Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра механики

И. А. Куприянов, Н. А. Масленников

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Сборник заданий и методические указания к расчетно-графическим работам

для студентов направления 08.03.01 Строительство

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2019

УДК 531.2:624.04
ББК 22.31
С 64

Рецензент: канд. тех. наук, доцент Корихин Н. В. (СПбПУ)

Сопротивление материалов. Сборник заданий и методические указания к расчетно-графическим работам. Учебное пособие / Сост. И. А. Куприянов, Н. А. Масленников. – СПбГАСУ, – СПб.: ИД «Петрополис», 2019. – 86 с.

Приводятся варианты заданий и примеры выполнения расчетно-графических работ. Даются необходимые комментарии и пояснения. Выполнение расчетно-графических работ позволяет студенту получить необходимые навыки в области расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Предназначено для студентов дневной и вечерней формы обучения по направлению 08.03.01 – Строительство.

Табл. 18. Рис. 50. Библиогр.: 8 назв.

Рекомендовано в качестве учебного пособия учебно-методической комиссией Строительного факультета СПбГАСУ.

ISBN 978-5-9676-1038-7

Содержание расчётно-графических работ

РГР № 1. Осевое растяжение и сжатие. Расчеты на прочность и жесткость растянутых и сжатых стержней.

Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в брусе. Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений и деформаций.

Задача № 1.2. Расчёт на прочность и жёсткость стержня, поддерживающего в равновесии брус абсолютной жёсткости.

Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении и сжатии.

РГР № 2. Определение геометрических характеристик плоских поперечных сечений.

Задача № 2.1. Определение геометрических характеристик поперечного сечения, имеющего одну ось симметрии, составленного из простых геометрических фигур.

Задача № 2.2. Определение геометрических характеристик сечения, имеющего одну ось симметрии, составленного из профилей прокатной стали.

РГР № 3. Плоское напряженное состояние.

РГР № 4. Кручение. Подбор сечения круглого стержня (вала).

РГР № 5. Плоский изгиб прямого бруса.

РГР № 6. Сложное сопротивление.

Задача № 6.1. Изгиб с кручением. Расчет вала на прочность и жесткость.

Задача № 6.2. Косой изгиб. Определение несущей способности и перемещений в балке, испытывающей косой изгиб.

Задача № 6.3. Внецентренное сжатие. Определение несущей способности колонны. Построение ядра сечения.

РГР № 7. Устойчивость центрально-сжатых стержней.

Задача № 7.1. Определение величины критической силы для центрально сжатого стержня.

Задача № 7.2. Подбор поперечного сечения центрально сжатого стержня.

Порядок получения индивидуального задания

Исходные данные для выполнения каждой работы студент выписывает из приведённых в каждом задании таблиц и схем в соответствии со своим шифром. Шифром являются три последних цифры номера зачётной книжки или студенческого билета. Например, номер зачётной книжки 18549: первая цифра шифра – 5, вторая – 4, третья – 9.

Общие требования к оформлению расчётно-графических работ

Расчётно-графическая работа выполняется на стандартных листах писчей бумаги (формат А-4). Заполняется только одна сторона листа (см. приложение 3, стр. 42).

На титульном листе указываются номер и название работы, фамилия, имя и отчество студента, номер группы и специальность, индивидуальный шифр. Работа должна быть сброшюрована.

Расчётная схема изображается в масштабе длин. На ней указываются все необходимые данные в численном виде (размеры, нагрузки и др.), которые выписываются из таблиц. Все расчёты приводятся в краткой форме.

Небрежно выполненные и выполненные не по шифру работы к проверке не принимаются.

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Осевое растяжение и сжатие. Расчёты на прочность и жёсткость центрально растянутых и сжатых стержней

Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в брусе. Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений и деформаций.

Задача № 1.2. Расчёт на прочность и жёсткость стержня, поддерживающего в равновесии брус абсолютной жёсткости.

Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении и сжатии.

Задача № 1.1. Определение усилий, напряжений и деформаций в брусе. Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений и деформаций

Задание: Определить продольные силы, нормальные напряжения и деформации в брусе. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений, относительных ε и абсолютных Δl деформаций. Определить удлинение (укорочение) свободного конца стержня.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 1.1 и схемам, представленным на рис. 1.1. Принять значение модуля продольной упругости равным $E = 1 \cdot 10^4$ МПа.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему стержня с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить на каждом участке стержня величину продольных сил и построить эпюру N.

3. Определить нормальные напряжения на каждом участке. Построить эпюру нормальных напряжений σ.

4. Определить относительную деформацию на каждом участке. Построить эпюру относительных деформаций ε.

5. Определить абсолютное удлинение (укорочение) на каждом участке. Построить эпюру абсолютных деформаций Δl. Определить общее абсолютное удлинение (укорочение) бруса.

Таблица 1.1.

Первая цифра шифра	A_1 см²	F_1 кН	l_1 см	Вторая цифра шифра	A_2 см²	F_2 кН	l_2 см	Третья цифра шифра (№схемы)	A_3 см²	F_3 кН	F_4 кН	l_3 см	a см	b см
0	4	60	10	0	9	150	7	0	14	160	0	14	3	4
1	5	50	12	1	10	140	6	1	15	0	80	12	4	3
2	6	70	14	2	11	130	8	2	16	170	0	15	2	5
3	7	80	16	3	12	120	9	3	17	0	90	16	2	2
4	8	90	8	4	13	110	10	4	18	150	0	8	3	4
5	4	110	6	5	9	90	11	5	20	0	100	10	4	3
6	5	120	9	6	10	100	12	6	18	140	0	8	5	2
7	6	130	11	7	11	80	14	7	16	0	110	6	2	5
8	7	140	12	8	12	70	15	8	14	135	0	10	3	4
9	8	150	10	9	13	60	16	9	19	0	70	12	4	3

Пример решения задачи № 1.1: Определить продольные силы, напряжения и деформации в брусе. Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений, относительных и абсолютных деформаций.

Размеры участков и нагрузки показаны на рисунке. Площади поперечных сечений равны: $A_1 = 4$ см², $A_2 = 2$ см², $A_3 = 5$ см².

• Определяем опорную реакцию в опоре А:

$\sum X = 0;\ -10 + 35 - 40 + 20 - R_a = 0;\ R_a = 5$ кН.

• Определяем величину продольных сил на каждом участке по формуле:

$N_i = \sum F_i^{\text{отс}}$: $N_1 = 0$; $N_1 = 10$ кН; $N_3 = 10 - 35 = -25$ кН.

$N_4 = 10 - 35 + 40 = 15$ кН; $N_5 = -5 + 20 = 15$ кН; $N_6 = -5$ кН.

Строим эпюру N в кН.

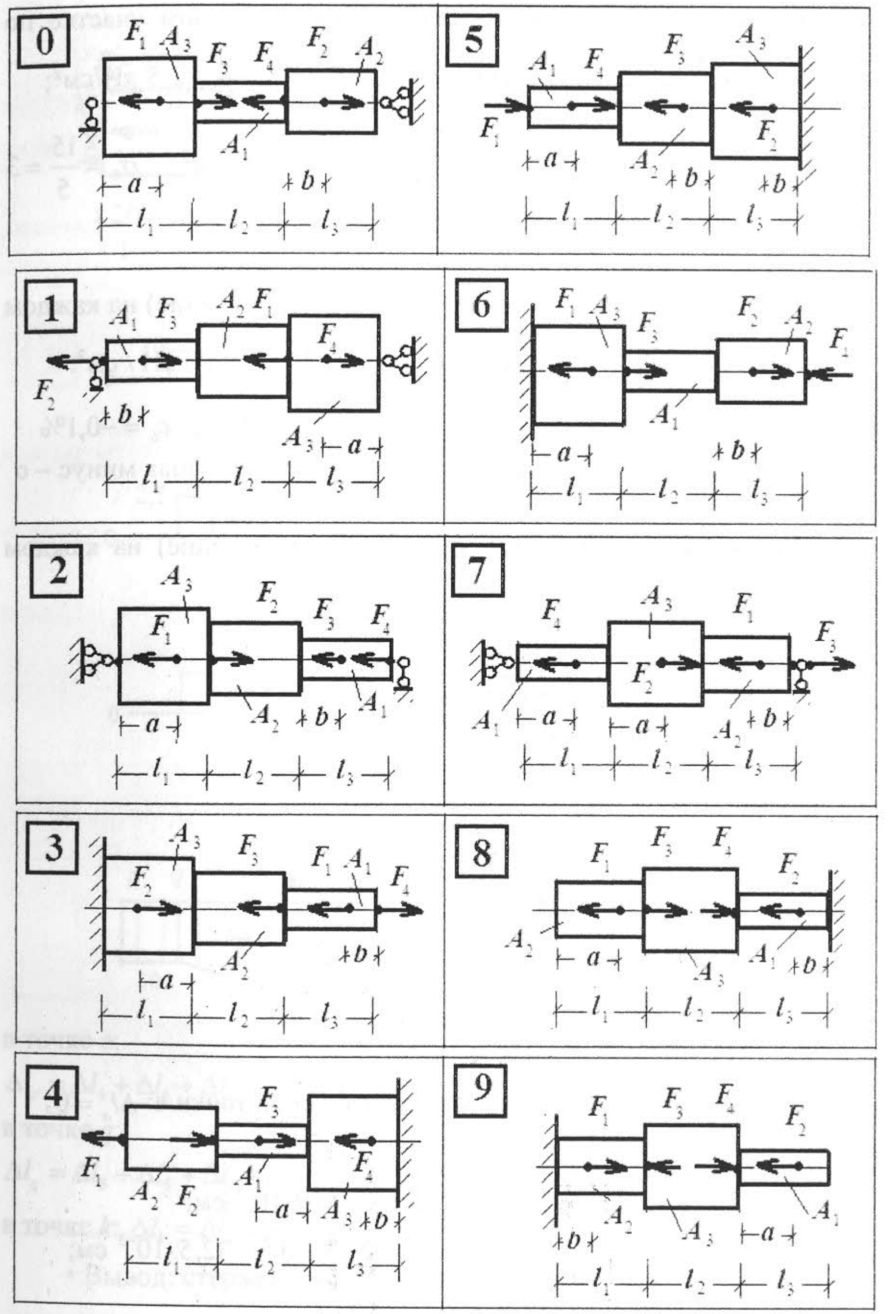


Рис. 1.1.

