

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ТУЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**А.С. Саммаль, С.В. Анциферов,
О.В. Афанасова, К.Е. Залесский**

ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

*Учебное пособие для студентов
дистанционной формы обучения.*

Контрольные работы, примеры их решения

Тула 2014

УДК 539.3/6

Основы сопротивления материалов: Учеб. пособие А.С. Саммаль, С.В. Анциферов, О.В. Афанасова, К.Е. Залесский. – Тул. гос. ун-т. Тула, 2014.- 114 с.

Рассматриваются решения типовых задач, входящих в курсы «Сопротивление материалов», «Техническая механика», «Прикладная механика. Сопротивление материалов», «Теории прочности» и относящихся к разделам: растяжение (сжатие) бруса, кручение бруса круглого поперечного сечения, геометрические характеристики плоских фигур, изгиб балок, расчёт статически неопределимых конструкций, сложное сопротивление, устойчивость сжатых стержней, усталостная прочность.

Приведены необходимые теоретические сведения, используемые при изучении курсов и выполнении контрольных работ, варианты задач, составляющих их содержание, примеры их решения.

Пособие предназначено для студентов дистанционной формы обучения.

Табл.17. Ил.46. Библиогр.:12 назв.

Утверждено решением кафедры механики материалов Тульского государственного университета (протокол №8 от 10.04.2014).

© А.С. Саммаль, С.В. Анциферов,
О.В. Афанасова, К.Е. Залесский, 2014

© Тульский государственный университет, 2014

Содержание

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ.....	5
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	7
ЗАДАЧИ, ВХОДЯЩИЕ В КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ.....	8
ЗАДАЧА № 1.....	8
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 1.....	9
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 1.....	12
ЗАДАЧА № 2.....	15
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 2.....	15
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 2.....	17
ЗАДАЧА № 3.....	22
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 3.....	23
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 3.....	25
ЗАДАЧА № 4.....	29
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 4.....	29
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 4.....	33
ЗАДАЧА № 5.....	38
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 5.....	41
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 5.....	43
ЗАДАЧА № 6.....	54
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 6.....	54
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 6.....	56
ЗАДАЧА № 7.....	61
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 7.....	61
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 7.....	66
ЗАДАЧА № 8.....	72
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 8.....	72
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 8.....	75

ЗАДАЧА № 9.....	79
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 9.....	79
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 9.....	83
ЗАДАЧА № 10.....	87
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 10.....	87
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 10.....	91
ЗАДАЧА № 11.....	94
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 11.....	95
ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 11.....	98
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	101

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Настоящее пособие составлено для студентов ТулГУ дистанционной формы обучения, совмещающих учебу с работой и изучающих такие курсы, как «Сопротивление материалов», «Механика деформируемого твердого тела», «Техническая механика» и им подобные, целью которых является овладение методами и приёмами расчёта элементов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость.

Занятия по этим курсам обязательно должны сопровождаться решением задач, так как только при самостоятельном выполнении расчётов можно выработать необходимые навыки анализа расчётных схем элементов машин, зданий и сооружений. Учебными планами предусмотрено выполнение от одной до шести контрольных работ, выполнение которых требует освоения основных разделов изучаемого курса.

В задачах, предлагаемых студентам для самостоятельного решения и входящих в данное пособие, рассматриваются типовые расчёты элементов инженерных сооружений, машин и механизмов.

Основные положения выполнения контрольных работ:

1. Каждый студент выполняет контрольные работы, предусмотренные учебным графиком. Информация о количестве работ, перечне задач, входящих в ту или иную контрольную работу, помещается на сайте Интернет-Института ТулГУ.

2. Контрольные работы могут быть выполнены в текстовом или графическом компьютерном редакторе, либо в рукописном виде в тетради, или на листах бумаги формата А4 с последующей оцифровкой изображения. В окончательном виде каждая контрольная работа должна быть представлена в виде одного компьютерного файла. На титульном листе должно быть написано название учебного заведения, название предмета, номер контрольной работы, номера решаемых задач, фамилия, имя и отчество студента, номер учебной группы, номер зачётной книжки, индивидуальный шифр студента, фамилия и инициалы преподавателя проверяющего работу (тьютора). Все листы должны быть пронумерованы, а на втором листе в содержании должны быть указаны номера страниц каждой задачи. В начале решения каждой задачи приводится запись соответствия индивидуального шифра студента буквам русского алфавита.

3. Исходные данные для выполнения контрольных работ должны быть выбраны из таблиц данного учебного пособия в соответствии с индивидуальным шифром студента.

Он состоит из шести цифр номера зачётной книжки студента, к которым

дополнительно через дефис дописываются две последние цифры того же номера зачётной книжки. Например, если у студента зачётная книжка имеет номер 361291, то его индивидуальный шифр при выполнении контрольных работ будет 361291-91.

Под выписанными цифрами ставятся первые буквы русского алфавита:

361291-91

абвгде-жз

Все вертикальные столбцы таблиц исходных данных к задачам обозначены определённой буквой. Из каждого такого столбца таблицы выбирается число, стоящее в строке, номер которой соответствует номеру соответствующей буквы. Например, для приведённого выше примера индивидуально-го шифра студента для решения задачи №1 из таблицы 1 данного пособия выписываем следующие исходные данные:

номер схемы – 1, $P_1=35$ кН, $P_2=85$ кН, $P_3=110$ кН, $a=0,3$ м, $b=0,4$ м, $c=0,5$ м, $A_1=6$ см², $A_2=10$ см².

4. Перед решением каждой задачи нужно выписать полностью её условие, числовые данные и номер расчётной схемы, составить в масштабе аккуратный чертёж и указать на нём все величины, необходимые для расчёта, и в буквенном и в цифровом обозначении.

5. Решение задач должно сопровождаться краткими объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчёт величины следует указывать в числах, соответствующих варианту, полученному с использованием индивидуального шифра студента. Каждую формулу в расчёте следует сначала записать в буквенном виде, затем подставить вместо каждой буквы соответствующее числовое значение и, не приводя промежуточных вычислений, записать ответ с указанием размерности определяемой величины. Инженерные расчёты ведутся в десятичных дробях.

6. Неправильно выполненная контрольная работа возвращается студенту для исправления.

Все исправления в работу следует вносить в структуру документа вместо ошибочных записей. Таким образом, окончательный документ должен представлять собой единую полностью оформленную контрольную работу с верным решением. Он повторно отсылается на проверку. Отдельно от работы исправления не рассматриваются.

7. При сдаче экзамена или зачёта все положенные контрольные работы должны быть выполнены и зачтены.

Рекомендуемая литература

Основная

(для студентов машиностроительных специальностей)

1. Костенко Н.А. Сопротивление материалов/ Н.А. Костенко и др. // Учебник для студентов вузов. Изд-во «Высшая школа», 2009. – 488 с.
2. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов с использованием вычислительных комплексов/ Е.Г. Макаров // В 2 кн. Кн.1. Основной курс. Учебное пособие. Изд-во «Высшая школа», 2009. – 406 с.
3. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов/ А.Е. Саргсян. – М.: Высшая школа, 2002. – 287 с.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов/ В.И. Феодосьев. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 592 с.

Основная

(для студентов строительных специальностей)

1. Александров А.В. Сопротивление материалов. - М.: Высш. шк., - 2009. - 560 с.
2. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов. - М.: Высш. шк., - 2002. – 287 с.
3. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. - М.: Инфра-М, 2010. – 478 с.

Дополнительная

1. Копнов В.А. Сопротивление материалов. Руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ// В.А. Копнов, С.Н. Кривошапко, Изд-во «Высшая школа». Изд. 3-е, стереотипное, 2009. – 351 с.
2. Костенко Н.А. Сопротивление материалов/ Н.А. Костенко и др.//Учебник для студентов вузов. Изд-во «Высшая школа», 2009. – 488 с.
3. Сопротивление материалов/ Под ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко.- Киев.: Вища школа, 1986. – 775 с.
4. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев – Киев.: Вища школа, 1988. – 736 с.
5. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. – М.: Высш. школа, 1985. – 399 с.
6. Рудицын М.Н. и др. Справочное пособие по сопротивлению материалов. - Минск: Высш. школа, 1970. – 410 с.
7. Сопротивление материалов. Часть 1. Основные виды деформаций. Учеб. пособие/ И.Ю. Воронина, П.В. Деев, К.Е. Залесский, Н.А. Капунова, А.К. Петренко, А.С. Саммаль. Под редакц. Н.Н. Фотиевой. Тула, Изд-во ТулГУ, 2011. – 428 с.

ЗАДАЧИ, ВХОДЯЩИЕ В КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ЗАДАЧА № 1

Ступенчатый брус нагружен силами P_1 , P_2 и P_3 , направленными вдоль его оси. Заданы длины участков a , b , c и площади их поперечных сечений A_1 и A_2 . Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа и запас прочности по отношению к пределу текучести $n_T = 1,5$.

Требуется:

- 1) построить эпюры продольных сил N , напряжений σ и продольных перемещений Δ ;
- 2) проверить, выполняется ли условие прочности.

Расчётные схемы выбираются по рис.1, числовые данные берутся из табл.1.

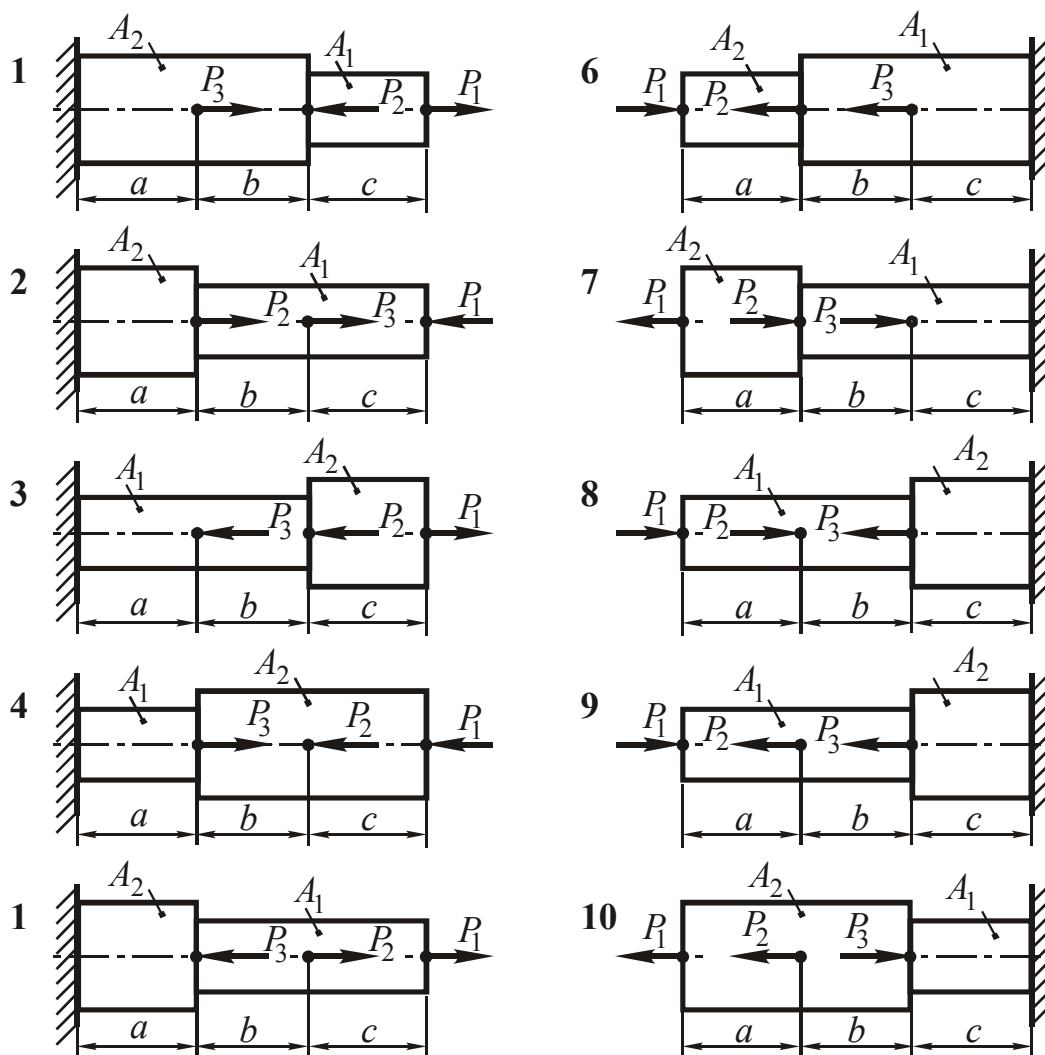


Рис. 1. Расчётные схемы к задаче № 1

Числовые данные к задаче № 1

Номер строки	Номер схемы по рис. 1	Сила, кН			Длина участка, м			Площадь поперечного сечения, см ²	
		P_1	P_2	P_3	a	b	c	A_1	A_2
1	1	40	90	100	0,3	0,5	0,6	5	10
2	2	45	80	120	0,3	0,5	0,5	4	12
3	3	50	85	110	0,4	0,6	0,4	6	14
4	4	35	70	115	0,4	0,6	0,6	4	10
5	5	40	75	100	0,5	0,4	0,3	5	15
6	6	50	80	95	0,5	0,4	0,4	6	18
7	7	60	70	120	0,3	0,2	0,5	4	12
8	8	45	60	115	0,4	0,3	0,6	7	10
9	9	35	65	110	0,2	0,4	0,4	8	14
0	10	30	90	95	0,5	0,5	0,3	6	16
	3	ж	а	д	е	ж	г	б	в

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ №1

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

Рассмотрим такой вид нагружения, как растяжение (сжатие), при котором в поперечных сечениях бруса возникают только продольные силы, направленные вдоль его оси, все остальные внутренние усилия равны нулю.

Продольная, или нормальная сила, N считается положительной при растяжении и отрицательной при сжатии. Её величина может быть найдена с помощью метода сечений: она численно равна алгебраической сумме проекций на ось бруса всех внешних сил, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Действующая в поперечном сечении продольная сила N равномерно распределяется по всему сечению и, как следствие этого, нормальные напряжения σ также равномерно распределяются по всему сечению.

Их величина определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (1.1)$$

где N - продольная сила в поперечном сечении;

A - его площадь.

(В некоторых учебниках и учебных пособиях площадь обозначается латинской буквой F).

В системе СИ сила выражается в ньютонах (Н), площадь поперечного сечения - в квадратных метрах (м^2), нормальное напряжение - в паскалях (Па).

В системах, отличных от СИ, сила может быть выражена в килограммах, а напряжение в килограммах, делённых на сантиметр в квадрате. Встречаются и другие единицы измерения.

Абсолютное удлинение бруса при растяжении определяется по формуле

$$\Delta l = l_k - l, \quad (1.2)$$

где l - начальная длина бруса;

l_k - длина бруса после деформации.

Относительное удлинение бруса (относительная продольная деформация)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.3)$$

При растяжении $\Delta l > 0$ и $\varepsilon > 0$, при сжатии эти величины отрицательны.

Абсолютное поперечное сужение

$$\Delta b = b_k - b, \quad (1.4)$$

где b - первоначальный поперечный размер бруса;

b_k - величина поперечного размера бруса после нагружения.

Относительное поперечное сужение (относительная поперечная деформация)

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}. \quad (1.5)$$

Абсолютная величина отношения ε'/ε , обозначаемая μ , называется коэффициентом Пуассона. Она является постоянной для каждого материала и характеризует его упругие свойства:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (1.6)$$

Между нормальным напряжением и относительным удлинением существует прямая пропорциональная зависимость, называемая законом Гука

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (1.7)$$

где E - коэффициент пропорциональности (модуль упругости первого рода, или модуль Юнга).

Модуль упругости – это физическая характеристика материала, измеряемая в тех же единицах, что и нормальное напряжение.

Учитывая, что $\sigma = \frac{N}{A}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, можно записать выражение для вычисления абсолютного удлинения бруса в виде

$$\Delta l = \frac{N l}{E A} . \quad (1.8)$$

Для ступенчатого стержня и (или) стержня с несколькими продольными нагрузками удлинение подсчитывается как алгебраическая сумма удлинений участков бруса, в пределах которых N , E , A постоянны:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} . \quad (1.9)$$

Если же величины N и A изменяются по длине бруса, его абсолютное удлинение вычисляется по формуле

$$\Delta l = \int_l \frac{N(z) dz}{E A(z)} . \quad (1.10)$$

Используя соотношение $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, называемое условием прочности, можно решить три основных задачи сопротивления материалов.

1. Подобрать сечение растянутого (сжатого) бруса, при котором его прочность будет обеспечена. Расчётная формула в этом случае имеет вид

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma] , \quad (1.11)$$

где N - продольная сила в опасном сечении бруса (сечении, в котором действует максимальное нормальное напряжение);

A - площадь поперечного сечения бруса;

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение материала бруса.

Отсюда определяется необходимая площадь его сечения

$$A \geq \frac{N}{[\sigma]} . \quad (1.12)$$

Зная форму сечения и его площадь, можно определить линейные размеры сечения или по сортаменту подобрать требуемый стандартный профиль: уголок, швеллер, двутавр и т. д.

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ либо задается заранее, либо находится по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{опасн}}}{n} , \quad (1.13)$$

где $\sigma_{\text{опасн}} = \sigma_T$ - предел текучести для пластичных материалов;

$\sigma_{\text{опасн}} = \sigma_B$ - временное сопротивление для хрупких материалов;

n - запас прочности материала .

2. Определить допускаемую нагрузку, если известны прочностные свойства материала и площадь поперечного сечения бруса.

Расчётная формула, вытекающая из условия прочности

$$N \leq A[\sigma], \quad (1.14)$$

позволяет вычислить наибольшее значение продольной силы N , действующей в опасном сечении и, следовательно, величину внешних нагрузок, приложенных к брусу.

3. Проведение поверочного расчёта прочности бруса.

При поверочном расчёте нагрузки, размеры и материал, из которого изготовлен брус, считаются известными. Вычисляется наибольшее нормальное напряжение в опасном поперечном сечении и сравнивается с допусковым:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq [\sigma]. \quad (1.15)$$

Если $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$, то прочность бруса обеспечена.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 1

Ступенчатый брус нагружен силами P_1, P_2, P_3 , (рис. 2, а).

Требуется построить эпюры продольных сил N , нормальных напряжений σ , продольных перемещений Δ и проверить, выполняется ли условие прочности.

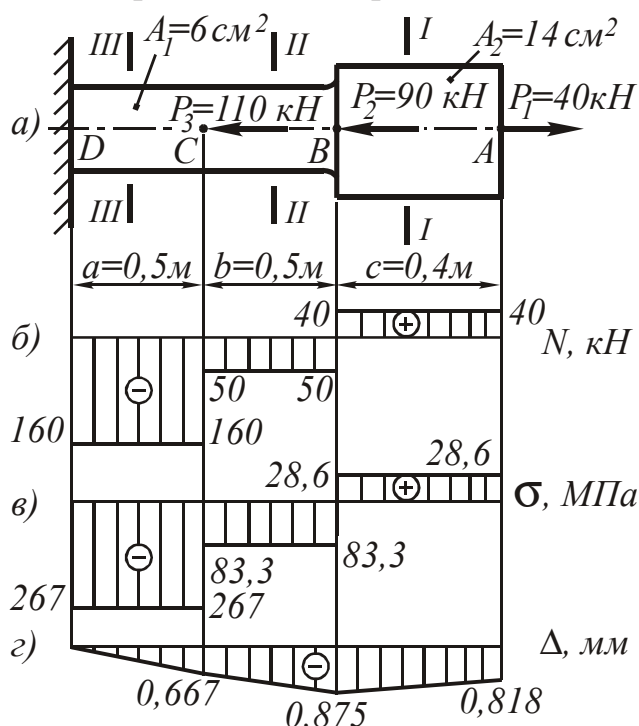


Рис. 2. Расчётная схема бруса и эпюры:
а - расчётная схема; б - эпюра продольных сил; в - эпюра напряжений;
г - эпюра продольных перемещений

сечения, в которых приложены силы. Обозначим сечения буквами A, B, C, D , начиная со свободного конца, в данном случае правого.

Числовые данные к задаче выбираются по табл. 1.

Например: $P_1 = 40$ кН,
 $P_2 = 90$ кН, $P_3 = 110$ кН,
 $a = 0,5$ м, $b = 0,5$ м, $c = 0,4$ м,
 $A_1 = 6$ см², $A_2 = 14$ см².

Для всех вариантов принимается:

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\sigma_T = 240$ МПа;
 $n_T = 1,5$.

1. Построение эпюры N .

На брус действуют три силы, следовательно, продольная сила по его длине будет изменяться. Разбиваем брус на участки, в пределах которых продольная сила будет постоянной. В данном случае границами участков являются

Для определения продольной силы на каждом участке рассматриваем произвольное поперечное сечение, сила в котором определяется по правилу, приведённому ранее. Чтобы не определять предварительно реакцию в заделке D , начинаем расчёты со свободного конца бруса A .

Участок AB , сечение 1-1. Справа от сечения действует растягивающая сила P_1 (рис. 2, a). В соответствии с упомянутым ранее правилом, получаем

$$N_{AB} = +P_1 = 40 \text{ кН.}$$

Участок BC , сечение 2-2. Справа от него расположены две силы, направленные в разные стороны. С учётом правила знаков, получим

$$N_{BC} = +P_1 - P_2 = 40 - 90 = -50 \text{ кН.}$$

Участок CD , сечение 3-3: аналогично получаем

$$\begin{aligned} N_{CD} &= +P_1 - P_2 - P_3 = \\ &= 40 - 90 - 110 = -160 \text{ кН.} \end{aligned}$$

По найденным значениям N в выбранном масштабе строим эпюру, учитывая, что в пределах каждого участка продольная сила постоянна (рис. 2, b)

Положительные значения N откладываем вверх от оси эпюры, отрицательные – вниз.

2. Построение эпюры напряжений σ .

По формуле (1.1) вычисляем напряжения в поперечном сечении для каждого участка бруса:

$$\sigma = \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3}{14 \cdot 10^{-4}} = 2,86 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 28,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -83,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{-160 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -267 \text{ МПа}.$$

При вычислении нормальных напряжений значения продольных сил N берутся по эпюре с учётом их знаков. Знак плюс соответствует растяжению, минус – сжатию. Эпюра напряжений показана на рис. 2, $в$.

3. Построение эпюры продольных перемещений.

Для построения эпюры перемещений вычисляем абсолютные удлинения отдельных участков бруса, используя закон Гука (1.8):

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot l_{AB}}{E \cdot A_{AB}} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 14 \cdot 10^{-4}} = 0,571 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot A_{BC}} = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -2,08 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot l_{CD}}{E \cdot A_{CD}} = \frac{-160 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -6,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определяем перемещения сечений, начиная с неподвижного закреплённого конца. Сечение D расположено в заделке, оно не может смещаться и его перемещение равно нулю:

$$\Delta_D = 0.$$

Сечение C переместится в результате изменения длины участка CD . Перемещение сечения C определяется по формуле

$$\Delta_C = \Delta l_{CD} = -6,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

При отрицательной (сжимающей) силе точка C сместится влево.

Перемещение сечения B является результатом изменения длин участков DC и CB . Складывая их удлинения, получаем

$$\Delta_B = \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} = -6,67 \cdot 10^{-4} - 2,08 \cdot 10^{-4} = -8,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Рассуждая аналогично, вычисляем перемещение сечения A :

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \Delta l_{CD} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{AB} = \\ &= -6,67 \cdot 10^{-4} - 2,08 \cdot 10^{-4} + 0,571 \cdot 10^{-4} = -8,18 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

В выбранном масштабе откладываем от исходной оси значения вычисленных перемещений. Соединив полученные точки прямыми линиями, строим эпюру перемещений (рис. 2, ε).

4. Проверка прочности бруса.

Условие прочности записывается в следующем виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Максимальное напряжение σ_{\max} находим по эпюре напряжений, выбирая максимальное по абсолютной величине:

$$\sigma_{\max} = 267 \text{ МПа}.$$

Это напряжение действует на участке DC , все сечения которого являются опасными.

Допускаемое напряжение вычисляем по формуле (1.13):

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}.$$

Сравнивая σ_{\max} и $[\sigma]$, видим, что условие прочности не выполняется, так как максимальное напряжение превышает допускаемое.

ЗАДАЧА № 2

Абсолютно жёсткий брус AB опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен с помощью шарниров к двум стальным стержням.

Требуется подобрать сечения стержней по условию их прочности, приняв запас прочности по отношению к пределу текучести $n_T = 2,5$.

Соотношение площадей поперечных сечений стержней указано на расчётных схемах, модуль упругости стали для всех вариантов $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Студенты строительных специальностей дополнительно определяют допускаемую силу, используя расчёт по предельной грузоподъемности, и сравнивают её с заданной.

Числовые данные берутся из табл. 2, расчётные схемы – по рис. 3.

Таблица 2

Числовые данные к задаче № 2

Номер строки	Номер расчёт. схемы по рис. 3	Размер, м			Сила P , кН	Марка стали	Предел текучести, МПа
		a	b	c			
1	1	1,2	1,6	1,0	3	20	250
2	2	1,2	1,5	0,8	5	30	300
3	3	1,4	1,4	1,0	4	40	340
4	4	1,4	1,6	0,9	2	20	250
5	5	1,4	1,5	0,7	6	50	380
6	6	1,3	1,4	0,8	5	30	300
7	7	1,5	1,2	1,0	3	40X	800
8	8	1,5	1,1	0,9	4	20	250
9	9	1,2	1,5	1,0	6	40	340
0	10	1,2	1,6	1,0	4	40X	800
	з	ж	а	б	в	г	г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 2

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

В задаче № 2 рассматривается статически неопределимая конструкция, стержневые элементы которой работают на растяжение или сжатие и число неизвестных сил, приложенных к абсолютно жёсткому брусу, превышает возможное число уравнений статики.

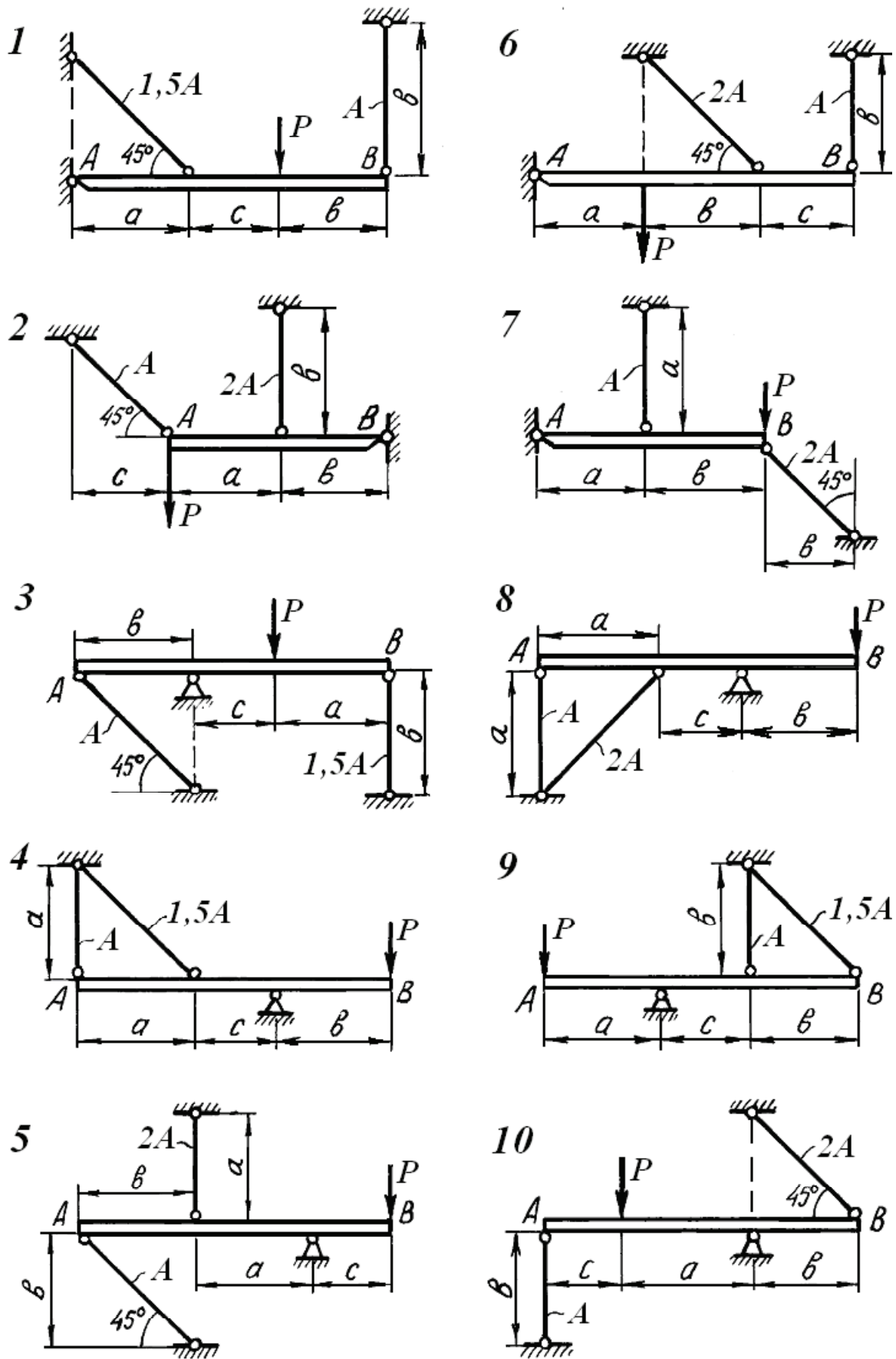


Рис. 3. Расчётные схемы к задаче № 2

Разность между числом неизвестных усилий и числом возможных уравнений статики определяет степень статической неопределимости системы. Уравнения, недостающие для определения усилий в стержнях, можно получить, рассматривая возможную деформацию системы. Условие, выражающее зависимость между деформациями отдельных элементов системы (конструкции), называется *условием совместности деформаций*. Оно получается из геометрических соотношений между деформациями элементов конструкции. Используемые при решении задачи расчётные формулы приведены в методических указаниях к решению задачи № 1.

Метод расчёта статически неопределимой системы по предельной грузоподъемности (по разрушающим нагрузкам) достаточно подробно изложен в учебной литературе и в данном пособии рассмотрен на конкретном примере.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 2

Жёсткий брус AB закреплён, как показано на рис. 4, и нагружен силой $P = 5$ кН.

Требуется подобрать сечения стержней из условия их прочности. Числовые данные к задаче берутся из табл. 2. Для данной задачи примем

$a = 1,2$ м; $b = 1,4$ м; $c = 1,0$ м; материал – сталь 40,

$\sigma_T = 340$ МПа, $n_T = 2,5$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Вычислим степень статической неопределимости.

Жёсткий брус AB закреплён с помощью шарнирно-неподвижной опоры и поддерживается двумя деформируемыми стальными стержнями AE и BK . На опоре C (рис. 4) – две составляющие реакции Z_C и Y_C , реакции в стержнях направлены вдоль их осей и приложены к брусу AB в точках A и B . Направление этих реакций рекомендуется установить после анализа возможного деформированного состояния конструкции.

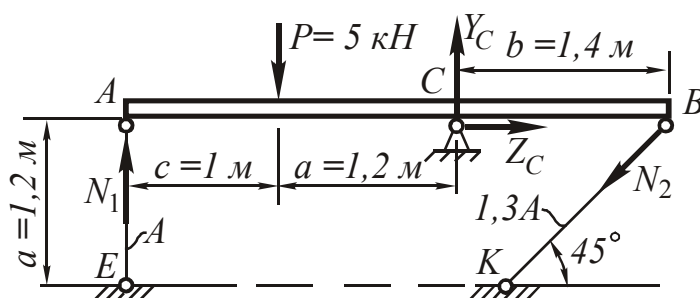


Рис. 4. Расчётная схема

Для плоской системы сил в общем случае её приложения к конструкции можно составить только три независимых уравнения равновесия. В рассматриваемой задаче к брусу AB приложено четыре неизвестных усилия: две реакции в шарнире и два усилия в стержнях. Разность между числом

неизвестных усилий (N_1, N_2, Z_C, Y_C) и числом уравнений статики ($\Sigma M_C = 0, \Sigma Z = 0, \Sigma Y = 0$) показывает, что для определения этих неизвестных необходимо составить ещё *одно* уравнение, в которое входили бы интересующие нас величины. Такое уравнение или несколько подобных уравнений можно получить из геометрических зависимостей между деформациями элементов заданной конструкции.

Таким образом, степень статической неопределимости конструкции равна

$$n = 4 - 3 = 1.$$

Или говорят, что конструкция 1 раз статически неопределима.

