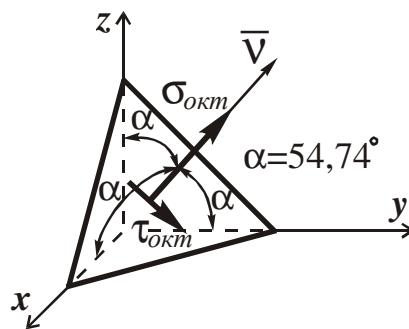
$$\begin{aligned} I_1^{(0)} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2^{(0)} &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1; \\ I_3^{(0)} &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \quad (4.10)$$

### 3. Октаэдрические напряжения

Площадки, равнонаклонные ко всем трём главным осям, называются октаэдрическими площадками. В окрестности рассматриваемой точки можно провести восемь октаэдрических площадок. Направляющие косинусы октаэдрических площадок имеют величину  $l = m = n = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , а соответствующие углы  $\alpha = \beta = \gamma = \pm 54,74^\circ$ . Напряжения, действующие по октаэдрическим площадкам, называются октаэдрическими напряжениями и определяются выражениями

$$\begin{aligned}\sigma_{окт} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \tau_{окт} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

На рис. 4.4 показана одна из восьми октаэдрических площадок и напряжения, действующие на этой площадке.



**Рис. 4.4. Октаэдрические напряжения**

#### 4. Экстремальные касательные напряжения

По площадкам, параллельным одному из трёх главных направлений и равнонаклонным к двум другим главным направлениям, действует тройка экстремальных касательных напряжений

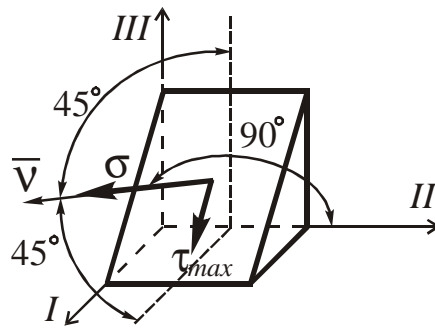
$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{32} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{21} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Напряжение  $\tau_{13}$  действует по площадке, параллельной главному направлению *II*, напряжение  $\tau_{32}$  - по площадке, параллельной направлению *I*,  $\tau_{21}$  - по площадке, параллельной направлению *III*.

Из указанных трёх экстремальных касательных напряжений одно, действующее по площадке, параллельной второму главному направлению, является наибольшим касательным напряжением в рассматриваемой точке тела

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.\quad (4.12)$$

На рис. 4.5 показана площадка, по которой действует наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\max} = \tau_{13}$ .



**Рис. 4.5. Наибольшее касательное напряжение**

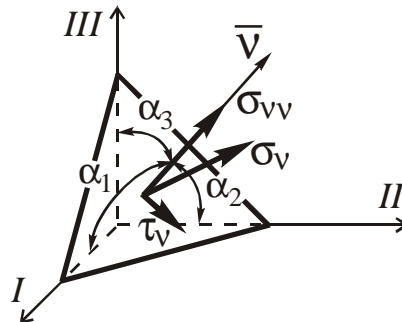
### 5. Напряжения на площадках общего положения

Если главные направления и главные напряжения известны, то напряжения на наклонной площадке общего положения, внешняя нормаль к которой  $\bar{V}$  составляет с главными направлениями  $I, II, III$  углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  соответственно, с направляющими косинусами  $l, m, n$ , определяются выражениями

$$\sigma_{VV} = \sigma_{V1}l + \sigma_{V2}m + \sigma_{V3}n = \sigma_1l^2 + \sigma_2m^2 + \sigma_3n^2 \quad (4.13)$$

$$\tau_V = \sqrt{\sigma_{V1}^2 + \sigma_{V2}^2 + \sigma_{V3}^2 - \sigma_{VV}^2} = \sqrt{(\sigma_1l)^2 + (\sigma_2m)^2 + (\sigma_3n)^2 - \sigma_{VV}^2},$$

где  $\sigma_{V1} = \sigma_1l$ ;  $\sigma_{V2} = \sigma_2m$ ;  $\sigma_{V3} = \sigma_3n$  – проекции полного напряжения  $\sigma_V$ , действующего на рассматриваемой площадке, на главные направления  $I, II$  и  $III$ . Наклонная площадка общего положения и действующие на ней напряжения показаны на рис. 4.6.