• Определяем нормальные напряжения на каждом участке по формуле $\sigma = \dfrac{N_i}{A_i}$ и строим эпюру σ: $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$ кН/см²;

$\sigma_3 = \dfrac{-25}{2} = -12{,}5$ кН/см²; $\sigma_4 = \dfrac{15}{2} = 7{,}5$ кН/см²; $\sigma_5 = \dfrac{15}{5} = 3$ кН/см²; $\sigma_6 = \dfrac{-5}{5} = -1$ кН/см²;

• Определяем относительное удлинение (укорочение) на каждом участке по формуле: $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} \cdot 100\%$; $E = 1 \cdot 10^4$ МПа $=1000$ кН / см²:

$\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_2 = 0{,}25\%$; $\varepsilon_3 = -1{,}25\%$; $\varepsilon_4 = 0{,}75\%$; $\varepsilon_5 = 0{,}3\%$; $\varepsilon_6 = -0{,}1\%$

Знак плюс говорит о том, что стержень растянут, знак минус – о том, что стержень сжат.

• Определяем абсолютное удлинение (укорочение) на каждом участке по формуле $\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}$:

на участке №1: $\Delta l_1 = 0$;

на участке №2: $\Delta l_2 = \dfrac{10 \cdot 5}{1000 \cdot 4} = 12{,}5 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №3: $\Delta l_3 = \dfrac{-25 \cdot 6}{1000 \cdot 2} = -75 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №4: $\Delta l_4 = \dfrac{15 \cdot 3}{1000 \cdot 2} = 22{,}5 \cdot 10^{-3}$ см;

на участке №5: $\Delta l_5 = \dfrac{15 \cdot 4}{1000 \cdot 5} = 12 \cdot 10^{-3}$ см;

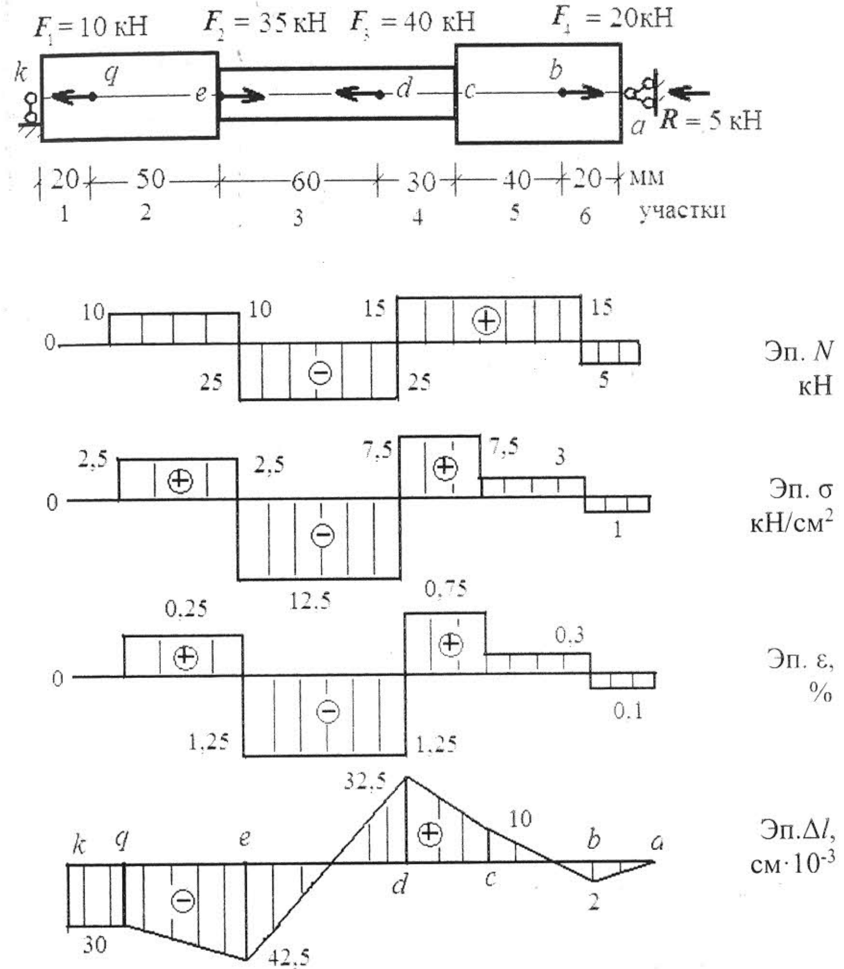
на участке №6: $\Delta l_6 = \dfrac{-5 \cdot 2}{1000 \cdot 5} = -2 \cdot 10^{-3}$ см.

• Строим эпюру Δl начинаем с неподвижной точки а: $\Delta l_a = 0$;

в точке b: $\Delta l_b = \Delta l_6 = -2 \cdot 10^{-3}$ см;

в точке c: $\Delta l_c = \Delta l_6 + \Delta l_5 = -2 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3}$ см;

в точке d: $\Delta l_d = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 = 10 \cdot 10^{-3} + 22{,}5 \cdot 10^{-3} = 32{,}5 \cdot 10^{-3}$ см;



в точке e:

$\Delta l_e = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 + \Delta l_3 = 32{,}5 \cdot 10^{-3} - 75 \cdot 10^{-3} = -42{,}5 \cdot 10^{-3}$ см;

в точке q:

$\Delta l_q = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 = -42{,}5 \cdot 10^{-3} + 12{,}5 \cdot 10^{-3} = -30 \cdot 10^{-3}$ см;

в точке k: $\Delta l_k = \Delta l_q = -30 \cdot 10^{-3}$ см, так как $\Delta l_1 = 0$.

• Вывод: стержень укоротился на 0,03 см.

Задача № 1.2. Расчёт на прочность и жёсткость стержня, поддерживающего в равновесии брус абсолютной жёсткости

Задание: Из условия прочности на растяжение (сжатие) подобрать сечение стержня *AC* из стали уголковой равнополочной. Определить удлинение стержня *AC*

Исходные данные к задаче определить по таблице 1.2 и схемам, представленным на рис. 1.2. Принять значения: расчётного сопротивления материала R = 240 МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$, модуля продольной упругости $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.
2. Удалить стержень *AC,* заменив его усилием N_{AC} . Определить усилие N_{AC}.
3. Из условия прочности подобрать сечение стержня *AC* из стали уголковой равнополочной.
4. Определить удлинение стержня *AC.*

Таблица 1.2

Первая цифра шифра	F кН	α°	Вторая цифра шифра	q кН/м	l_1 м	Третья цифра шифра (№ схемы)	l_2 м
0	20	30	0	20	1	0	2
1	30	45	1	12	2	1	1
2	80	60	2	10	1	2	2
3	40	30	3	12	2	3	1
4	60	45	4	20	1	4	2
5	50	60	5	14	2	5	1
6	40	30	6	10	1	6	2
7	60	45	7	20	2	7	1
8	80	60	8	10	1	8	2
9	50	30	9	20	2	9	1

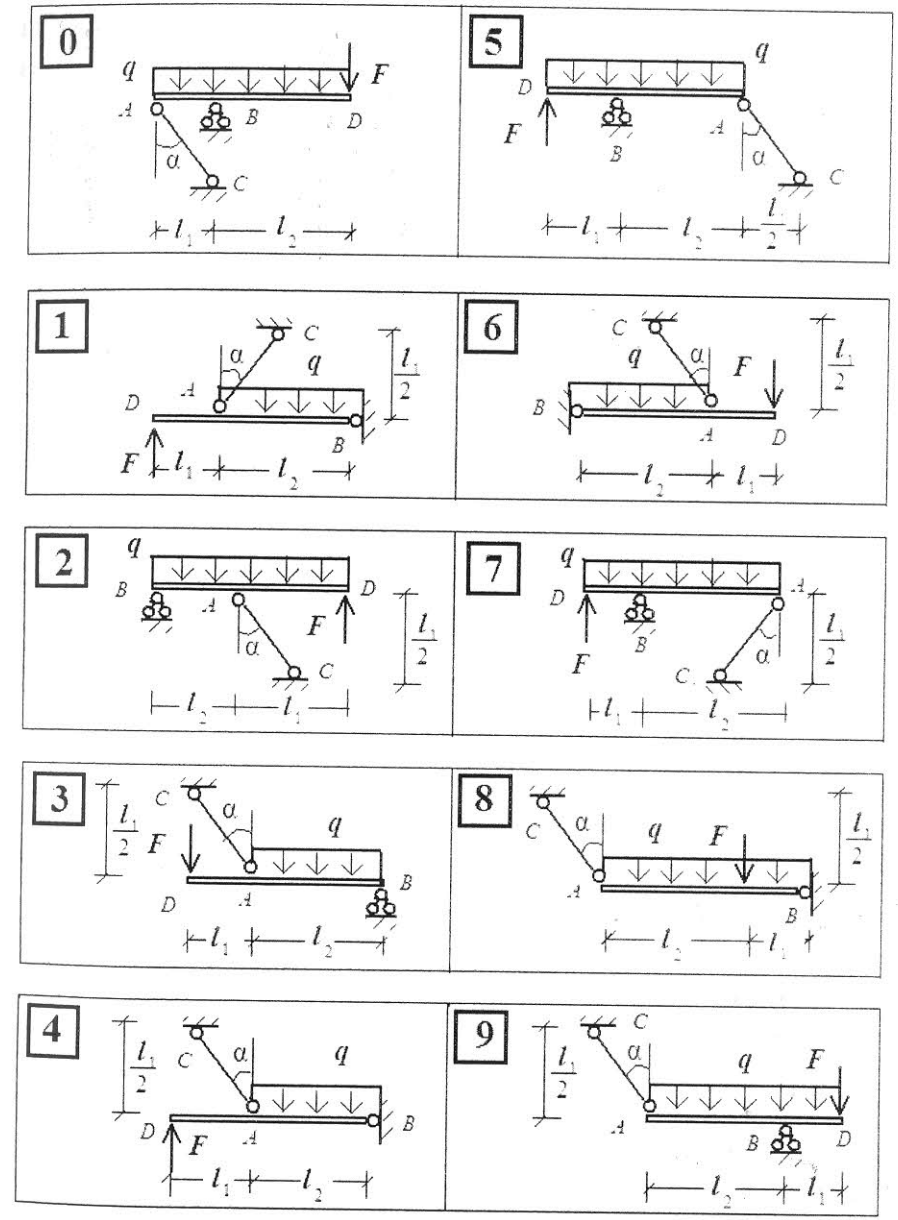
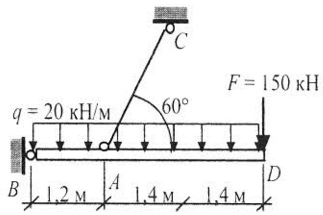


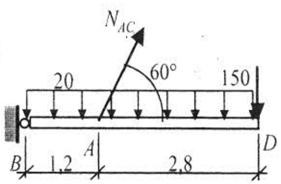
Рис. 1.2

Пример решения задачи № 1.2: Брус абсолютной жёсткости BD поддерживается стержнем AC. Подобрать сечение стержня AC из стали уголковой равнополочной. $F = 150$ кН; $q = 20$ кН/м; $\gamma_c = 1$; $R =$ 240 МПа, $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа.