Рассмотрим конструкцию после деформации её элементов (рис. 5). Под действием силы P жёсткий брус может повернуться вокруг точки C , при этом стержни AE и BK будут деформированы. Точки A и B описывают при повороте бруса дуги окружностей, которые ввиду малости перемещений заменяются касательными, т.е. считается, что эти точки перемещаются по перпендикулярам к радиусам AC и BC этих дуг. Точка A смещается вниз и занимает положение A_1 , точка B - вверх, занимая положение B_1 . Брус, как абсолютно жёсткий элемент конструкции, - положение A_1B_1 . Очевидно, что стержень AE сжат и стал короче на величину $AA_1 = \Delta l_1$. Соединив точки K и B_1 , находим на чертеже положение стержня BK после его деформации. Опустив перпендикуляр из точки B_1 на первоначальное положение оси стержня - прямую KB , находим точку B_2 .

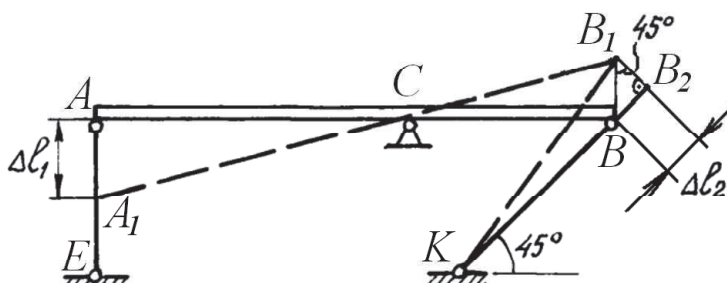


Рис. 5. Схема конструкции после деформации её элементов

Отрезок $BB_2 = \Delta l_2$ - удлинение стержня BK .

Действительно, $\Delta l_2 = KB_2 - KB$, и стержень KB растянут.

Выяснив направление усилий в стержнях, показываем векторы этих усилий на схеме недеформированного состояния конструкции (рис. 4) и составляем уравнение её равновесия:

$$\Sigma M_C = 0: \quad -N_1 \cdot (c + a) + P \cdot a - N_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot b = 0. \quad (2.1)$$

Определения составляющих реакции шарнира Z_C, Y_C для решения дан-

ной задачи не требуется, и два других уравнения статики не составляются.

Для вычисления усилий в стержнях N_1 и N_2 необходимо иметь ещё одно уравнение, называемое уравнением совместности деформаций. Это уравнение получаем из геометрических соотношений между деформациями элементов заданной конструкции. При этом ввиду малости деформаций изменением угла наклона стержня BK пренебрегаем, считая что $\angle BB_1B_2 = 45^0$.

Тогда

$$BB_1 = \frac{BB_2}{\sin 45^0}.$$

Из подобия треугольников A_1AC и B_1BC находим соотношение между деформациями стержней Δl_1 и Δl_2 :

$$\frac{AA_1}{AC} = \frac{BB_1}{BC}, \quad \frac{\Delta l_1}{a+c} = \frac{\Delta l_2}{\sin 45^0 \cdot b},$$

$$\Delta l_1 = \frac{a+c}{b \cdot \sin 45^0} \cdot \Delta l_2 = \frac{1,2+1}{1,4 \cdot 0,707} \Delta l_2;$$

$$\Delta l_1 = 2,22 \cdot \Delta l_2. \quad (2.2)$$

Полученная зависимость (2.2) называется условием *совместности деформаций*.

Определяем длины стержней по заданной схеме конструкции:

$$l_1 = a = 1,2 \text{ м}; \quad l_2 = \frac{a}{\sin 45^0} = \frac{1,2}{0,707} = 1,70 \text{ м}.$$

Абсолютные удлинения стержней можно выразить через усилия, используя формулу Гука (1.2):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_1 l_1}{E A}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{N_2 l_2}{E \cdot 1,3A}. \quad (2.3)$$

Подставив выражения (2.3) в условие совместности деформаций (2.2), получим

$$\frac{N_1 \cdot 1,2}{E A} = 2,22 \cdot \frac{N_2 \cdot 1,70}{E \cdot 1,3A}; \quad N_1 = 2,42 N_2. \quad (2.4)$$

Решая систему уравнений (2.1) и (2.4), определяем усилия в стержнях N_1, N_2 . Для этого подставим значение N_1 из (2.4) в уравнение (2.1):

$$-2,42 N_2 (c+a) + P a - N_2 \sin 45^0 b = 0;$$

$$-2,42 N_2 (1+1,2) + 5 \cdot 1,2 - N_2 \sin 45^0 1,4 = 0.$$

Получаем:

$$N_2 = 0,950 \text{ кН};$$
$$N_1 = 2,42 \cdot 0,95 = 2,30 \text{ кН}.$$

Определив усилия в стержнях, переходим к подбору площадей их поперечных сечений.

Для заданного материала по формуле (1.13) вычислим допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{340 \cdot 10^6}{2,5} = 136 \cdot 10^6 \text{ Па} = 136 \text{ МПа}.$$

Определяем напряжения в стержнях и выбираем большее:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{2,3 \cdot 10^3}{A} \text{ Па};$$
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,95 \cdot 10^3}{1,3 \cdot A} = \frac{0,731 \cdot 10^3}{A} \text{ Па}.$$

Площадь сечения A подбираем по условию прочности наиболее нагруженного стержня. Так как σ_1 больше σ_2 , используем условие прочности первого стержня:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]; \quad \frac{2,3 \cdot 10^3}{A} \leq 136 \cdot 10^6 \text{ Па};$$
$$A \geq 0,169 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,169 \text{ см}^2.$$

Площади сечений стержней принимаем в соответствии с заданным соотношением:

$$A_1 = A = 0,169 \text{ см}^2; \quad A_2 = 1,3 \cdot A = 1,3 \cdot 0,169 = 0,220 \text{ см}^2.$$

Определение допускаемой силы P по условию задачи производится по предельной грузоподъемности конструкции.

Предельным состоянием конструкции называется такое состояние, при котором она начинает деформироваться без увеличения нагрузки.

В данном примере это произойдет в том случае, когда напряжения во всех стержнях достигнут предела текучести

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T.$$

Усилия в стержнях будут определяться по формулам

$$N_1 = \sigma_T \cdot A_1; \quad N_2 = \sigma_T \cdot A_2. \quad (2.5)$$

Нагрузка, соответствующая предельному состоянию, называется *предельной*. Её величину можно найти из уравнения предельного равновесия, которое получается из уравнения (2.1) после подстановки в него значений N_1, N_2 :

$$-\sigma_T \cdot A_1 \cdot (c+a) + P_{np} \cdot a - \sigma_T \cdot A_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot b = 0.$$

$$P_{np} = \frac{1}{a} [\sigma_T A_1 (c+a) + \sigma_T A_2 \sin 45^\circ b] =$$

$$= \frac{1}{1,2} [340 \cdot 10^6 \cdot 0,169 \cdot 10^{-4} \cdot (1+1,2) + 340 \cdot 10^6 \cdot 0,22 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 45^\circ \cdot 1,4] = 16,7 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Допускаемая нагрузка с учётом заданного коэффициента запаса

$$P_\partial = \frac{P_{np}}{n_T} = \frac{16,7 \cdot 10^3}{2,5} = 6,68 \cdot 10^3 \text{ Н} = 6,68 \text{ кН.}$$

Величина допускаемой нагрузки при расчёте по предельной грузоподъёмности получается большей, чем при расчёте по допускаемым напряжениям:

$$\frac{P_\partial}{P_3} = \frac{6,68}{5} = 1,34.$$

Разница составляет 34 %, что является результатом разных предположений об опасном состоянии конструкции: при расчёте по допускаемым напряжениям опасным считается состояние, при котором только в одном стержне напряжение достигает предела текучести. Для статически неопределимых систем расчёт по предельной грузоподъёмности даёт более экономичное решение при назначении размеров сечения, и им широко пользуются в строительной практике.

ЗАДАЧА № 3

К стальному брусу круглого поперечного сечения приложены четыре крутящих момента M_1, M_2, M_3, X , три из которых известны.

Требуется:

- 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения равен нулю;
- 2) при найденном значении X построить эпюру крутящих моментов;
- 3) при заданном значении допускаемого напряжения $[\tau]$ определить диаметр вала из условия его прочности и округлить величину диаметра до ближайшей большей стандартной величины, равной 30, 35, 40, 45, 50, 60, 80, 90, 100 мм;
- 4) проверить, выполняется ли условие жёсткости бруса при выбранном диаметре, если допускаемый угол закручивания $[\theta]=1$ град/м;
- 5) построить эпюру углов закручивания.

Для всех вариантов принять модуль сдвига для стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Числовые данные берутся из табл. 3, расчётные схемы – по рис. 6.

Таблица 3

Числовые данные к задаче № 3

Номер строки	Номер расч. схемы по рис. 6	Размер, м			Момент, кН·м			[τ], МПа
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	M_1	M_2	M_3	
1	1	0,8	0,4	1,0	2,0	1,6	1,0	35
2	2	0,6	0,5	0,5	1,8	1,7	1,2	40
3	3	0,4	0,7	0,7	1,7	0,9	0,7	50
4	4	0,6	0,4	0,6	1,5	0,8	1,5	45
5	5	0,5	0,8	0,4	1,3	2,0	1,4	60
6	6	0,7	1,0	0,8	1,0	1,7	2,0	40
7	7	1,0	0,7	1,0	1,6	1,5	1,6	35
8	8	0,4	0,6	0,5	1,4	1,6	1,8	70
9	9	0,7	0,4	0,6	1,5	0,8	0,9	80
0	10	0,5	0,5	0,4	0,9	1,0	1,5	60
	3	ж	а	б	в	г	д	е

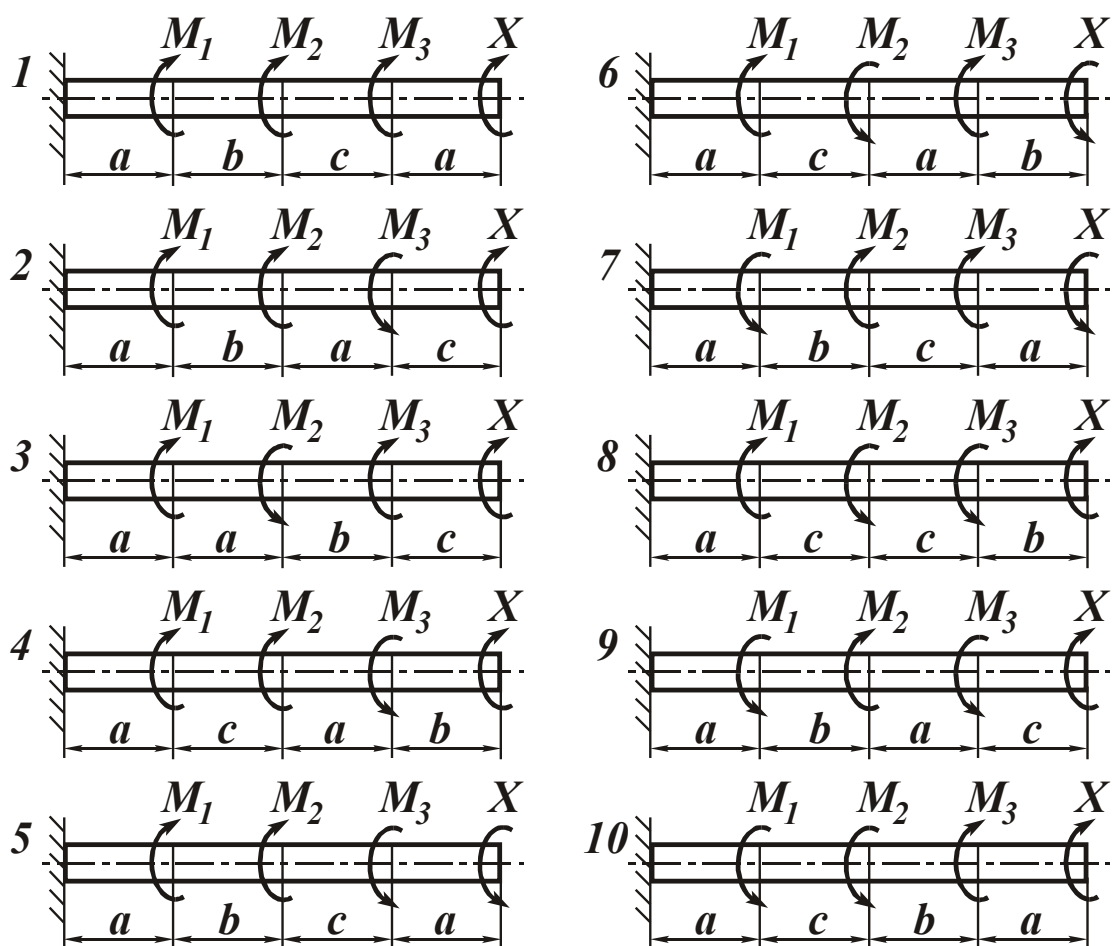


Рис. 6. Расчётные схемы к задаче № 3

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 3

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

Брус, нагруженный парами сил, плоскости действия которых перпендикулярны его оси, испытывает деформацию кручения. Внутренним силовым фактором в поперечном сечении бруса в этом случае является крутящий момент $M_{кр}$, величину которого определяют методом сечений.

На основании этого метода можно сформулировать правило для определения крутящего момента в сечении бруса: крутящий момент в любом сечении бруса численно равен алгебраической сумме крутящих моментов, расположенных по одну сторону от этого сечения; при этом крутящий момент, приложенный к брусу, считается условно положительным, если при взгляде вдоль оси бруса с левого конца мы видим его направленным по ходу часовой стрелки.

Размеры и форма поперечного сечения бруса в расчётах на кручение учитываются двумя геометрическими характеристиками: полярным моментом инерции I_p и полярным моментом сопротивления W_p . Для круглого

сечения они вычисляются по следующим формулам:

$$I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4; \quad (3.1)$$

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2 d^3, \quad (3.2)$$

где d - диаметр сечения.

Крутящий момент $M_{кр}$ вызывает в сечениях касательные напряжения τ_{ρ} , вычисляемых по формуле

$$\tau_{\rho} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}} \rho, \quad (3.3)$$

где $M_{кр}$ - крутящий момент в сечении бруса;

I_{ρ} - полярный момент инерции сечения;

ρ - расстояние от центра тяжести сечения до точки, в которой определяются напряжения.

Условие прочности записывается в виде

$$\tau^{\max} = \frac{M_{кр}^{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (3.4)$$

где $M_{кр}^{\max}$ - максимальная по модулю величина крутящего момента, определяемого по эпюре $M_{кр}$;

W_{ρ} - полярный момент сопротивления;

$[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение.

Деформация при кручении характеризуется углом закручивания φ (рад):

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G I_{\rho}} \quad (3.5)$$

где l - длина бруса;

G - модуль сдвига (модуль упругости второго рода).

Угол закручивания на единице длины бруса называется относительным углом закручивания и вычисляется по формуле

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G I_{\rho}}. \quad (3.6)$$

Условие жёсткости накладывает ограничение на величину относитель-

ного угла закручивания:

$$\theta_{\max} \leq [\theta],$$

где $[\theta]$ - допускаемый угол закручивания.

Условие жёсткости с учётом формулы (3.6) имеет вид

$$\frac{M_{кр}^{\max}}{G I_{\rho}} \leq [\theta]. \quad (3.7)$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 3

Для заданного бруса круглого сечения (рис. 7, а) определить величину момента X , при котором угол поворота свободного конца бруса равен нулю, построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания, подобрать диаметр сечения по условию прочности и произвести проверку бруса на жёсткость.

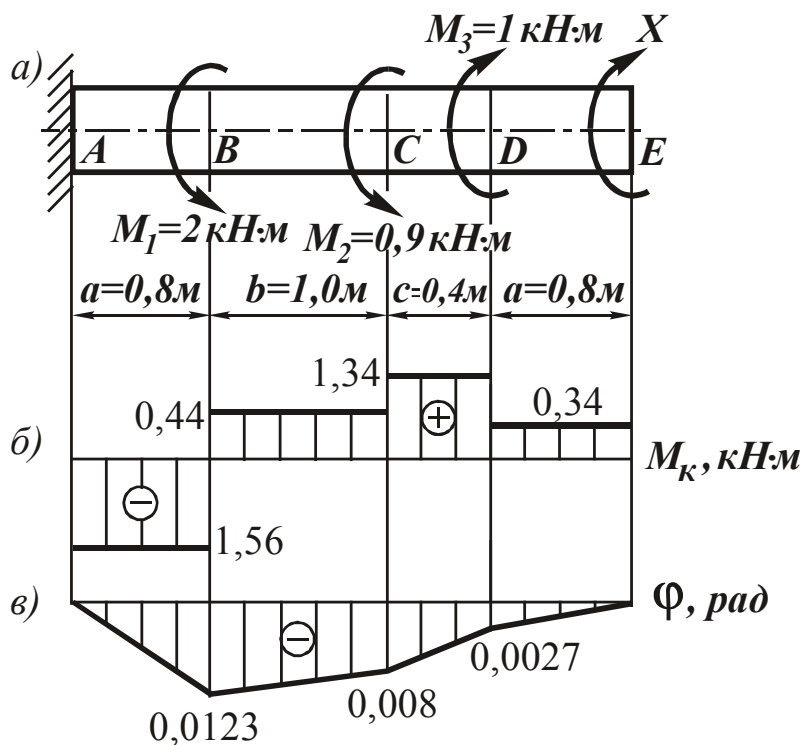


Рис. 7. Брус, работающий на кручение:

а - расчётная схема;

б - эпюра крутящих моментов;

в) - эпюра углов закручивания.

Угол поворота сечения E относительно сечения A определяется как сумма углов закручивания отдельных участков:

$$\begin{aligned} \varphi_E &= \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE} = \\ &= \frac{M_{кр}^{AB} l_{AB}}{G I_{\rho}} + \frac{M_{кр}^{BC} l_{BC}}{G \cdot I_{\rho}} + \frac{M_{кр}^{CD} l_{CD}}{G I_{\rho}} + \frac{M_{кр}^{DE} l_{DE}}{G I_{\rho}} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Крутящие моменты $M_{кр}$, входящие в выражение (3.8), определяются по

диаметр сечения по условию прочности и произвести проверку бруса на жёсткость.

Числовые данные к задаче: $a = 0,8$ м; $b = 1,0$ м; $c = 0,4$ м; $M_1 = 2$ кН·м; $M_2 = 0,9$ кН·м; $M_3 = 1$ кН·м; $[\tau] = 40$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

1. Определение величины неизвестного крутящего момента X .

Брус жёстко заделан левым концом A , правый конец E свободный. В сечениях B , C , и D приложены известные крутящие моменты. Для определения неизвестного момента X используем условие равенства нулю угла поворота сечения E .

приведенному выше правилу.

Вычисления начинаем с незакрепленного конца:

$$\begin{aligned}M_{кр}^{DE} &= X; \\M_{кр}^{CD} &= X + M_3 = X + 1,0; \\M_{кр}^{BC} &= X + M_3 - M_2 = X + 1,0 - 0,9 = X + 0,1; \\M_{кр}^{AB} &= X + M_3 - M_2 - M_1 = X + 1,0 - 0,9 - 2 = X - 1,9.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Используя выражения (3.9) и сокращая на GI_ρ , приводим уравнение (3.8) к виду

$$\begin{aligned}(X - 1,9)a + (X + 0,1)b + (X + 1,0)c + X \cdot a &= 0. \\(X - 1,9) \cdot 0,8 + (X + 0,1) \cdot 1 + (X + 1,0) \cdot 0,4 + X \cdot 0,8 &= 0\end{aligned}$$

Решая это уравнение, получаем $X = 0,340$ кН·м.

Примечание: если значение X получится со знаком минус, направление крутящего момента задано неправильно. В данном примере X положителен, следовательно, направление крутящего момента, показанное на рис. 7, правильно.

2. Построение эпюры крутящих моментов.

Найденное значение $X = 0,34$ кН·м подставляем в выражения (3.9), вычисляя, таким образом, величину крутящего момента на каждом участке:

$$\begin{aligned}M_{кр}^{DE} &= 0,34 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{кр}^{CD} = 1,34 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\M_{кр}^{BC} &= 0,44 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{кр}^{AB} = -1,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

По найденным значениям $M_{кр}$ строим эпюру крутящих моментов. Для этого рассматриваем последовательно участки ED , DC , CB и CA . Крутящие моменты, действующие на этих участках, уже вычислены.

Величина крутящего момента на каждом участке не зависит от положения сечения в пределах участка (крутящий момент постоянен), поэтому эпюра крутящих моментов ограничена отрезками прямых (рис. 7, б). Построенная эпюра позволяет найти опасное сечение, т.е. такое, в котором действует максимальный (по модулю) крутящий момент.

В рассматриваемом примере опасными будут сечения в пределах участка AB ; расчётное значение крутящего момента

$$M_{кр}^{\max} = 1,56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Подбор диаметра поперечного сечения бруса.

Используем условие прочности (3.4)

$$\frac{M_{кр}^{\max}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Учитывая, что $W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$, выразим диаметр из условия прочности

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{кр}^{\max}}{\pi [\tau]}}.$$

Подставляя $M_{кр}^{\max} = 1,56 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и $[\tau] = 40 \cdot 10^6 \text{ Па}$, вычисляем диаметр поперечного сечения, округляя его до стандартной величины:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,56 \cdot 10^3}{\pi \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0,0584 \text{ м} = 58,4 \text{ мм} \Rightarrow 60 \text{ мм}.$$

4. Проверка условия жёсткости.

Условие жёсткости записываем в форме (3.7):

$$\frac{M_{кр}^{\max}}{G I_{\rho}} \leq [\theta].$$

По условию задачи $[\theta] = 1 \text{ град/м}$. Переводя значение угла из градусной меры в радианную, получаем

$$[\theta] = 1 \text{ град/м} = \frac{\pi}{180} \cdot 1 = 0,017 \frac{1}{\text{м}}.$$

Вычисляем выражение, стоящее в левой части условия жёсткости, определив предварительно величину полярного момента инерции бруса:

$$I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 0,06^4}{32} = 1,27 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$\frac{M_{кр}^{\max}}{G I_{\rho}} = \frac{1,56 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,27 \cdot 10^{-6}} = 0,015 \frac{1}{\text{м}}.$$

Сравнение левой и правой частей условия жёсткости показывает, что оно выполняется:

$$\theta^{\max} = 0,015 \frac{1}{\text{м}} < [\theta] = 0,017 \frac{1}{\text{м}}.$$

5. Построение эпюры углов закручивания.

Вычисляем углы закручивания по участкам, используя формулу (3.5):

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{кр}^{AB} l_{AB}}{G I_{\rho}} = \frac{-1,56 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,27 \cdot 10^{-6}} = -0,0123 \text{ рад};$$

$$\varphi_{BC} = \frac{M_{кр}^{BC} l_{BC}}{G I_{\rho}} = \frac{0,44 \cdot 10^3 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,27 \cdot 10^{-6}} = 0,0043 \text{ рад};$$

$$\varphi_{CD} = \frac{M_{кр}^{CD} l_{CD}}{G I_{\rho}} = \frac{1,34 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,27 \cdot 10^{-6}} = 0,0053 \text{ рад};$$

$$\varphi_{DE} = \frac{M_{кр}^{DE} l_{DE}}{G I_{\rho}} = \frac{0,34 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,27 \cdot 10^{-6}} = 0,0027 \text{ рад}.$$

Угол поворота каждого сечения равен сумме углов закручивания соответствующих участков бруса. Суммирование углов начинаем с незакрепленного конца А:

$$\varphi_A = 0, \text{ так как сечение в заделке неподвижно};$$

$$\varphi_B = \varphi_{AB} = -0,0123 \text{ рад};$$

$$\varphi_C = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = -0,0123 + 0,0043 = -0,008 \text{ рад};$$

$$\varphi_D = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} = -0,0123 + 0,0043 + 0,0053 = -0,0027 \text{ рад};$$

$$\varphi_E = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DE} = -0,0123 + 0,0043 + 0,0053 + 0,0027 = 0.$$

По вычисленным углам поворота сечений построена эпюра углов закручивания (рис. 7, в).

Равенство $\varphi_E = 0$ является проверкой решения, так как неизвестный крутящий момент X определялся из условия равенства нулю угла поворота свободного конца бруса.

ЗАДАЧА № 4

Для двух заданных сечений, состоящих из нескольких элементов или имеющих вырезы, определить положение главных центральных осей инерции и вычислить величины моментов инерции относительно этих осей.

Первое сечение для расчёта выбирается по рис. 8, второе – по рис. 9. Размеры элементов сечений и номера прокатных профилей берутся из табл. 4. При расчёте сечения, состоящего из прокатных профилей, уголок следует принимать в соответствии с заданными размерами; он может быть равнобоким или неравнобоким.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 4

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

Рассматриваемая задача относится к разделу "Геометрические характеристики плоских фигур".

При расчёте на изгиб, кручение и другие виды более сложного нагружения для оценки прочности и жёсткости бруса недостаточно знать только площадь его поперечного сечения, требуется определять другие геометрические характеристики сечения: статический момент площади, осевые, центробежный и полярный моменты инерции.

Таблица 4

Числовые данные к задаче № 4

Номер строки	Номер расчёт. схемы (рис. 8, 9)	Размер a , см	Прокатный профиль			
			полоса	швеллер	двутавр	уголок
1	1	10	160×10	10	12	75×75×8
2	2	20	180×10	12	14	75×50×6
3	3	12	180×6	14	10	90×90×6
4	4	14	200×10	14 a	16	80×50×6
5	5	22	200×6	16	12	80×80×8
6	6	15	160×8	16 a	18	70×45×5
7	7	18	210×8	14	14	75×75×6
8	8	16	220×10	12	16	80×50×6
9	9	20	220×8	14 a	10	70×70×6
0	10	25	180×8	10	12	63×40×6
	3	ж	а	б	в	г

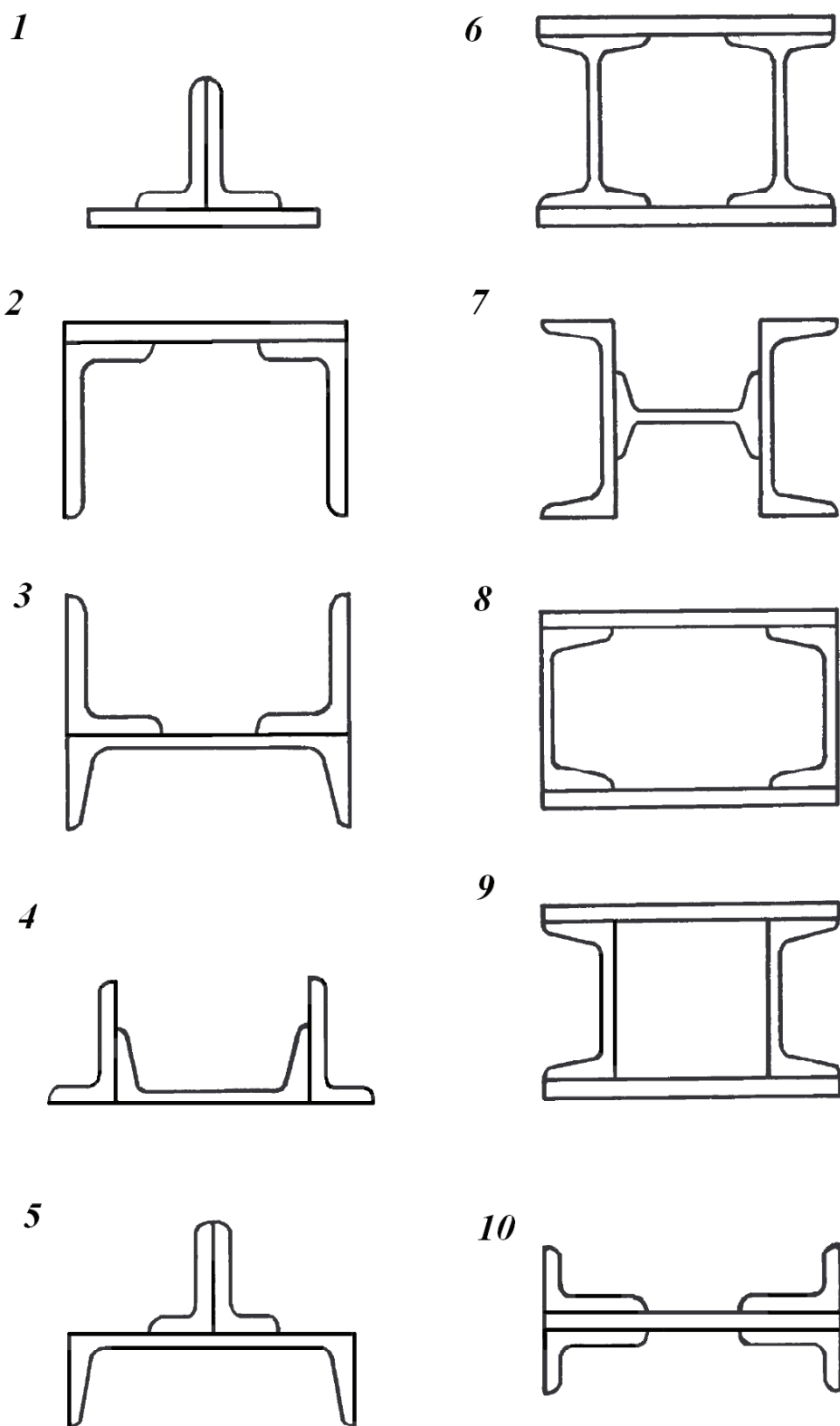


Рис. 8. Расчётные схемы к задаче № 4 (для первого сечения)

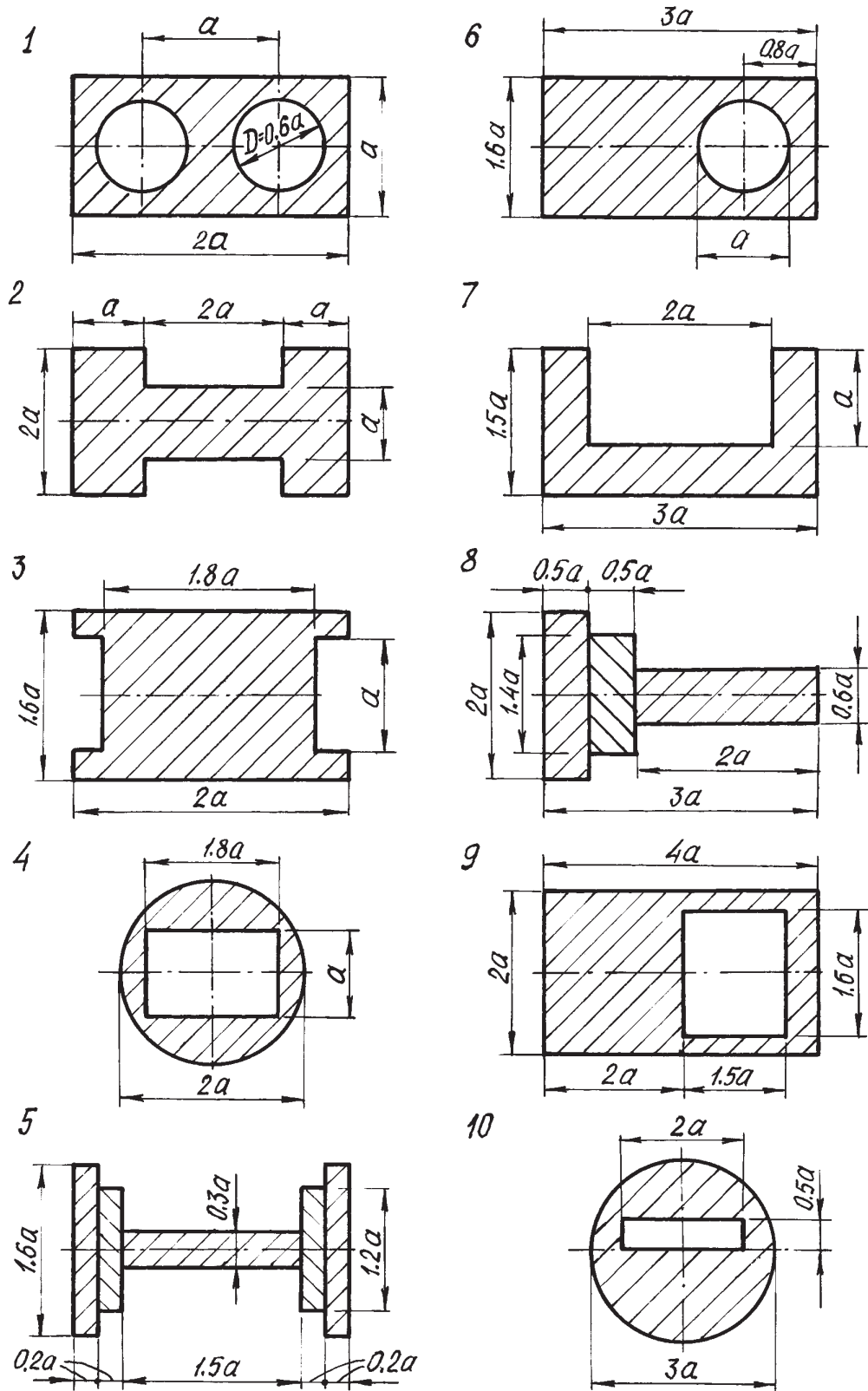


Рис. 9. Расчётные схемы к задаче № 4 (для второго сечения)

Рассмотрим произвольную плоскую фигуру площадью A , отнесенную к системе координат xOy (рис. 10).