**Рис. 4.6. Наклонная площадка общего положения**

### 6. Шаровой тензор и девиатор напряжений

Средняя арифметическая величина нормальных напряжений, действующих по трём координатным площадкам, называется средним нормальным или гидростатическим напряжением в рассматриваемой точке

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (4.14)$$



Среднее нормальное напряжение определяет всестороннее равномерное растяжение или сжатие в рассматриваемой точке и ответственно только за изменение объёма элемента материала, выделенного у этой точки. Если от компонентов тензора напряжений отделить величины среднего нормального напряжения, связанные с объёмной деформацией, то получим компоненты напряжений  $\sigma_x - \sigma_0$ ;  $\sigma_y - \sigma_0$ ;  $\sigma_z - \sigma_0$ ;  $\tau_{xy}$ ;  $\tau_{yz}$ ;  $\tau_{zx}$ , связанные только с изменением формы элемента материала у рассматриваемой точки. Таким образом, тензор напряжений можно представить в виде суммы двух составляющих

$$T_H = T_{III} + D_H, \quad (4.15)$$

где  $T_{III}$  – шаровой тензор напряжений, компонентами которого являются средние напряжения  $\sigma_0$ , связанные только с объёмной деформацией элементов материала;

$D_H$  – девиатор напряжений, компонентами которого являются приведённые выше напряжения, связанные только с формоизменением элементов материала.

Шаровой тензор напряжений имеет вид

$$T_{III} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Девиатор напряжений записывается в форме

$$D_H = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Несложно заметить, что первый инвариант девиатора напряжений  $I_{1D} = 0$ .

Если напряжённое состояние задано главными напряжениями, то шаровой тензор имеет вид

$$T_{III} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

где  $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ ;

в свою очередь, девиатор напряжений получит вид

$$D_H = \begin{pmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Из выражений (4.11) и (4.14) следует, что среднее нормальное (гидростатическое) напряжение равно октаэдрическому нормальному напряжению в рас-

считываемой точке и эти напряжения пропорциональны первому инварианту тензора напряжений (4.8), (4.10).

### 7. Тензор деформаций

Деформированное состояние малой окрестности точки тела при выбранных координатных осях  $x, y, z$ , описывается тензором деформаций

$$T_D = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  - относительные удлинения в направлении координатных осей или линейные координатные деформации;

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  - сдвиги между координатными площадками (гранями элемента материала, выделенного у рассматриваемой точки).

Если главные направления известны, то тензор деформаций в главных осях имеет вид

$$T_D = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - линейные деформации в главных направлениях, называемые главными деформациями.

Если упругое твёрдое тело изотропно, то направления главных деформаций совпадают с направлениями соответствующих главных напряжений.

Одна из главных деформаций является наибольшим относительным удлинением в рассматриваемой точке, одна – наименьшим, а третья имеет промежуточную величину

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\max}; \varepsilon_3 = \varepsilon_{\min}. \quad (4.22)$$

### 8. Обобщённый закон Гука

Для линейно-деформируемого, упругого тела основным физическим законом, связывающим напряжения и деформации, является закон Гука. Для изотропных тел при известных главных направлениях и главных напряжениях, обобщённый закон Гука имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)],\end{aligned}\tag{4.23}$$

где  $E$  - модуль Юнга;  
 $\mu$  - коэффициент Пуассона.

### 9. Объёмная деформация

Упругое деформирование тела сопровождается изменением его объёма.. Если напряжённое состояние тела задано в главных осях, то относительная объёмная деформация тела определяется соотношением

$$\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),\tag{4.24}$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  - главные деформации в рассматриваемой точке;  
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения в этой точке.

### 10. Потенциальная энергия упругой деформации

При упругом деформировании в материале тела накапливается энергия, называемая потенциальной энергией упругой деформации. Удельная потенциальная энергия упругой деформации, накапливаемая в каждой единице объёма материала, для линейно-деформируемого упругого тела определяется соотношением

$$W = \frac{1}{2E} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)].\tag{4.25}$$

Эта энергия может быть представлена двумя составляющими

$$W = W_V + W_\Phi,\tag{4.26}$$

$$\text{где } W_V = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2\tag{4.27}$$

- удельная потенциальная энергия изменения объёма;

$$W_\Phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]\tag{4.28}$$

- удельная потенциальная энергия формоизменения.