• Определяем усилие в стержне AC:

$\sum M_B = 0$; $-N_{AC} \cdot \sin 60^\circ \cdot 1{,}2 + F \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0$; $N_{AC} = 731{,}33$ кН.





• Условие прочности: $\sigma = \dfrac{N_{AC}}{A} \le \gamma_c R$; $R = 240$ МПа $= 24$ кН/см^2.

$\gamma_c = 1$; $A \ge \dfrac{N_{AC}}{R}$ $A \ge \dfrac{731{,}33}{24} = 30{,}47$ см^2.

Принимаем 2 уголка $\llcorner 10 \times 10 \times 8$; $A = 2 \cdot 15{,}6 = 31{,}2$ см^2 (см. сортамент проката).

• Определяем длину стержня AC: $l_{AC} = \dfrac{1{,}4}{\cos 60^\circ} = 2{,}8$ м $= 280$ см.

Определяем удлинение стержня AC:
$E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа $= 2{,}06 \cdot 10^4$ кН/см^2,

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{EA} = \frac{731{,}33 \cdot 280}{2{,}06 \cdot 10^4 \cdot 31{,}2} = 0{,}32\text{см}.$$

Задача № 1.3. Расчет статически неопределимого стержня при растяжении-сжатии

Задание: Определить продольные силы и нормальные напряжения в статически неопределимом брусе. Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 1.3 и схемам, представленным на рис. 1.3. Принять значение модуля продольной упругости равным $E = 1 \cdot 10^5$ МПа.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе длин расчётную схему стержня с указанием размеров и нагрузки.

2. Записать уравнения равновесия стержня под действием нагрузки и реакций опор.

3. Составить условие совместности деформаций участков стержня.

4. Записать физические соотношения в форме закона Гука для каждого участка стержня.

5. Решив совместно полученную систему уравнений, определить реакции опор и усилия на каждом участке. Построить эпюру продольных сил.

6. Вычислить нормальные напряжения на каждом участке и построить их эпюру.

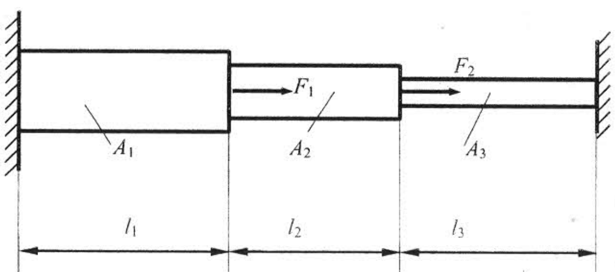


Рис. 1.3.

Таблица 1.3

Первая цифра шифра	A_1 см²	F_1 кН	F_2 кН	Вторая цифра шифра	A_3 см²	l_1 см	l_2 см	Третья цифра шифра (№ схемы)	A_2 см²	l_3 см
0	4	60	0	0	8	15	7	0	14	14
1	15	0	120	1	10	14	6	1	5	12
2	6	–70	0	2	12	13	8	2	16	15
3	17	0	100	3	7	12	9	3	7	16
4	8	90	0	4	13	11	10	4	18	8
5	14	0	–60	5	9	9	11	5	20	10
6	5	120	0	6	10	10	12	6	8	8
7	16	0	110	7	15	8	14	7	16	6
8	7	–80	0	8	6	7	15	8	14	10
9	12	0	–90	9	14	6	16	9	19	9

Пример решения задачи № 1.3.

Исходные данные для решения задачи: $A_1 = 4$ см², $A_2 = 8$ см², $A_3 = 5$ см². $l_1 = 10$ см, $l_2 = 6$ см, $l_3 = 12$ см. $F_1 = 80$ кН.

Изображаем расчетную схему стержня, заменяя опоры реакциями R_A и R_B, направления которых предполагаем противоположными действию силы F_1. Составляем уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на горизонтальную ось стержня x:

$$\sum X = 0.\ F_1 - R_A - R_B = 0.$$

Усилия в сечениях на участках стержня при этом равны

$$N_1 = R_A;\ N_2 = N_3 = R_A - F_1 = -R_B.$$

Поскольку расстояние между жесткими опорами стержня не меняется, его полная абсолютная деформация равна нулю:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

Это выражение представляет собой условие совместности деформаций.

Абсолютные деформации выражаем через усилия согласно закону Гука:

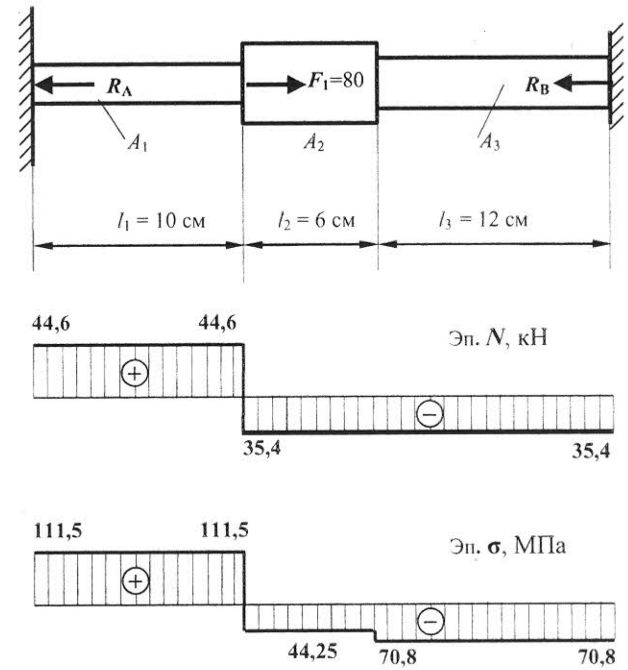
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A l_1}{EA_1};\ \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{(R_A - F_1) l_2}{EA_2};\ \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{(R_A - F_1) l_3}{EA_3}.$$

Решаем полученную систему уравнений. Вначале подставим формулы закона Гука в условие совместности деформаций:

$$\frac{R_A l_1}{EA_1} + \frac{(R_A - F_1) l_2}{EA_2} + \frac{(R_A - F_1) l_3}{EA_3} = 0.$$

Получено линейное уравнение относительно неизвестной R_A. Умножив его на E и приведя подобные члены, выразим R_A:

$$R_A = \frac{F_1 (l_2/A_2 + l_3/A_3)}{l_1/A_1 + l_2/A_2 + l_3/A_3} = \frac{80 \cdot (6/8 + 12/5)}{10/4 + 6/8 + 12/5} = 44,6 \text{ кН}.$$



Находим усилия в сечениях:

$$N_1 = R_A = 44{,}6 \text{ кН};\ N_2 = N_3 = R_A - F_1 = 44{,}6 - 80 = -35{,}4 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил.

Вычисляем напряжения на участках:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{44{,}6}{4} \cdot 10 = 111{,}5 \quad \text{МПа}. \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-35{,}4}{8} \cdot 10 = -44{,}25$$

МПа.

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-35{,}4}{5} \cdot 10 = -70{,}8 \text{ МПа}.$$

Аналогично строим эпюру напряжений.

Определяем абсолютные деформации участков:

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E} = \frac{111{,}5 \cdot 10}{10^5} = 11{,}15 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E} = \frac{-44{,}25 \cdot 6}{10^5} = -2{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E} = \frac{-70{,}8 \cdot 12}{10^5} = -8{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

Проверяем равенство нулю суммарной деформации стержня:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = (11{,}15 - 2{,}66) \cdot 10^{-3} = 8{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ см}.$$

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 8{,}49 \cdot 10^{-3} - 8{,}49 \cdot 10^{-3} = 0.$$

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Определение геометрических характеристик плоских поперечных сечений

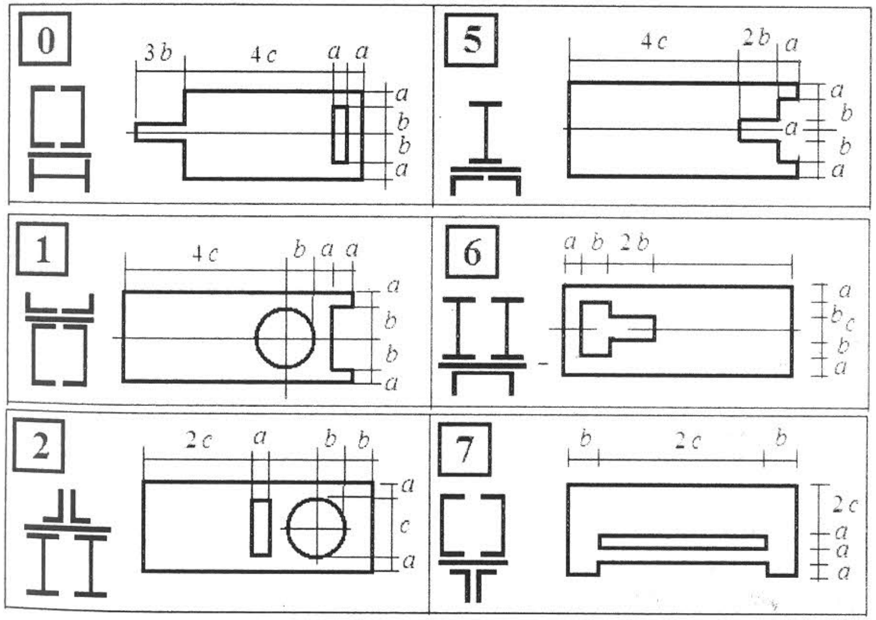
Задача № 2.1. Определение геометрических характеристик поперечного сечения, имеющего одну ось симметрии, составленного из простых геометрических фигур.