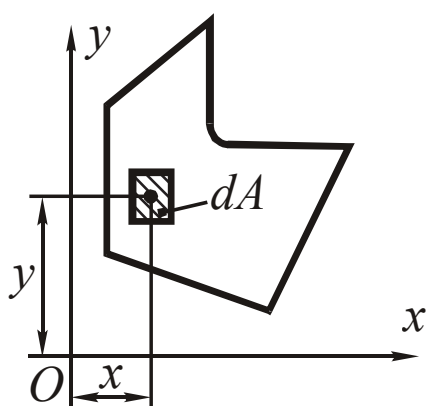


Рис. 10. Плоская фигура

Обозначим: dA - площадь элементарной площадки; x, y - расстояние от её центра тяжести до осей координат.

Выражения вида

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA \quad (4.1)$$

называются статическими моментами площади относительно осей x и y соответственно.

Зная величины статических моментов площади фигуры, можно вычислить координаты её центра тяжести. Если заданное сечение можно разбить на части, для которых известны положения их центров тяжести и величины площадей, координаты центра тяжести всей фигуры определяются по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{x_{c1} A_1 + x_{c2} A_2 + \dots + x_{cn} A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n},$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{y_{c1} A_1 + y_{c2} A_2 + \dots + y_{cn} A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n}.$$

(4.2)

где n - число элементов, на которое разбивается сечение;

A_i - площади отдельных элементов сечения;

x_{ci}, y_{ci} - координаты центров тяжести этих элементов в выбранной системе координат x, y .

Центр тяжести лежит на оси симметрии сечения, а если таких осей несколько - в точке их пересечения.

Моментами инерции (осевыми моментами инерции) относительно осей x и y соответственно называются интегралы вида

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (4.3)$$

Для простейших фигур и прокатных профилей величины моментов инерции приводятся в учебной и справочной литературе (см. Приложение).

Выражение

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (4.4)$$

называется центробежным моментом инерции. Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями. Если хотя бы одна из выбранных координатных осей является осью симметрии, то обе эти оси будут главными. Осевые моменты инерции отно-

сительно главных центральных осей называются главными центральными моментами инерции. Они являются экстремальными по величине: один из них максимален, другой минимален.

Осевой момент инерции составного сечения вычисляется как сумма осевых моментов инерции отдельных составляющих фигур относительно одной и той же оси. При этом необходимо помнить, что в таблицах сортамента прокатных профилей моменты инерции простых элементов определены относительно их собственных центральных осей, которые показываются на чертежах. Центральные оси составной фигуры обычно не совпадают с табличными, и для вычисления моментов инерции подобных фигур приходится использовать зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_0} + a^2 A; \\ I_y &= I_{y_0} + b^2 A. \end{aligned} \quad (4.5)$$

где I_x, I_y - моменты инерции сечения относительно произвольных осей;

I_{x_0}, I_{y_0} - моменты инерции сечения относительно центральных осей;

A - площадь фигуры ;

a и b - расстояние между осями x, x_0 и y, y_0 соответственно.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 4

Задано сечение (рис. 11), составленное из прокатных профилей: швеллера № 16а и двух неравнобоких уголков 80×50×6. Требуется вычислить главные центральные моменты инерции сечения.

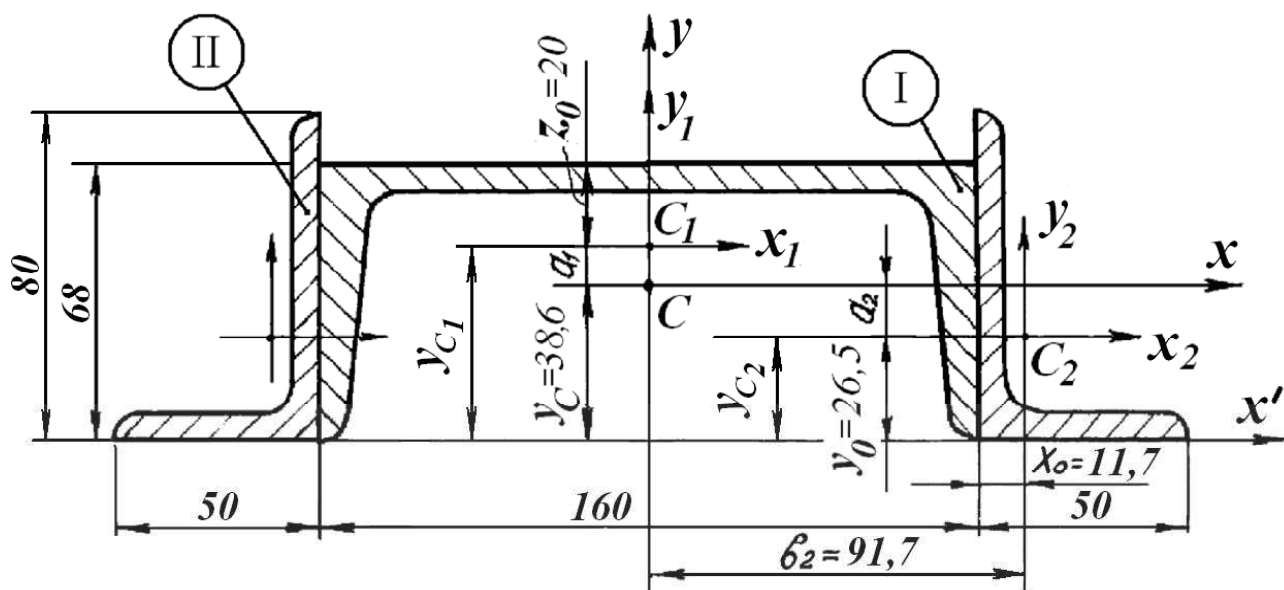


Рис. 11. Расчётная схема первого сечения

1. Из таблиц сортамента выписываются геометрические характеристики прокатных профилей, составляющих заданное сечение.

Фигура №1 – Швеллер №16а: размеры $h = 160$ мм, $b = 68$ мм, площадь сечения $A_1 = 19,5 \text{ см}^2$; осевые моменты инерции $I_{y_1}^I = 823 \text{ см}^4$, $I_{x_1}^I = 78,8 \text{ см}^4$, координата центра тяжести $z_0 = 2$ см.

Симметричные фигуры в расчёте можно обозначать одним номером.

Фигура №2 – Неравнобокий уголок $80 \times 50 \times 6$: площадь сечения $A_2 = 7,55 \text{ см}^2$, осевые моменты инерции $I_{x_2}^{II} = 49 \text{ см}^4$, $I_{y_2}^{II} = 14,8 \text{ см}^4$, координаты центра тяжести $y_0 = 2,65$ см, $x_0 = 1,17$ см.

Примечание. Если в состав сечения входит прямоугольник, то для него по формулам (4.6) следует вычислить площадь и осевые моменты инерции

$$A = b \cdot h; I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}. \quad (4.6)$$

Геометрические характеристики других простых плоских фигур приведены в Приложении данного пособия.

В соответствии с заданным вариантом сечения выполняется чертёж в масштабе 1:2 с указанием характерных размеров.

На чертёж наносятся центры тяжести швеллера C_1 и уголка C_2 и проводятся их собственные центральные оси x_1, y_1 и x_2, y_2 (см. рис. 11).

2. Определение положения центра тяжести заданного сечения.

Заданное сечение имеет одну ось симметрии, которая является главной центральной осью. Выбираем исходную систему координат: ось абсцисс x' совмещаем с нижней границей сечения, а ось ординат y - с осью симметрии. Координаты точек C_1 и C_2 легко определяются по чертежу.

Используя формулу (4.2) и учитывая симметрию сечения, вычисляем ординату его центра тяжести по формуле

$$y_c = \frac{y_{c_1} A_1 + 2 \cdot y_{c_2} A_2}{A_1 + 2 \cdot A_2}.$$

где A_1 - площадь швеллера, $A_1 = 19,5 \text{ см}^2$,

y_{c_1} - ордината точки C_1 , $y_{c_1} = 6,8 - 2,0 = 4,8$ см;

A_2 - площадь одного уголка, $A_2 = 7,55 \text{ см}^2$;

y_{c_2} - ордината точки C_2 , $y_{c_2} = y_0 = 2,65$ см.

После подстановки числовых значений получаем

$$y_c = \frac{4,8 \cdot 19,5 + 2 \cdot 2,65 \cdot 7,55}{19,5 + 2 \cdot 7,55} = 3,86 \text{ см}.$$

Откладывая найденное значение $y_c = 3,86$ см на оси y вверх от оси x' , находим положение центра тяжести всего сечения C и проводим главные центральные оси x, y .

Примечание. Если фигура имеет две оси симметрии, центр тяжести лежит на их пересечении, то вычислений для определения его положения производить не нужно.

3. Вычисление главных центральных моментов инерции сечения относительно осей x и y .

Определяются по чертежу расстояния:

- между осями x и x_1 : $a_1 = 6,8 - 3,86 - 2 = 0,94$ см;
- между осями x и x_2 : $a_2 = 3,86 - 2,65 = 1,21$ см;
- между осями y и y_1 : $b_1 = 0$ (так как оси y и y_1 совпадают);
- между осями y и y_2 : $b_2 = 8 + 1,17 = 9,17$ см.

Главные центральные моменты инерции составного сечения I_x и I_y вычисляются по формулам (4.5):

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^I + 2I_x^{II} = (I_{x_1}^I + a_1^2 A_1) + 2(I_{x_2}^{II} + a_2^2 A_2); \\ I_y &= I_y^I + 2I_y^{II} = (I_{y_1}^I + b_1^2 A_1) + 2(I_{y_2}^{II} + b_2^2 A_2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

После подстановки числовых значений в формулы (4.7), получаем:

$$\begin{aligned} I_x &= (78,8 + 0,94^2 \cdot 19,5) + 2 \cdot (49 + 1,21^2 \cdot 7,55) = 216,1 \text{ см}^4; \\ I_y &= (823) + 2 \cdot (14,8 + 9,17^2 \cdot 7,55) = 2122,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

ВТОРОЙ ВАРИАНТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 4

Задано сечение (рис. 12). Размеры сечения заданы в сантиметрах.

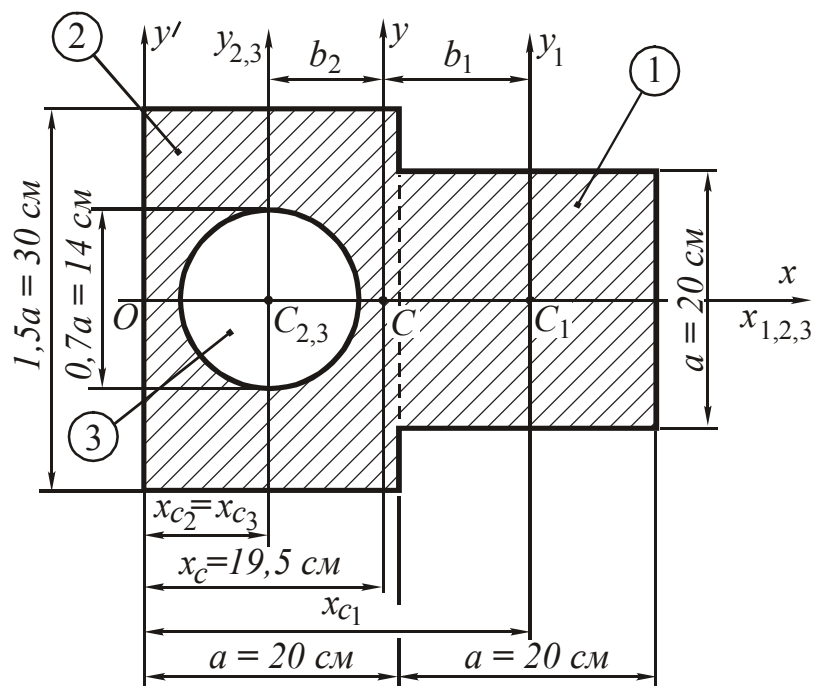


Рис. 12. Расчётная схема второго сечения

Требуется определить главные центральные моменты инерции этого сечения.

1. Заданное сечение вычерчивается в масштабе 1:2 и разбивается на простейшие фигуры: квадрат (1), прямоугольник (2) и круговое отверстие (3). На чертеже показываются центры тяжести составляющих фигур (точки C_1 и $C_{2,3}$) и проводятся их главные центральные оси x_1, y_1 ; x_2, y_2 и x_3, y_3 (рис. 12). Площади и моменты инерции составляющих фигур относительно их центральных осей вычисляются по известным формулам (см. Приложение).

Фигура 1 – Квадрат (20 см×20 см).

$$A_1 = a^2 = 20^2 = 400 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_1}^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} = \frac{a^4}{12} = \frac{20^4}{12} = 13333 \text{ см}^4.$$

Фигура 2 – Прямоугольник (20 см×30 см).

$$A_2 = a \cdot 1,5a = 20 \cdot 1,5 \cdot 20 = 600 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_2}^{(2)} = \frac{a \cdot (1,5a)^3}{12} = \frac{20 \cdot (1,5 \cdot 20)^3}{12} = 45000 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_2}^{(2)} = \frac{(1,5 \cdot a)a^3}{12} = \frac{(1,5 \cdot 20) \cdot 20^3}{12} = 20000 \text{ см}^4.$$

Фигура 3 – Круг ($d = 14$ см).

$$A_3 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0,7a)^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0,7 \cdot 20)^2}{4} = 154 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_3}^{(3)} = I_{y_3}^{(3)} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot (0,7 \cdot a)^4}{64} = \frac{\pi \cdot (0,7 \cdot 20)^4}{64} = 1885 \text{ см}^4.$$

2. Определение положения центра тяжести составного сечения.

Центр тяжести составной фигуры лежит на её оси симметрии x . Вспомогательная ось y' совмещается с левой границей сечения. Координата центра тяжести всего сечения x_c в системе xOy' определяется по формуле (4.2):

$$x_c = \frac{x_{c_1} \cdot A_1 + x_{c_2} \cdot A_2 - x_{c_3} \cdot A_3}{A_1 + A_2 - A_3}.$$

По чертежу определяются абсциссы точек C_1 и $C_{2,3}$:

$$x_{c_1} = 1,5a = 1,5 \cdot 20 = 30 \text{ см};$$

$$x_{c_2} = x_{c_3} = 0,5a = 0,5 \cdot 20 = 10 \text{ см.}$$

Площадь круга подставляется в формулу (4.2) со знаком минус, так как площадь отверстия принято считать отрицательной величиной.

Подставляя числовые значения, получаем

$$x_c = \frac{30 \cdot 400 + 10 \cdot 600 - 10 \cdot 154}{400 + 600 - 154} = 19,5 \text{ см.}$$

Откладывая на оси x отрезок $OC = 19,5$ см, находим точку C - центр тяжести составного сечения и проводим главную центральную ось y , параллельную оси y' (рис. 12).

3. Вычисление моментов инерции относительно главных центральных осей x, y .

Используем формулы (4.5), как и в предыдущем примере. Перед последним слагаемым в скобках ставится знак минус, так как моменты инерции отверстия считаются отрицательными:

$$\begin{aligned} I_x &= (I_{x_1}^{(1)} + A_1 a_1^2) + (I_{x_2}^{(2)} + A_2 a_2^2) - (I_{x_3}^{(3)} + A_3 a_3^2); \\ I_y &= (I_{y_1}^{(1)} + A_1 b_1^2) + (I_{y_2}^{(2)} + A_2 b_2^2) - (I_{y_3}^{(3)} + A_3 b_3^2). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Моменты инерции составляющих фигур относительно собственных главных центральных осей вычислены ранее. Оси x_1, x_2 и x_3 совпадают с главной центральной осью x всей фигуры, поэтому расстояния между этими осями и осью x равны нулю:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

По чертежу находим расстояние между осями y и y_1

$$b_1 = a + 0,5 \cdot a - x_c = 20 + 0,5 \cdot 20 - 19,5 = 10,5 \text{ см.}$$

и расстояние между осями y и y_2

$$b_2 = b_3 = x_c - 0,5a = 19,5 - 0,5 \cdot 20 = 9,5 \text{ см.}$$

Подставляя числовые значения в (4.8), вычисляем главные центральные моменты инерции составного сечения:

$$I_x = 13333 + 45000 - 1885 = 56448 \text{ см}^4;$$

$$I_y = (13333 + 400 \cdot 10,5^2) + (20000 + 600 \cdot 9,5^2) - (1885 + 154 \cdot 9,5^2) = 115800 \text{ см}^4.$$

ЗАДАЧА № 5

Для заданных схем балок требуется:

- построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- подобрать поперечные сечения балок по следующим вариантам:

а) для стальной балки (рис. 13, а) – двутавровое; прямоугольное высотой h и основанием b при соотношении сторон $h/b=2$; круглое – диаметром d . Построить эпюру распределения нормальных напряжений по высоте двутавра для опасного сечения.

б) для чугунной балки (рис. 13, б) – форму сечения выбрать по рис. 14, определить размеры сечения из условия прочности по допускаемым напряжениям. Построить эпюру распределения нормальных напряжений по высоте опасного сечения.

в) для стальной балки (рис. 13, в) – сечение, состоящее из двух швеллеров.

Числовые данные берутся из табл. 5, расчётные схемы – по рис.13.

Таблица 5

Числовые данные к задаче № 5

Номер строки	Номер расч. схемы (рис. 13, 14)	Сила		Момент		Длина участка	Интенсивность распределённой нагрузки q , кН/м	Допускаемое напряжение, $[\sigma]$, МПа		
		P_1	P_2	m_1	m_2			a , м	Сталь	Чугун
		кН	кН	кН·м	кН·м	$[\sigma]_c$	$[\sigma]_p$			
1	1	40	90	10	10	1	10	200	600	120
2	2	45	80	12	10	1,5	15	160	700	150
3	3	50	85	15	14	2	20	180	500	100
4	4	35	70	12	12	1	10	250	800	150
5	5	50	80	10	15	2	10	160	600	120
6	6	60	70	10	12	1	15	180	700	150
7	7	45	60	12	10	1,5	20	180	500	100
8	8	35	65	10	10	1	10	160	800	150
9	9	40	75	13	10	1	10	160	650	130
0	10	30	90	18	12	2	15	220	750	200
	з	ж	а	б	в	г	ж	е	з	з

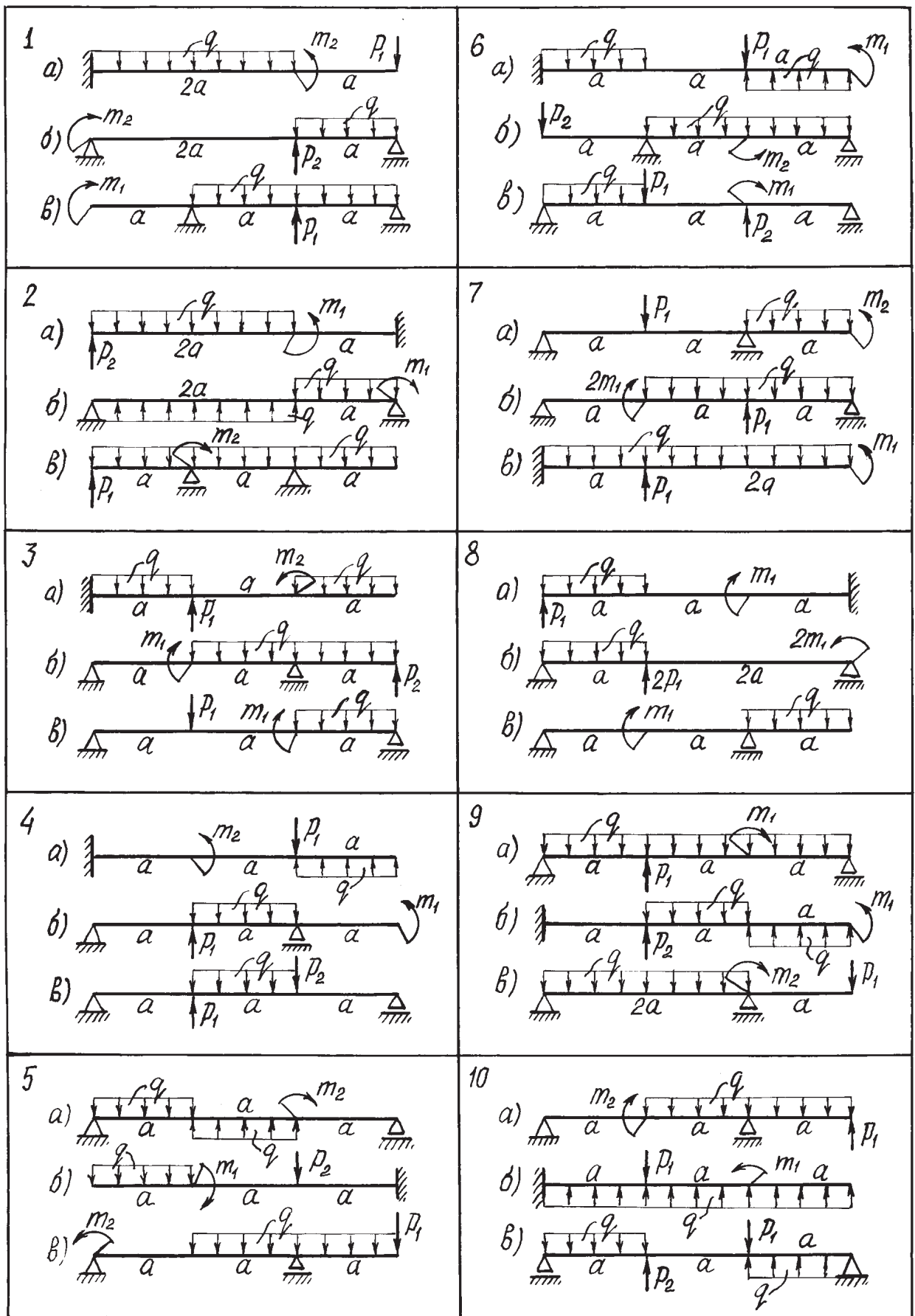


Рис. 13. Расчётные схемы балок к задаче № 5

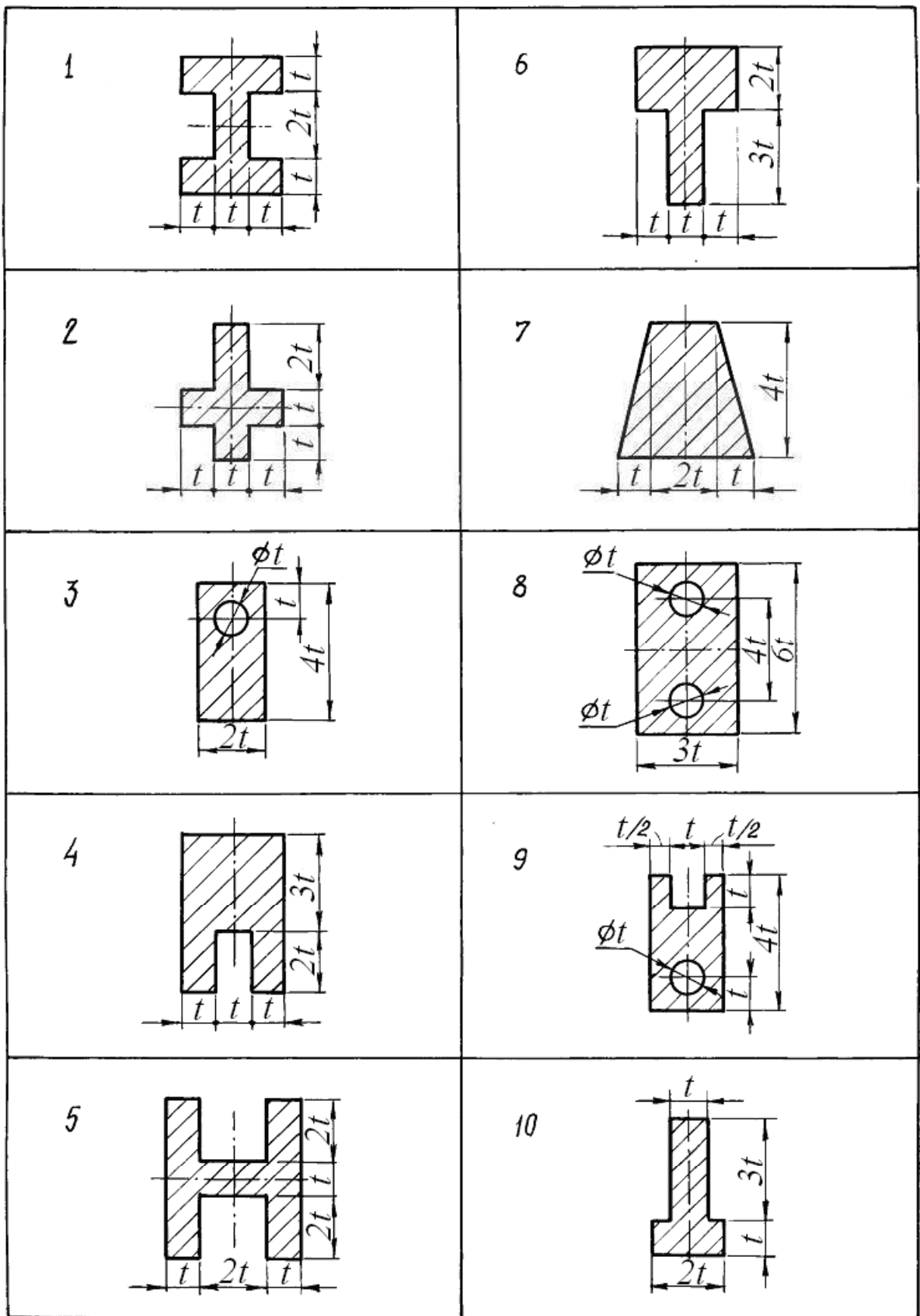


Рис. 14. Формы сечений чугунных балок к задаче № 5

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ №5

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

При изгибе в поперечном сечении бруса, который в этом случае называется балкой, возникают два внутренних усилия: поперечная сила Q и изгибающий момент M_x .

Поперечной силой в сечении называется внутреннее усилие, численно равное алгебраической сумме проекций всех сил, действующих на балку по одну сторону от рассматриваемого сечения, на нормаль к оси балки. Поперечная сила считается положительной, если она стремится вращать бесконечно малый элемент балки по ходу часовой стрелки. Обратное направление вращения соответствует отрицательной поперечной силе (рис. 15).



Рис. 15. Правило знаков для поперечной силы

Изгибающим моментом в сечении балки называется внутреннее усилие, численно равное алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на балку по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно его центра тяжести. Изгибающий момент положителен, если под его воздействием балка изгибается выпуклостью вниз; при изгибе выпуклостью вверх изгибающий момент считается отрицательным (рис. 16). Эпюра изгибающего момента строится со стороны сжатого волокна балки, которое находится с вогнутой части балки.

Положительные значения изгибающего момента откладываются вверх от оси эпюры, отрицательные: вниз.

Примечание: Студенты строительных специальностей строят эпюру изгибающего момента со стороны растянутого волокна, что не влияет на результаты расчётов балок на прочность и жёсткость.

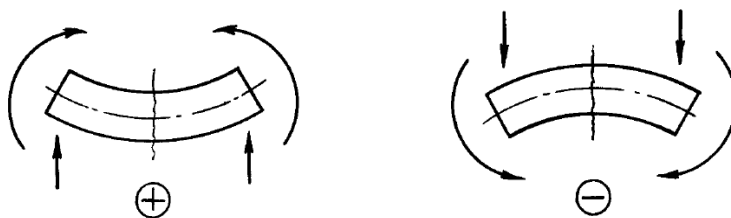


Рис. 16. Правило знаков для изгибающего момента

При решении задач, связанных с расчётами балок на прочность и жёсткость, строятся графики изменения этих усилий по длине бруса – эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Целью построения эпюр при расчётах на прочность является наглядное представление изменения внутренних усилий в сечении в зависимости от его положения и определение

наиболее нагруженных участков балки.

Для того чтобы установить закон изменения внутренних усилий по длине балки, выбирается прямоугольная система координат, ось абсцисс z направляется вдоль оси балки, а оси x, y совмещаются с главными центральными осями инерции поперечного сечения. Затем записываются аналитические выражения для поперечной силы и изгибающего момента в виде функций от абсциссы z , определяющей положение рассматриваемого сечения. Составив уравнения $Q(z)$ и $M_x(z)$, абсциссам дают последовательно конкретные значения и вычисляют величины Q и M_x , откладывая их в принятом масштабе от оси эпюры вверх или вниз, строя, таким образом, графики функций $Q(z)$ и $M_x(z)$ – эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

При изгибе балки в её поперечном сечении возникают нормальные и касательные напряжения. Нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (5.1)$$

где M_x - изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

I_x - момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;

y - расстояние от нейтральной оси до точки, где определяется напряжение.

Условие прочности при изгибе для пластичных материалов

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (5.2)$$

где W_x - осевой момент сопротивления при изгибе, вычисляемый относительно нейтральной оси. Для простых геометрических фигур его вычисляют по формулам:

$$\text{для прямоугольника } W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad \text{для круга } W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Моменты сопротивления прокатных профилей приводятся в таблицах сортамента.

Для хрупких материалов (чугун, высокоуглеродистые стали), имеющих существенно различные пределы прочности при растяжении $\sigma_{\text{вр}}$ и сжатии $\sigma_{\text{вс}}$, требуется проверка их прочности по наибольшим растягивающим σ_p и наибольшим сжимающим напряжениям σ_c :

$$\sigma_p = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_p \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_c = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_c \leq [\sigma]_c,$$

где $[\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{n}$, $[\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{n}$; n – запас прочности.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 5

Требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать размеры поперечного сечения стальной балки (рис. 17) для различных форм сечения: двутавровой балки, балки прямоугольного сечения со сторонами h и b при $h/b = 2$ и круглого поперечного сечения. Балка выполнена из стали с допускаемым напряжением $[\sigma] = 190$ МПа; $a = 1$ м; $q = 10$ кН/м.

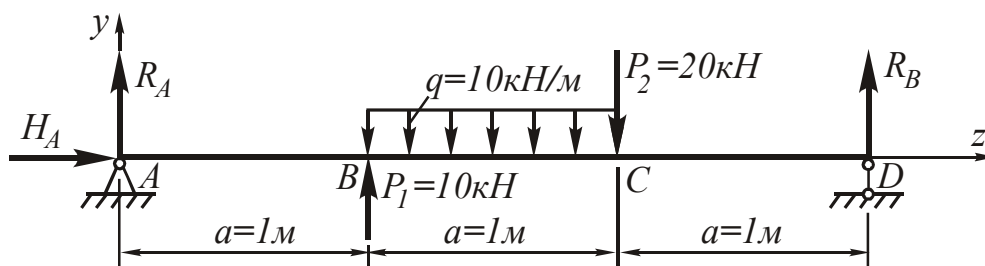


Рис. 17. Расчётная схема балки

1. Определение опорных реакций.

На схеме показываем опорные реакции R_A , H_A , R_B . Вертикальные реакции направляем вверх и записываем уравнения равновесия:

$$\sum Z = 0; H_A = 0;$$

$$\sum M_D = 0; R_A \cdot 3 + 10 \cdot 2 - 10 \cdot 1 \cdot 1,5 - 20 \cdot 1 = 0.$$

Отсюда $R_A = 5$ кН;

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 10 \cdot 1 \cdot 1,5 - 10 \cdot 1 = 0;$$

$$R_B = 15 \text{ кН}.$$

Проверим правильность вычислений, составив ещё одно уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; R_A + P_1 - q \cdot 1 + P_2 + R_B = 0;$$

$$5 + 10 - 10 \cdot 1 - 20 + 15 = 0;$$

$$30 - 30 = 0.$$

Условие равновесия удовлетворяется, реакции определены правильно.

2. Построение эпюры Q .

Мысленно разбиваем балку на участки. Границами участков являются сечения, в которых к балке приложены сосредоточенные силы или пары сил, начинаются или заканчиваются распределённые нагрузки, имеются промежуточные шарниры. В рассматриваемой балке граничными сечениями будут сечения A , B , C и D . Для каждого из трёх участков запишем аналитическое выражение $Q(z)$.