Такое представление упругой энергии деформации соответствует разложению тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор напряжений.

## 11. Расчётные напряжения

При оценке прочности материала, находящегося в сложном напряжённом состоянии, используются различные критерии прочности, формулируемые в соответствии с принятой гипотезой прочности. Для конструкционных металлов в пластичном состоянии при оценке предельного состояния в качестве критерия текучести используют так называемые расчётные или эквивалентные напряжения в рассматриваемой точке, вычисляемые с использованием теории наибольших касательных напряжений или теории энергии формоизменения.

При использовании теории наибольших касательных напряжений расчётное или эквивалентное напряжение определяется соотношением

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (4.29)$$

Расчётное или эквивалентное напряжение по теории энергии формоизменения определяется соотношением

$$\sigma_p^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (4.30)$$

Расчётное или эквивалентное напряжение по теории прочности Мора определяется соотношением

$$\sigma_p^V = \sigma_1 - K\sigma_3, \quad (4.31)$$

где  $K = \frac{\sigma_{0p}}{\sigma_{0c}}$  - отношение предельных напряжений при растяжении и сжатии.

Вне зависимости от принятой гипотезы прочности расчётное условие прочности в рассматриваемой точке при любом типе напряжённого состояния имеет вид

$$\sigma_p \leq [\sigma], \quad (4.32)$$

где  $\sigma_p$  - расчётное или эквивалентное напряжение в рассматриваемой точке;  
[ $\sigma$ ] - основное допускаемое напряжение при простом растяжении.

### ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 4

С заданной точкой М детали связана система декартовых координат  $x, y, z$ . Расчётом определены координатные напряжения в этой точке:

$$\sigma_x = 80 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -40 \text{ МПа}; \quad \sigma_z = 30 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = -20 \text{ МПа}; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Материал детали считается упругим и изотропным с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$ . Отношение предельных напряжений при растяжении и сжатии  $K = \sigma_{0p} / \sigma_{0c} = 0,5$ . Провести исследование напряжённо-деформированного состояния окрестности точки М детали.

Решение.

1. Изображаем единичный элемент, выделенный в окрестности точки М координатными сечениями и показываем напряжения, действующие на гранях этого элемента (рис. 4.7).

2. Записываем тензор напряжений, связанный с заданной точкой в осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

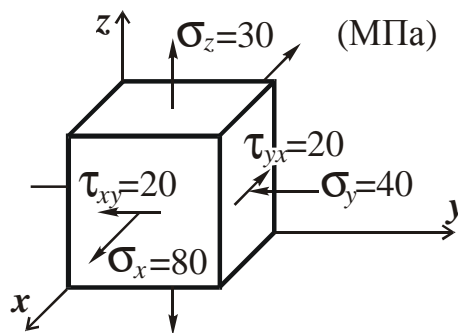
$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & -20 & 0 \\ -20 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

3. Определяем алгебраические инварианты тензора напряжений

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 80 - 40 + 30 = 70 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ = -80 \cdot 40 - 40 \cdot 30 + 80 \cdot 30 - 20^2 = -2400 \text{ МПа}^2;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ = -80 \cdot 40 \cdot 30 - 30 \cdot 20^2 = -108 \cdot 10^3 \text{ МПа}^3.$$



**Рис. 4.7. Заданное напряжённое состояние**

4. Определяем главные напряжения и главные оси напряжений. Для этого записываем систему алгебраических уравнений относительно главных напряжений  $\Sigma$  и направляющих косинусов  $l$ ,  $m$ ,  $n$  главных направлений.

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \Sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \Sigma)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \Sigma)n &= 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

которую дополняем условием

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (4.34)$$

С учётом заданных величин компонентов тензора напряжений, отличных от нуля, приведём эту систему к виду

$$\begin{aligned} (80 - \Sigma)l - 20m &= 0 \\ -20l + (-40 - \Sigma)m &= 0 \\ (30 - \Sigma)n &= 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (4.36)$$

Так как  $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ , заключаем, что ось  $z$  является одной из трёх главных осей напряжений, а напряжение  $\Sigma = \sigma_{zz} = 30 \text{ МПа}$  – главным напряжением. Направляющие косинусы его направления, т.е. главной оси  $z$

$$l = 0; m = 0; n = 1.$$

Главные оси напряжений взаимно перпендикулярны, поэтому следующие две главные оси напряжений располагаются в плоскости  $x, y$ .