Задача № 2.2. Определение геометрических характеристик сечения, имеющего одну ось симметрии, составленного из профилей прокатной стали.

Задачи № 2.1. и 2.2

Задание: Определить геометрические характеристики плоских поперечных сечений: главные центральные моменты инерции, осевые моменты сопротивления, радиусы инерции сечения.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 2 и схемам, представленным на рис. 2.



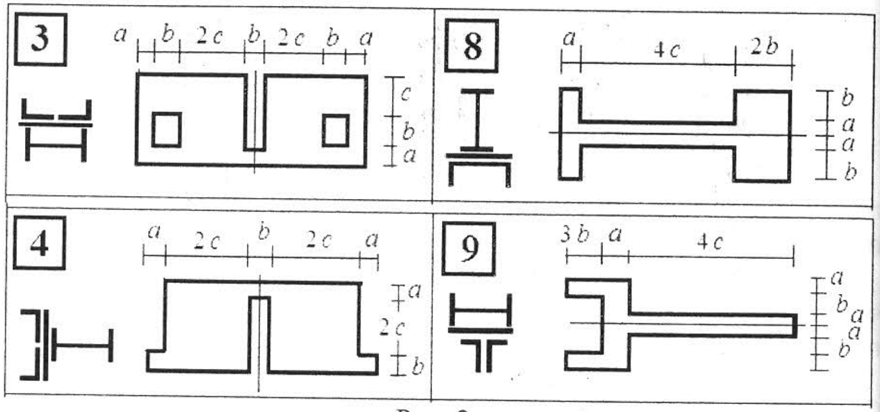


Рис. 2.

Таблица 2

Первая цифра шифра	a см	Толщина полосы δ см	Дву-тавр №	Вторая цифра шифра	b см	Швел-лер №	Третья цифра шифра № схемы	c см	Уголок в мм
0	2	2	24	0	4	20	0	5	50·32·4
1	3	1	16	1	5	8	1	4	100·63·7
2	4	3	12	2	2	18-а	2	3	110·70·8
3	5	3	14	3	3	24	3	2	100·63·8
4	2	2	22	4	5	18	4	3	75·50·5
5	3	1	10	5	4	16-а	5	4	50·50·5
6	4	2	27	6	2	16	6	6	90·56·6
7	5	3	30	7	3	10	7	2	56·56·5
8	3	2	18	8	4	14	8	5	100·63·6
9	2	1	20	9	5	22	9	4	63·63·6

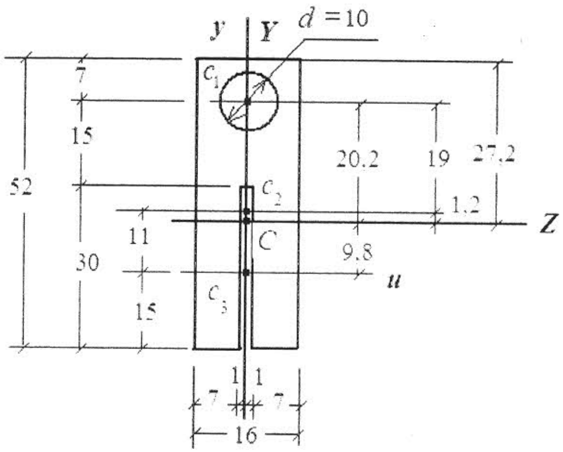
Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе схему сечения с указанием размеров.
2. Указать на чертеже центры тяжести всех элементов сечения.
3. Провести вспомогательные оси для нахождения центра тяжести всего сечения, одна из которых – ось симметрии, другая – перпендикулярна оси симметрии.
4. Определить в этих осях координаты центров тяжести элементов сечения, площади элементов и статические моменты площадей элементов.
5. Определить координаты центра тяжести всего сечения.

6. Провести главные центральные оси инерции через найденный центр тяжести.
7. Определить осевые моменты инерции сечения.
8. Определить моменты сопротивления и радиусы инерции сечения.
9. Данные расчёта свести в таблицу.

Примеры расчёта

Задача 2.1. Определить геометрические характеристики сечения, составленного из простых геометрических фигур.



• Сечение симметрично, поэтому его центр тяжести лежит на оси симметрии Y, то есть $Z_C = 0$ и нужно определить только координату y_C всего сечения.

Проводим вспомогательные оси через центр тяжести прямоугольного выреза: y – ось симметрии и u перпендикулярно y.

• Ординаты элементов в осях $u - y$:

$y_1 = 45 - 15 = 30$ см, $y_2 = 26 - 15 = 11$ см, $y_3 = 0$.

• Площади сечений элементов:

$A_1 = -\dfrac{3{,}14 \cdot 10^2}{4} = -78{,}5$ см^2; $A_2 = 16 \cdot 52 = 832$ см^2;

$A_3 = -2 \cdot 30 = -60$ см^2 (площади вырезов отрицательны);

суммарная площадь $A = \sum A_i = 693{,}5$ см^2.

• Статические моменты площадей элементов относительно оси u:

$S_{iu} = A_i y_i$. $S_{1u} = -78{,}5 \cdot 30 = -2355$ см^3; $S_{2u} = 832 \cdot 11 = 9252$ см^3; $S_{3u} = 0$; полный статический момент $S_u = \sum S_{ui} = 6897$ см^3.

• Находим координаты центра тяжести всего сечения Z_C и Y_C:

$$Z_C = 0;\; Y_C = \frac{S_u}{A} = \frac{6897}{693{,}5} = 9{,}8 \text{ см}.$$

• Через установленный центр тяжести всего сечения проводим главные центральные оси инерции Z и Y.

• Определяем расстояния a_i между главной центральной осью всего сечения Z и главными осями элементов сечений z_i:

$a_1 = 30 - 9{,}8 = 20{,}2$ см; $a_2 = 11 - 9{,}8 = 1{,}2$ см; $a_3 = 9{,}8$ см.

Расстояния между осями Y и y_i для всех элементов равны нулю, так как оси Y и y_i совпадают.

• Определяем осевые моменты инерции каждого элемента относительно собственных главных осей инерции:

$$I_{z1} = I_{y1} = -\frac{3{,}14 \cdot 10^4}{64} = -490{,}6 \text{ см}^4;$$

$$I_{z2} = \frac{16 \cdot 52^3}{12} = 187477 \text{ см}^4;\; I_{y2} = \frac{52 \cdot 16^3}{12} = 17749 \text{ см}^4;$$

$$I_{z3} = -\frac{2 \cdot 30^3}{12} = -4500 \text{ см}^4;\; I_{y3} = -\frac{30 \cdot 2^3}{12} = -20 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции вырезов принимаются отрицательными.

• Определяем главные центральные моменты инерции всего сечения:

$$I_z = \sum\left(I_{zi} + a_i^2 A_i\right) = 187477 - 490{,}6 - 4500 + 832 \cdot 1{,}2^2 - 78{,}5 \cdot 20{,}2^2 -$$
$$-60 \cdot 9{,}8^2 = 145891 \text{ см}^4 = I_{\max};$$

$$I_y = \sum I_{yi} = 17749 - 490{,}6 - 20 = 17238{,}4 \text{ см}^4 = I_{\min}.$$

• Определяем осевые моменты сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{145891}{27{,}2} = 5363{,}6 \text{ см}^3;\; y_{\max} = 26 + 1{,}2 = 27{,}2 \text{ см}.$$

$$W_y = \frac{I_z}{z_{\max}} = \frac{17238{,}4}{8} = 2154{,}8 \text{ см}^3;\; z_{\max} = 8 \text{ см}.$$

• Определяем радиусы инерции сечения:

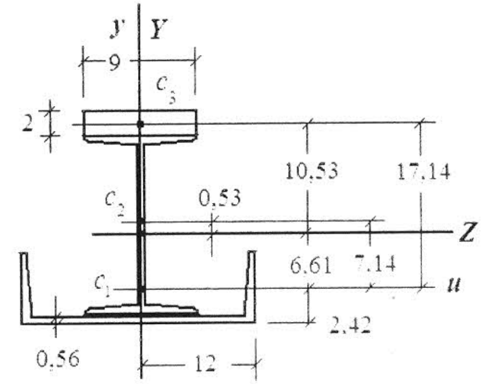
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{145891}{693{,}5}} = 14{,}5 \text{ см};\; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{17238{,}4}{693{,}5}} = 4{,}99 \text{ см}.$$

• Вычисления сведём в таблицу:

Таблица 1

№ фигуры	Фигура. Размер в см	A_i см^2	y_i см	$S_{iu} = A_i \cdot y_i$ см^3	a_i см	I_{zi} см^4	$I_{zi} + a_i^2 \cdot A_i$ см^4	I_{yi} см^4
1	○ d=10	–78,5	30	–2355	20,2	–490,6	–32521	–490,6
2	□ 16×52	832	11	9252	1,2	187477	188675	17749
3	□ 2×30	–60	0	0	9,8	–4500	–10262	–20
$\sum$		693,5		6897			145891	17238,4

Задача 2.2. Определить геометрические характеристики сечения, состоящего из полосы $\delta = 20$ мм, двутавра № 18 и швеллера № 24.



• Сечение симметрично, поэтому его центр тяжести лежит на оси симметрии: $Z_C = 0$, и нужно определить только координату y_C всего сечения. Проводим вспомогательные оси через центр тяжести швеллера: y – ось симметрии и u перпендикулярно y.