Участок AB , $0 < z < 1$ м. Рассмотрим произвольно выбранное сечение с абсциссой z . Рассекая балку в этом сечении на две части и отбросив пра-

вую часть, вычисляем алгебраическую сумму проекций на ось y всех сил, действующих на оставшуюся часть:

$$Q(z) = R_A = 5 \text{ кН}.$$

Поперечная сила не зависит от переменной z на протяжении всего участка, следовательно, эпюра Q ограничена прямой, параллельной оси абсцисс. Отложив от оси эпюры вверх в выбранном масштабе 5 кН (рис. 18, б), строим эпюру на этом участке.

Участок BC, $1 \text{ м} < z < 2 \text{ м}$. Алгебраическая сумма проекций всех сил на ось y слева от сечения с абсциссой z

$$Q(z) = R_A + P_1 - q(z-1) = 5 + 10 - 10(z-1);$$

$$Q(z) = 25 - 10z.$$

Полученное выражение является уравнением наклонной прямой, которая может быть построена по двум лежащим на ней точкам. Для её построения найдем значения поперечной силы на границах участков балки

$$z = 1 \text{ м}, Q(1 \text{ м}) = 15 \text{ кН}; \quad z = 2 \text{ м}, Q(2 \text{ м}) = 5 \text{ кН}.$$

Участок CD, $2 \text{ м} < z < 3 \text{ м}$. Поперечная сила на расстоянии z от начала координат

$$Q(z) = R_A + P_1 - q \cdot 1 - P_2 = 5 + 10 - 10 \cdot 1 - 20 = -15 \text{ кН}.$$

Так как поперечная сила не зависит от переменной z , на последнем участке эпюра Q ограничена прямой, параллельной оси балки (рис 18, б).

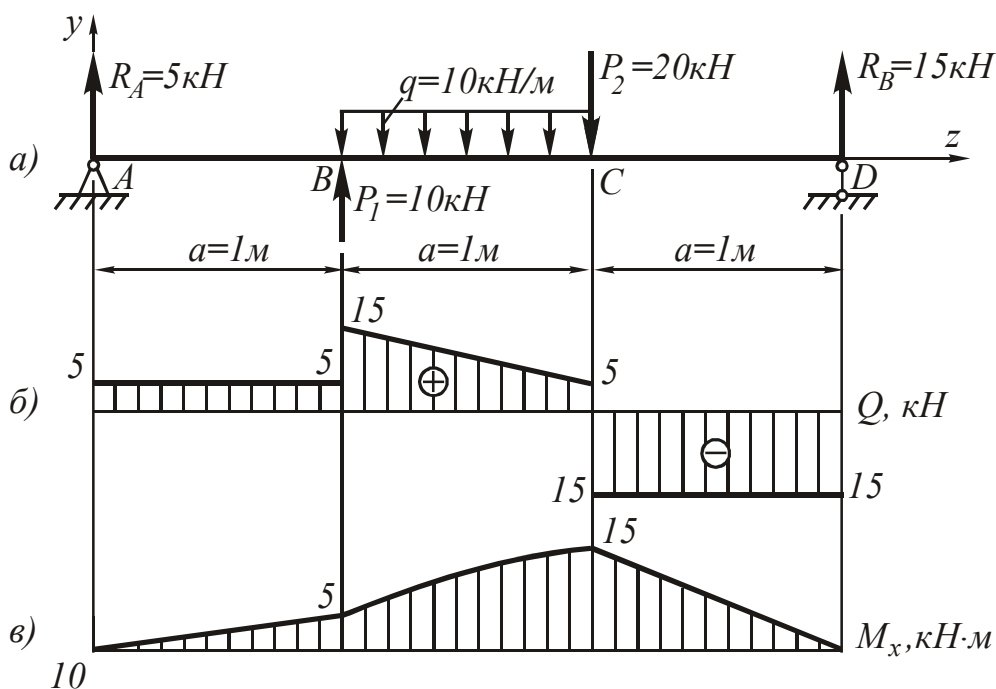


Рис. 18. Расчётная схема балки (а). Эпюры поперечных сил (б) и изгибающих моментов (в)

3. Построение эпюры M_x .

Аналитическое выражение для вычисления изгибающего момента в сечении z необходимо записать для каждого участка балки.

Участок AB:

$$M_x(z) = R_A \cdot z = 5 \cdot z.$$

На этом участке балки изгибающий момент возрастает по линейному закону и эпюра M_x ограничена наклонной прямой. Вычисляя его значения в сечениях на границах участка, строим в масштабе (рис. 18, в) эпюру M_x на сжатом волокне

$$z = 0, M_x(0) = 0; \quad z = 1\text{ м}, \quad M_x(1\text{ м}) = 5\text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BC:

$$\begin{aligned} M_x(z) &= R_A \cdot z + P_1(z-1) - \frac{q(z-1)^2}{2} = \\ &= 5 \cdot z + 10(z-1) - \frac{10(z-1)^2}{2} = -5z^2 + 25z - 15. \end{aligned}$$

Полученное уравнение является уравнением квадратной параболы и, поскольку поперечная сила Q на участке BC не изменяет знак, экстремума на эпюре M_x не будет.

Определим изгибающий момент на границах участка:

$$z = 1\text{ м}, \quad M_x(1\text{ м}) = 5\text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z = 2\text{ м}, \quad M_x(2\text{ м}) = -5 \cdot 2^2 + 25 \cdot 2 - 15 = 15\text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отложив вверх от оси балки найденные значения, проводим квадратную параболу выпуклостью вверх (навстречу вектору усилия равномерно распределённой нагрузки).

Участок CD:

$$\begin{aligned} M_x(z) &= R_A \cdot z + P_1(z-1) - q \cdot 1(z-1,5) - P_2(z-2) = \\ &= 5 \cdot z + 10(z-1) - 10 \cdot 1(z-1,5) - 20(z-2) = \\ &= -15 \cdot z + 45. \end{aligned}$$

В пределах последнего участка балки ($2\text{ м} < z < 3\text{ м}$) изгибающий момент линейно зависит от абсциссы z , и эпюра ограничена прямой линией.

$$\text{При } z = 2\text{ м}, \quad M_x(2\text{ м}) = 15\text{ кН} \cdot \text{м}, \quad \text{при } z = 3\text{ м}, \quad M_x(3\text{ м}) = 0.$$

Эпюры Q и M_x показаны на рис. 18.

По эпюре M_x находим опасное сечение балки – сечение, в котором изгибающий момент максимален по абсолютной величине. Для заданной балки изгибающий момент в опасном сечении $M_x^{\max} = 15\text{ кН} \cdot \text{м}$.

Из условия прочности определим требуемый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} = 78,9 \cdot 10^{-6} \text{ см}^3 = 78,9 \text{ см}^3.$$

Номер двутавра находим по расчётному значению момента сопротивления W_x , используя таблицы сортамента прокатной стали.

Обычно, чтобы соблюдалось условие прочности, в сортаменте ищут ближайшее наибольшее значение W_x . Наиболее близок к требуемому момент сопротивления двутавра №14, равный $W_x = 81,7 \text{ см}^3$.

Построим эпюру распределения нормальных напряжений по высоте сечения стальной двутавровой балки.

Нормальные напряжения в поперечном сечении балок при изгибе определяются по формуле (5.1). По ширине сечения нормальные напряжения распределяются равномерно. Зависимость между σ и y линейная, нормальные напряжения прямо пропорциональны расстоянию слоя волокон от нейтральной оси, совпадающей с главной центральной осью x .

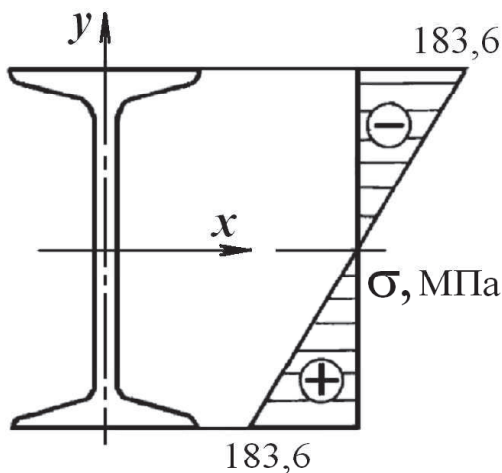


Рис. 19. Распределение нормальных напряжений по высоте стальной двутавровой балки

(рис. 18, в), изгибающий момент отложен вверх, следовательно, выше нейтральной оси в сечении двутавра происходит сжатие продольных волокон, а ниже – растяжение, что отражаем на эпюре σ соответствующим знаком.

Выбрав масштаб, строим эпюру распределения нормальных напряжений по высоте стальной двутавровой балки (рис. 19).

Подбираем прямоугольное сечение для рассмотренной выше стальной балки, момент сопротивления которого определяется с учётом того, что его высота в 2 раза больше ширины ($h = 2b$):

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3 = 78,9 \text{ см}^3.$$

Отсюда

$$b = \sqrt[3]{\frac{3W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 78,9}{2}} = 4,91 \text{ см}, \quad h = 2b = 2 \cdot 4,91 = 9,82 \text{ см}.$$

Круглое поперечное сечение имеет момент сопротивления

Вычислим максимальные нормальные напряжения в двутавровом сечении балки

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{15 \cdot 10^3}{81,7 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 183,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 183,6 \text{ МПа}.$$

Минимальные (сжимающие) напряжения в двутавровом сечении по абсолютной величине будут равны максимальным растягивающим напряжениям.

Эпюра изгибающих моментов в данном примере была построена на сжатых волокнах. В опасном сечении, судя по эпюре M_x

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} = 78,9 \text{ см}^3.$$

Диаметр круга

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 78,9}{\pi}} = 9,30 \text{ см}.$$

Рассмотрим *второй метод построения эпюр* внутренних усилий, действующих в сечениях балки. Он состоит в том, что поперечные силы и изгибающие моменты вычисляются на границах участков без записи уравнений $Q(z)$, $M(z)$, а соответствующие эпюры строятся на основании дифференциальных зависимостей между Q , M , q :

$$Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (5.3)$$

Зависимости (5.3) позволяют установить следующие характерные особенности эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

На участках, где нет распределённой нагрузки, эпюра Q ограничена прямыми, параллельными оси балки, а эпюра M – наклонными прямыми.

На участках, где приложена равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q , эпюра Q ограничена наклонными прямыми, а эпюра M – квадратными параболоми, выпуклость которых направлена навстречу вектору равномерно распределённой нагрузки.

На участках, где $Q > 0$, изгибающий момент возрастает; если $Q < 0$ – изгибающий момент убывает.

В сечениях, где к балке приложены сосредоточенные силы, на эпюре Q будут скачки на величину приложенных сил, а на эпюре M – переломы, острие которых направлено против действия этих сил.

В сечениях, где к балке приложены пары сил (сосредоточенные моменты), на эпюре M будут скачки на величину этих моментов.

Если на участке балки имеется равномерно распределённая нагрузка и эпюра Q в пределах участка изменяет знак, то в сечении, где $Q = 0$, на эпюре M будет экстремум.

Примеры использования дифференциальных зависимостей при расчёте балок приводятся ниже.

Рассмотрим задачу подбора сечения балки, изготовленной из хрупкого материала. Балка (рис. 20) изготавливается из чугуна и имеет сечение, показанное на рис. 22.

Требуется определить из расчёта на прочность по допускаемым напряжениям размеры поперечного сечения, если материал балки – чугун с допускаемым напряжением на сжатие $[\sigma]_{\text{сж}} = 700$ МПа и на растяжение $[\sigma]_{\text{р}} = 140$ МПа; $a = 1$ м; $q = 10$ кН/м.

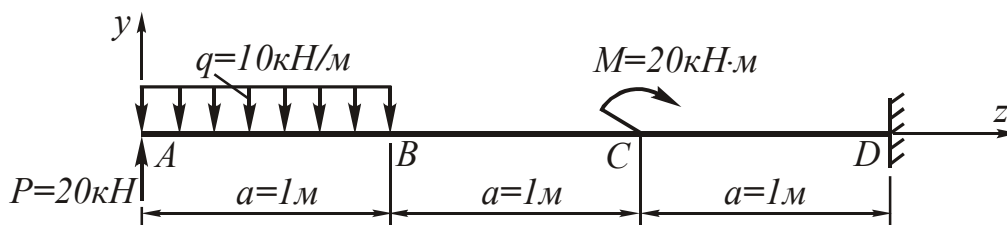


Рис. 20. Расчётная схема чугунной балки

Для нахождения опасного сечения строим эпюры M и Q . Очевидно, что данная балка имеет три участка:

$$AB (0 \leq z \leq 1 \text{ м}), BC (1 \text{ м} \leq z \leq 2 \text{ м}), CD (2 \text{ м} \leq z \leq 3 \text{ м}).$$

Для того чтобы не вычислять опорные реакции, рассмотрим балку, начиная с участка AB . Найдём поперечную силу и изгибающий момент в начале этого участка. Мысленно рассежем балку в сечении A на две части и отбросим правую её часть. Слева на оставшуюся часть действует только сосредоточенная сила P , равная 20 кН . Проектируя эту силу на нормаль к оси балки, получаем

$$Q(0) = 20 \text{ кН}.$$

Рассекая балку в сечении B , и поступая аналогично, находим величину поперечной силы в этом сечении – она равна алгебраической сумме проекций сил, действующих на оставшуюся левую часть балки, на нормаль к её оси:

$$Q(1 \text{ м}) = P - q \cdot 1 = 20 - 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН},$$

где 20 кН - проекция сосредоточенной силы P на нормаль к оси балки;

$10 \cdot 1 \text{ кН}$ - проекция равнодействующей распределённой нагрузки.

Изгибающий момент в начале первого участка $M(0) = 0$; в конце участка он равен алгебраической сумме моментов относительно точки B от сосредоточенной силы $P = 20 \text{ кН}$ и распределённой нагрузки:

$$M_x(1 \text{ м}) = P \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = 20 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5 = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюры Q и M_x для первого участка балки.

Выбрав масштаб, откладываем вверх от оси эпюры (Q и M_x положительны!) найденные значения поперечных сил и изгибающих моментов. На эпюре Q соединяем прямой линией точки с координатами $(0, 20)$ и $(1, 10)$, а на эпюре M_x проводим квадратную параболу выпуклостью вверх через точки $(0, 0)$ и $(1, 15)$.

Поступая аналогично, вычисляем поперечные силы и изгибающие моменты в начале и конце участков BC и CD .

Участок BC : $1 \text{ м} \leq z \leq 2 \text{ м}$;

$$\begin{aligned} Q(1 \text{ м}) &= 10 \text{ кН}, & Q(2 \text{ м}) &= 10 \text{ кН}; \\ M_x(1 \text{ м}) &= 15 \text{ кН} \cdot \text{м}, & M_x(2 \text{ м}) &= 25 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Отложив вверх вычисленные значения Q и M_x , строим эпюры внутренних усилий на втором участке балки. Как следует из дифференциальных зависимостей, эти эпюры ограничены прямыми линиями.

Участок CD : $2 \text{ м} \leq z \leq 3 \text{ м}$;

$$\begin{aligned} Q(2 \text{ м}) &= 10 \text{ кН}, & Q(3 \text{ м}) &= 10 \text{ кН}; \\ M_x(2 \text{ м}) &= 45 \text{ кН} \cdot \text{м}, & M_x(3 \text{ м}) &= 55 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

В начале последнего участка к балке приложена пара сил, что вызывает появление скачка на эпюре изгибающих моментов. На участке CD распределённой нагрузки нет, поэтому эпюры Q , M_x ограничены прямыми линиями (рис. 21).

Окончательный вид эпюр Q , M_x показан на том же рисунке.

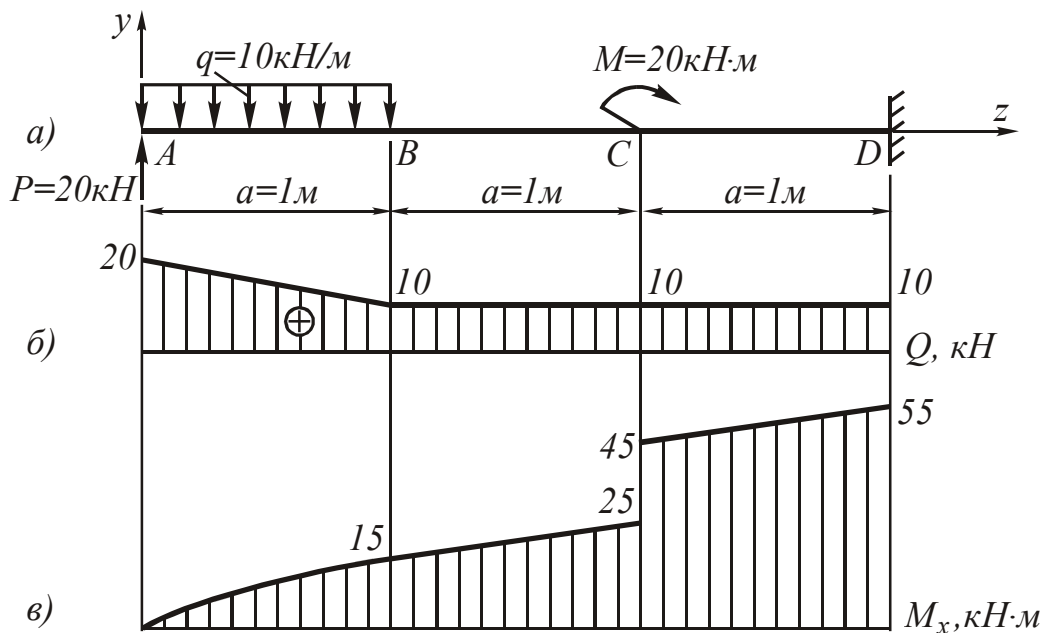


Рис. 21. Результаты расчёта чугунной балки: а - расчётная схема балки, б - эпюра поперечных сил, в - эпюра изгибающих моментов

Опасное сечение находится в заделке и расчётный изгибающий момент

$$M_x^{\max} = 55 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Для определения размеров поперечного сечения необходимо найти из условия прочности балки осевой момент сопротивления относительно его нейтральной оси.

Заданное сечение (рис. 22) имеет ось симметрии, и для определения положения его центра тяжести достаточно вычислить только одну его координату - ординату y_c .

Разобьём заданную фигуру на две простые части: прямоугольник (1) и полукруг (2). В качестве исходных осей принимаем главные центральные оси прямоугольника x_1 , y_1 . Тогда ордината центра тяжести всей фигуры определится по формуле

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1,5t \cdot 6t^2 + (3 + 0,424)t \cdot 0,5\pi t^2}{2t \cdot 3t + 0,5\pi t^2} = 1,90t.$$

Определив положение центра тяжести, проводим главные центральные оси x , y составной фигуры.

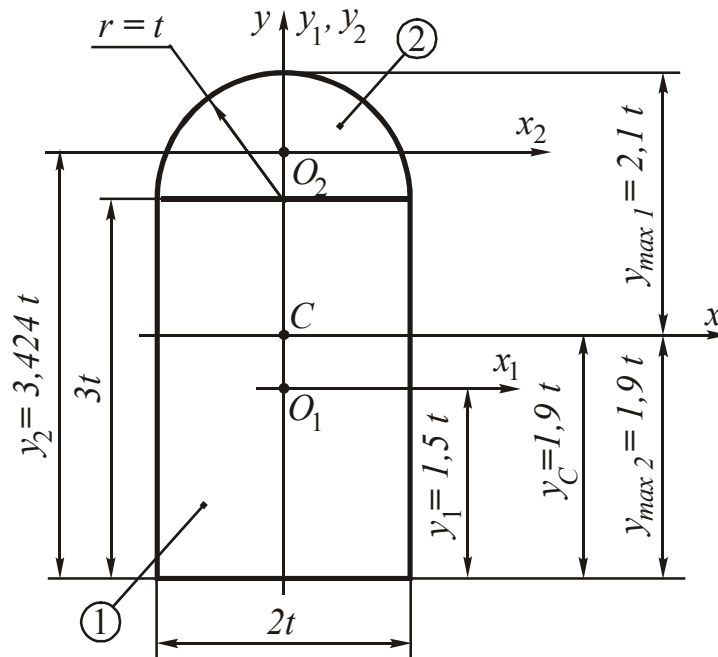


Рис. 22. Поперечное сечение чугунной балки

Вычисляем момент инерции заданного сечения относительно главной центральной оси x^*):

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} =$$

$$= \left[\frac{2t \cdot (3t)^3}{12} + (1,5t - 1,9t)^2 \cdot 6t^2 \right] + \left[0,11t^4 + (3,424t - 1,9t)^2 \cdot \frac{\pi t^2}{2} \right] = 9,22t^4.$$

При расчёте на прочность балок, изготовленных из хрупких материалов, для сечений с одной осью симметрии необходимо вычислять два момента сопротивления относительно оси x :

$$W_x' = \frac{I_x}{y_{1\max}} = \frac{9,22t^4}{2,1t} = 4,39t^3;$$

$$W_x'' = \frac{I_x}{y_{2\max}} = \frac{9,22t^4}{1,9t} = 4,85t^3.$$

Из эпюры изгибающих моментов (рис. 21), построенной на сжатом волокне, следует, что в опасном сечении верхние волокна балки сжаты, а нижние растянуты. Условие прочности для опасных точек в растянутой зоне сечения имеет вид

$$\frac{M_x^{\max}}{W_x''} \leq [\sigma]_p; \quad \frac{55 \cdot 10^3}{4,85t^3} = 140 \cdot 10^6.$$

*) При рассмотрении полуокруга, главной центральной осью которого является x_2 , использованы приближенные значения: $y_0 = 0,424t$; $I_{x_2} = 0,11t^4$

Отсюда $t = 0,0433 \text{ м} = 4,33 \text{ см}$.

Опасной точкой в сжатой зоне является точка, наиболее удаленная от оси x на расстояние $y'_{\max} = 2,1t$. Условие прочности балки по допускаемым напряжениям на сжатие

$$\frac{M_x^{\max}}{W'_x} \leq [\sigma]_{\text{сж}}; \quad \frac{55 \cdot 10^3}{4,39t^3} = 700 \cdot 10^6.$$

Отсюда $t = 0,0262 \text{ м} = 2,62 \text{ см}$.

В расчёте по нормальным напряжениям из двух найденных значений t принимаем большее, что обеспечивает прочность материала балки, как в растянутой, так и в сжатой зонах.

Окончательно: $t = 4,33 \text{ см}$.

Построим эпюры распределения нормальных напряжений по высоте подобранного выше сечения чугунной балки. Нормальные напряжения в поперечном сечении балок при изгибе определяются по формуле (5.1). По ширине сечения, как уже упоминалось, нормальные напряжения распределяются равномерно. Зависимость между σ и y линейная, нормальные напряжения прямо пропорциональны расстоянию слоя волокон от нейтральной оси, совпадающей с главной центральной осью x .

Для чугунной балки величина максимальных (растягивающих) напряжений

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W''_x} = \frac{55 \cdot 10^3}{4,85 \cdot (4,33 \cdot 10^{-2})^3} = 139,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 139,7 \text{ МПа}.$$

Минимальные (сжимающие) напряжения

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x^{\max}}{W'_x} = \frac{55 \cdot 10^3}{4,39 \cdot (4,33 \cdot 10^{-2})^3} = 154,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 154,3 \text{ МПа}.$$

Выбрав масштаб, строим эпюру распределения нормальных напряжений по высоте чугунной балки (рис. 23).

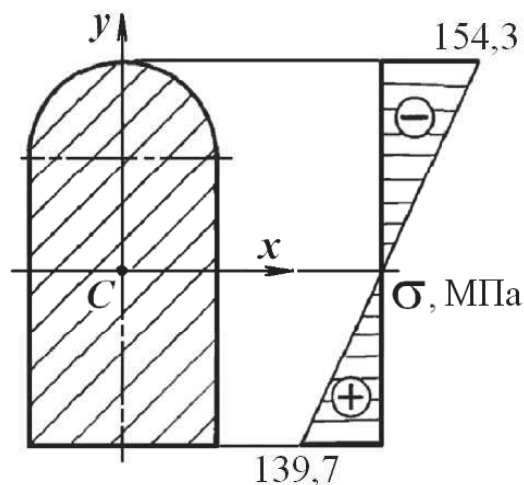


Рис. 23. Распределение нормальных напряжений по высоте чугунной балки

Рассмотрим пример подбора составного сечения стальной балки.

Для балки (рис. 24) подобрать сечение, состоящие из двух стальных швеллеров. Пусть $a = 2$ м; $q = 10$ кН/м; $M = 10$ кНм; $P = 30$ кН; $[\sigma] = 190$ МПа.

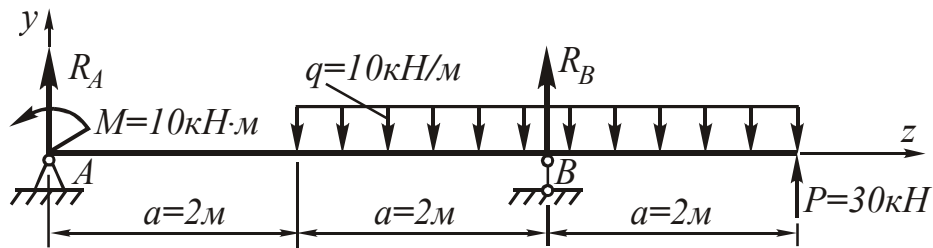


Рис. 24. Расчётная схема балки

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 4 - M - P \cdot 2 = 0; \quad R_A \cdot 4 - 10 - 30 \cdot 2 = 0;$$

$$R_A = 17,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M + q \cdot 4 \cdot 4 - R_B \cdot 4 - P \cdot 6 = 0; \quad -10 + 10 \cdot 4 \cdot 4 - R_B \cdot 4 - 30 \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = -7,5 \text{ кН.}$$

Отметим, что момент распределённой нагрузки относительно опоры B равен нулю, а реакция второй опоры направлена не вверх, как показано на рис. 24, а вниз.

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\sum Y = 0; \quad R_A - q \cdot 4 + R_B + P = 0;$$

$$17,5 - 10 \cdot 4 + (-7,5) + 30 = 0; \quad 47,5 - 47,5 = 0.$$

Реакции определены правильно.

Эпюры Q , M_x строятся аналогично эпюрам предыдущего примера. Вид эпюр показан на рис. 25.

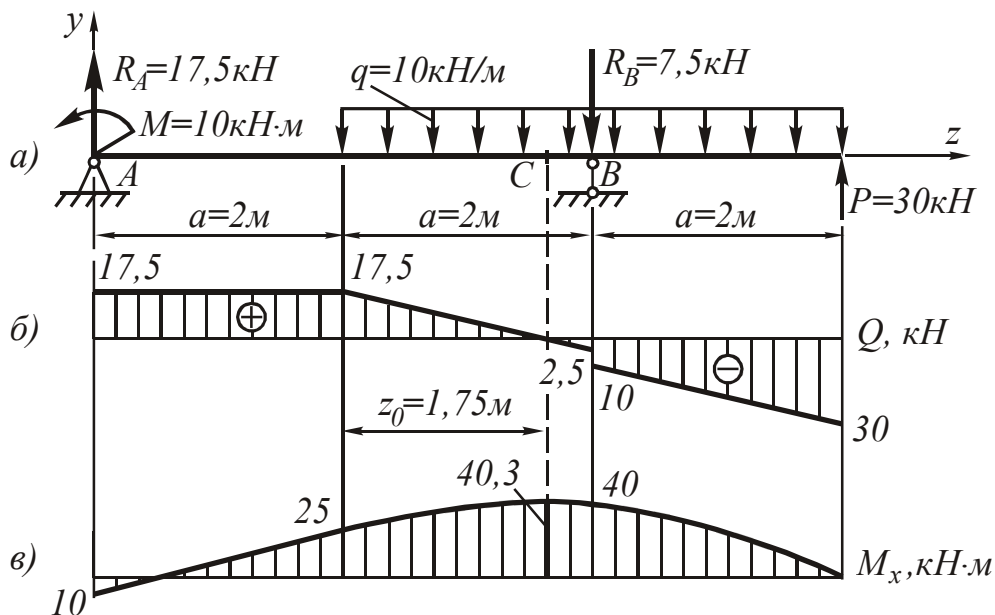


Рис. 25. Результаты расчёта: а - расчётная схема балки, б - эпюры поперечных сил, в - эпюры изгибающих моментов

На среднем участке балки, как видно по рис. 25, б, поперечная сила меняет свой знак. В том сечении балки, где на данном участке $Q=0$ (сечение С), на эпюре изгибающих моментов у параболы будет экстремум. Найдём его, например, через нагрузки, расположенные левее этого сечения.

$$Q_C = R_A - q \cdot z_0 = 0; \quad z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{17,5}{10} = 1,75 \text{ м.}$$

$$M_C = -M + R_A(2 + z_0) - q \frac{z_0^2}{2} = -10 + 17,5(2 + 1,75) - 10 \frac{1,75^2}{2} = 40,3 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

По эпюре M_x находим величину изгибающего момента, максимального по модулю

$$M_x^{\max} = 40,3 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Сечение балки подбираем из условия прочности при изгибе. Требуемый момент сопротивления сечения, состоящего из двух швеллеров

$$W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} = 212,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 212,1 \text{ см}^3.$$

Осевой момент сопротивления одного швеллера будет в два раза меньше - $W_x = 106 \text{ см}^3$.

По таблице сортамента прокатной стали находим, что ближайший наибольший момент сопротивления сечения имеет швеллер № 18, для которого $W_x = 121 \text{ см}^3$. Однако, в этом случае профиль будет недогружен. Если выбрать швеллер с ближайшим меньшим моментом сопротивления сечения (по сортаменту – это швеллер № 16а, для которого $W_x = 103 \text{ см}^3$), то возникнет перенапряжение в 2,96%, что допустимо (разрешается – до 5%).

Итак, принимаем швеллер № 16а, для которого $W_x = 103 \text{ см}^3$.

ЗАДАЧА № 6

Для двух заданных плоских рам построить эпюры изгибающих моментов. Схемы рам и числовые данные для решения задачи выбираются из табл. 6 и по рис. 26.

Таблица 6

Числовые данные к задаче № 6

Номер строки	Номер расч. схемы (рис. 26)	Сила, кН			Момент, кН·м		Размер a , м
		P_1	P_2	P_3	m_1	m_2	
1	1	10	12	6	4	6	2
2	2	8	4	1	5	5	1
3	3	2	4	2	6	4	2
4	4	10	6	4	2	8	2
5	5	6	4	4	4	6	2
6	6	8	6	6	6	4	1
7	7	2	2	6	5	2	2
8	8	2	5	4	2	8	2
9	9	5	10	2	4	4	2
0	10	2	4	4	5	4	1
	3	ж	а	б	в	г	д

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 6

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

Рамой называется стержневая система, составные части которой во всех или некоторых узлах жёстко связаны между собой. В плоской раме оси её элементов лежат в одной плоскости, совпадающей с плоскостью приложения внешних нагрузок. Ось рамы представляет собой ломаную линию, каждый прямолинейный участок которой рассматривается как балка. Дифференциальные зависимости между Q , M , q , полученные для балки, и выводы, вытекающие из этих зависимостей, справедливы и для отдельных элементов рамы. Внутренние усилия, возникающие в поперечном сечении стержня плоской рамы, в общем случае приводятся к трём силовым факторам: продольной силе N , поперечной силе Q , изгибающему моменту M .