Для этих направлений

$$n = 0; l \neq 0; m \neq 0.$$

С учётом  $n = 0$  систему разрешающих алгебраических уравнений (4.35) и (4.36) перепишем в виде

$$\begin{aligned} (80 - \Sigma)l - 20m &= 0 \\ -20l + (-40 - \Sigma)m &= 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$l^2 + m^2 = 1. \quad (4.38)$$

Определитель, составленный из коэффициентов при  $l, m$  в системе (4.37), приравняем нулю

$$\begin{vmatrix} (80 - \Sigma) & -20 \\ -20 & (-40 - \Sigma) \end{vmatrix} = 0$$

и приводим к квадратному уравнению

$$\Sigma^2 - 40\Sigma - 3600 = 0,$$

решая которое, получим величины двух других главных напряжений

$$\Sigma_1 = 20 + \sqrt{400 + 3600} = 83,25 \text{ МПа}$$

$$\Sigma_2 = 20 - 63,25 = -43,25 \text{ МПа}.$$

5. Подставим  $\Sigma_1$  в первое уравнение системы (4.35) и, решая его совместно с уравнением (4.36)

$$-3,25l - 20m = 0$$

$$l^2 + m^2 = 1$$

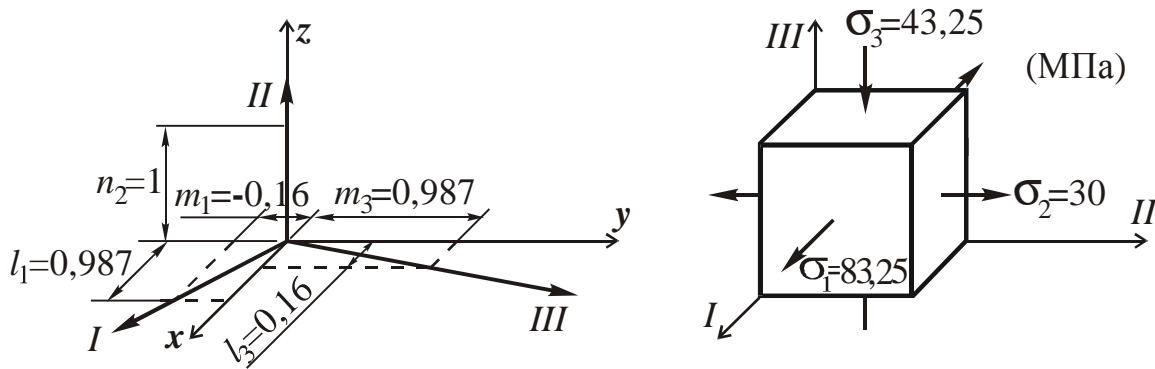
получим  $l = 0,987; m = -0,16$ .

Аналогично, подставляя  $\Sigma_2 = -43,25 \text{ МПа}$  во второе уравнение системы (4.35) и, решая его совместно с уравнением (4.36), получим  $l = 0,16; m = 0,987$ .

Выписываем найденные величины главных напряжений и соответствующие им направляющие косинусы главных напряжений. При этом для нумерации главных напряжений пользуемся принятым условием  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 83,25 \text{ МПа}; & l_1 &= 0,987; & m_1 &= -0,16; & n_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= 30 \text{ МПа}; & l_2 &= 0; & m_2 &= 0; & n_2 &= 1 \\ \sigma_3 &= -43,25 \text{ МПа}; & l_3 &= 0,16; & m_3 &= 0,987; & n_3 &= 0. \end{aligned}$$

В пространстве  $x, y, z$  по направляющим косинусам строим главные оси напряжений  $I, II, III$  (рис. 4.8). Изобразим элемент, выделенный главными площадками (рис. 4.8; главные оси повернуты).