• Ординаты элементов в осях $u - y$:

$y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}56 + 9 - 2{,}42 = 7{,}14$ см, $y_3 = 7{,}14 + 9 + 1 = 17{,}14$ см.

• Площади сечений элементов 1 и 2 берём из таблиц сортамента проката:

$A_1 = 30,6$ см²; $A_2 = 23,4$ см²; $A_3 = 9 \cdot 2 = 18$ см²;

суммарная площадь $A = \sum A_i = 72$ см².

• Статические моменты площадей элементов относительно оси u:

$S_{iu} = A_i y_i$.

$S_{1u} = 0$ см³; $S_{2u} = 23,4 \cdot 7,14 = 167,08$ см³; $S_{3u} = 18 \cdot 17,14 = 308,52$; полный статический момент $S_u = \sum S_{ui} = 475,6$ см³.

• Находим координаты центра тяжести всего сечения Z_C и Y_C:

$$Z_C = 0;\; Y_C = \frac{S_u}{A} = \frac{475,6}{72} = 6,61 \text{ см}.$$

• Через установленный центр тяжести всего сечения проводим главные центральные оси инерции Z и Y.

• Определяем расстояния a_i между главной центральной осью всего сечения Z и главными осями элементов сечений z_i:

$a_1 = 6,61$ см; $a_2 = 7,14 - 6,61 = 0,53$ см; $a_3 = 17,14 - 6,61 = 10,53$ см.

Расстояния между осями Y и y_i для всех элементов равны нулю, так как оси Y и y_i совпадают.

• Определяем осевые моменты инерции каждого элемента относительно собственных главных осей инерции:

$I_{z1} = 208$ см⁴; $I_{y1} = 2900$ см⁴ (по таблице сортамента);

$I_{z2} = 1280$ см⁴; $I_{y2} = 82,6$ см⁴; (по таблице сортамента);

$$I_{z3} = \frac{9 \cdot 2^3}{12} = 6 \text{ см}^4;\; I_{y3} = \frac{2 \cdot 9^3}{12} = 121,5 \text{ см}^4.$$

• Определяем главные центральные моменты инерции всего сечения:

$$I_z = \sum\left(I_{zi} + a_i^2 A_i\right) = 208 + 1280 + 6 + 30,6 \cdot 6,61^2 + 23,4 \cdot 0,53^2$$
$$+18 \cdot 10,53^2 = 4833,4 \text{ см}^4 = I_{\max};$$

$$I_y = \sum I_{yi} = 2900 + 82,6 + 121,5 = 3104,1 \text{ см}^4 = I_{\min}.$$

• Определяем осевые моменты сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{4833,4}{11,53} = 419,2 \text{ см}^3;\; y_{\max} = 10,53 + 1 = 11,53 \text{ см}.$$

$$W_y = \frac{I_z}{z_{\max}} = \frac{3104,1}{12} = 258,7 \text{ см}^3;\; z_{\max} = 12 \text{ см}.$$

• Определяем радиусы инерции сечения:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{4833,4}{72}} = 8,19 \text{ см};\; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{3204,1}{72}} = 6,67 \text{ см}.$$

• Вычисления сведём в таблицу:

Таблица 2

№ фигуры	Фигура. Размер в см	A_i см²	y_i см	$S_{iu} = A_i \cdot y_i$ см³	a_i см	I_{zi} см⁴	$I_{zi} + a_i^2 \cdot A_i$ см⁴	I_{yi} см⁴
1	Швеллер № 24	30,6	0	0	6,61	208	1545	2900
2	Двутавр № 18	23,4	7,14	167,08	0,53	1280	1286,6	82,6
3	Полоса 9×2	18	17,14	308,52	10,53	6	2001,8	121,5
$\sum$		72		475,6			4833,4	3104,1

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Плоское напряженное состояние

Задача № 1.1. Анализ напряжений при плоском напряженном состоянии

Задание: По заданным главным напряжениям на гранях элемента при плоском напряженном состоянии определить напряжения по наклонным площадкам и максимальные касательные напряжения.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 3.1 и схемам, представленным на рис. 3.1.

Последовательность расчёта

1. Обозначить заданные главные напряжения согласно принятым правилам их индексации и показать эти напряжения на чертеже с учетом их величины и направления.

2. Вычислить нормальное и касательное напряжения по наклонным площадкам с внешними нормалями x и y. Использовать при этом свойство инвариантности суммы нормальных напряжений и закон парности касательных напряжений. Показать эти напряжения на схеме.

3. Определить максимальные касательные напряжения и нормальные напряжения на площадках, где действуют максимальные касательные напряжения. Показать эти напряжения на схеме.

4. Проверить по вычисленным в пункте 2 напряжениям величины главных напряжений и угол наклона главных площадок по отношению к направлениям x и y.

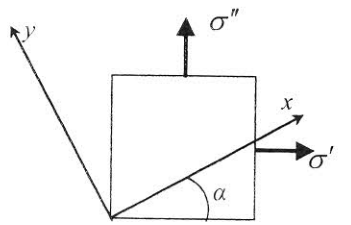


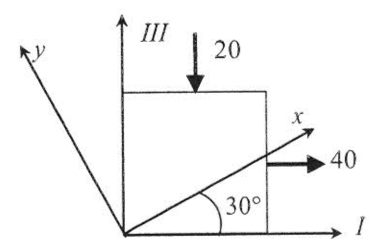
Рис. 3.1.

Таблица 3.1

Первая цифра шифра	σ', МПа	Вторая цифра шифра	σ'', МПа	Третья цифра шифра (№ схемы)	α, градус
0	5	0	50	0	30
1	10	1	–5	1	60
2	15	2	40	2	45
3	20	3	–25	3	–30
4	30	4	35	4	–60
5	–10	5	–35	5	–45
6	–15	6	25	6	15
7	–20	7	–50	7	–75
8	–30	8	45	8	–15
9	–40	9	–45	9	75

Пример решения задачи № 1.1

Исходные данные для решения задачи: $\sigma' = 40$ МПа, $\sigma'' = -20$ МПа, $\alpha = 30^\circ$.



1) По правилам индексации главных напряжений обозначаем $\sigma' = \sigma_1 = 40$ МПа и $\sigma'' = \sigma_3 = -20$ МПа. Показываем на рисунке напряжение $\sigma_1 = 40$ МПа от площадки (растяжение) и напряжение $\sigma_2 = 20$ МПа – на площадку (сжатие). Показываем направления главных осей I и III.

2) Определяем по расчетным формулам напряжения по площадке с нормалью x:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha = \frac{40-20}{2} + \frac{40+20}{2}\cos 60^\circ =$$

$= 10 + 30 \cdot 0,5 = 25$ МПа.

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha = \frac{40+20}{2}\sin 60^\circ = 30 \cdot 0,866 = 25,98 \text{ МПа}.$$

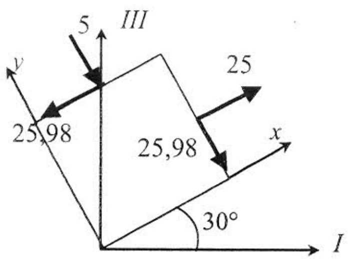
Из свойства постоянства суммы нормальных напряжений по взаимно перпендикулярным площадкам получаем:

$\sigma_y = \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_x = 40 - 20 - 25 = -5$ МПа.

Согласно закону парности касательных напряжений:

$\tau_{yx} = -\tau_{xy} = -25,98$ МПа.

Показываем наклонные площадки и напряжения на них с учетом знаков.



3) Вычисляем максимальные касательные напряжения в заданной плоскости главных осей I и III (только величина).

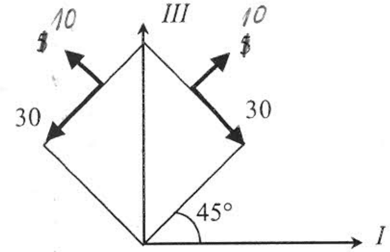
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{40+20}{2} = 30 \text{ МПа}.$$

Нормальные напряжения на площадках с максимальными касательными напряжениями:

$$\sigma_{\tau_{\max}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{40-20}{2} = \overset{10}{\cancel{5}} \text{ МПа}.$$

Показываем величину и направление напряжений на схеме.

На рисунке показаны напряжения только по двум взаимно перпендикулярным площадкам. На других двух площадках напряжения симметричны относительно горизонтальной оси по отношению к напряжениям, показанным на рисунке.



4) По найденным в п. 2 напряжениям проверяем исходные величины главных напряжений:

$$\sigma_{\text{гл}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{25-5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(25+5\right)^2 + 4 \cdot 25,98^2} = 10 \pm 30 \text{ МПа}.$$

$\sigma_1 = 10 + 30 = 40$ МПа. $\sigma_3 = 10 - 30 = -20$ МПа. Проверка выполнена.

Положение главных площадок. Определяем угол наклона главной оси по отношению к оси x:

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 25,98}{25+5} = -1,732.$$

$\alpha_0 = \frac{1}{2}\arctan\left(-1,732\right) = -30^\circ$ $\alpha = -\alpha_0 = 30^\circ$, что соответствует заданному углу от оси I до оси x. Проверка выполнена.

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Кручение. Подбор сечения круглого стержня (вала)

Задание: Стальной вал переменного сечения нагружен внешними скручивающими моментами M_1, M_2 и M_3. Определить диаметры обеих частей вала из условия прочности. Проверить жёсткость вала при допустимом погонном угле закручивания 1,7 град/м. Построить эпюру крутящих моментов. Принять значения: расчётного сопротивления на срез: $R_{ср.}$ = 80 МПа, модуля сдвига $G = 8\cdot10^4$ МПа. Исходные данные к задаче определить по таблице 4 и схемам, представленным на рис. 4.