Основные принципы построения эпюр Q , M , N для плоских рам те же, что и для балок. Дополнительно отметим, что границами участков также являются сечения, в которых соединяются стержни (узлы рамы). Если рама имеет более одной опоры, следует до построения эпюр, найти опорные

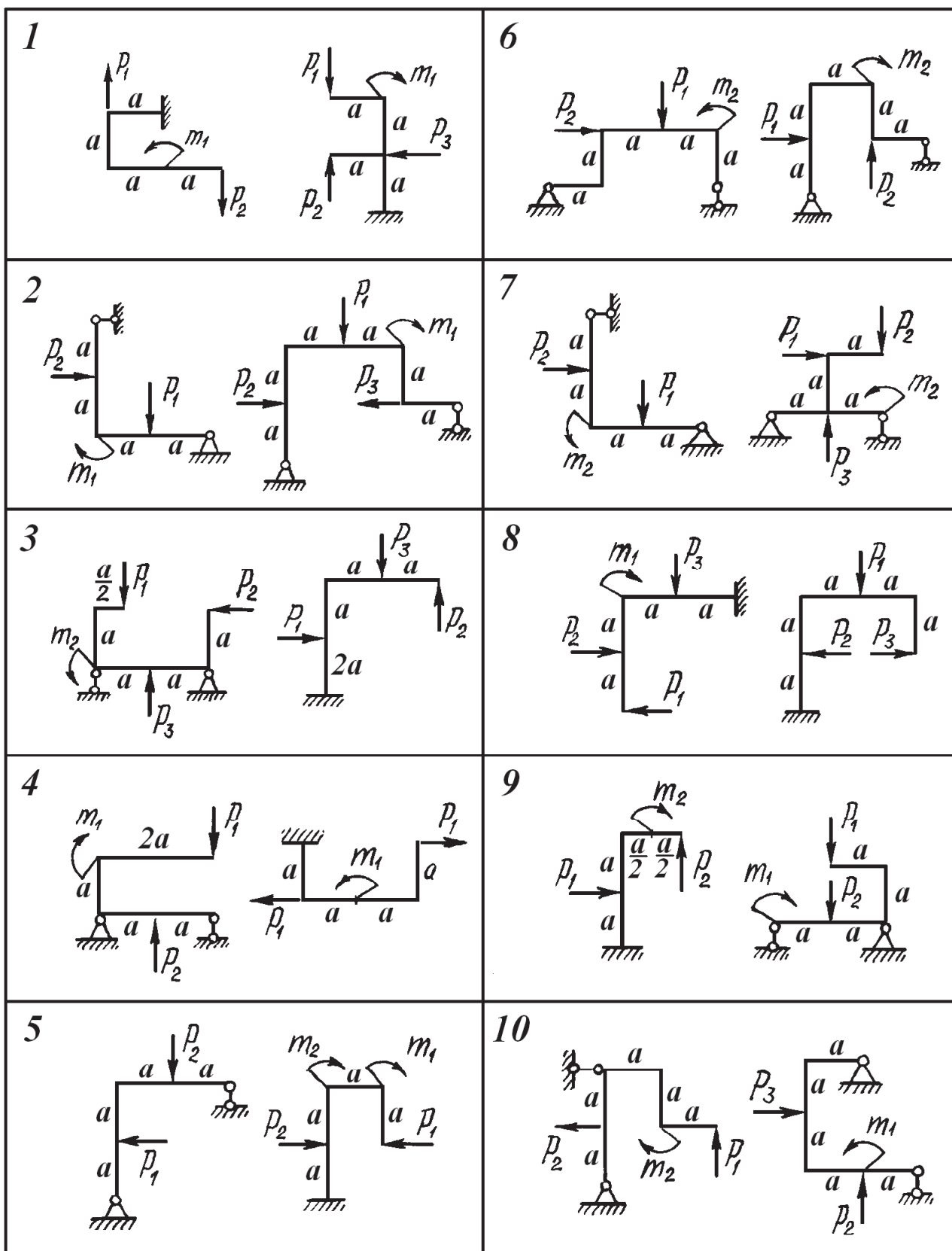


Рис. 26. Схемы рам к задаче № 6

реакции, которые в дальнейшем рассматриваются как внешние нагрузки. Аналитические зависимости для $Q(z)$, $M(z)$, $N(z)$ обычно не записываются. Внутренние усилия вычисляются на границах участков и в характерных точках, т.е. там, где изгибающий момент экстремален.

Ординаты эпюр откладываются перпендикулярно оси рамы, при этом эпюра M студентами машиностроительных специальностей строится со стороны сжатого волокна стержня, а студентами строительных специальностей – со стороны растянутого волокна.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 6

Для заданной рамы (рис. 27, а) построить эпюру изгибающих моментов при следующих исходных данных: $a = 2$ м, $P_1 = 6$ кН, $P_2 = 8$ кН, $m_2 = 7$ кНм.

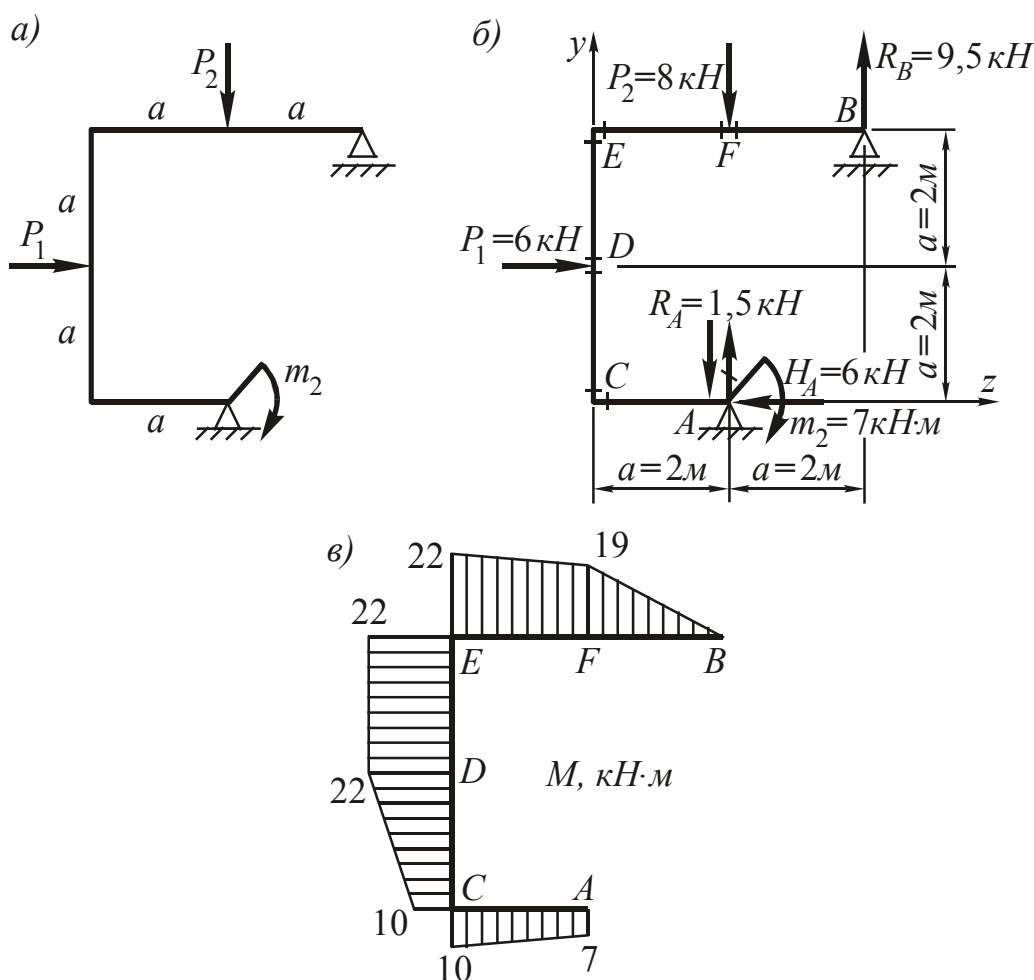


Рис. 27. Заданная схема рамы (а), расчётная схема (б), эпюра изгибающих моментов (в)

В соответствии с исходными данными задачи строим фактическую расчётную схему рамы (рис. 27, б), на которой указываем её геометрические размеры, величины всех внешних нагрузок, а также опорных реакций после их вычисления.

Определяем опорные реакции рамы. На расчётной схеме показываем векторы опорных реакций R_A и H_A шарнирно-неподвижной опоры A и вектор R_B на шарнирно-подвижной опоре B . Величины реакций определяются из уравнений равновесия рамы:

$$\Sigma Z = 0; \quad P_1 - H_A = 0; \quad H_A = P_1 = 6 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_B = 0; \quad R_A \cdot 2 + m_2 + H_A \cdot 4 - P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 2 = 0;$$

$$R_A = \frac{-m_2 - H_A \cdot 4 + P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 2}{2} = \\ = \frac{-7 - 6 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2}{2} = -1,5 \text{ кН};$$

$$\Sigma m_A = 0; \quad -R_B \cdot 2 + m_2 + P_1 \cdot 2 = 0;$$

$$R_B = \frac{m_2 + P_1 \cdot 2}{2} = \frac{7 + 6 \cdot 2}{2} = 9,5 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности вычисления опорных реакций подсчитывается сумма проекций всех сил, приложенных к раме, на вертикальную ось y :

$$\Sigma Y = 0; \quad R_A - P_2 + R_B = 0;$$

$$(-1,5) - 8 + 9,5 = 0;$$

$$-9,5 + 9,5 = 0.$$

Равенство этой суммы нулю говорит о том, что реакции определены правильно.

Реакция R_A получалась отрицательной. Это значит, что фактически она действует в направлении, противоположном выбранному ранее. Меняем его на схеме, и в дальнейших расчётах будем считать вертикальную реакцию на опоре A направленной вниз, и равной $R_A = 1,5 \text{ кН}$.

Разбиваем раму на участки, границы которых (рис. 27, б) обозначены латинскими буквами. В граничных сечениях каждого участка находим величины изгибающих моментов и откладываем полученные значения со стороны сжатого волокна.

С целью вычисления изгибающего момента рассекаем мысленно раму в исследуемом сечении на две части и отбрасываем одну из них, а затем подсчитываем алгебраическую сумму моментов всех сил, приложенных к оставшейся части, относительно рассматриваемого сечения. Эта сумма равна величине изгибающего момента в данном сечении рамы.

Рассмотрим последовательно стержни рамы, начиная со **стержня AC** , который имеет лишь один участок. Мысленно рассекая стержень в начале участка (левее точки A) и отбрасывая левую часть рамы, вычисляем изгибающий момент в начале участка:

$$M_A = m_2 = 7 \text{ кНм} \text{ (сжатые волокна при этом будут находиться снизу)}.$$

В конце участка (точка C) величина изгибающего момента равна алгебраической сумме моментов от действия момента m_2 и реакции R_A . Момент m_2 изгибает стержень AC таким образом, что его сжатые волокна распола-

гаются *снизу*. Будем считать условно изгибающий момент в сечении C , возникающий от действия момента m_2 , положительным. Тогда изгибающий момент в том же сечении от действия реакции R_A следует считать положительным, так как эта сила так же, как и момент m_2 , вызывает сжатие нижних волокон стержня.

Изгибающий момент в сечении C

$$M_C = m_2 + R_A \cdot 2 = 7 + 1,5 \cdot 2 = 10 \text{ кНм}.$$

Положительное значение изгибающего момента означает, что сжатые волокна стержня в сечении C по-прежнему остаются *снизу*. Откладывая в масштабе полученные значения изгибающих моментов перпендикулярно оси стержня AC вниз (со стороны сжатых волокон), строим на этом участке эпюру M (рис. 27, в), которая будет ограничена прямой линией, так как к раме не приложены распределённые нагрузки.

Переходим к следующему стержню – CE , который разбиваем на два участка – CD и DE .

Участок CD . Изгибающий момент в сечении C , которое принадлежит одновременно стержням AC и CE известен: $M_C = 10 \text{ кНм}$.

Сжатые волокна стержня CE в сечении C находится слева от его оси, следовательно, момент $M_C = 10 \text{ кНм}$ надо отложить влево. Изгибающий момент в сечении D

$$M_D = m_2 + R_A \cdot 2 + H_A \cdot 2 = 7 + 1,5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 22 \text{ кНм}.$$

Положительное значение изгибающего момента M_D означает, что сжатые волокна стержня, как и в сечении C , расположены *слева*.

Участок DE . Изгибающий момент в сечении D , которое принадлежит теперь рассматриваемому участку DE , $M_D = 22 \text{ кНм}$. Находим изгибающий момент в сечении E :

$$M_E = m_2 + R_A \cdot 2 + H_A \cdot 4 - P_1 \cdot 2 = 7 + 1,5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 22 \text{ кНм}..$$

Перед моментом от силы P_1 поставлен знак минус, так как сила P_1 сжимает волокна, располагающиеся справа от оси стержня. Положительное значение момента $M_E = 22 \text{ кНм}$ означает, что сжатые волокна в сечении располагаются *слева*.

Откладывая ординаты эпюры перпендикулярно оси стержня, как это делалось ранее, строим эпюру на участке DE .

Построение эпюры изгибающих моментов для стержня BE удобно производить, перемещаясь от сечения B справа налево.

Стержень BE . Разбиваем его на два участка: BF и FE . Изгибающий момент в сечении B равен нулю. В сечении F участка BF стержня изгибающий момент равен моменту от действия силы $R_B = 9,5 \text{ кН}$. Его величина $M_F = R_B \cdot 2 = 9,5 \cdot 2 = 19 \text{ кНм}$ (сжатые волокна находится *сверху*).

Участок FE . Изгибающий момент в сечении F , принадлежащем этому участку, известен: $M = 19 \text{ кНм}$. В конце участка (сечение E) изгибающий момент

$$M_E = R_B \cdot 4 - P_2 \cdot 2 = 9,5 \cdot 4 - 8 \cdot 2 = 22 \text{ кНм}.$$

Первое слагаемое, представляющее момент от действия силы R_B , вызывающей сжатие верхних волокон стержня, принято положительным. Перед вторым слагаемым поставлен знак минус, так как сжатые волокна от действия силы P_2 расположены снизу. Положительное значение изгибающего момента в сечении E означает, что сжатые волокна стержня в этом сечении находятся сверху от его оси. Вычисленные ординаты откладываются на эпюре вверх от оси стержня – со стороны сжатых волокон (рис. 27, в).

Следует обратить внимание на то, что при переходе через узел изгибающий момент по модулю не изменяется и эпюра располагается по одну сторону от контура рамы (внутри или снаружи). Это условие соблюдается, если в узле рамы не приложен сосредоточенный момент (пара сил).

Рассмотрим ещё один пример построения эпюры M для рамы.

Требуется построить эпюру изгибающих моментов для рамы, показанной на рис. 28, а.

Исходные данные для расчёта: $a = 2 \text{ м}$, $P_1 = 6 \text{ кН}$, $P_2 = 8 \text{ кН}$, $m_1 = 9 \text{ кНм}$.

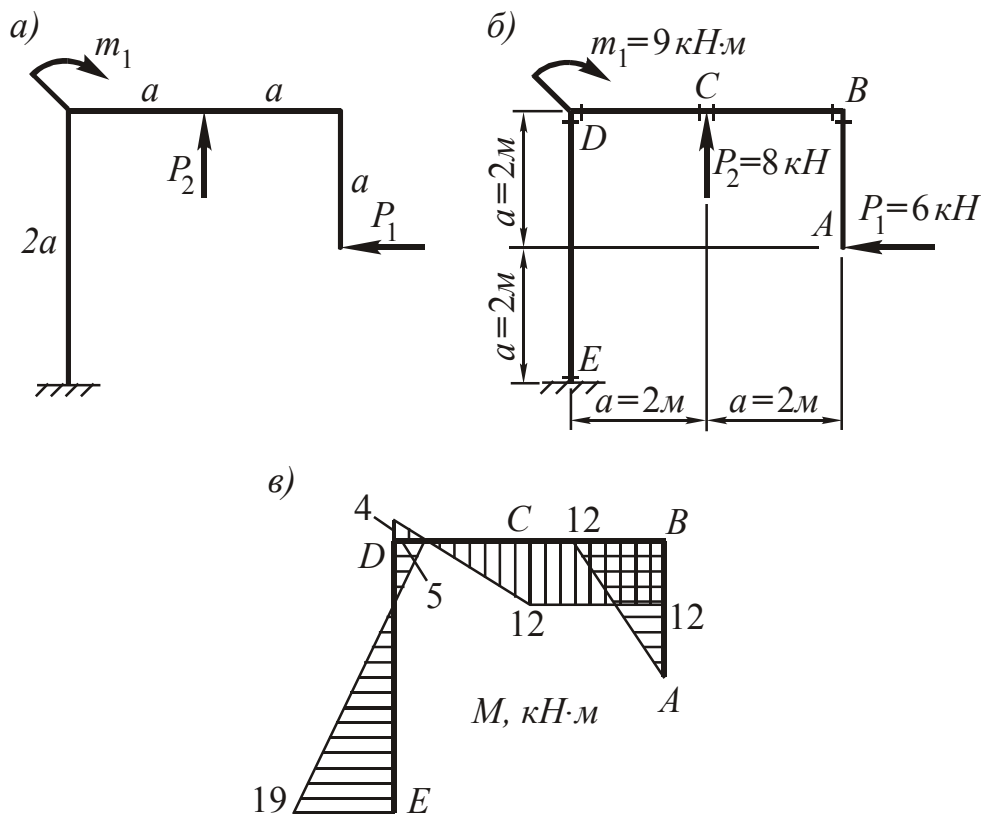


Рис. 28. Заданная схема рамы (а), расчётная схема (б), эпюра изгибающих моментов (в)

Для рамы, жёстко защемлённой одним концом, построение эпюры изгибающих моментов рекомендуется начинать с незакреплённого сечения (сечение A на рис. 28, б), не определяя опорных реакций.

Стержень AB (рис. 28, б) имеет один участок, в начале и конце которого вычисляются изгибающие моменты:

$$M_A = 0, \quad M_B = P_1 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кНм}.$$

Откладываем найденные значения слева от оси стержня со стороны его сжатых волокон (рис. 28, в), и соединяем полученные точки прямой линией (*равномерно распределённой нагрузки нет!*).

Стержень BD имеет два участка - BC и CD . Вычисляются изгибающие моменты в сечениях B , C , D .

В сечении B изгибающий момент $M_B = 12 \text{ кНм}$, так как при переходе через узел величина изгибающего момента не изменяется, сжатые волокна стержня располагаются снизу.

В сечениях C и D изгибающие моменты

$$M_C = P_1 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кНм}; \quad M_D = P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 - 8 \cdot 2 = -4 \text{ кНм}.$$

В последнем выражении момент, зависящий от силы P_1 , условно принят положительным. При этом сжатые волокна стержня BD от действия этого момента располагается снизу от оси стержня. Момент от силы P_2 в этом случае отрицателен, так как от действия силы P_2 волокна, расположенные снизу, растягиваются. Отрицательное значение изгибающего момента в сечении D , означает, что сжатое волокно теперь располагается теперь не снизу, а сверху от оси стержня. Очевидно, что эпюра M на участке BD ограничена прямыми линиями.

Стержень DE имеет только один участок, в начале которого (сечение D) приложен момент $m_1 = 9 \text{ кНм}$. Изгибающий момент в сечении D стержня DE :

$$M_D = P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 2 + m_1 = 6 \cdot 2 - 8 \cdot 2 + 9 = 5 \text{ кНм}.$$

Найденное значение откладываем справа от оси стержня DE , так как от действия силы P_1 сжатые волокна для сечения D расположены справа, и перед первым слагаемым в выражении для вычисления изгибающего момента поставлен знак плюс, что означает сжатие волокон справа от действия всех внешних сил, приложенных к раме.

Изгибающий момент в сечении E

$$M_E = P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot 2 - m_1 = 6 \cdot 2 + 8 \cdot 2 - 9 = 19 \text{ кНм}.$$

Здесь знак (плюс или минус) перед каждым слагаемым выбран в соответствии с введённым ранее правилом.

По найденным значениям изгибающих моментов для стержня DE построена эпюра M (рис. 28, в), ограниченная прямой линией.

ЗАДАЧА № 7

Для заданной статически неопределимой балки требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость;
- 2) построить эпюру изгибающих моментов;
- 3) подобрать двутавровое сечение по условию прочности балки;
- 4) определить угол поворота сечения L и прогиб в сечении K .

Для всех вариантов принять: допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Числовые данные берутся из табл. 7, расчётные схемы – по рис. 29.

Таблица 7

Числовые данные к задаче № 7

Номер строки	Номер расч. схемы по рис. 29	Нагрузка				Размер a , м
		q , кН/м	P , кН	P_1 , кН	m , кН·м	
1	1	5	10	10	4	1,0
2	2	4	8	5	6	1,5
3	3	8	6	8	4	1,0
4	4	10	8	12	2	0,8
5	5	12	5	7	5	1,2
6	6	6	7	10	7	1,0
7	7	5	10	6	3	1,2
8	8	10	11	9	4	0,8
9	9	8	8	7	5	0,6
0	10	7	5	10	6	1,0
	3	3	ж	б	в	г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 7

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

1. *Определение перемещений методом Мора. Вычисление интеграла Мора методом перемножения эпюр*

Расчёт статически неопределимых конструкций требует вычисления перемещений их сечений.

Универсальным способом определения перемещений является энергетический. В применении к балкам и плоским рамам этот метод приводится

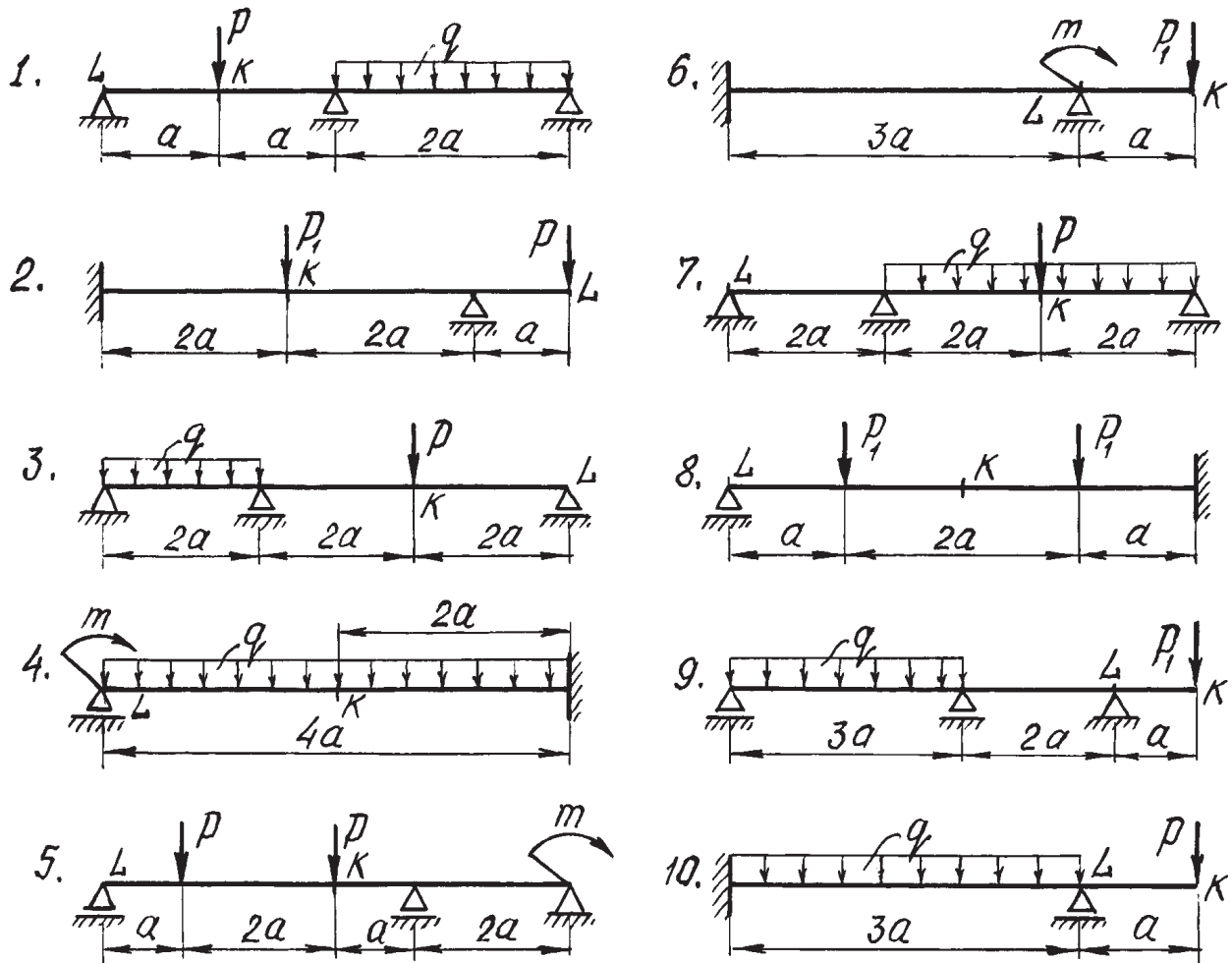


Рис. 29. Расчётные схемы
статически неопределимых балок к задаче № 7

к вычислению интеграла Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{Pi} \cdot \bar{M}_i}{E_i \cdot I_i} dz, \quad (7.1)$$

где Δ - искомое перемещение (линейное перемещение или угол поворота);

l_i - длина участка балки или рамы;

$E_i I_i$ - изгибная жёсткость этого участка;

M_{Pi} - изгибающий момент от внешней нагрузки в произвольном сечении на участке l_i ;

\bar{M}_i - изгибающий момент от единичной нагрузки в том же сечении;

n - число участков l_i , на которые разбивается данная балка или рама.

Для определения перемещения по формуле Мора необходимо:

1) рассмотреть так называемое грузовое (заданное) состояние конструкции, записав выражения для вычисления внутренних усилий, действующих в произвольно выбранном поперечном сечении каждого стержня

от действия внешних нагрузок;

2) рассмотреть единичное состояние, для чего снять с конструкции все действующие на нее нагрузки и приложить в сечении, перемещение которого определяется, по заданному направлению единичную силу (при определении линейного перемещения) или единичный момент (при вычислении углового перемещения);

3) записать выражения для изгибающих моментов, действующих в произвольно выбранном поперечном сечении каждого стержня от единичной нагрузки;

4) составить интеграл Мора и, после интегрирования по участкам всей конструкции, вычислить искомое перемещение.

Если искомое перемещение получилось отрицательным, то это означает, что действительное перемещение противоположно принятому направлению единичной нагрузки.

Интеграл Мора можно вычислять графоаналитически, если предварительно построены эпюры моментов от заданной и единичной нагрузок.

Расчётная формула в этом случае имеет вид

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{Pi} \cdot \bar{M}_i}{EI_i} dz = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_{Pi} y_i}{EI_i}, \quad (7.2)$$

где ω_{Pi} - площадь эпюры M_{Pi} от заданной нагрузки на участке l_i ;

y_i - ордината эпюры \bar{M}_i от единичной нагрузки, расположенная под центром тяжести эпюры M_{Pi} на участке l_i .

Этот способ вычисления интеграла Мора называется «перемножением эпюр», или правилом Верещагина.

Метод перемножения эпюр применим для определения перемещений в конструкциях, состоящих из прямолинейных элементов, жёсткость которых в пределах отдельных её участков постоянна.

Для определения перемещений по Верещагину необходимо:

1) построить эпюры внутренних силовых факторов от действия внешних сил, при изгибе – эпюру изгибающих моментов;

2) построить эпюры внутренних силовых факторов от действия единичной силы (момента), приложенной в сечении, перемещение которого определяется, по заданному направлению (при изгибе – единичную эпюру изгибающих моментов);

3) вычислить искомое перемещение для каждого участка путем умножения площади нелинейной эпюры на ординату линейной эпюры, взятую под центром тяжести нелинейной, и деления результата на жёсткость рассматриваемого участка.

Ординаты y_i на эпюре \bar{M}_i вычисляются из подобия соответствующих треугольников (рис. 30).

В тех случаях, когда обе эпюры прямолинейны, можно умножать площадь любой из них на ординату другой под центром тяжести первой.

Если эпюра от внешней нагрузки имеет сложный вид, то рекомендуется её представить в таком виде, чтобы вычисление её площади и положения центра тяжести было наиболее простым.

Произведение $\omega p_i y_i$ отрицательно, если эпюры от внешних нагрузок и единичной силы (момента) противоположны по знаку, т.е. расположены по разные стороны от оси стержня. Это означает, что направление перемещения противоположно направлению единичной силы (момента).

2. Статически неопределимые балки. Метод сил

Балка называется статически неопределимой, если внутренние силовые факторы в её поперечном сечении не могут быть определены только из уравнений статики. Статическая неопределимость обусловлена наличием лишних связей, то есть таких связей, которые не являются необходимыми для обеспечения геометрической неизменяемости конструкции. В балках лишними связями служат дополнительные опоры.

Разность между числом опорных реакций балки и числом возможных уравнений статики называется её степенью статической неопределимости, или числом "лишних" неизвестных.

Одним из методов, используемых для расчёта статически неопределимых систем, является метод сил.

Расчёт начинается с выбора так называемой основной системы рассматриваемой конструкции. Статически определимая система, получаемая из заданной отбрасыванием лишних связей, называется основной системой. Как правило, для заданной конструкции можно предложить несколько вариантов основных систем, из которых для дальнейшего расчёта выбирается один. При расчёте статически неопределимой балки удобно удалять внутреннюю связь, помещая шарнир на промежуточной опоре или в жёсткой заделке (рис. 31). В этом случае лишней неизвестной будет опорный момент.

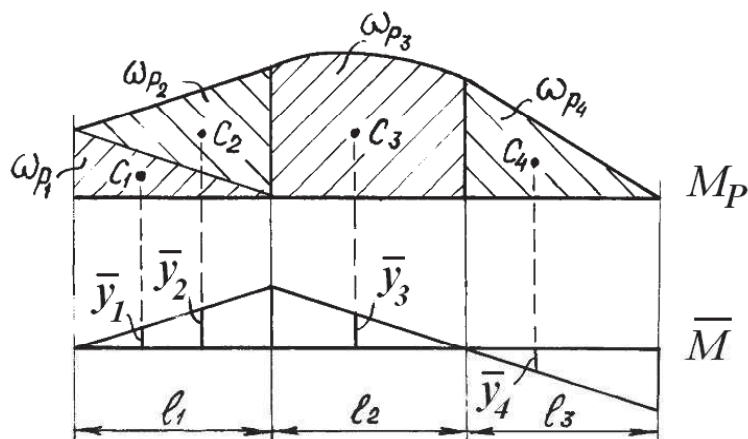


Рис. 30. Пример применения правила Верещагина

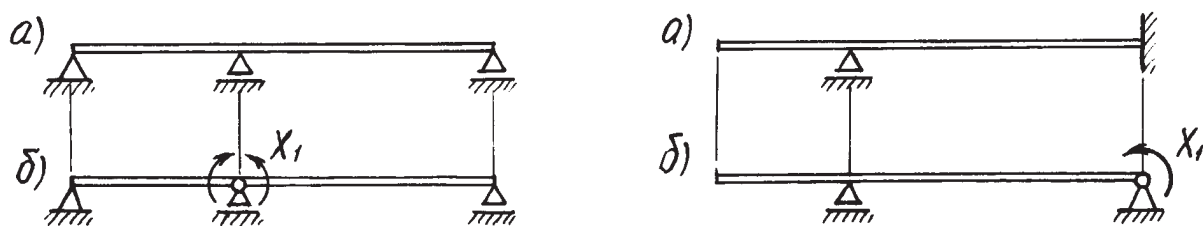


Рис. 31. Схемы статически неопределимых балок (а) и соответствующие им основные системы (б)

Если основную систему загрузить заданными нагрузками и реакциями отброшенных связей, получим эквивалентную систему, которая при определенных величинах этих реакций деформируется так же, как заданная конструкция. Реакции X_i отброшенных связей определяется из очевидного условия: перемещения по направлениям X_i в эквивалентной системе должны равняться нулю. Для конструкции с одной лишней связью это условие записывается в виде одного канонического уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (7.3)$$

где δ_{11} - перемещение в основной системе по направлению X_1 от действия единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ или единичного момента $\bar{X}_1 = 1$;

Δ_{1P} - перемещение в основной системе по направлению X_1 от действия внешних нагрузок.

Для вычисления δ_{11} и Δ_{1P} необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов: \bar{M}_1 - от единичной силы (момента) $\bar{X}_1 = 1$ и M_P - от внешних нагрузок. Коэффициент δ_{11} при X_1 вычисляется умножением эпюры \bar{M}_1 на эту же эпюру, а Δ_{1P} - перемножением эпюр M_P и \bar{M}_1 . Символически это можно записать так:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} (\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1); \quad \Delta_{1P} = \frac{1}{EI} (M_P \cdot \bar{M}_1). \quad (7.4)$$

Определением реакции X_i из канонического уравнения заканчивается раскрытие статической неопределимости балки с одной лишней связью. Остальные опорные реакции вычисляются из уравнений равновесия, считая теперь X_i известной величиной.

Перемещения в статически неопределимой системе после раскрытия её неопределимости находятся непосредственным вычислением интеграла Мора, либо перемножением эпюр.

Для вычисления прогиба в каком-либо сечении балки следует по направлению искомого перемещения к основной системе приложить единичную силу $\bar{P} = 1$ (при вычислении угла поворота - единичный момент $\bar{M} = 1$) и построить эпюру изгибающих моментов \bar{M} от действия этой единичной нагрузки. Искомое перемещение вычисляется путем перемножения окончательной эпюры изгибающих моментов M на вновь построенную эпюру \bar{M} .

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 7

Для статически неопределимой балки (рис. 32, *a*) требуется:

- 1) раскрыть её статическую неопределимость;
- 2) построить эпюру изгибающих моментов от действия внешних (пролётных) нагрузок;
- 3) подобрать двутавровое сечение балки из условия её прочности;
- 4) определить угол поворота сечения L и прогиб балки в сечении K .

Числовые данные к задаче:

$$q = 6 \text{ кН/м}; m = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; a = 1,2 \text{ м}; [\sigma] = 160 \text{ МПа}; E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

1. Вычисляем степень статической неопределимости балки.