**Рис. 4.8. Главные оси и элемент с главными площадками**

6. Записываем тензор напряжений в точке М в главных осях  $I, II, III$  и определяем алгебраические инварианты этого тензора

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83,25 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -43,25 \end{pmatrix};$$

$$I_1^{(0)} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 83,25 + 30 - 43,25 = 70 \text{ МПа};$$

$$I_2^{(0)} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 83,25 \cdot 30 - 30 \cdot 43,25 - 83,25 \cdot 43,25 = -2400 \text{ МПа}^2;$$

$$I_3^{(0)} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 83,25 \cdot 30 \cdot (-43,25) = -108 \cdot 10^3 \text{ МПа}^3.$$

Сравнивая величины алгебраических инвариантов  $I_1^{(0)}, I_2^{(0)}, I_3^{(0)}$  с инвариантами  $I_1, I_2, I_3$  соответственно, отмечаем их тождественность и, следовательно, достоверность величин главных напряжений.

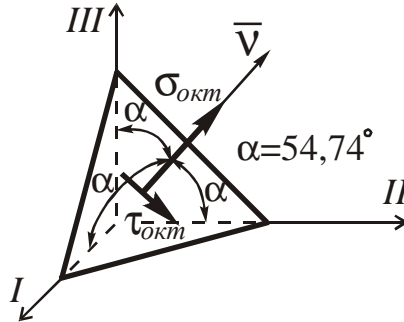
7. Определяем величины нормального и касательного напряжений, действующих на октаэдрических площадках.

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(83,25 + 30 - 43,25) = 23,33 \text{ МПа}$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{53,25^2 + 73,25^2 + 126,5^2} = 51,84 \text{ МПа}.$$

В пространстве главных направлений  $I, II, III$  изображаем одну из октаэдрических площадок (рис. 4.9) и показываем напряжения, действующие на этой площадке (для октаэдрической площадки  $l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ).



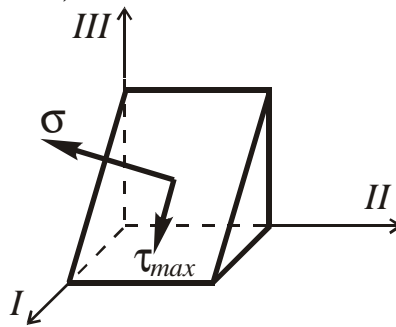
**Рис. 4.9.** Октаэдрические напряжения на площадке

8. Вычисляем наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{83,25 - (-43,25)}{2} = 63,25 \text{ МПа}.$$

Напряжение  $\tau_{\max}$  действует на площадке, параллельной главному направлению  $II$  и равнонаклонной к главным направлениям  $I$  и  $III$ .

Изображаем площадку, на которой действует напряжение  $\tau_{\max}$  и показываем это напряжение (рис. 4.10).



**Рис. 4.10.** Площадка с наибольшим касательным напряжением

9. Определяем величины главных деформаций окрестности точки  $M$ . Считаем материал детали линейно-упругим и воспользуемся соотношениями обобщённого закона Гука.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [83,25 - 0,3(30 - 43,25)] = 4,36 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [30 - 0,3(-43,25 + 83,25)] = 0,9 \cdot 10^{-4}$$



$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-43,25 - 0,3(83,25 + 30)] = -3,86 \cdot 10^{-4}.$$

10. Определяем относительное изменение объёма окрестности точки М.

$$\Delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (4,36 + 0,9 - 3,86) \cdot 10^{-4} = 1,40 \cdot 10^{-4}.$$

11. Вычисляем удельную потенциальную энергию упругой деформации окрестности точки М:

Удельная потенциальная энергия изменения объёма

$$\begin{aligned} W_V &= \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_{окт}^2 = \\ &= \frac{3(1-2 \cdot 0,3)}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot 23,33^2 = 1,63 \cdot 10^{-3} \frac{Н \cdot м}{м^3} = 1,63 \cdot 10^{-3} \frac{Дж}{м^3}. \end{aligned}$$

Удельная потенциальная энергия формоизменения

$$\begin{aligned} W_\Phi &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ &= \frac{3(1+\mu)}{2E} \tau_{окт}^2 = \frac{3(1+0,3)}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot 51,84^2 = 26,20 \cdot 10^{-3} \frac{Н \cdot м}{м^3} = 26,20 \cdot 10^{-3} \frac{Дж}{м^3}. \end{aligned}$$