Таблица 4

Первая цифра шифра	l_1 см	$\frac{d}{D}$	Вторая цифра шифра	l_2 см	M_1 кН·м	Вид Сеч. 1-1	Вид Сеч. 2-2	Третья цифра шифра	№ схемы	M_2 кН·м	M_3 кН·м	l_3 см
0	40	0,8	0	20	–20	спл.	пол.	0	1	–20	40	30
1	30	0,7	1	40	30	пол.	спл.	1	2	30	–20	20
2	20	0,8	2	30	–40	спл.	пол.	2	1	–20	40	40
3	30	0,6	3	20	20	пол.	спл.	3	2	20	–30	30
4	20	0,7	4	30	–30	спл.	пол.	4	1	–10	40	20
5	40	0,6	5	40	20	пол.	спл.	5	2	10	–30	40
6	30	0,8	6	30	–40	спл.	пол.	6	1	–20	40	20
7	20	0,6	7	20	20	пол.	спл.	7	2	10	–30	30
8	30	0,7	8	20	–30	спл.	пол.	8	1	–20	30	20
9	40	0,9	9	40	10	пол.	спл.	9	2	20	–40	40

Примечания к таблице:

1. Вид сечения «спл.» означает: сечение круглое, сплошное, диаметром d. Вид сечения «пол.» означает: сечение круглое полое (труба) с соотношением диаметров $\alpha = \frac{d}{D}$.

2. Знак минус у величины момента означает, что момент имеет противоположное направление.

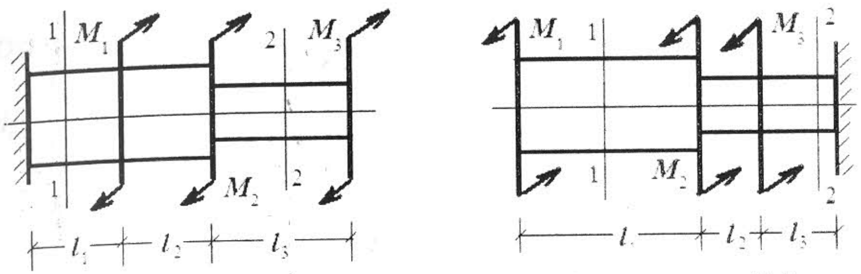


Схема стержня № 1 Схема стержня № 2

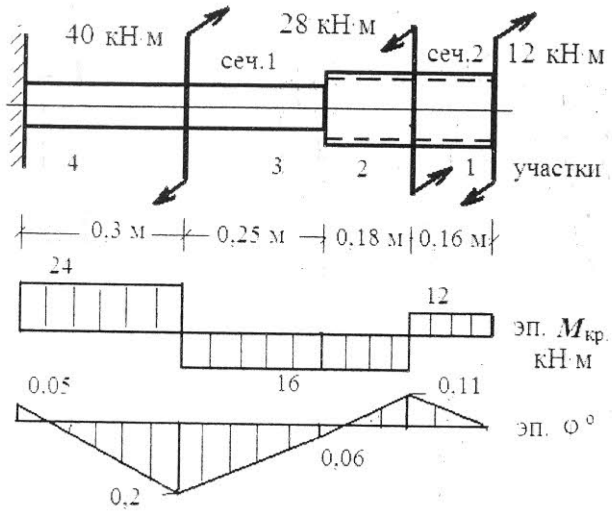
Рис. 4. Схемы вариантов закрученного стержня

Последовательность расчёта:

1. Изобразить в масштабе расчётную схему стержня с указанием размеров и всех необходимых для расчёта данных.
2. Построить эпюру крутящих моментов.
3. Определить опасные сечения для каждого вида поперечного сечения.
4. Определить диаметр вала из условия прочности для каждого вида поперечного сечения.
5. Проверить жесткость вала.

Пример расчёта

Стальной стержень (вал) круглого переменного поперечного сечения подвержен действию скручивающих моментов. Подобрать из условия прочности поперечное сечение обеих частей вала: сеч.1 – круглое сплошное сечение диаметром d; сеч.2 – круглое полое (трубчатое) сечение с соотношением диаметров $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}8$. Проверить жёсткость обеих частей вала при допустимом погонном угле закручивания 1,7 град/м. Построить эпюру крутящих моментов. Принять значения: расчётного сопротивления на срез: $R_{ср.}$ = 80 МПа, модуля сдвига $G = 8\cdot10^4$ МПа.



• Определяем величину крутящего момента на каждом участке вала. Строим эпюру крутящих моментов.

• Определяем «опасное сечение» для каждого вида поперечного сечения:

для сеч.1: $M_{кр}^{max} = 24$ кН·м $= 2400$ кН·см,

для сеч.2: $M_{кр}^{max} = 16$ кН·м $= 1600$ кН·см.

• Определяем сечение вала из условия прочности: $\tau = \dfrac{M_{кр}}{W_p} \le R_{ср}$;

$R_{ср} = 80$ МПа $= 8$ кН/см^2; $W_p \ge \dfrac{M_{кр}^{max}}{R_{ср}}$.

Для сплошного круглого сечения:

$W_p = 0,2d^3$; $d \ge \sqrt[3]{\dfrac{M_{кр}^{max}}{0,2R_{ср}}} = \sqrt[3]{\dfrac{2400}{0,2\cdot 8}} = 11,45$ см.

Принимаем $d_{спл.} = 12$ см.

Для полого круглого (трубчатого сечения):

$W_p = 0,2D^3\left(1-\alpha^4\right) = 0,2D^3\left(1-0,8^4\right) = 0,12D^3$;

$D \ge \sqrt[3]{\dfrac{M_{кр}^{max}}{0,12R_{ср}}} = \sqrt[3]{\dfrac{1600}{0,12\cdot 8}} = 11,86$ см. Принимаем $D_{пол.} = 12$ см. $d_{пол.} = 9,6$ см.

• Определяем полярные моменты инерции:

Сеч.1 (сплошное): $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32} = 0,1d^4 = 0,1\cdot 12^4 = 2074$ см^4 $=$ $2074\cdot 10^{-8}$ м^4;

Сеч.2 (полое): $I_p = 0,1\left(D^4 - d^4\right) = 0,1\cdot\left(12^4 - 9,6^4\right) = 1224$ см^4 $=$ $1224\cdot 10^{-8}$ м^4.

• Проверяем жёсткость стержня. Для этого определяем значение погонного угла закручивания на каждой части стержня с одинаковым сечением при максимальном крутящем моменте и сравниваем его с допустимым значением в радианах. Условие жёсткости:

$$\varphi' = \frac{M_{кр}}{GI_p} \le [\varphi'], \text{ где } [\varphi'] = 1,7\cdot\frac{3,14}{180} = 0,05 \text{ рад/м.}$$

Сеч. 1 (сплошное). $\varphi_1' = \dfrac{24}{8\cdot 10^7\cdot 2074\cdot 10^{-8}} = 0,0145 < 0,05$ рад/м.

Сеч. 2 (полое). $\varphi_2' = \dfrac{16}{8\cdot 10^7\cdot 1224\cdot 10^{-8}} = 0,0163 < 0,05$ рад/м.

Вывод: жёсткость обеспечена на всех участках.

• Определяем угол закручивания стержня на каждом участке по формуле $\varphi = \dfrac{M_{кр}l}{GI_p}$.

$$\varphi_1 = \frac{12\cdot 0,16}{8\cdot 10^7\cdot 1224\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{180}{3,14} = 0,11^\circ;\quad \varphi_2 = \frac{-16\cdot 0,18}{8\cdot 10^7\cdot 1224\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{180}{3,14} = -0,17^\circ;$$

$$\varphi_3 = \frac{-16\cdot 0,25}{8\cdot 10^7\cdot 2074\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{180}{3,14} = -0,14^\circ;$$

$$\varphi_4 = \frac{24\cdot 0,3}{8\cdot 10^7\cdot 2074\cdot 10^{-8}}\cdot\frac{180}{3,14} = 0,25^\circ.$$

• Строим эпюру изменения угла закручивания по оси стержня. Для этого определяем значения угла закручивания на границах участков. Построение эпюры начинаем со свободного конца:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0{,}11 - 0{,}17 = -0{,}06^\circ.$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -0{,}06 - 0{,}14 = -0{,}2^\circ.$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}05^\circ.$$

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Плоский изгиб прямого бруса

(без определения эквивалентных напряжений и перемещений)

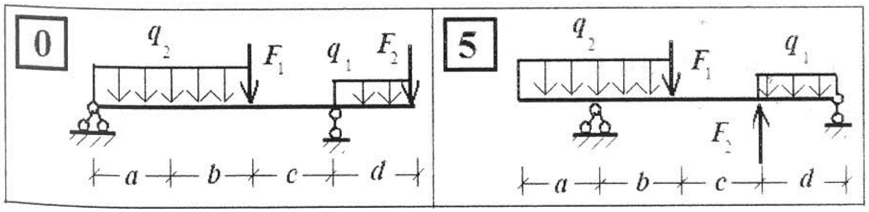
Задание: Определить усилия и напряжения в балке. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать сечение стальной двутавровой балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Проверить прочность по касательным напряжениям. Принять значения: расчётного сопротивления материала на растяжение и сжатие $R = 240$ МПа, расчётного сопротивления материала на сдвиг $R = 130$ МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$, $d = 1$ м.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 5.1 и схемам, представленным на рис. 5.1.