По условиям закрепления имеем четыре опорных реакции: две на опоре A и по одной на опорах B и C . Для плоской системы сил можно составить только три уравнения равновесия, поэтому степень статической неопределимости балки $n = 4 - 3 = 1$, т.е. система один раз статически неопределима.

2. Выбираем основную систему. Для этого разрезаем балку над средней опорой, тем самым, устраняя лишнюю связь, и вставляем над опорой промежуточный шарнир. «Лишней» неизвестной в этом случае будет изгибающий момент в опоре B , который обозначаем X_1 . На рис. 32, *б* показана основная система. Загружая основную систему пролётными нагрузками и лишней неизвестной, получаем эквивалентную систему (рис. 32, *в*). Достоинство принятой основной системы в том, что каждый пролет работает как самостоятельная балка и при построении эпюр может рассматриваться отдельно.

3. Строим в основной системе эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки M_P .

Рассмотрим участок AB (рис. 32, *в*). Так как на этом участке нагрузок нет, для построения эпюры достаточно знать величины изгибающих моментов в сечениях A и B . На опоре A по условию $M = m = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$; на опоре B изгибающий момент равен нулю (опорный момент X_1 не учитываем), эпюра моментов ограничена прямой линией.

Рассмотрим участок BC (рис. 32, *в*). Опорный момент X_1 здесь также не учитываем.

Вследствие симметрии пролётной нагрузки реакции опор будут одинаковыми:

$$R_B = R_C = \frac{q \cdot 2a}{2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1,2}{2} = 7,2 \text{ кН}.$$

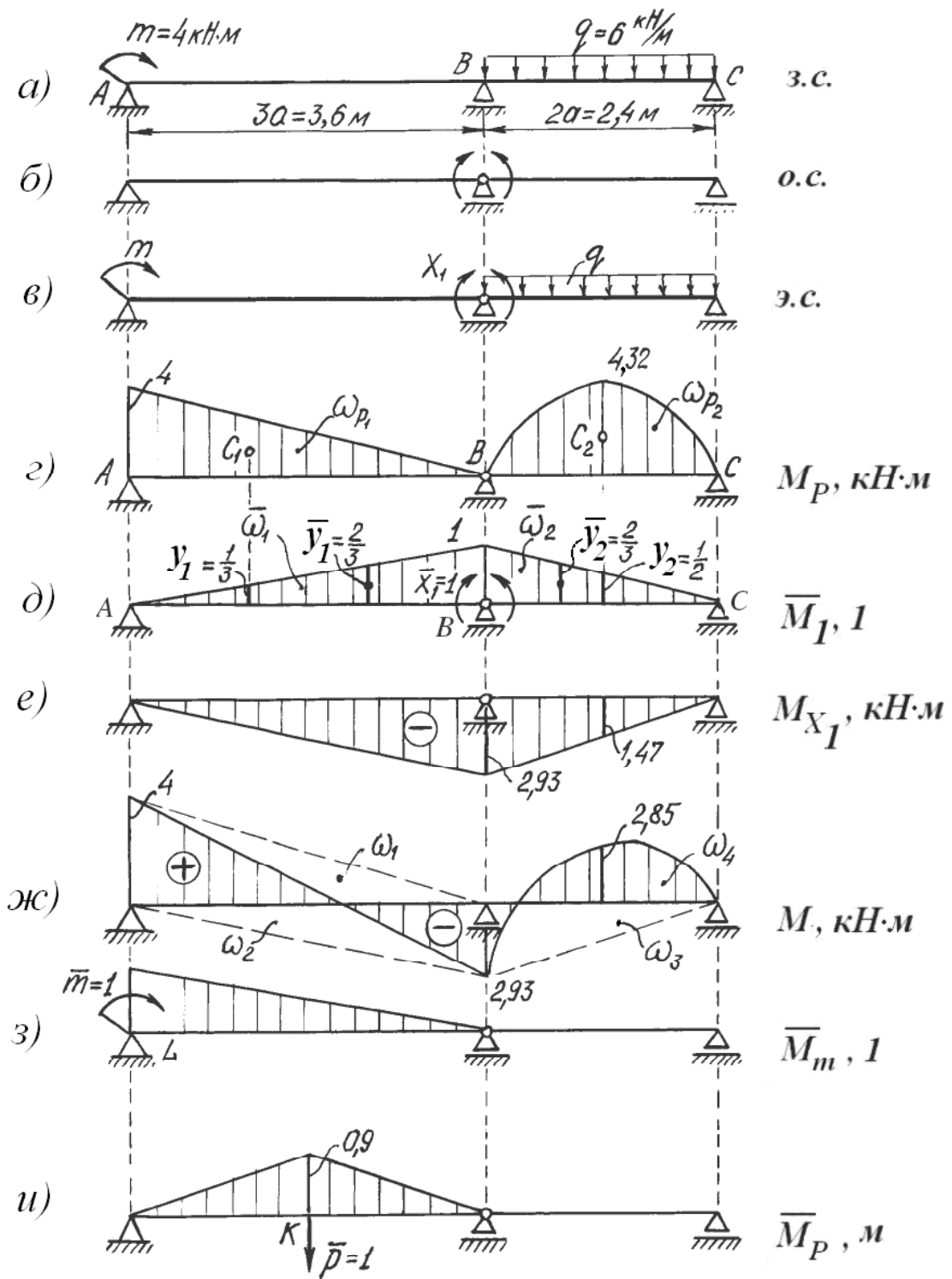


Рис. 32. Статически неопределимая балка:

а - заданная система; б - основная система;

в - эквивалентная система; г - грузовая эпюра M_P ;

д - единичная эпюра \bar{M}_1 ; е - эпюра M_{X1} ;

ж - окончательная эпюра M ; з - эпюра от единичного момента \bar{M}_m ;

и - эпюра от единичной силы \bar{M}_P

Изгибающий момент в произвольном сечении z

$$M(z) = R_B z - \frac{qz^2}{2} = 7,2z - \frac{6z^2}{2}$$

и эпюра изгибающего момента ограничена квадратной параболой. Строим эту параболу по трём лежащим на ней точкам:

$$z_B = 0, \quad M_B = 0;$$

$$z = 1,2 \text{ м}, \quad M_{\max} = 7,2 \cdot 1,2 - \frac{6 \cdot 1,2^2}{2} = 4,32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_C = 2,4 \text{ м}, \quad M_C = 0.$$

Эпюра M_P показана на рис. 32, z .

4. Строим эпюру \bar{M}_1 от единичного момента $\bar{X}_1 = 1$. Внешнюю нагрузку m и q , приложенную к балке (рис. 32, $в$), не учитываем.

В сечениях A и C изгибающие моменты равны нулю, а в сечении B изгибающий момент равен единице. Эпюра \bar{M}_1 линейна, её вид показан на рис. 32, $д$.

5. Составляем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Вычисляем коэффициент δ_{11} при неизвестном. Для этого эпюра \bar{M}_1 умножается сама на себя. Чтобы упростить вычисления, разбиваем эпюру на два треугольника ADB и BDC и площадь каждого из них умножаем на ординату, расположенную в центре тяжести каждого из них (рис. 32, $д$):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_i} (\bar{\omega}_1 \bar{y}_1 + \bar{\omega}_2 \bar{y}_2);$$

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 1 = 1,8; \quad \bar{y}_1 = \frac{2}{3};$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1 = 1,2; \quad \bar{y}_2 = \frac{2}{3}.$$

После подстановки числовых значений имеем

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI}.$$

Для определения Δ_{1P} перемножаем эпюры M_P и \bar{M}_1 (рис. 32, $з$, $д$). Площадь параболического сегмента вычисляется по формуле

$$\omega_{\text{нар}} = \frac{ql^3}{12},$$

где q - интенсивность распределённой нагрузки;
 l - длина участка балки под нагрузкой.

Вычисляем свободный член канонического уравнения Δ_{1P} :

$$\Delta_{1P} = (M_P \cdot \bar{M}_1) = \frac{1}{EI} (\omega_{P1} \cdot y_1 + \omega_{P2} \cdot y_2);$$

$$\omega_{P1} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,6 = 7,2; \quad y_1 = \frac{1}{3};$$

$$\omega_{P2} = \frac{6 \cdot 2,4^3}{12} = 6,91; \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Произведя соответствующие вычисления, получаем

$$\Delta_{1P} = \frac{5,856}{EI}.$$

Тогда каноническое уравнение принимает вид

$$\frac{2}{EI} X_1 + \frac{5,856}{EI} = 0,$$

откуда находим

$$X_1 = -\frac{5,856}{2} = -2,93 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отрицательное значение X_1 говорит о том, что следует изменить направление момента X_1 на обратное.

6. Строим эпюру изгибающих моментов.

Считая момент X_1 внешней нагрузкой, можно определить опорные реакции, рассматривая каждый пролет балки отдельно, а затем построить эпюру моментов обычным способом, как это выполнялось для статически определимой балки. В данном случае удобнее воспользоваться уже построенными эпюрами.

Эквивалентная система находится под действием заданных пролетных нагрузок и вычисленного момента X_1 . Следовательно, окончательная эпюра изгибающих моментов может быть представлена суммой двух эпюр

$$M = M_P + M_{X_1}.$$

Первая эпюра уже построена (рис. 32, *г*), а вторая получается умножением ординат эпюры \bar{M}_1 (рис. 32, *д*) на вычисленное значение X_1 . Эпюра M_{X_1} показана на рис. 32, *е*. Геометрически складываем эпюры M_P и M_{X_1} (рис. 32, *г*, *е*), суммируя ординаты эпюр в характерных точках:

$$M_A = 4 + 0 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_E = 4,32 - 1,47 = 2,85 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = 0 - 2,93 = -2,93 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_C = 0.$$

По найденным значениям M строим окончательно эпюру изгибающих моментов (рис. 32, *ж*).

Для проверки правильности расчётов и построения эпюры изгибающих моментов можно использовать условие равенства нулю угла поворота смежных сечений балки над средней опорой (перемещение по направлению отброшенной связи). Этот угол вычисляется перемножением окон-

чатальной эпюры моментов (рис. 32, ж) на эпюру \bar{M}_1 (рис. 32, д). При перемножении эпюру M удобно представить в виде трех треугольников, показанных пунктирными линиями на рис. 32, ж, и параболического сегмента.

Угол поворота смежных сечений балки над средней опорой вычислим методом перемножения эпюр:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} (\omega_1 \bar{y}_1 + \omega_2 \bar{y}_2 + \omega_3 \bar{y}_3 + \omega_4 \bar{y}_4).$$

Площади эпюр и соответствующие ординаты под их центрами тяжести

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,6 = 7,2; \quad \bar{y}_1 = \frac{1}{3};$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2,93 \cdot 3,6 = -5,274; \quad \bar{y}_2 = \frac{2}{3};$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \cdot 2,93 \cdot 2,4 = -3,516; \quad \bar{y}_3 = \frac{2}{3};$$

$$\omega_4 = \frac{ql^3}{12} = \frac{6 \cdot 2,4^3}{12} = 6,912; \quad \bar{y}_4 = \frac{1}{2}$$

определяются по соответствующим эпюрам (рис. 32, ж) и (рис. 32, д).

Итак,

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EI} (\omega_1 \bar{y}_1 + \omega_2 \bar{y}_2 + \omega_3 \bar{y}_3 + \omega_4 \bar{y}_4) = \\ &= \frac{1}{EI} (7,2 \cdot \frac{1}{3} - 5,274 \cdot \frac{2}{3} - 3,516 \cdot \frac{2}{3} + 6,912 \cdot \frac{1}{2}) = \frac{5,856 - 5,860}{EI} = -\frac{0,004}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Полученный результат свидетельствует о том, что эпюра изгибающих моментов построена правильно. Небольшая погрешность, не превышающая 5 %, возникла в результате округлений.

7. Подбираем сечение балки по условию прочности.

При изгибе условие прочности имеет вид

$$\frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{[\sigma]}.$$

По эпюре M (рис. 32, ж) находим максимальный момент $M_x^{\max} = 4$ кН·м, а по условию задачи $[\sigma] = 160$ МПа. Подставляя эти числа в последнюю формулу, получим величину требуемого момента сопротивления двутавра:

$$W_x \geq \frac{4 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 25 \text{ см}^3.$$

По таблицам сортамента прокатной стали подбираем номер двутавра и выписываем его геометрические характеристики:

$$\text{двутавр №10, } W_x = 39,7 \text{ см}^3, I_x = 198 \text{ см}^4.$$

(Момент сопротивления выбранного двутавра больше требуемого расчётного, но меньшего размера в таблице нет, поэтому принимаем двутавр №10).

8. Определяем перемещения.

Определяем угол поворота сечения L .

Для этого приложим в сечении L основной системы единичный момент $\bar{m} = 1$ и построим эпюру моментов \bar{M}_m (рис. 32, з). Угол поворота сечения L вычисляем, перемножая эпюры M и \bar{M}_m (рис. 32, ж, з):

$$\theta_L = M \times \bar{M}_m = \frac{1}{EI_x} (\omega_1 y_3 + \omega_2 y_4);$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,6 = 7,2; \quad y_3 = \frac{2}{3}; \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2,93 \cdot 3,6 = -5,274; \quad y_4 = \frac{1}{3};$$

$$\theta_L = M \times \bar{M}_m = \frac{1}{EI_x} \left(7,2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2,93 \cdot 3,6 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{3,042}{EI_x};$$

$$\theta_L = \frac{3,042 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 7,68 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Определяем прогиб в сечении K .

Приложим в сечении K основной системы единичную силу $\bar{P} = 1$ и построим от нее эпюру моментов \bar{M}_P (рис. 32, и). Так как сила $\bar{P} = 1$ приложена в середине пролета AB , опорные реакции будут равны:

$$R_A = R_B = 0,5.$$

Определяем моменты в характерных точках участка AB :

$$M_A = 0; \quad M_K = 0,5 \cdot 1,8 = 0,9 \text{ м}; \quad M_B = 0.$$

Прогиб в сечении K вычисляется перемножением эпюр M и \bar{M}_P (рис. 32, ж, и). Площадь при этом берем с эпюры M , а соответствующая ордината на эпюре \bar{M}_P равна величине средней линии трапеции, то есть алгебраической полусумме её оснований:

$$\omega_5 = \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 3,6 = 1,62; \quad y_5 = \frac{4 - 2,93}{2} = 0,535;$$

$$f_k = \frac{\omega_5 \cdot y_5}{EI_x} = \frac{1,62 \cdot 0,535 \cdot 10^3}{EI_x} = \frac{0,867 \cdot 10^3}{EI_x};$$

$$f_k = \frac{0,867 \cdot 10^3}{EI_x} = \frac{0,867 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 0,00219 \text{ м} = 2,19 \text{ мм.}$$

Результат получен со знаком плюс, прогиб направлен в сторону приложенной единичной силы, то есть вниз.

ЗАДАЧА № 8

Короткий чугунный брус, поперечное сечение которого показано на рис. 33, сжимается силой P , приложенной в точке A , B или C .

Требуется:

- 1) вычислить наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения в его поперечном сечении, выразив их через величину сжимающей силы P ;
- 2) из условия прочности бруса найти допускаемую нагрузку $P_{дон}$, если заданы пределы прочности для чугуна на растяжение $\sigma_{вр}$ и сжатие $\sigma_{вс}$. Запас прочности принять $n = 1,5$.

Числовые данные берутся из табл. 8, схемы поперечных сечений бруса - по рис. 33.

Таблица 8

Числовые данные к задаче № 8

Номер строки	Номер расч. схемы по рис. 33	Размер, м		Коэффициент		Точка приложения силы	Предел прочности, МПа	
		a	b	α	β		$\sigma_{вр}$	$\sigma_{вс}$
1	1	0,10	0,18	0,3	0,8	А	120	500
2	2	0,12	0,16	0,4	0,5	В	380	1400
3	3	0,06	0,20	0,5	0,6	С	380	1400
4	4	0,06	0,22	0,6	0,8	А	280	1000
5	5	0,08	0,16	0,3	0,5	В	280	1000
6	6	0,08	0,22	0,4	0,6	С	120	500
7	7	0,10	0,18	0,5	0,7	А	120	500
8	8	0,10	0,20	0,6	0,8	В	280	1000
9	9	0,12	0,22	0,3	0,6	С	380	1400
0	10	0,12	0,26	0,5	0,5	А	380	1400
	3	ж	а	б	в	г	д	д

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 8

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

Рассматриваемый в задаче брус испытывает так называемое внецентренное сжатие. Под *внецентренным сжатием* понимается такой случай нагружения бруса, при котором сжимающая сила параллельна его продольной оси, но не проходит через центр тяжести поперечного сечения (рис. 34). Координаты точки приложения силы обозначены x_p , y_p .

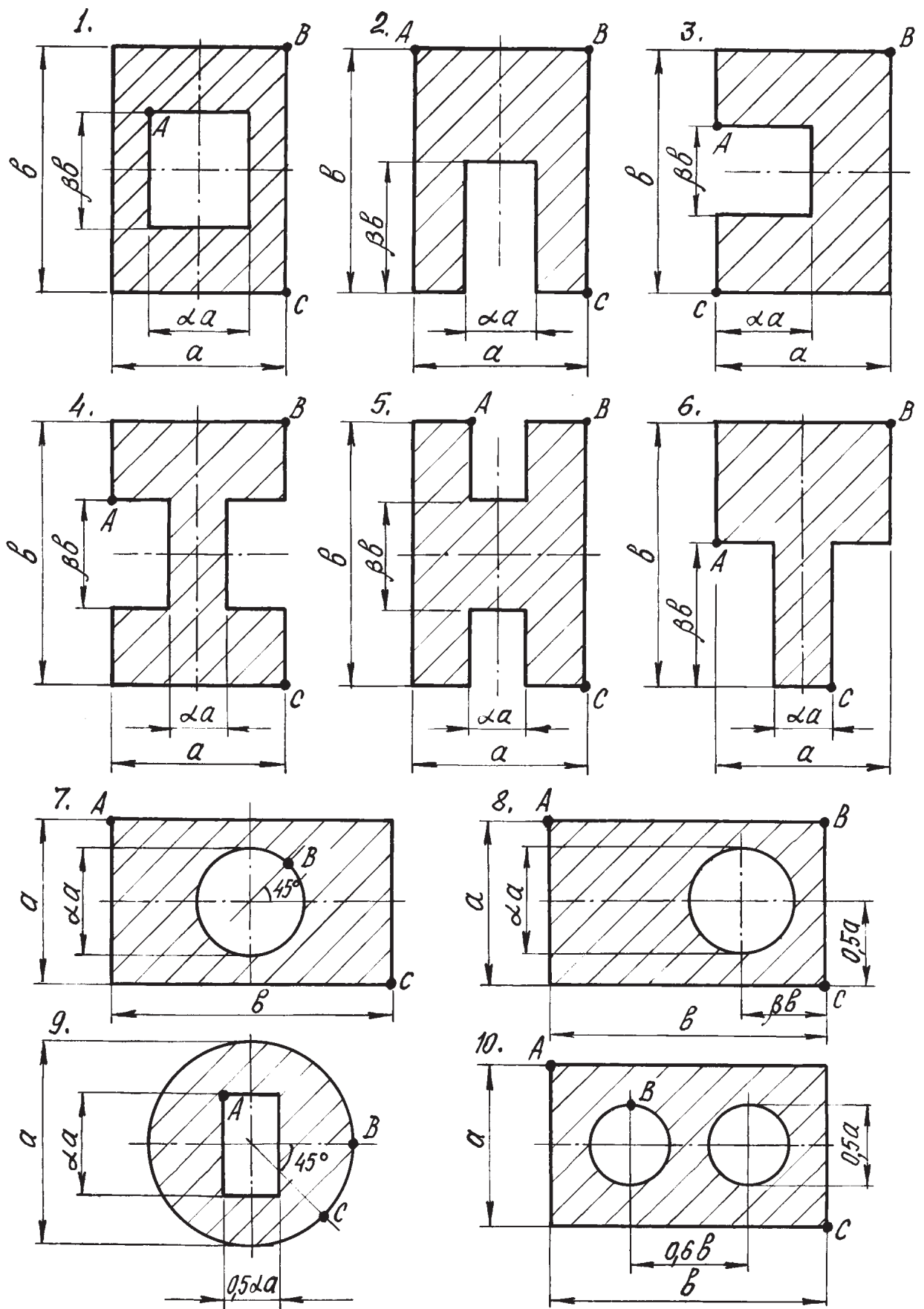


Рис. 33. Схемы поперечных сечений бруса

При внецентренном приложении силы в поперечных сечениях бруса возникают три силовых фактора: продольная сила $N = P$; изгибающие моменты $M_x = P \cdot y_p$ и $M_y = P \cdot x_p$.

Нормальные напряжения в произвольной точке с координатами x, y равны алгебраической сумме напряжений от воздействия этих трех силовых факторов

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y}. \quad (8.1)$$

После несложных преобразований формула для вычисления напряжений при внецентренном сжатии приводится к виду

$$\sigma = P \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p y}{I_x} + \frac{x_p x}{I_y} \right) = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} \right), \quad (8.2)$$

где P - сила, сжимающая брус;

A - площадь поперечного сечения бруса;

I_x, I_y - главные центральные моменты инерции поперечного сечения;

x_p, y_p - координаты точки приложения силы;

x, y - координаты точки поперечного сечения, в которой вычисляются напряжения;

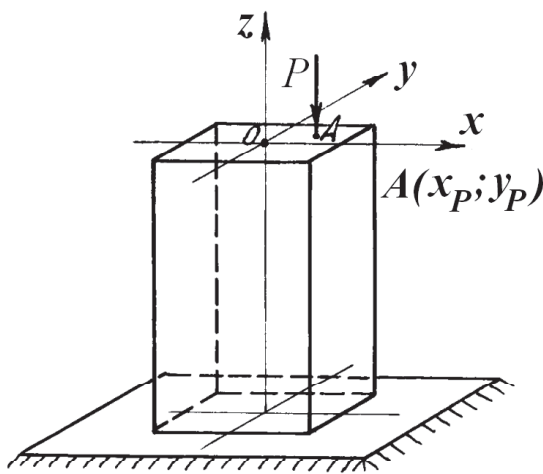


Рис. 34. Внецентренное сжатие бруса

i_x и i_y - главные центральные радиусы инерции поперечного сечения.

Координаты x_p, y_p и x, y в формулу для вычисления напряжений подставляются с учётом их знаков в заранее выбранной системе координат.

При внецентренном сжатии можно приложить внешнюю силу таким образом, что в поперечном сечении бруса возникнут не только сжимающие, но и растягивающие напряжения. Границей между частью сечения, в которой волокна бруса

растянуты, и той частью, где они сжаты, является прямая линия, в точках которой напряжения равны нулю.

Эта прямая линия называется *нулевой*, или *нейтральной линией*. Уравнение нулевой линии имеет вид

$$1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} = 0. \quad (8.3)$$

Очевидно, что нейтральная линия не проходит через центр тяжести поперечного сечения. Для её построения необходимо знать величину отрезков, кото-

рые она отсекает на осях координат. Их величина определяется по формулам

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p}, \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_p}, \quad (8.4)$$

где a_x и a_y - отрезки, отсекаемые нейтральной линией соответственно на осях координат x , y ;

Главные центральные радиусы инерции сечения i_x и i_y определяются по формулам

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (8.5)$$

При внецентренном сжатии опасными являются точки, наиболее удаленные от нулевой линии. Если пределы прочности материала на растяжение и сжатие различны, условия прочности записываются отдельно для опасных точек в растянутой и сжатой зонах:

$$\sigma_p^{\max} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p y^*}{i_x^2} + \frac{x_p x^*}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]_p; \quad (8.6)$$

$$\sigma_c^{\max} = \left| \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_p y^{**}}{i_x^2} + \frac{x_p x^{**}}{i_y^2} \right) \right| \leq [\sigma]_c,$$

где x^* , y^* - координаты точки, наиболее удаленной от нулевой линии в растянутой зоне;

x^{**} , y^{**} - то же в сжатой зоне.

Координаты точек определяются по чертежу с учётом их знаков, а величина сжимающей силы подставляется в формулы со знаком минус.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 8

Короткий чугунный брус с заданным поперечным сечением (рис. 35) сжимается силой P , приложенной в точке D . Определить из условия прочности бруса допустимое значение силы $P_{дон}$.

Числовые данные к задаче: $a = 0,08$ м; $b = 0,12$ м; $\alpha = 0,5$; пределы прочности чугуна при растяжении $\sigma_{вр} = 280$ МПа, при сжатии $\sigma_{вс} = 1000$ МПа; запас прочности принять $n = 1,5$.

1. Определение геометрических характеристик поперечного сечения.

Заданное сечение (рис. 35) рассматриваем как сложное, состоящее из двух прямоугольников: большого сплошного со сторонами a и b и прямоугольного отверстия со сторонами $0,5a$ и $0,6b$.

За исходные координатные оси принимаем оси y_1 и x . На рис. 35 в этой системе координат показаны положения центров тяжести прямоугольников (точки C_1 и C_2) и их главные центральные оси x_1, y_1, x_2, y_2 . Центр тяжести всего сечения обозначен буквой C . Он располагается на оси симметрии x , поэтому вычисляется только одна его координата x_C :

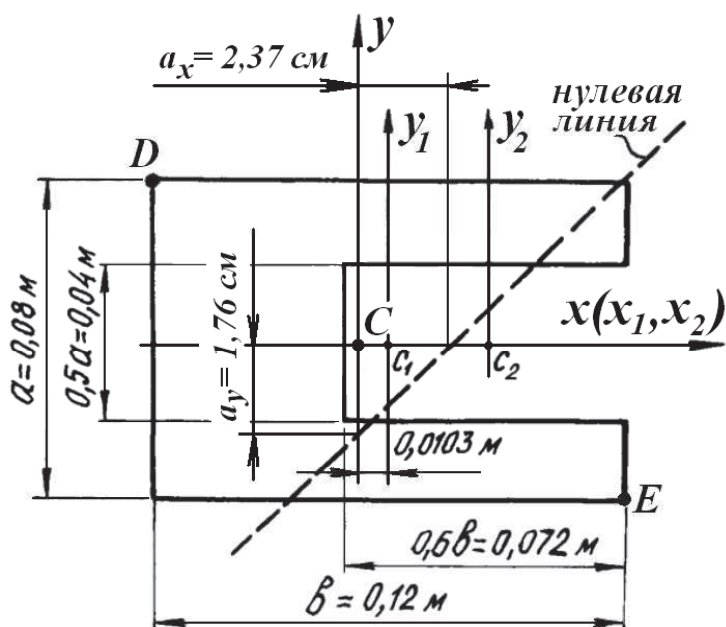
$$x_C = \frac{A_1 x_1 - A_2 x_2}{A_1 - A_2};$$

где A_1 и A_2 - площади большого прямоугольника и отверстия;
 x_1 и x_2 - координаты их центров тяжести.

Подсчитываем геометрические характеристики поперечного сечения бруса.

Площади составляющих фигур

$$A_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^2; \quad A_2 = 4 \cdot 7,2 = 28,8 \text{ см}^2.$$



Площадь сечения всей фигуры:

$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 = \\ &= 96 - 28,8 = 67,2 \text{ см}^2 = \\ &= 67,2 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Абсциссы центров тяжести составляющих фигур:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2,4 \text{ см.}$$

Абсцисса центра тяжести всей фигуры:

$$x_C = \frac{96 \cdot 0 - 28,8 \cdot 2,4}{96 - 28,8} = -1,03 \text{ см.}$$

Центр тяжести сечения лежит на оси x (точка O) слева от точки C_1 на расстоянии x_C .

Главные центральные оси сечения - x, y .

Главные центральные моменты инерции составного сечения относительно осей x, y вычисляются с помощью зависимостей между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых центральная:

$$I_x = (I_{x_1} + A_1 a_1^2) - (I_{x_2} + A_2 a_2^2);$$

$$I_y = (I_{y_1} + A_1 b_1^2) - (I_{y_2} + A_2 b_2^2).$$

Моменты инерции прямоугольников относительно собственных главных центральных осей равны

$$I_{x_1} = \frac{b a^3}{12} = \frac{12 \cdot 8^3}{12} = 512 \text{ см}^4 = 512 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{ab^3}{12} = \frac{8 \cdot 12^3}{12} = 1152 \text{ см}^4 = 1152 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{x_2} = \frac{7,24^3}{12} = 38,4 \text{ см}^4 = 38,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{y_2} = \frac{4 \cdot 7,2^3}{12} = 124,4 \text{ см}^4 = 124,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Расстояния между главными центральными осями x , y и собственными главными центральными осями составляющих фигур определяются по чертежу.

Расстояние между главной центральной осью x и осями x_1, x_2 :
 $a_1 = a_2 = 0$, так как главные центральные оси x_1 и x_2 составляющих фигур совпадают с главной центральной осью x сечения.

Расстояния между главной центральной осью y и осями y_1, y_2 :
 $b_1 = 1,03 \text{ см}$, $b_2 = 1,03 + 2,4 = 3,43 \text{ см}$.

Подставив найденные величины в формулы для вычисления главных центральных моментов инерции и учитывая, что осевой момент инерции отверстия условно считается отрицательным, получаем

$$I_x = 512 - 38,4 = 473,6 \text{ см}^4 = 473,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_y = (1152 + 96 \cdot 1,03^2) - (124,4 + 28,8 \cdot 3,43^2) = 790,6 \text{ см}^4 = 790,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Квадраты главных центральных радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{473,6}{67,2} = 7,05 \text{ см}^2 = 7,05 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{790,6}{67,2} = 11,76 \text{ см}^2 = 11,76 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

2. Определение положения нулевой линии.

По условию задачи сила P приложена в точке D , координаты которой в системе главных центральных осей x , y определяются по рис. 35:

$$x_P = -(6 - 1,03) = -4,97 \text{ см} = -4,97 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$y_P = 4 \text{ см} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат x , y :

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_P} = -\frac{11,76}{-4,97} = 2,37 \text{ см} = 2,37 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_P} = -\frac{7,05}{4} = -1,76 \text{ см} = -1,76 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

На осях координат x , y откладываются в масштабе величины найденных отрезков, и проводится нулевая линия.

3. Вычисление максимальных нормальных напряжений в поперечном сечении бруса.

Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. В рассматриваемой задаче это точки D и E . В точке D напряжения сжимающие, в точке E – растягивающие.

Координаты опасных точек находятся по рис. 35:

$$x^* = x_E = 6 + 1,03 = 7,03 \text{ см} = 7,03 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad y^* = y_E = -4 \text{ см} = -4 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$x^{**} = x_D = -4,97 \text{ см} = -4,97 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad y^{**} = y_D = 4 \text{ см} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения выражаются через внешнюю нагрузку;

$$\begin{aligned} \sigma_p^{\max} &= -P \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p y^*}{I_x} + \frac{x_p x^*}{I_y} \right) = \\ &= -P \cdot \left[\frac{1}{67,2} + \frac{4 \cdot (-4)}{473,6} + \frac{(-4,97) \cdot 7,03}{790,6} \right] = 0,0631 \cdot P \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 631 \cdot P \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}; \\ \sigma_c^{\max} &= \left| -P \left(\frac{1}{A} + \frac{y_p y^{**}}{I_x} + \frac{x_p x^{**}}{I_y} \right) \right| = \\ &= \left| -P \cdot \left[\frac{1}{67,2} + \frac{4 \cdot 4}{473,6} + \frac{(-4,97) \cdot (-4,97)}{790,6} \right] \right| = 0,0799 \cdot P \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 799 \cdot P \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \end{aligned}$$

Допускаемая нагрузка $P_{\text{дон}}$ определяется из условий прочности бруса по растягивающим и сжимающим напряжениям.

Допускаемые напряжения определяются по исходным данным для растяжения и для сжатия хрупкого материала, в рассматриваемом случае чугуна:

$$\text{на растяжение } [\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{вп}}}{n} = \frac{280}{1,5} = 187 \text{ МПа} = 187 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2};$$

$$\text{на сжатие } [\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{n} = \frac{1000}{1,5} = 667 \text{ МПа} = 667 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Из условия прочности материала бруса на растяжение $\sigma_p^{\max} \leq [\sigma]_p$ определяется величина допускаемой нагрузки

$$631 P_{\text{дон}}^* \leq 187 \cdot 10^6, \text{ откуда } P_{\text{дон}}^* \leq 296,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 296,4 \text{ кН}.$$

Из условия прочности на сжатие $\sigma_c^{\max} \leq [\sigma]_c$

$$799 P_{\text{дон}}^{**} \leq 667 \cdot 10^6 \text{ и } P_{\text{дон}}^{**} \leq 834,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 834,8 \text{ кН}.$$

В качестве допускаемой нагрузки принимается меньшая из двух полученных, что обеспечивает прочность бруса как по растягивающим, так и по сжимающим напряжениям, то есть $P_{\text{дон}} = 296,4 \text{ кН}$.