Полная удельная потенциальная энергия

$$W = W_V + W_\Phi = (1,63 + 26,20) \cdot 10^{-3} = 27,83 \cdot 10^{-3} \frac{Н \cdot м}{м^3} = 27,83 \cdot 10^{-3} \frac{Дж}{м^3}.$$

12. Определяем расчётное напряжение в точке М по гипотезе наибольших касательных напряжений

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 = 83,25 - (-43,25) = 126,5 \text{ МПа}.$$

13. Вычисляем расчётное напряжение в точке М по гипотезе удельной потенциальной энергии формоизменения

$$\begin{aligned} \sigma_p^{IV} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(83,25 - 30)^2 + (30 + 43,25)^2 + (-43,25 - 83,25)^2} = 110 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

14. Вычисляем расчётное напряжение в точке М в соответствии с теорией прочности Мора

$$\sigma_p^V = \sigma_1 - K\sigma_3,$$

где  $K = \frac{\sigma_{0p}}{\sigma_{0c}} = 0,50.$

В результате будем иметь

$$\sigma_p^V = \sigma_1 - K\sigma_3 = 83,25 - 0,5 \cdot (-43,25) = 104,9 \text{ МПа}.$$

## **ПРИЛОЖЕНИЕ**

*Сортамент прокатной стали*

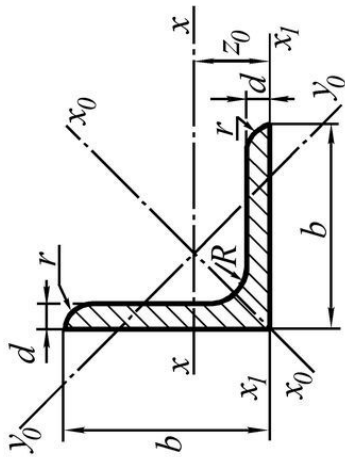


Таблица П1

Сталь прокатная угловая равнополочная. ГОСТ 8509-72

Номер профи- ля	Размеры			Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей									
	$b$	$d$	$r$			$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$		$z_0$			
						$I_{x0\ max}$	$i_{x0\ max}$	$I_{y0\ min}$	$i_{y0\ min}$	$I_{x1}$	$I_{x1}$				
				$см^2$	$кг$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$
2	20	3	3,5	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60		
	4	4	1,2	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64		
2,5	25	3	3,5	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73		
	4	4	1,2	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76		
2,8	28	3	4,0	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80		
	32	3	4,8	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89		
3,2	36	4	1,5	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94		
	4	3	4,5	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99		
3,6	36	4	1,5	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04		
	4	3	4,5	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04		

Продолжение табл. ПП

Номер профи- ля	Размеры			Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								$Z_0$
	$b$	$d$	$R$			$r$	$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	
							$I_x$	$i_x$	$I_{x0\ max}$	$i_{x0\ max}$	$I_{y0\ min}$	$i_{y0\ min}$		
мм				см <sup>2</sup>	кг	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	
4	3				2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
	4	40	5,0	1,7	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
	5				3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17
4,5	3				2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
	4	45	5,0	1,7	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
	5				4,20	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	3				2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
	4	50	5,5	1,8	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
	5				4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	4	56	6,0	2,0	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
	5				5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
	6				7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
6,3	4				4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
	5	63	7,0	2,3	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
	6				7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	4,5				6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
	5				6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
	6	70	8	2,7	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
7	7				9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
	8				10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02

Номер профи- ля	Размеры				Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								$z_0$
	$b$	$d$	$R$	$r$			x-x		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$		
							$I_x$	$i_x$	$I_{x0\max}$	$i_{x0\max}$	$I_{y0\min}$	$i_{y0\min}$		$I_{x1}$	
мм				см <sup>2</sup>	кг	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см		
7,5	5				7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	
	6				8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	
	7	9		3,0	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	
	8				11,5	9,02	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	
	9				12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	
8	5,5				8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	
	6				9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	
	7	9		3,0	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	
	8				12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	
9	6				10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	
	7	10		3,3	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	
	8				13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	
	9				15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55	
10	6,5				12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	
	7				13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	
	8				15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	
	10	12		4,0	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	
	12				22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	
	14				26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	
11	16				29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	
	7	12		4,0	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	
	8				17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	