Таблица 5.1

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	Вторая цифра шифра	q_1 кН/м	q_2 кН/м	a м	Третья цифра шифра № схемы	b м	c м
0	100	0	0	0	30	1	0	2	4
1	0	100	1	40	0	0.6	1	1	5
2	120	0	2	0	20	1	2	3	2
3	0	120	3	50	0	0.8	3	4	2
4	200	0	4	0	40	1	4	5	1
5	0	200	5	20	0	0.4	5	2	3
6	60	0	6	0	50	1	6	4	1
7	0	60	7	30	0	0.6	7	5	1
8	150	0	8	0	60	1	8	3	2
9	0	150	9	20	0	0.4	9	2	4



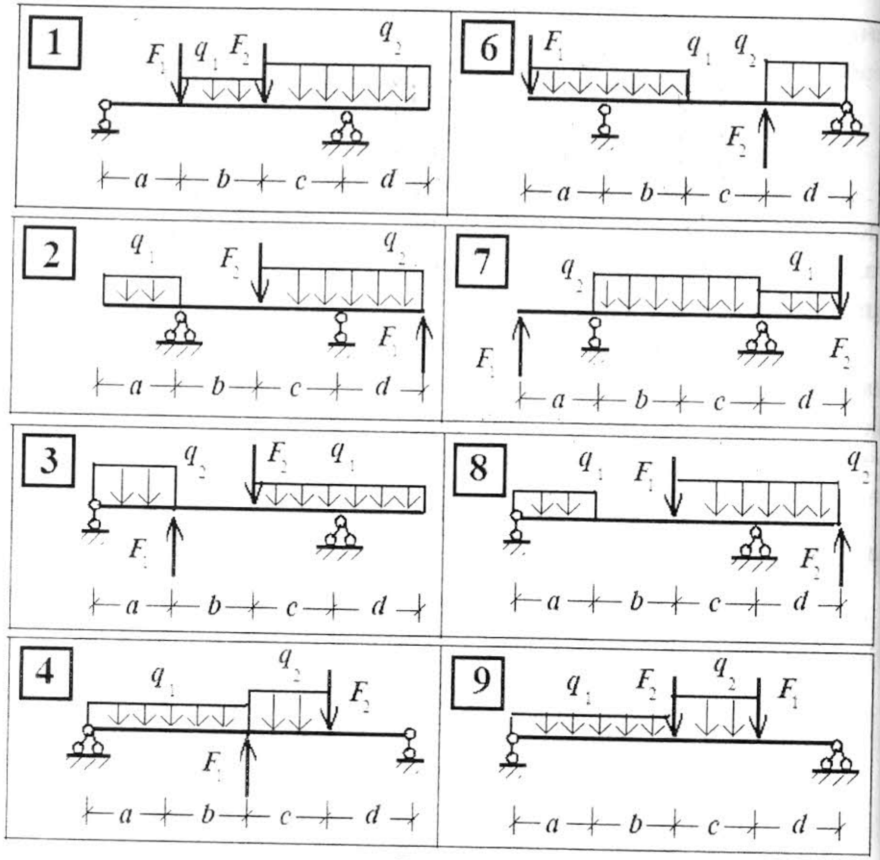


Рис. 5.1.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить опорные реакции.

3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

4. Определить «опасное сечение» с максимальным изгибающим моментом и «опасную точку» с максимальными нормальными напряжениями в этом сечении.

5. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить требуемый осевой момент сопротивления и подобрать сечение стальной двутавровой балки.

6. Определить «опасное сечение» с максимальной поперечной силой и «опасную точку» с максимальными касательными напряжениями в этом сечении. Определить максимальную поперечную силу и проверить прочность по касательным напряжениям.

Пример расчёта

Подобрать сечение двутавровой стальной балки из условия прочности по нормальным напряжениям. Проверить прочность балки по касательным напряжениям.

Принять значения: расчётного сопротивления материала на растяжение и сжатие $R = 240$ МПа, расчётного сопротивления материала на сдвиг $R = 130$ МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$.

• Определяем опорные реакции: $\sum X = 0$. $B_x = 0$.

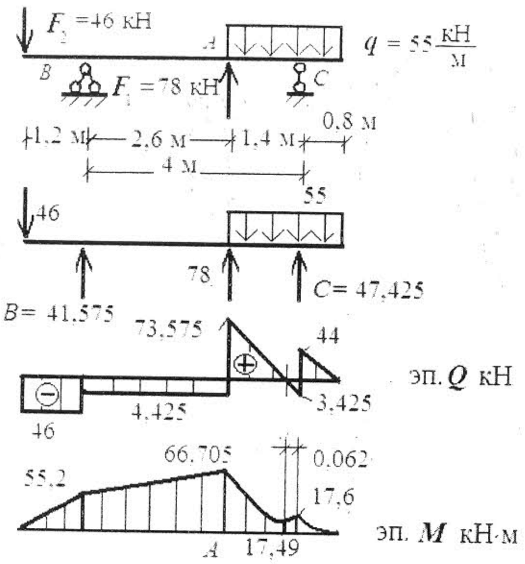
$\sum M_B = 0$. $-46 \cdot 1,2 - 78 \cdot 2,6 + 55 \cdot 2,2 \cdot 3,7 - C \cdot 4 = 0$. $C = 47,425$ кН.

$\sum M_C = 0$. $-55 \cdot 2,2 \cdot 0,3 + 78 \cdot 1,4 + -46 \cdot 5,2 + B \cdot 4 = 0$. $B = 41,575$ кН.

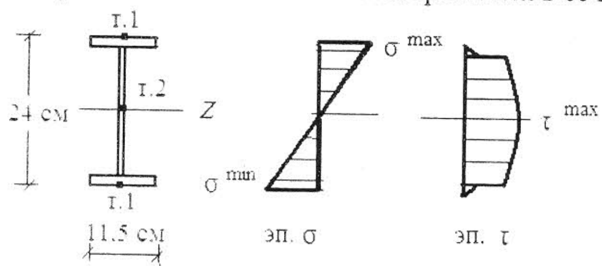
Проверка: $\sum Y = 0$. $41,575 + 47,425 - 46 - 55 \cdot 4 = 0$.

• Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Определяем максимальный изгибающий момент:

«Опасное сечение» – сечение A. $M^{\max} = 66,705$ кН·м = 66705 кН·см; «опасная точка» в сечении – точка 1.



Эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении:



• Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} \le R \text{ (сечение } A\text{, точка 1);}$$

$$W_z \ge \frac{M_z^{\max}}{R};\ R = 240 \text{ МПа} = 24\text{кН/см}^2;$$

$$W_z \ge \frac{6670{,}5}{24} = 277{,}94 \text{ см}^3.$$

Выбираем двутавр № 24: геометрические характеристики: $W_z = 289$ см^3; $I_z = 3460$ см^4; $S_z = 163$ см^3; размеры: h = 24 см; b = 11,5 см; s = 0,56 см; t = 0,95 см.

Реальное напряжение в точке A: $\sigma^{\max} = \dfrac{6670{,}5}{289} = 23{,}08$ кН / см^2.

• Изображаем в масштабе сечение двутавра. Строим эпюры нормальных и касательных напряжений. Определяем «опасные точки» в сечении.

• Определяем максимальную поперечную силу: $Q^{\max} = 73{,}575$ кН («опасное сечение» A, «опасная точка» 2).

• Проверяем прочность по касательным напряжениям. Сравниваем касательные напряжения с расчётным сопротивлением материала на срез. Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau^{\max} = \frac{Q^{\max} S_z^{отс}}{sI_z} \le R_{ср};\ R_{ср} = 130 \text{ МПа} = 13 \text{ кН/см}^2.$$

$$\tau^{\max} = \frac{73{,}575 \cdot 163}{0{,}56 \cdot 3460} = 6{,}19 \text{ кН/см}^2 < 13 \text{ кН/см}^2.$$

Вывод: прочность обеспечена.

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

(полный вариант)

Плоский изгиб прямого бруса. Расчёт балки на прочность

Задание: Определить усилия и напряжения в балке. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать сечение стальной двутавровой балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Проверить прочность по касательным и эквивалентным напряжениям. Принять значения: расчётного сопротивления материала на растяжение и сжатие $R = 240$ МПа, расчётного сопротивления материала на сдвиг $R = 130$ МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$, допускаемого прогиба $[f] = l/400$, l – пролет между опорами, $d = 1$ м.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 5.2 и схемам, представленным на рис. 5.2.

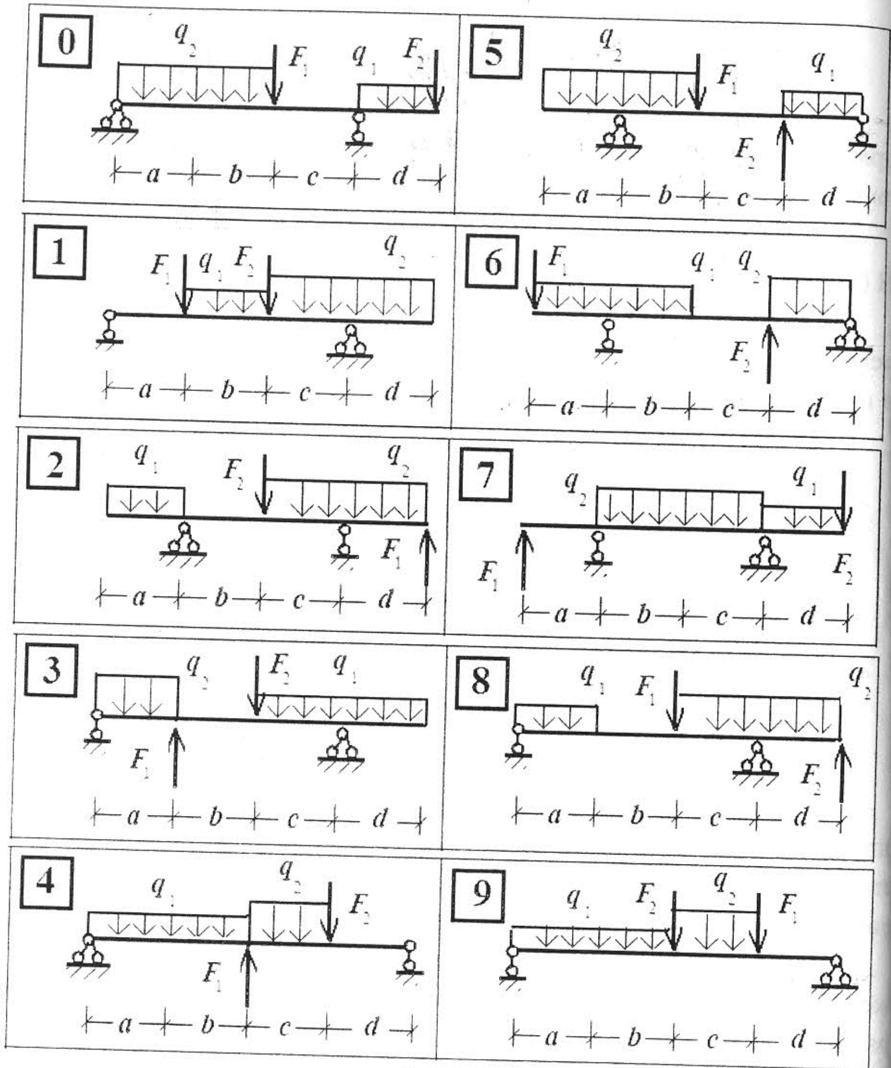


Рис. 5.2.