ЗАДАЧА № 9

Стальной вал постоянного сечения вращается с частотой n (об/мин) и передает мощность N (кВт). Требуется подобрать диаметр вала из условия его прочности при совместном действии изгиба и кручения, если известны предел текучести материала σ_T и коэффициент запаса прочности $n_T = 3$.

Числовые данные берутся из табл. 9, расчётные схемы по рис. 37.

Необходимые характеристики материала приведены в табл. 10.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 9

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

Расчёт вала на статическую прочность начинается с определения действующих на него нагрузок. Нагрузки на вал передаются через шкивы или шестерни. Зная величину передаваемой мощности N и число оборотов в минуту n , можно определить величину крутящего момента, действующего на участке вала между шкивами по формуле

$$M_{кр} = 1,02 \cdot \frac{30 \cdot N}{\pi \cdot n} \text{кН} \cdot \text{м}; \left(1 \text{ кВт} = 102 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 1,02 \frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right). \quad (9.1)$$

По величине крутящего момента вычисляются окружные усилия, приложенные к шкивам и передающиеся на вал. Эти усилия раскладываются на вертикальные и горизонтальные составляющие.

Усилия, передающиеся на вал через шестерню зубчатого зацепления (рис. 36):

$$M_k = P \frac{D}{2}; P = \frac{2M_k}{D}; \quad P_x = P \cos \alpha; P_y = P \sin \alpha.$$

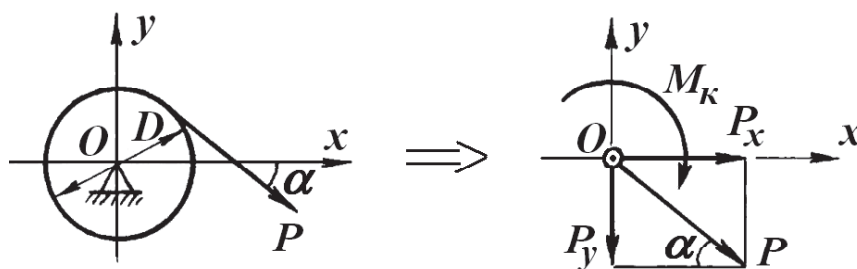


Рис. 36. Приведение окружных усилий, действующих на шестерню зубчатого зацепления, к оси вала

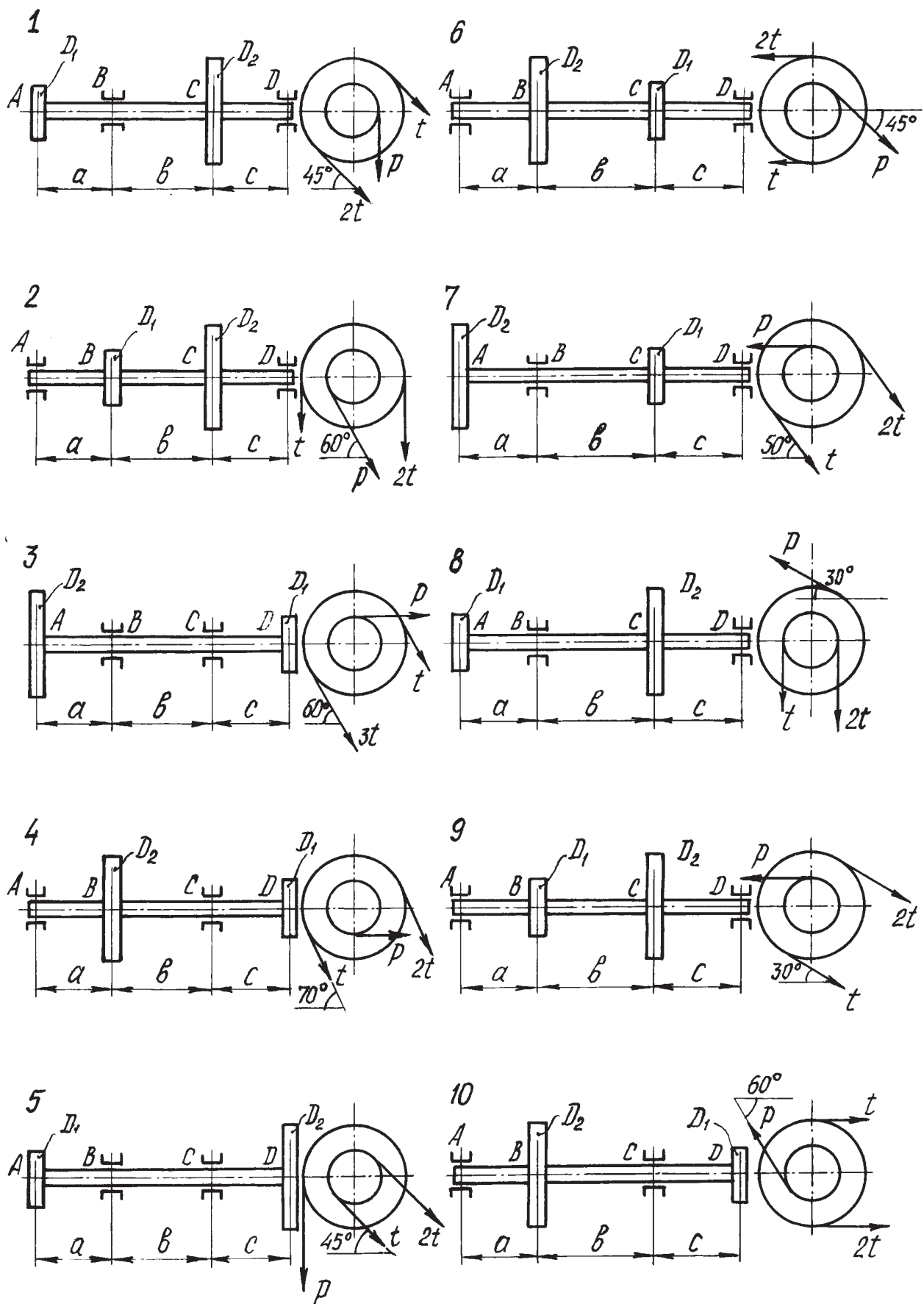


Рис. 37. Расчётные схемы валов

Таблица 9

Числовые данные к задаче № 9

Номер строки	Номер расч. схемы по рис. 38	Размер, м					N, кВт	n, об/мин	Марка стали
		a	b	c	D ₁	D ₂			
1	1	0,5	0,3	0,3	0,4	0,6	20	120	5
2	2	0,4	0,5	0,5	0,2	0,6	15	380	45
3	3	0,3	0,7	0,3	0,3	0,5	10	380	40X
4	4	0,4	0,3	0,5	0,2	0,4	16	280	3
5	5	0,6	0,8	0,4	0,4	0,6	18	280	40XH
6	6	0,4	0,5	0,3	0,3	0,6	12	120	35
7	7	0,5	0,3	0,3	0,2	0,5	14	120	4
8	8	0,6	0,4	0,5	0,5	0,5	20	280	30XГТ
9	9	0,4	0,6	0,3	0,4	0,4	15	380	3
0	10	0,8	0,4	0,7	0,3	0,5	17	380	30
	з	ж	а	б	в	г	д	ж	е

Таблица 10

Механические характеристики сталей

Марка стали	Предел текучести σ_T , МПа	Предел прочности σ_B , МПа	Предел выносливости	
			при изгибе σ_{-1} , МПа	при кручении τ_{-1} , МПа
3	250	420	195	115
4	280	460	220	-
5	280	520	220	130
30	300	500	235	125
30XГТ	750	950	450	260
35	320	540	260	155
40X	500	730	320	200
40XH	650	820	360	210
45	280	560	250	150

Примечание. Если τ_{-1} в таблице не дано, то используется эмпирическая формула $\tau_{-1} \approx 0,6 \sigma_{-1}$.

Усилия, передающиеся на вал через шкив ременной передачи (рис. 38):

$$M_{кр} = 2t \frac{D}{2} - t \frac{D}{2} = t \frac{D}{2}; \quad t = \frac{2M_{кр}}{D};$$

$$Q = 3t; \quad Q_x = Q \cos \alpha; \quad Q_y = Q \sin \alpha.$$

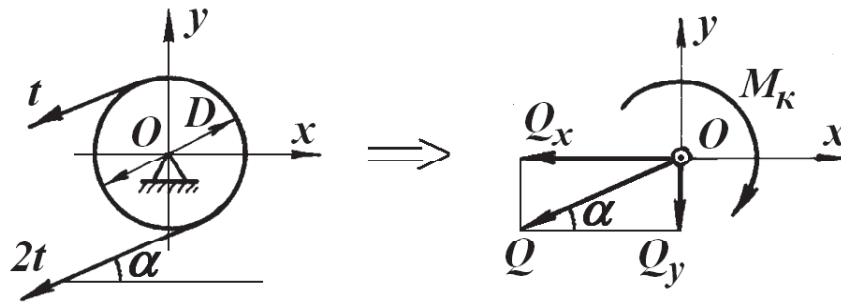


Рис. 38. Приведение окружных усилий, действующих на шкив ремённой передачи, к оси вала

Нагрузки, действующие на вал, вызывают его кручение и изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Для расчёта вала на прочность следует построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной M_x и горизонтальной M_y плоскостях и эпюру крутящих моментов $M_{кр}$.

Условие прочности вала записывается для опасного сечения, в котором расчётный (приведенный) момент имеет максимальную величину.

По третьей гипотезе прочности расчётный момент в опасном сечении вычисляется по формуле

$$M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2}, \quad (9.2)$$

где M_p - расчётный момент;

M_x, M_y - изгибающие моменты в рассматриваемом сечении вала;

$M_{кр}$ - крутящий момент в этом же сечении.

Если положение опасного сечения не очевидно, вычисляются расчётные моменты для нескольких сечений вала и для дальнейшего расчёта выбирается сечение с наибольшим расчётным моментом.

Из условия прочности вала

$$\frac{M_p^{\max}}{W_u} = \frac{M_p^{\max}}{\frac{\pi d^3}{32}} \leq [\sigma], \quad (9.3)$$

где M_p^{\max} - максимальный расчётный момент;

W_u - момент сопротивления сечения при изгибе;

$[\sigma]$ - допускаемое напряжение, определяемое по пределу текучести σ_T

и запасу прочности n_T отношением $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}$

вычисляется требуемое значение диаметра вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_p^{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (9.4)$$

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 9

Стальной вал постоянного сечения (рис. 41, а) вращается с постоянной угловой скоростью $n = 120$ об/мин и передает через шкив диаметром $D_2 = 0,6$ м, мощность $N = 20$ кВт.

Подобрать диаметр вала из условия его прочности, если вал изготовлен из стали марки Ст. 50 с пределом текучести материала $\sigma_T = 380$ МПа и коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести $n_T = 3$.

Остальные числовые данные к задаче:

$$a = 0,3 \text{ м}; \quad b = 0,3 \text{ м}; \quad c = 0,2 \text{ м}; \quad D_1 = 0,3 \text{ м}.$$

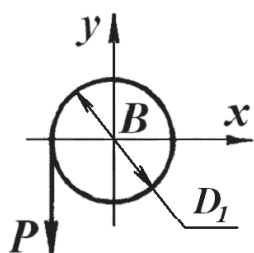
1. Определение нагрузок, передающихся на вал.

На рис. 41, а показаны усилия, приложенные к шкиву (сечение D) и к шестерне (сечение B).

Крутящий момент, передаваемый через шкив на вал:

$$M_K = 1,02 \cdot \frac{30 \cdot N}{\pi \cdot n} = 1,02 \cdot \frac{30 \cdot 20}{\pi \cdot 120} = 1,62 \text{ кНм}.$$

Нагрузки, действующие на вал, определяются с учётом того, что окружные усилия, приложенные к шкивам (рис. 39, 40), при переносе их в центр поперечного сечения вала приводятся к силам, изгибающим его в двух плоскостях, и скручивающему моменту (рис. 41, б).

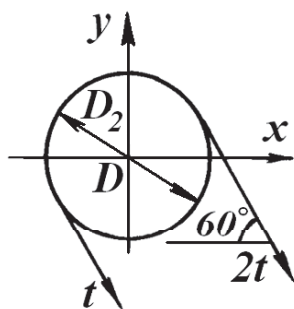


$$M_K = P \frac{D_2}{2}; \quad P = \frac{2M_K}{D_1} = \frac{2 \cdot 1,62}{0,3} = 10,8 \text{ кН};$$

$$P_6 = P_x = P = 10,8 \text{ кН};$$

$$P_2 = P_y = 0.$$

Рис. 39. Шестерня B



$$M_K = 2t \frac{D_2}{2} - t \frac{D_2}{2} = t \frac{D_2}{2}$$

$$t = \frac{2M_K}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,62}{0,6} = 5,4 \text{ кН}$$

$$Q = t + 2t = 3t = 3 \cdot 5,4 = 16,2 \text{ кН};$$

$$Q_6 = Q_y = Q \sin 60^\circ = 16,2 \sin 60^\circ = 14,03 \text{ кН};$$

$$Q_2 = Q_x = Q \cos 60^\circ = 16,2 \cos 60^\circ = 8,1 \text{ кН}.$$

Рис. 40. Шкив D

Расчётная схема вала показана на рис. 41, б.

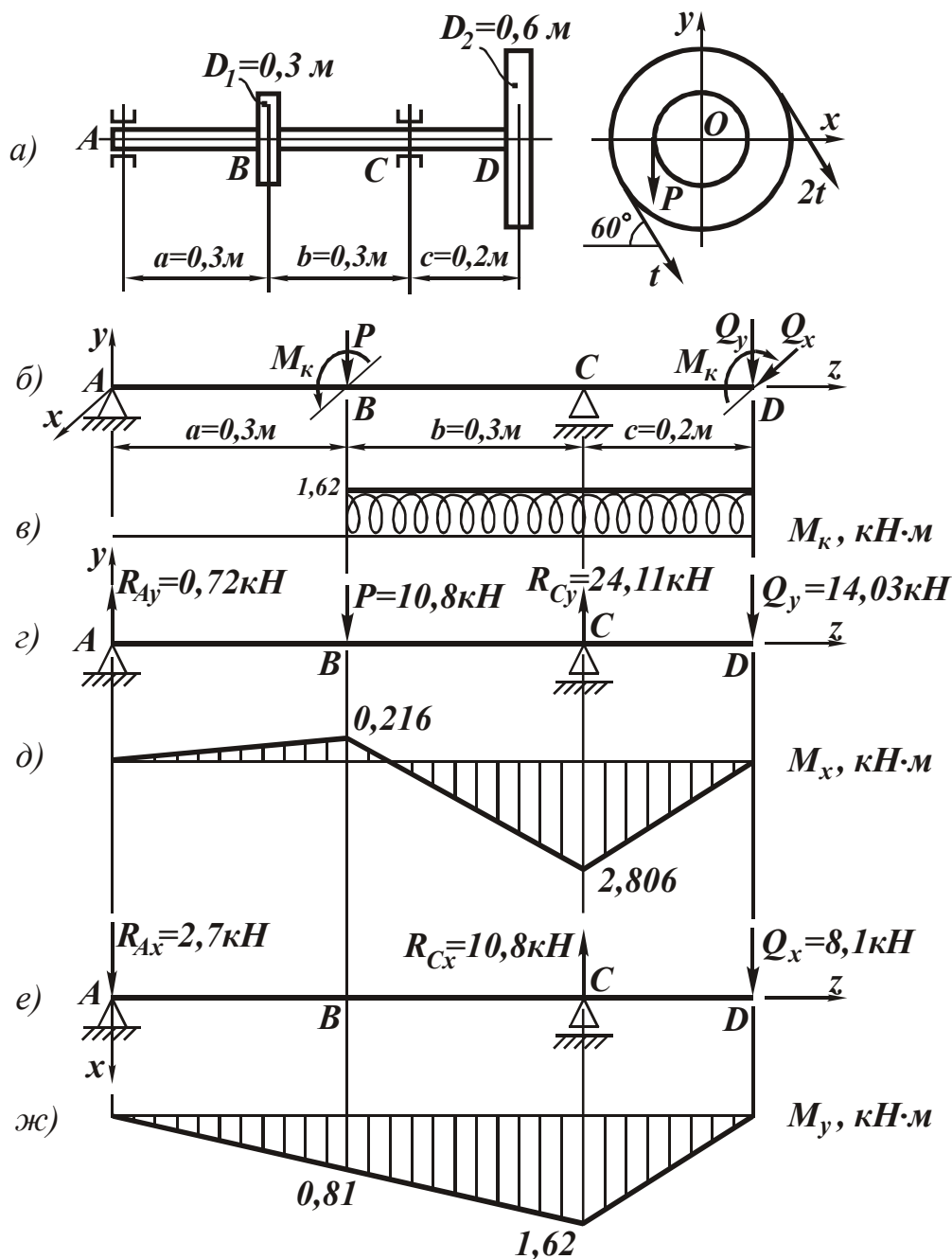


Рис 41. Расчётная схема и эпюры моментов внутренних усилий в поперечных сечениях вала

2. Построение эпюр изгибающих и крутящих моментов.

Из условий нагружения вала следует, что он испытывает кручение на участке BD постоянным крутящим моментом $M_{кр} = 1,62 \text{ кН}\cdot\text{м}$, эпюра которого показана на рис. 41, z .

Схема нагрузок, приложенных к валу в вертикальной плоскости, представлена на рис. 41, z . Для построения эпюры изгибающих моментов от действия этих сил, вал рассматривается как простая двухопорная балка, для которой следует вычислить вертикальные опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum m_A &= 0; 10,8 \cdot 0,3 + 14,03 \cdot 0,8 - R_{yC} \cdot 0,6 = 0; \\ R_{yC} &= 24,11 \text{ кН}; \\ \sum m_C &= 0; R_{yA} \cdot 0,6 - 10,8 \cdot 0,3 + 14,03 \cdot 0,2 = 0; \\ R_{yA} &= 0,72 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Проверка вычислений опорных реакций:

$$\sum Y = 0; 0,72 - 10,8 + 24,11 - 14,03 = 0.$$

Вычисляем изгибающие моменты от действия вертикальных сил в характерных сечениях вала:

$$\begin{aligned}M_x^A &= 0; M_x^B = R_{yA} \cdot a = 0,72 \cdot 0,3 = 0,216 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_x^D &= 0; M_x^C = -Q_{yC} = -14,03 \cdot 0,2 = -2,80 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

По вычисленным значениям построена эпюра изгибающих моментов M_x , от действия сил, расположенных в вертикальной плоскости (рис. 41, *д*).

На рис. 41, *е* показаны нагрузки, приложенные к валу в горизонтальной плоскости (для наглядности чертежа схема повернута на 90°).

Для построения эпюры изгибающих моментов от действия этих сил вычисляются горизонтальные опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum m_A &= 0; R_{xC} \cdot 0,6 - 8,1 \cdot 0,8 = 0; R_{xC} = 10,8 \text{ кН}; \\ \sum m_C &= 0; R_{xA} \cdot 0,6 + 8,1 \cdot 0,2 = 0; R_{xA} = -2,7 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Проверка определения горизонтальных опорных реакций:

$$\sum X = 0; R_{xA} + R_{xC} - Q_x = -2,7 + 10,8 - 8,1 = 0.$$

Изгибающие моменты в характерных сечениях вала:

$$\begin{aligned}M_y^A &= 0; M_y^B = R_{xA} \cdot a = -2,7 \cdot 0,3 = -0,81 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ M_y^D &= 0; M_y^C = -Q_x \cdot 0,2 = -8,1 \cdot 0,2 = -1,62 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

По вычисленным значениям момента строится эпюра M_y (рис. 41, *ж*).

3. Подбор поперечного сечения (определение диаметра вала).

Материал вала – сталь марки Ст. 50, допускаемое напряжение для которой

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{380}{3} = 127 \text{ МПа}.$$

Опасным для вала является сечение C , так как в этом сечении действует крутящий момент, а изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях максимальны (рис. 41, *в*, *д*, *ж*).

Величины моментов в сечении C :

$$M_{xC} = 2,806 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{yC} = 1,62 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_{крC} = 1,62 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчётный момент по третьей гипотезе прочности

$$M_p^{\max} = M_p^C = \sqrt{M_{x_C}^2 + M_{y_C}^2 + M_{kp_C}^2} = \sqrt{2,806^2 + 1,62^2 + 1,62^2} = 3,62 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Искомый диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_p^{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3,62 \cdot 10^3}{\pi \cdot 127 \cdot 10^6}} = 0,0662 \text{ м}.$$

Принимаем диаметр вала $d=66$ мм.

ЗАДАЧА № 10

Для стального вала постоянного сечения, рассмотренного в предыдущей задаче, выполнить проверочный расчёт на прочность при напряжениях в его поперечных сечениях, циклически изменяющихся во времени. Считается, что нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу, а касательные – по пульсационному.

В расчёте учесть влияние на прочность вала концентрации напряжений, создаваемой наличием шпоночных канавок в сечениях, где имеются шкивы, и влияние прессовой насадки подшипников – в опорных сечениях. Обработка поверхности вала – тонкая обточка.

Нормативный запас усталостной прочности принять $[n] = 1,5$.

Усилия, приложенные к валу и входящие в расчёт, берутся из решения задачи № 9; механические характеристики материала – из табл. 10. Необходимые справочные данные приводятся в методических указаниях к данной задаче.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 10

Основные теоретические сведения и расчётные формулы

Основные понятия.

Многие детали машин в процессе эксплуатации подвергаются действию напряжений, циклически изменяющихся во времени (рис. 42), что приводит к появлению микротрещин, их росту и, как следствие этого, к разрушению материала. Разрушение под действием повторно-переменных напряжений называется *усталостным разрушением* или *усталостью материала*.

Способность материала сопротивляться усталостному разрушению называется *выносливостью*. Проверочный расчёт на выносливость сводится к вычислению запаса усталостной прочности и сравнению его с нормативным.

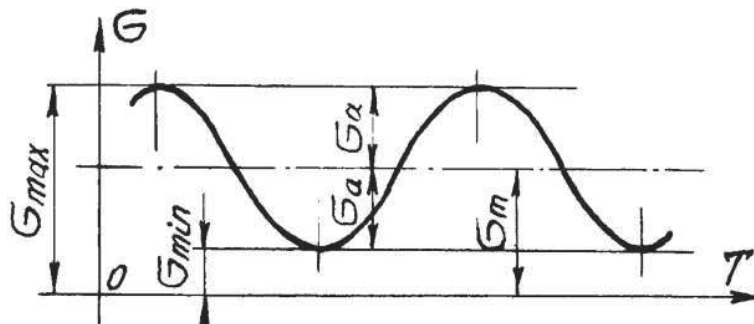


Рис. 42. График изменения циклического напряжения во времени

1. Характеристики циклов напряжений.

Напряжения, периодически изменяющиеся во времени, называются циклическими. На рис. 42 показана зависимость циклического напряжения от времени.

Основные характеристики цикла:

σ_{min} - минимальное напряжение цикла;

σ_{max} - максимальное напряжение;

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \text{ - среднее напряжение цикла;} \quad (10.1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \text{ - амплитудное напряжение цикла.}$$

Каждый цикл характеризуется его коэффициентом асимметрии

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \quad (10.2)$$

Частными случаями циклов являются симметричный и пульсационный, графики которых приведены на рис. 43.

Основные характеристики этих циклов следующие:

симметричный цикл

$$\sigma_{min} = -\sigma_{max}; \quad \sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_{max}; \quad r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = -1; \quad (10.3)$$

пульсационный цикл

$$\sigma_{min} = 0; \quad \sigma_m = \sigma_a = 0,5\sigma_{max}; \quad r = 0. \quad (10.4)$$

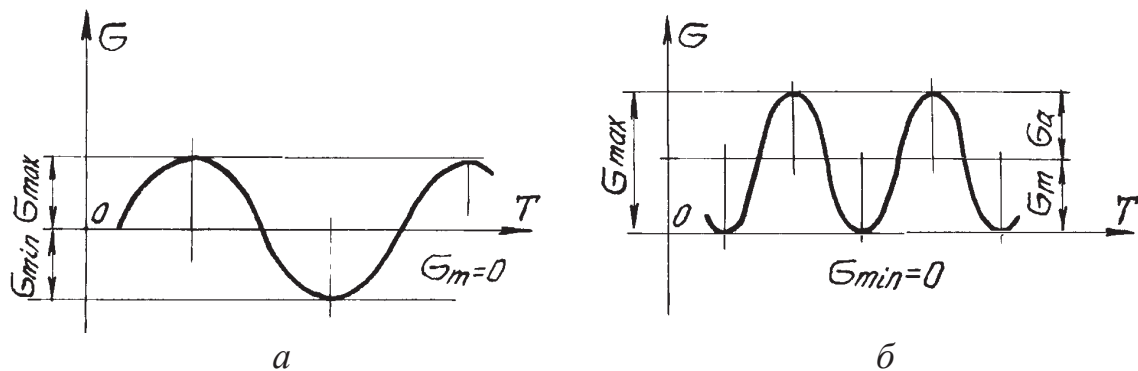


Рис. 43. Циклы напряжений: а - симметричный; б - пульсационный

2. Предел выносливости.

Максимальное напряжение цикла, при котором стандартный образец выдерживает неограниченное число циклов нагружений, не разрушаясь, называется *пределом выносливости* материала. Для предела выносливости принято обозначение σ_r , (r - коэффициент асимметрии цикла).

Для симметричного цикла $r = -1$,

Поэтому предел выносливости, определяемый при чистом изгибе, обозначается σ_{-1} , а при чистом кручении τ_{-1} .

3. Коэффициент снижения предела выносливости.

На величину предела выносливости материала, кроме коэффициента асимметрии цикла, влияет целый ряд различных факторов, в первую очередь *концентрация напряжений, размеры образца или детали, качество обработки поверхности.*

Для того чтобы учесть влияние этих факторов, вводятся соответствующие коэффициенты, величины которых определяются экспериментально или из теоретических предпосылок и приводятся в справочной литературе. При решении рассматриваемой задачи используются таблицы 11-14, в которых приводятся:

k_{σ} , k_{τ} - эффективные коэффициенты концентрации для нормальных и касательных напряжений и коэффициенты снижения предела выносливости при прессовой посадке подшипников (табл. 11, 12);

ψ_{τ} - коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла (табл. 13).

ε_{σ} , ε_{τ} - коэффициенты влияния абсолютных размеров сечения соответственно для нормальных и касательных напряжений (табл. 14).

Коэффициент влияния качества обработки поверхности β определяется по графикам, приведенным на рис. 44.

Совместное влияние всех указанных факторов на величину предела выносливости детали учитывается коэффициентами снижения предела выносливости по нормальным и касательным напряжениям $k_{\sigma_{\partial}}$, $k_{\tau_{\partial}}$, вычисляемым по эмпирическим формулам:

$$k_{\sigma_{\partial}} = \frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} + \frac{1}{\beta} - 1; \quad k_{\tau_{\partial}} = \frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}} + \frac{1}{\beta} - 1. \quad (10.5)$$

4. Запас усталостной прочности (выносливости).

Запас усталостной прочности по нормальным напряжениям при симметричном цикле нагружения определяется по формуле

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma_{\partial}} \sigma_a}, \quad (10.6)$$

где σ_{-1} - предел выносливости материала;

σ_a - амплитудное напряжение цикла.

Запас усталостной прочности по касательным напряжениям при несимметричном цикле определяется по формуле

$$n_{\sigma} = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau_{\partial}} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m}, \quad (10.7)$$

где τ_{-1} - предел выносливости материала при кручении;

τ_a , τ_m - амплитудное и среднее напряжения цикла.

Запас выносливости вала при совместном действии изгиба и кручения определяется по эмпирической формуле

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \quad (10.8)$$

Очевидно, что вычисленный запас выносливости должен быть не менее нормативного.

Таблица 11

Эффективные коэффициенты концентрации напряжений k_{σ} , k_{τ}
для валов со шпоночными канавками

Эффективные коэффициенты концентрации k_{σ} , k_{τ}	Предел прочности материала σ_B , МПа						
	400	500	600	700	800	900	1000
k_{σ} - при изгибе	1,30	1,38	1,46	1,54	1,62	1,69	1,77
k_{τ} - при кручении	1,20	1,37	1,54	1,71	1,88	2,05	2,22

Таблица 12

Коэффициенты снижения предела выносливости вала
при прессовой посадке подшипника

Коэффициенты	Диаметр мм	Коэффициенты $k_{\sigma}/\epsilon_{\sigma}$ и k_{τ}/ϵ_{τ} для предела прочности материала σ_B , МПа						
		400	500	600	700	800	900	1000
$k_{\sigma}/\epsilon_{\sigma}$	30	2,25	2,50	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75
	50	2,75	3,05	3,36	3,66	3,96	4,28	4,60
	≥ 100	2,95	3,28	3,60	3,94	4,25	4,60	4,90
k_{τ}/ϵ_{τ}	30	1,75	1,90	2,05	2,20	2,35	2,50	2,65
	50	2,05	2,23	2,52	2,60	2,78	3,07	3,26
	≥ 100	2,17	2,37	2,56	2,78	2,95	3,16	3,34

Таблица 13

Значения коэффициентов чувствительности материала
к асимметрии цикла Ψ_{σ} , Ψ_{τ}

Материал	Ψ_{σ}	Ψ_{τ}
Углеродистая сталь $\sigma_B=400...500$ МПа	0,05	0,0
Углеродистая и легированная сталь $\sigma_B=500...800$ МПа	0,10 - 0,15	0,05
Легированная сталь $\sigma_B=800...1200$ МПа	0,15 - 0,20	0,05 - 0,10

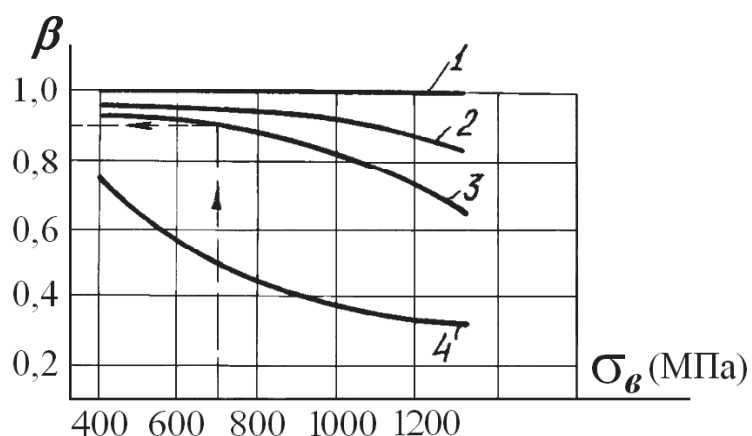


Рис. 44. Зависимость коэффициента качества обработки поверхности β от предела прочности материала
1 - зеркальное полирование; 2 - тонкое шлифование;
3 - тонкая обточка; 4 - наличие окалины

Таблица 14

Значение масштабного фактора $\epsilon_\sigma = \epsilon_\tau$
в зависимости от диаметра вала d

Материал	Коэффициенты $\epsilon_\sigma = \epsilon_\tau$ при диаметре d , мм					
	10	20	30	40	50	70
Углеродистая сталь $\sigma_B=400...500$ МПа	0,89	0,92	0,88	0,85	0,82	0,76
Углеродистая и легированная сталь $\sigma_B=500...800$ МПа	0,97	0,89	0,85	0,81	0,78	0,73
Легированная сталь $\sigma_B=800...1200$ МПа	0,95	0,86	0,82	0,77	0,74	0,69

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 10

Произвести проверку на усталостную прочность вала, рассмотренного в задаче № 9. В расчёте принять, что нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу, а касательные - по пульсационному.

Учесть факторы, снижающие предел выносливости: концентрацию напряжений, размеры и способ обработки поверхности детали. Нормативный запас усталостной прочности $[n] = 1,5$. Обработка поверхности вала – тонкая обточка.

Необходимые данные для проверочного расчёта вала взяты из условия задачи № 9.

1. Определение максимальных напряжений в сечении.

Для рассчитываемого вала опасным является сечение C , где моменты максимальные (рис. 41).

Диаметр вала был определен при решении предыдущей задачи № 9.

$$d = 66 \text{ мм} = 66 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Вычисляем моменты сопротивления сечения вала при его изгибе и кручении:

$$W_{изг} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi(66 \cdot 10^{-3})^3}{32} = 28,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{кр} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi(66 \cdot 10^{-3})^3}{16} = 56,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По эпюрам моментов (рис. 41 *в, ж, д*) находим крутящий и изгибающие моменты, действующие в сечении C : крутящий момент $M_k = 1,62 \text{ кНм}$; изгибающие моменты $M_x = 2,806 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и $M_y = 1,62 \text{ к}\cdot\text{Нм}$.

Максимальные нормальные напряжения от совместного действия изгибов в двух плоскостях:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W_{изг}} = \frac{\sqrt{(2,806 \cdot 10^3)^2 + (1,62 \cdot 10^3)^2}}{28,2 \cdot 10^{-6}} = 114 \cdot 10^6 \text{ Па} = 114 \text{ МПа}.$$

Максимальные касательные напряжения от кручения

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_{кр}} = \frac{1,62 \cdot 10^3}{56,4 \cdot 10^{-6}} = 28,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28,70 \text{ МПа}.$$

2. Определение характеристик циклических напряжений.