Продолжение табл. ПП

Номер профи- ля	Размеры			Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей						$Z_0$		
	$b$	$d$	$R$			$r$	$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_1-x_1$	
							$I_x$	$i_x$	$I_{x0\ max}$	$i_{x0\ max}$	$I_{y0\ min}$			$i_{y0\ min}$
					кг	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	см <sup>4</sup>	см	
12,5		8			15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	
		9			17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	
		10	14	4,6	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	
		12			22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	
		14			26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	
		16			29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	
14		9			19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	
	140	10	14	4,6	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	
		12			25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	
16		10			24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	
		11			27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	
		12			29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	
		14	16	5,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	
		16			38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	
		18			43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	
18	180	20			47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	
		11	16	5,3	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	
	12			33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89		

Продолжение табл. П1

Номер профи- ля	Размеры				Пло- щадь сечения $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								$Z_0$
	$b$	$d$	$R$	$r$			$x-x$		$x_0-x_0$		$y_0-y_0$		$x_l-x_l$		
							$I_x$	$i_x$	$I_{x0\ max}$	$i_{x0\ max}$	$I_{y0\ min}$	$i_{y0\ min}$			
														$см^4$	
		$мм$			$кг$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$		
		12			37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37		
		13			39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42		
		14			42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46		
20	200	16	18	6,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54		
		20			60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70		
		25			74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89		
		30			87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07		
22	220	14	21	7,0	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93		
		16			53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02		
		16			61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75		
		18			68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83		
		20			76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91		
25	250	22	24	8	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00		
		25			94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11		
		28			104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23		
		30			111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31		

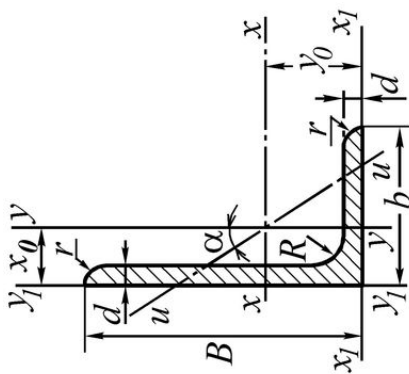


Таблица П2

Сталь прокатная угловая неравнополочная. ГОСТ 8510-72

Номер про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								Угол наклона оси $\text{tg}\alpha$			
	$B$	$b$	$d$	$R$			$r$	$x - x$		$y - y$		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		$u - u$		
								$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{x1}$	$y_0$	$I_{y1}$		$x_0$	$I_{u \min}$	$i_{u \min}$
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392		
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382		
			4															
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385		
			4															
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,68	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382		
			4															
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,90	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403		
			4															
						3,17	2,49	2,56	0,90	16,6	1,85	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401		



Продолжение табл. П2

Номер про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей											
	$B$	$b$	$d$	$R$			$r$	$x - x$		$y - y$		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		$u - u$		Угол наклона оси $tg\alpha$
								$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{x1}$	$Y_0$	$I_{y1}$	$x_0$	$I_{u min}$	$i_{u min}$	
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,4	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406	
			5			4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404	
6,3/4,0	63	40	4			4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397	
			5	7,0	2,3	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,72	0,86	0,396	
			6			5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393	
			8			7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386	
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406	
			5			6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436	
7,5/5	75	50	6	8	2,7	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435	
			8			9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430	
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387	
			6			7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386	
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384	
			6			8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384	
			8			11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380	
			6			9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393	
10/6,3	100	63	7	10	3,3	11,1	113	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392	
			8			12,6	127	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391	
			10			15,5	154	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387	
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	142	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402	
			8			13,9	172	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400	

Продолжение табл. П2

Номер про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния $A$	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей												Угол наклона оси $\text{tg}\alpha$
	$B$	$b$	$d$	$R$			$r$	$x - x$		$y - y$		$x_I - x_I$		$y_I - y_I$		$u - u$			
								$I_x$	$i_x$	$I_y$	$i_y$	$I_{xI}$	$y_0$	$I_{yI}$	$x_0$	$I_{u \min}$	$i_{u \min}$		
																		$\text{см}^4$	
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11,0	73,7	2,29	452	4,01	119	1,80	43,4	1,76	0,407			
			8	11		16,0	12,5	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406			
			10			19,7	15,5	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404			
			12			23,4	18,3	117	2,24	781	4,22	210	2,00	69,5	1,72	0,400			
14/9	140	90	8	12	4	18,0	14,1	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411			
			10			22,2	17,5	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409			
			9			22,9	18	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,20	0,391			
			10	13	4,3	25,3	19,8	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390			
16/10	160	100	12			30,0	23,6	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388			
			14			34,7	27,3	272	2,80	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385			
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	22,2	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375			
			12			33,7	26,4	324	3,10	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374			
			11			34,9	27,4	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392			
			12	14	4,7	37,9	29,7	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392			
20/12,5	200	125	14			43,9	34,4	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390			
			16			49,8	39,1	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388			
			12			48,3	37,9	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410			
25/16	250	160	16	18	6,0	63,6	49,9	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408			
			18			71,1	55,8	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407			
			20			78,5	61,7	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405			

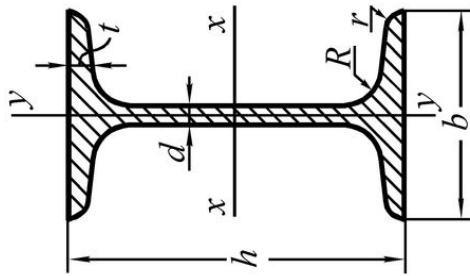


Таблица ПЗ

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. ГОСТ 8239-72

Номер профиля	Масса 1 м длины	Размеры						Площадь сечения $A$	Справочные величины для осей						
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$		$x-x$			$y-y$			
									$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$	$i_y$
	кг			мм				$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	$см^4$	$см^3$	см	
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07

Продолжение табл. ПЗ

Номер про- филя	Масса 1 м длины	Размеры					Пло- щадь сече- ния $A$	Справочные величины для осей						
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$		$r$	x-x			y-y		
									$I_x$	$W_x$	$i_x$	$S_x$	$I_y$	$W_y$
	кг	мм					$см^2$	$см^4$	$см^3$	см	$см^4$	$см^3$	см	
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10	4	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11	4,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6,0	10,2	11	4,5	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13	5	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13,0	15	6	19062	953	16,20	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16	7	27696	1231	18,10	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	17	7	39727	1589	19,90	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	18	7	55962	2035	21,80	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	20	8	76806	2560	23,60	1491	1725	182	3,54

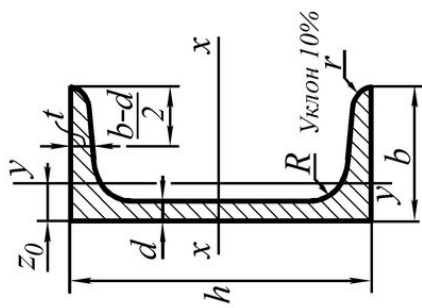


Таблица П4

Сталь горячекатаная. Швеллеры с уклоном внутренних граней полок. ГОСТ 8240-72

Номер профиля	Масса 1м длины кг	Размеры						Площадь сечения $A$ $см^2$	Справочные величины для осей							
		x-x			y-y				$I_x$ $см^4$	$W_x$ $см^3$	$i_x$ $см$	$S_x$ $см^3$	$I_y$ $см^4$	$W_y$ $см^3$	$i_y$ $см$	$z_0$ $см$
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$									
		мм														
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	
14а	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17,0	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80	

Продолжение табл. П4

Номер про- филя	Масса 1м длины	Размеры					Пло- щадь сечения <i>A</i>	Справочные величины для осей								
		<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>	<i>R</i>		<i>r</i>	x-x			y-y				
									<i>I<sub>x</sub></i>	<i>W<sub>x</sub></i>	<i>i<sub>x</sub></i>	<i>S<sub>x</sub></i>	<i>I<sub>y</sub></i>	<i>W<sub>y</sub></i>	<i>i<sub>y</sub></i>	<i>z<sub>0</sub></i>
	кг	мм					см <sup>2</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см	см
16а	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	
20а	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	
22а	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	
24а	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	