По условию задачи нормальные напряжения изменяются по симметричному циклу, следовательно

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma_{\max} = 114 \text{ МПа}; \quad r = -1.$$

Касательные напряжения изменяются по пульсационному циклу

$$\tau_m = \tau_a = 0,5\tau_{\max} = 0,5 \cdot 28,70 = 14,35 \text{ МПа}; \quad r = 0.$$

3. Механические характеристики материала.

Необходимые характеристики материала выписываются из табл.10 (в данном примере – из справочника): для стали марки Ст.50: $\sigma_T = 380 \text{ МПа}$; $\sigma_e = 700 \text{ МПа}$; $\sigma_{-1} = 300 \text{ МПа}$; $\tau_{-1} = 180 \text{ МПа}$.

4. Вычисление коэффициентов снижения предела выносливости.

Из табл. 11 – 14 выписываются коэффициенты, необходимые для расчёта. Сечение C является опорным, и концентрация напряжений создается прессовой посадкой подшипника.

Используя данные табл. 12 (при $\sigma_e = 700 \text{ МПа}$ и $d = 66 \text{ мм}$), путём линейной интерполяции находим

$$\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} = 3,70; \quad \frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}} = 2,65.$$

По рис. 44 определяем коэффициент влияния качества обработки поверхности при тонкой обточке:

$$\beta = 0,88.$$

Коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла берётся из табл. 14:

$$\psi_{\tau} = 0,05.$$

Коэффициенты снижения предела выносливости с учётом всех рассмотренных факторов имеют следующие значения:

$$k_{\sigma_{\partial}} = \frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}} + \frac{1}{\beta} - 1 = 3,7 + \frac{1}{0,88} - 1 = 3,84;$$

$$k_{\tau_{\partial}} = \frac{k_{\tau}}{\varepsilon_{\tau}} + \frac{1}{\beta} - 1 = 2,65 + \frac{1}{0,88} - 1 = 2,79.$$

5. Определение запаса усталостной прочности.

Запас усталостной прочности при изгибе и кручении:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{k_{\sigma_{\partial}} \sigma_a} = \frac{300}{3,84 \cdot 114} = 0,69;$$

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{k_{\tau_{\partial}} \tau_a + \psi_{\tau} \cdot \tau_m} = \frac{180}{2,79 \cdot 15 + 0,05 \cdot 14,35} = 4,23.$$

Запас усталостной прочности при совместном действии изгиба и кручения:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{0,69 \cdot 4,23}{\sqrt{0,69^2 + 4,23^2}} = 0,68 < [n] = 1,5.$$

Запас усталостной прочности вала не обеспечен, так как он меньше нормативного. Диаметр вала необходимо увеличить или ввести упрочняющую обработку.

Примечание. Если опасным является сечение, в котором насажен шкив, то концентрация напряжений создается за счет шпоночной канавки и для определения коэффициентов k_{σ} , k_{τ} , ε_{σ} и ε_{τ} нужно использовать табл.11 и 13.

ЗАДАЧА № 11

Для стального стержня длиной l , сжимаемого силой P , требуется:

1) подобрать размеры поперечного сечения стержня из условия его устойчивости при допуске напряжении на сжатие $[\sigma] = 160$ МПа (расчёт проводить методом последовательных приближений по коэффициенту снижения допускаемых напряжений на сжатие);

2) найти величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Числовые данные для расчёта следует взять из табл. 15, расчётные схемы – по рис. 45.

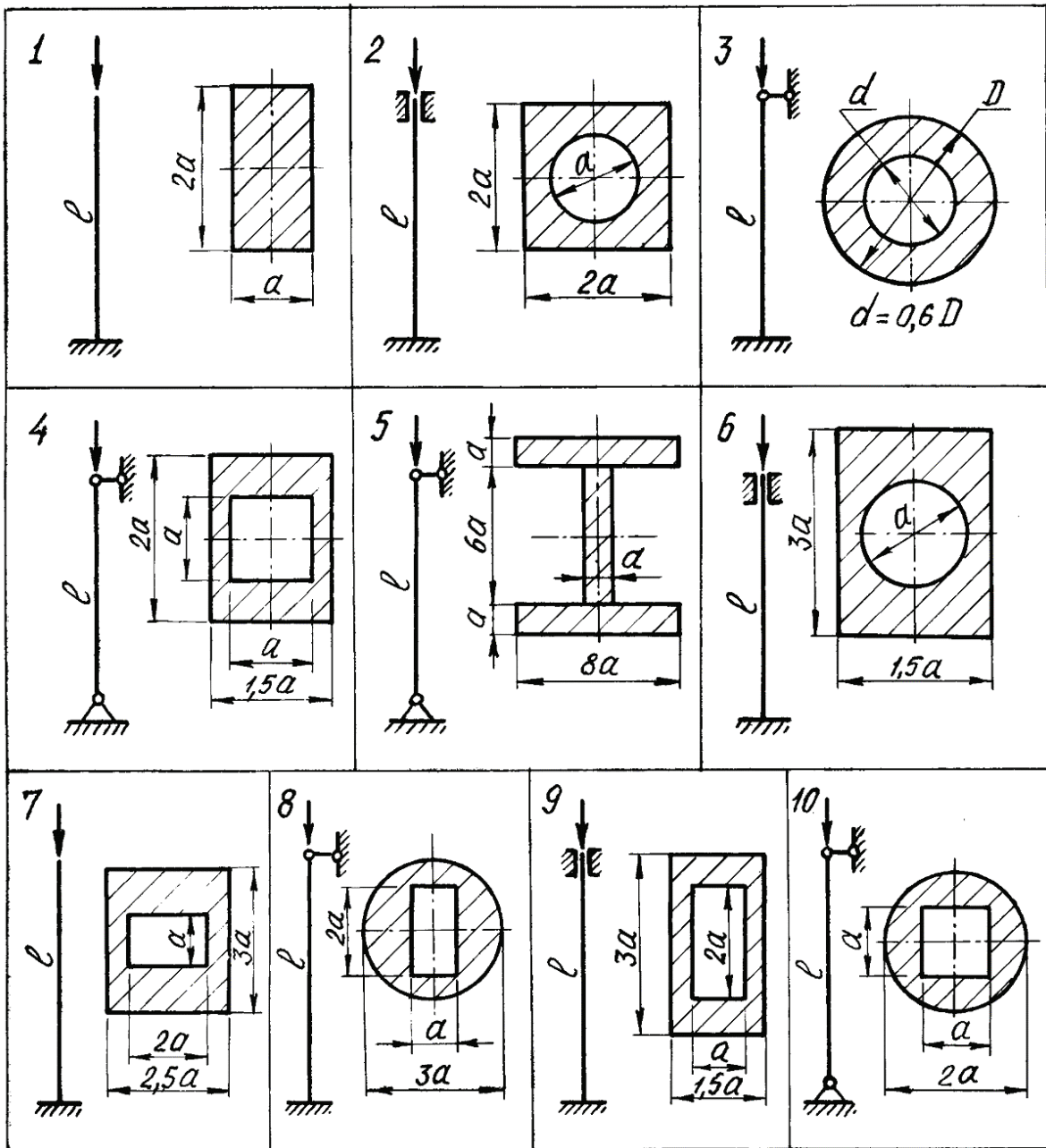


Рис. 45. Расчётные схемы сжатых стержней и их поперечные сечения

Числовые данные к задаче №11

Номер строки	Номер расч. схемы по рис. 45	Сила P , кН	Длина стержня l , м
1	1	500	2,5
2	2	480	3,9
3	3	450	2,8
4	4	300	3,2
5	5	350	2,7
6	6	370	3,5
7	7	360	3,0
8	8	460	2,7
9	9	370	2,6
0	10	400	3,1
	3	ж	б

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ № 11**Основные теоретические сведения и расчётные формулы**

При сжатии гибкого стержня осевой силой возможна потеря его устойчивости, при которой ось стержня искривляется и начальная прямолинейная форма равновесия нарушается. Минимальная сжимающая сила, превышение которой вызывает потерю устойчивости, называется *критической силой*.

При расчётах сжатых стержней на устойчивость встречаются следующие основные задачи:

1. Вычисление величины критической силы;
2. Определение допускаемого значения сжимающей силы;
3. Подбор сечения стержня по условию его устойчивости;
4. Определение запаса устойчивости стержня.

Величина критической силы вычисляется по формуле Эйлера или Ясинского в зависимости от гибкости рассматриваемого стержня.

Под *гибкостью* стержня понимается безразмерная величина, вычисляемая по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (11.1)$$

где l - длина стержня;

i_{\min} - минимальный радиус инерции поперечного сечения;

μ - коэффициент, зависящий от способа закрепления концов стержня. Его значения для наиболее распространенных способов закрепления приведены в табл. 16.

Формула Эйлера применима при условии, что критическое напряжение, равное $\frac{P_{кр}}{A}$, не превышает предела пропорциональности материала стержня. Обычно это условие выражается формулой

$$\lambda \geq \lambda_{нр}, \quad (11.2)$$

где $\lambda_{нр}$ - предельная гибкость стержня.

Для каждого материала $\lambda_{нр}$ определяется по выражению

$$\lambda_{нр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{нц}}}, \quad (11.3)$$

где E - модуль упругости материала;

$\sigma_{нц}$ - предел пропорциональности материала стержня.

Например, для стали марки Ст.3 при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $\sigma_{нц} = 200$ МПа предельная гибкость $\lambda_{нр} \approx 100$.

Если расчётная гибкость стержня больше или равна предельной, то для вычисления критической силы применяется формула Эйлера:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (11.4)$$

Если гибкость меньше предельной, то для вычисления критической силы используется эмпирическая формула, предложенная Ясинским:

$$P_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A \quad (11.5)$$

(для стали Ст.3 $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа).

Наряду с расчётами по формуле Эйлера или Ясинского при расчётах сжатых стержней на устойчивость широко применяется метод, в котором условие устойчивости сжатого стержня записывается в следующем виде:

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma]_y = \varphi \cdot [\sigma]_c, \quad (11.6)$$

где N - сжимающая сила;

A - площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma]_y$ - допускаемое напряжение при расчёте стержня на устойчивость;

$[\sigma]_c$ - допускаемое напряжение материала стержня при сжатии;

φ - коэффициент снижения допускаемого напряжения.

Величина коэффициента φ зависит от гибкости стержня λ и материала, из которого он изготовлен. Для малоуглеродистой стали (Ст.3) его можно

определить по табл. 17.

Таблица 16

**Коэффициенты приведения длины μ
в зависимости от способа закрепления концов стержня**





Схема закрепления				
Коэффициент μ	2	1	0,7	0,5

Таблица 17

**Величины коэффициентов φ для стали Ст. 3
в зависимости от гибкости λ**

λ	φ	λ	φ	λ	φ
0	1,00	70	0,81	140	0,36
10	0,99	80	0,75	150	0,32
20	0,96	90	0,69	160	0,29
30	0,94	100	0,60	170	0,26
40	0,92	110	0,52	180	0,23
50	0,89	120	0,45	190	0,21
60	0,86	130	0,40	200	0,199

Условие устойчивости позволяет найти допускаемое значение сжимающей силы:

$$P = N = A \cdot \varphi \cdot [\sigma]_{\text{сж}}. \quad (11.7)$$

Поскольку условие устойчивости включает в себя два параметра P и φ , зависящие друг от друга, при подборе сечения стержня следует использовать способ проб, заключающийся в том, что задаются значением одного из параметров, например φ , определяют из условия устойчивости площадь сечения, а затем проверяют, удовлетворяется ли условие

$$\frac{N}{A} = \varphi \cdot [\sigma]_{\text{сж}}.$$

Если условие удовлетворяется, то расчёт на этом заканчивается, если нет, то задаются новым значением φ^* и аналогичный расчёт повторяется до тех пор, пока условие устойчивости не будет удовлетворено.

Запас устойчивости n_y сжатого стержня

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} \quad (11.8)$$

показывает, во сколько раз критическая сила больше заданной или допускаемой.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ № 11

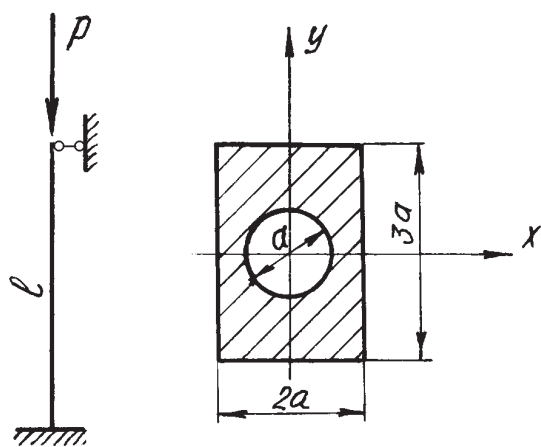


Рис. 46. Расчётная схема сжатого стержня и его поперечное сечение

Стальной стержень длиной $l = 2,8$ м заданной формы поперечного сечения сжимается силой $P = 411$ кН (рис. 46).

Требуется:

1) подобрать размеры поперечного сечения стержня (расчёт производить методом последовательных приближений по коэффициенту φ);

2) найти величину критической силы $P_{кр}$ и вычислить запас устойчивости стержня n_y . Материал стержня сталь Ст.3; допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma]_с = 160$ МПа.

1. Определение геометрических характеристик сечения стержня через искомый размер сечения a :

площадь сечения

$$A = 3a \cdot 2a - \frac{\pi a^2}{4} = 5,21 a^2;$$

размер a

$$a = \sqrt{\frac{A}{5,21}}.$$

Главные центральные моменты инерции

$$I_x = \frac{2a \cdot (3a)^3}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = 4,45a^4;$$

$$I_y = \frac{3a \cdot (2a)^3}{12} - \frac{\pi a^4}{64} = 1,95a^4.$$

Минимальный момент инерции

$$I_{\min} = I_y = 1,95a^4.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1,95a^4}{5,21a^2}} = 0,611a.$$

Для заданного варианта закрепления по табл. 16 выбирается коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$.

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,8}{0,611a} = \frac{3,21}{a}.$$

2. Подбор поперечного сечения стержня.

Из условия устойчивости площадь поперечного сечения

$$A \geq \frac{P}{\varphi \cdot [\sigma]_{\text{сж}}}.$$

Как указывалось выше, в условии устойчивости неизвестными величинами являются φ и A , которые можно найти методом последовательных приближений, для чего задается одна из неизвестных величин - φ .

Для первого приближения примем $\varphi_1 = 0,5$.

Тогда соответствующая площадь поперечного сечения стержня

$$A_1 = \frac{411 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 51,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Находим параметр a :

$$a_1 = \sqrt{\frac{A_1}{5,21}} = \sqrt{\frac{51,4 \cdot 10^{-4}}{5,21}} = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Проверяем, соответствует ли допускаемая нагрузка для подобранного сечения заданной силе.

Гибкость стержня при $a_1 = 3,14 \cdot 10^{-2} \text{ м}$

$$\lambda = \frac{3,21}{a_1} = \frac{3,21}{3,14 \cdot 10^{-2}} = 102.$$

По табл. 17 следует найти соответствующий коэффициент φ . Значения $\lambda = 102$ в таблице нет, поэтому искомое значения коэффициента φ определяется линейной интерполяцией:

$$\begin{aligned} \text{при } \lambda = 100 & \quad \varphi_{100} = 0,60; \\ \text{при } \lambda = 110 & \quad \varphi_{110} = 0,52; \end{aligned}$$

$$\varphi_1^* = \varphi_{102} = \varphi_{100} - \frac{\varphi_{100} - \varphi_{110}}{10} (102 - 100) = 0,6 - \frac{0,6 - 0,52}{10} \cdot 2 = 0,584.$$

Соответствующая допускаемая сила

$$P_{\text{дон}_1} = \varphi_1^* \cdot A_1 \cdot [\sigma] = 0,584 \cdot 51,4 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 480,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 480,3 \text{ кН}.$$

Расхождение между заданной силой и полученной

$$\frac{|P_{зад} - P_{дон1}|}{P_{зад}} 100\% = \frac{|411 - 480,3|}{411} 100\% = 16,9\%.$$

Подобранное сечение не удовлетворяет условию устойчивости, так как допустимое расхождение между силами заданной и полученной расчётным путем не должно превышать 5 %.

Вычисления повторяются ещё раз.

Второе приближение: новое значение коэффициента φ_2 определяется по выражению:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,584}{2} = 0,542.$$

Все вычисления, выполненные при первом приближении, повторяются, но при новом значении $\varphi = \varphi_2$:

$$A_2 = \frac{411 \cdot 10^3}{0,542 \cdot 160 \cdot 10^6} = 47,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad a_2 = 3,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \lambda = 106;$$

$$\varphi_2^* = 0,6 - \frac{(0,6 - 0,52) \cdot 6}{10} = 0,552;$$

$$P_{дон2} = \varphi_2^* \cdot A_2 \cdot [\sigma] = 0,552 \cdot 47,4 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^3 = 418,6 \text{ кН};$$

$$\frac{|P_{зад} - P_{дон2}|}{P_{зад}} 100\% = \frac{|411 - 418,6|}{411} 100\% = 1,85\% < 5\%.$$

Расхождение между силами составляет менее 5 %, что приемлемо. Тогда искомым размер $a = a_2 = 3,02 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,02 \text{ см}$.

3. Определение критической силы.

Для подобранного сечения расчётная гибкость стержня

$$\lambda = \frac{3,21}{a} = \frac{3,21}{3,02 \cdot 10^{-2}} = 106,3.$$

Предельная гибкость для стали марки Ст.3 равна 100, поэтому критическую силу следует вычислять по формуле Эйлера, так как $\lambda > \lambda_{пр}$.

Минимальный момент инерции принятого сечения стержня

$$I_{\min} = I_y = 1,95a^4 = 1,95 \cdot 3,02^4 = 162 \text{ см}^4.$$

Критическая сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 162 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 2,8)^2} = 862 \cdot 10^3 \text{ Н} = 862 \text{ кН}$$

Запас устойчивости сжатого стержня:

$$n_y = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{862}{411} = 2,10.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

*Сортамент прокатной стали
и
геометрические характеристики
некоторых плоских сечений*

Номер профи- ля	Размеры			Пло- щадь сечения A	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								Z_0	
	b	d	R			r	$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_l-x_l		
							I_x	i_x	$I_{x0\max}$	$i_{x0\max}$	$I_{y0\min}$	$i_{y0\min}$			I_{xl}
4	40	5,0	1,7	3	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09		
				4	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13		
				5	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17		
4,5	45	5,0	1,7	3	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21		
				4	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26		
				5	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30		
5	50	5,5	1,8	3	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33		
				4	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38		
				5	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42		
5,6	56	6,0	2,0	4	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52		
				5	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57		
				6	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78		
6,3	63	7,0	2,3	4	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69		
				5	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74		
				6	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78		
7	70	8	2,7	4,5	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88		
				5	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90		
				6	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94		
				7	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99		
				8	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02		

Номер профи- ля	Размеры				Пло- щадь сечения A	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								z_0
	b	d	R	r			$x-x_0$		y_0-y_0		x_1-x_1	z_0			
							I_x	i_x	$I_{x0\ max}$	$i_{x0\ max}$			$I_{y0\ min}$	$i_{y0\ min}$	
7,5	75	5	9	3,0	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	
		6			8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	
		7			10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	
		8			11,5	9,02	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	
		9			12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	
8	80	5,5	9	3,0	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	
		6			9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	
		7			10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	
		8			12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	
9	90	6	10	3,3	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	
		7			12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	
		8			13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	
		9			15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55	
		6,5			12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	
10	100	7	12	4,0	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	
		8			15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	
		10			19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	
		12			22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	
		14			26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	
		16			29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	
11	110	7	12	4,0	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	
		8			17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	

Продолжение табл. П1

Номер профи- ля	Размеры				Пло- щадь сечения A $см^2$	Масса 1 м длины $кг$	Справочные величины для осей								Z_0 $см$
	b	d	R	r			$x-x$		x_0-x_0		y_0-y_0		x_l-x_l		
							I_x	i_x	$I_{x0\ max}$	$i_{x0\ max}$	$I_{y0\ min}$	$i_{y0\ min}$			
							$см^4$	$см$	$см^4$	$см$	$см^4$	$см$			
$мм$															
12,5	8				19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	
	9				22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	
	10		14	4,6	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	
	12				28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	
	14				33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	
	16				37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	
14	9				24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	
	10		14	4,6	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	
	12				32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	
16	10				31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	
	11				34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	
	12				37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	
	14		16	5,3	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	
	16				49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	
	18				54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	
18	20				60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	
	11		16	5,3	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	
	12				42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	

Продолжение табл. П1

Номер профи- ля	Размеры			Пло- щадь сечения <i>A</i>	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								<i>z₀</i>
	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>			<i>r</i>	<i>x-x</i>		<i>x₀-x₀</i>		<i>y₀-y₀</i>		<i>x₁-x₁</i>	
							<i>I_x</i>	<i>i_x</i>	<i>I_{x0 max}</i>	<i>i_{x0 max}</i>	<i>I_{y0 min}</i>	<i>i_{y0 min}</i>		
	мм					кг	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	см	см ⁴	
20	12				37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	
	13				39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	
	14				42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	
	16	18		6,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	
	20				60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	
	25				74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	
22	30				87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	
	14	21		7,0	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	
25	16				53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	
	16				61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	
	18				68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	
	20				76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	
	22	24		8	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	
	25				94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	
25	28				104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	
	30				111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	

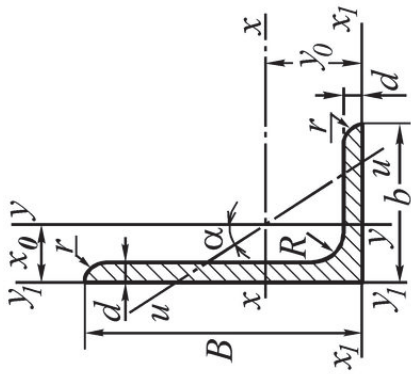


Таблица П2

Сталь прокатная угловая неравнополочная. ГОСТ 8510-72

Номер про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния A	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								Угол наклона оси $\text{tg}\alpha$		
	B	b	d	R			$x - x_1$		$y - y_1$		$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$			$u - u$	
	мм						I_x	i_x	I_y	i_y	I_{x1}	y_0	I_{y1}	x_0		$I_{u \text{ min}}$	$i_{u \text{ min}}$
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	0,91	0,70	0,44	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,17	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
		4	4	4	1,52	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374		
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,48	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
		4	4	4	1,94	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381		
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	1,68	4,41	1,43	1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
		4	4	4	2,20	1,42	1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379		
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	1,90	6,17	1,60	1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
		4	4	4	2,49	1,59	2,56	0,90	16,6	1,85	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401		

Номер про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния A	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей																
	B	b	d	R			r	$x-x$			$y-y$			x_1-x_1			y_1-y_1			$u-u$		Угол наклона оси $\text{tg}\alpha$	
								I_x	i_x	I_y	i_y	I_{x1}	I_{y1}	x_0	$I_{u\ min}$	$i_{u\ min}$	$с\text{м}^4$	$с\text{м}$	$с\text{м}^4$	$с\text{м}$	$с\text{м}^4$		$с\text{м}$
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	2,81	1,78	3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406						
			5			4,41	3,46	1,77	4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404						
6,3/4,0	63	40	4			4,04	3,17	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397						
			5	7,0	2,3	4,98	3,91	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,8	0,95	3,72	0,86	0,396						
			6			5,90	4,63	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,1	0,99	4,36	0,86	0,393						
			8			7,68	6,03	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,9	1,07	5,58	0,85	0,386						
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	4,39	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406						
			5			6,11	4,79	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436						
7,5/5	75	50	6	8	2,7	7,25	5,69	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435						
			8			9,47	7,43	2,35	18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,9	1,07	0,430						
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	2,56	12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387						
			6			7,55	5,92	2,55	14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386						
9/5,6	90	56	5,5			7,86	6,17	2,88	19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384						
			6	9	3	8,54	6,70	2,88	21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384						
			8			11,18	8,77	2,85	27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380						
			6			9,59	7,53	3,2	30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393						
10/6,3	100	63	7	10	3,3	11,1	8,70	3,19	35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392						
			8			12,6	9,87	3,18	39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391						
			10			15,5	12,1	3,15	47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387						
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,4	8,98	3,53	45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402						
			8			13,9	10,9	3,51	54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400						

Продолжение табл. П2

Номер про- филя	Размеры				Пло- щадь сече- ния <i>A</i>	Масса 1 м длины	Справочные величины для осей								Угол наклона оси $tg\alpha$			
	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>			<i>r</i>	<i>x - x</i>		<i>y - y</i>		<i>x₁ - x₁</i>		<i>y₁ - y₁</i>		<i>u - u</i>		
								<i>I_x</i>	<i>i_x</i>	<i>I_y</i>	<i>i_y</i>	<i>I_{x1}</i>	<i>y₀</i>	<i>I_{y1}</i>		<i>x₀</i>	<i>I_{u min}</i>	<i>i_{u min}</i>
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,1	11,0	73,7	2,29	452	4,01	119	1,80	43,4	1,76	0,407		
			8	11		16,0	12,5	83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406		
			10			19,7	15,5	100	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404		
			12			23,4	18,3	117	2,24	781	4,22	210	2,00	69,5	1,72	0,400		
14/9	140	90	8	12	4	18,0	14,1	120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411		
			10			22,2	17,5	146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409		
			9			22,9	18	186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,20	0,391		
16/10	160	100	10	13	4,3	25,3	19,8	204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390		
			12			30,0	23,6	239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388		
			14			34,7	27,3	272	2,80	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385		
18/11	180	110	10	14	4,7	28,3	22,2	276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375		
			12			33,7	26,4	324	3,10	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374		
			11			34,9	27,4	446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75	0,392		
20/12,5	200	125	12	14	4,7	37,9	29,7	482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74	0,392		
			14			43,9	34,4	551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73	0,390		
			16			49,8	39,1	617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72	0,388		
			12			48,3	37,9	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54	0,410		
25/16	250	160	16	18	6,0	63,6	49,9	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50	0,408		
			18			71,1	55,8	1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49	0,407		
			20			78,5	61,7	1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48	0,405		

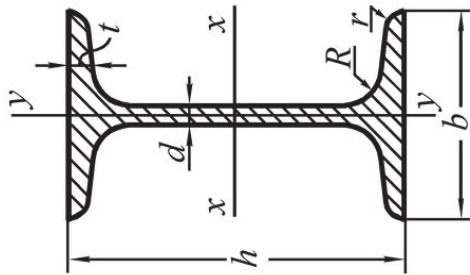


Таблица ПЗ

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. ГОСТ 8239-72

Номер профиля	Масса 1 м длины	Размеры					Площадь сечения A	Справочные величины для осей							
		h	b	d	t	R		r	$x-x$			$y-y$			
									I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y
	кг			мм					$см^2$	$см^4$	$см^3$	$см$	$см^4$	$см^3$	$см$
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9	3,5	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07

Номер про- филя	Масса 1 м длины	Размеры						Пло- щадь сече- ния A	Справочные величины для осей					
		мм							x-x			y-y		
		h	b	d	t	R	r		I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y
	кг						$см^2$	$см^4$	$см^3$	$см$	$см^3$	$см^4$	$см^3$	$см$
20а	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4	28,9	2030	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	2550	9,13	131	157	28,6	2,27
22а	25,8	220	120	5,4	8,9	10	4	32,8	2790	9,22	143	206	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	3460	9,97	163	198	34,5	2,37
24а	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4	37,5	3800	10,1	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11	4,5	40,2	5010	11,2	210	260	41,5	2,54
27а	33,9	270	135	6,0	10,2	11	4,5	43,2	5500	11,3	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	7080	12,3	268	337	49,9	2,69
30а	39,2	300	145	6,5	10,7	12	5	49,9	7780	12,5	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13	5	53,8	9840	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	13380	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13,0	15	6	72,6	19062	16,20	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16	7	84,7	27696	18,10	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	17	7	100	39727	19,90	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	18	7	118	55962	21,80	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	20	8	138	76806	23,60	1491	1725	182	3,54

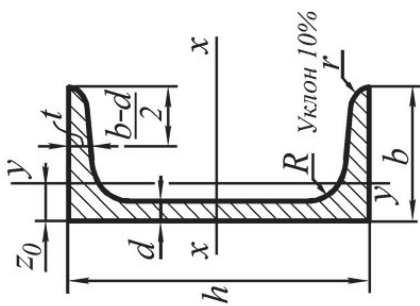


Таблица П4

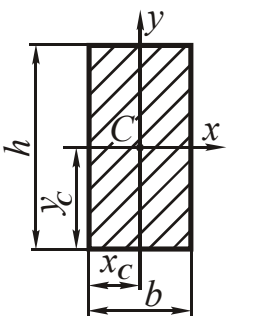
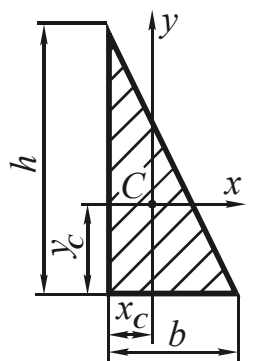
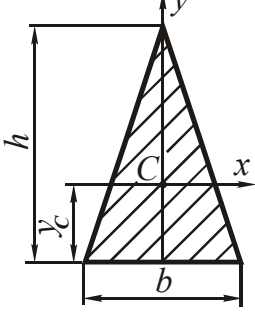
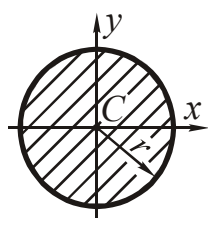
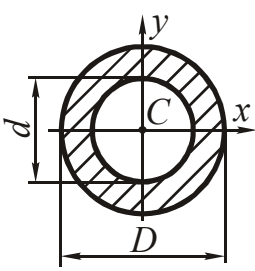
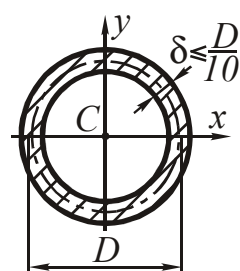
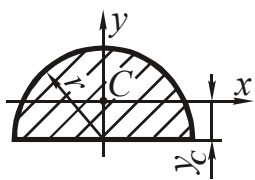
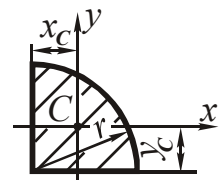
Сталь горячекатаная. Швеллеры с уклоном внутренних граней полок. ГОСТ 8240-72

Номер профиля	Масса 1м длины кг	Размеры						Площадь сечения A $см^2$	Справочные величины для осей						
		мм							x-x			y-y			z_0 см
		h	b	d	t	R	r		I_x $см^4$	W_x $см^3$	i_x см	S_x $см^3$	I_y $см^4$	W_y $см^3$	
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5	6,16	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14а	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17,0	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80

Продолжение табл. П4

Номер профиля	Масса 1м длины	Размеры					Площадь сечения A	Справочные величины для осей									
		h	b	d	t	R		r	x-x			y-y					
									I_x	W_x	i_x	S_x	I_y	W_y	i_y	z_0	
	кг	мм					см^2	см^4	см^3	см	см^4	см^3	см	см^4	см^3	см	см
16а	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	
20а	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	
22а	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	
24а	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	

Геометрические характеристики плоских сечений

	$x_c = \frac{1}{2}b;$ $y_c = \frac{1}{2}h;$ $A = bh;$ $I_x = \frac{bh^3}{12};$ $I_y = \frac{hb^3}{12}.$		$x_c = \frac{1}{3}b;$ $y_c = \frac{1}{3}h;$ $A = \frac{1}{2}bh;$ $I_x = \frac{bh^3}{36};$ $I_y = \frac{hb^3}{36}.$
	$y_c = \frac{1}{3}h;$ $A = \frac{1}{2}bh;$ $I_x = \frac{bh^3}{36};$ $I_y = \frac{hb^3}{48}.$		$A = \pi r^2;$ $I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4};$ $I_\rho = \frac{\pi r^4}{2};$ $W_\rho = \frac{\pi r^3}{2}.$
	$\alpha = \frac{d}{D};$ $A = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2);$ $I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4);$ $I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4);$ $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4).$		$I_\rho = \frac{\pi D^3 \delta}{4};$ $W_\rho = \frac{\pi D^2 \delta}{2}.$
 <p>$y_c = 0,424r$</p>	$A = \frac{\pi r^2}{2};$ $I_x = 0,11r^4;$ $I_y = \frac{\pi r^4}{8}.$		$x_c = y_c =$ $= 0,424r;$ $A = \frac{\pi r^2}{4};$ $I_x = I_y = 0,055r^4.$