Таблица 5.2

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	Вторая цифра шифра	q_1 кН/м	q_2 кН/м	a м	Третья цифра шифра № схемы	b м	c м
0	100	0	0	0	30	1	0	2	4
1	0	100	1	40	0	0,6	1	1	5
2	120	0	2	0	20	1	2	3	2
3	0	120	3	50	0	0,8	3	4	2
4	200	0	4	0	40	1	4	5	1
5	0	200	5	20	0	0,4	5	2	3
6	60	0	6	0	50	1	6	4	1
7	0	60	7	30	0	0,6	7	5	1
8	150	0	8	0	60	1	8	3	2
9	0	150	9	20	0	0,4	9	2	4

Последовательность расчёта:

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить опорные реакции.

3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

4. Определить «опасное сечение» с максимальным изгибающим моментом и «опасную точку» с максимальными нормальными напряжениями в этом сечении.

5. Из условия прочности по нормальным напряжениям определить требуемый осевой момент сопротивления и подобрать сечение стальной двутавровой балки.

6. Определить «опасное сечение» с максимальной поперечной силой и «опасную точку» с максимальными касательными напряжениями в этом сечении. Определить максимальную поперечную силу и проверить прочность по касательным напряжениям.

7. Определить «опасное сечение» и «опасную точку» в сечении из условия прочности по эквивалентным напряжениям (по IV теории прочности). Вычислить нормальные и касательные напряжения в «опасной точке опасного сечения». Определить величину эквивалентных напряжений. Сравнить её с расчётным сопротивлением.

8. В сечении, где действует сосредоточенная нагрузка F_1 или F_2, приложить единичную силу (отбросив заданную нагрузку) по направлению искомого вертикального перемещения. Построить «единичную» эпюру изгибающих моментов $M_1^{\text{верт}}$. С помощью формулы Максвелла-Мора определить прогиб в этом сечении. Сравнить его значение с допустимой величиной.

Пример расчёта

Подобрать сечение двутавровой стальной балки из условия прочности по нормальным напряжениям. Проверить прочность балки по касательным напряжениям.

Принять значения: расчётного сопротивления материала на растяжение и сжатие $R = 240$ МПа, расчётного сопротивления материала на сдвиг $R = 130$ МПа, коэффициента условий работы $\gamma_c = 1$.

• Определяем опорные реакции: $\sum X = 0$. $B_x = 0$.

$\sum M_B = 0$. $-46 \cdot 1{,}2 - 78 \cdot 2{,}6 + 55 \cdot 2{,}2 \cdot 3{,}7 - C \cdot 4 = 0$. $C = 47{,}425$ кН.

$\sum M_C = 0$. $-55 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}3 + 78 \cdot 1{,}4 + -46 \cdot 5{,}2 + B \cdot 4 = 0$. $B = 41{,}575$ кН.

Проверка: $\sum Y = 0$. $41{,}575 + 47{,}425 - 46 - 55 \cdot 4 = 0$.

• Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Определяем максимальный изгибающий момент:

«Опасное сечение» – сечение A. $M^{\max} = 66{,}705$ кН·м = 66705 кН·см; «опасная точка» в сечении – точка 1.

• Условие прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma^{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} \le R \text{ (сечение } A\text{, точка 1);}$$

$$W_z \ge \frac{M_z^{\max}}{R}; \; R = 240 \text{ МПа} = 24 \text{кН/см}^2;$$

$$W_z \ge \frac{6670{,}5}{24} = 277{,}94 \text{ см}^3.$$

Выбираем двутавр № 24: геометрические характеристики: $W_z = 289$ см^3; $I_z = 3460$ см^4; $S_z = 163$ см^3; размеры: $h = 24$ см; $b = 11{,}5$ см; $s = 0{,}56$ см; $t = 0{,}95$ см.

Реальное напряжение в точке A: $\sigma^{\max} = \dfrac{6670{,}5}{289} = 23{,}08$ кН / см^2.

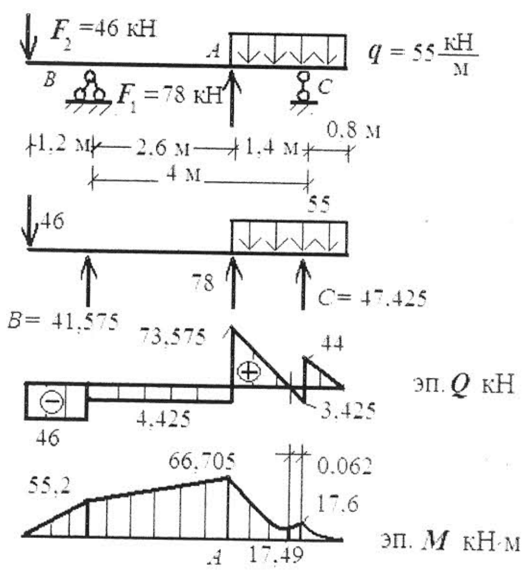
• Изображаем в масштабе сечение двутавра. Строим эпюры нормальных и касательных напряжений. Определяем «опасные точки» в сечении.

• Определяем максимальную поперечную силу: $Q^{\max} = 73{,}575$ кН («опасное сечение» A, «опасная точка» 2).

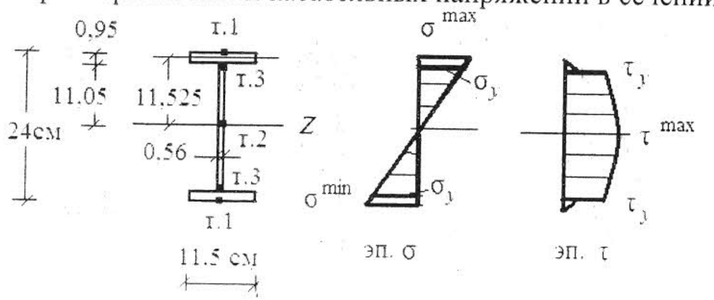
• Проверяем прочность по касательным напряжениям. Сравниваем касательные напряжения с расчётным сопротивлением материала на срез. Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau^{\max} = \frac{Q^{\max} S_z^{\text{отс}}}{s I_z} \le R_{\text{ср}}; \; R_{\text{ср}} = 130 \text{ МПа} = 13 \text{ кН/см}^2.$$

$$\tau^{\max} = \frac{73{,}575 \cdot 163}{0{,}56 \cdot 3460} = 6{,}19 \text{ кН/см}^2 < 13 \text{ кН/см}^2.$$



Эпюры нормальных и касательных напряжений в сечении:



Вывод: прочность обеспечена.

• Определяем «опасное сечение» и «опасную точку» в сечении из условия прочности по эквивалентным напряжениям (по IV теории прочности). Вычисляем нормальные и касательные напряжения в этой точке:

$$\sigma_y = \frac{M_z}{I_z} y = \frac{6670{,}5}{3460} \cdot 11{,}05 = 21{,}3 \text{ кН/см}^2.$$

Здесь $y = 12 - 0{,}95 = 11{,}05$ см.

$$\tau_y = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{sI_z} = \frac{QA^{\text{отс}}}{sI_z} \cdot y_C^{\text{отс}} = \frac{73{,}595 \cdot 10{,}93 \cdot 11{,}525}{0{,}56 \cdot 3460} = 4{,}78 \text{ кН/см}^2.$$

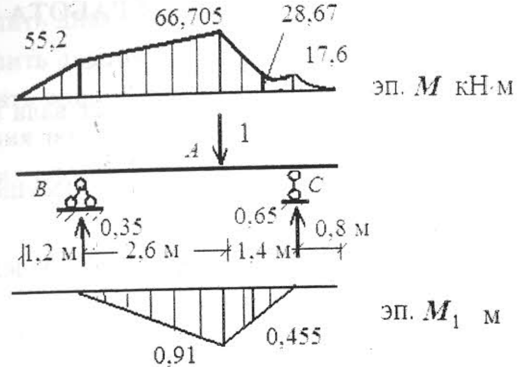
Здесь $S_y^{\text{отс}} = A^{\text{отс}} y^{\text{отс}}$; $A^{\text{отс}} = 11{,}5 \cdot 0{,}95 = 10{,}93$ см² – площадь отсеченной части; $y_C^{\text{отс}} = 12 - \dfrac{0{,}95}{2} = 11{,}525$ см – расстояние от центра тяжести отсеченной части до главной оси сечения z.

Определяем величину эквивалентных напряжений и сравниваем её с расчётным сопротивлением. Условие прочности по эквивалентным напряжениям:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_y^2 + 3\tau_y^2} \le R; \quad \sqrt{21{,}3^2 + 3 \cdot 4{,}78^2} = 22{,}85 < 24 \text{ кН/см}^2.$$

Вывод: прочность обеспечена.

• Определяем прогиб в сечении A, где приложена сила F_1, для чего строим «единичную» эпюру моментов, прикладывая в сечении A единичную вертикальную силу.



• Вычисляем интеграл Мора с помощью «перемножения» эпюр M и M_1, определяя искомое перемещение.

$$\Delta_A^{\text{верт}} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{2{,}6}{6} \left(2 \cdot 0{,}91 \cdot 66{,}705 + 0{,}91 \cdot 55{,}2\right) -$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot \frac{1{,}4}{6} \left(0{,}91 \cdot 66{,}705 + 4 \cdot 0{,}455 \cdot 28{,}67\right) = -\frac{100{,}71}{EI} \text{ (м)}.$$

Определяем изгибную жесткость сечения:

$$E = 2{,}06 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2{,}06 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2.$$

$$EI = 2{,}06 \cdot 10^8 \cdot 3460^{-8} = 7128 \text{ кН·м}^2.$$

Находим величину прогиба в метрах и сравниваем его значение с допустимой величиной прогиба, указанной в задании: $[f] = \dfrac{l}{250} = \dfrac{4}{250} = 0{,}016$ м = 16 мм.

$$\Delta_A^{\text{верт}} = -\frac{100{,}71}{7128} = -0{,}014 \text{ м} = -14 \text{ мм}.$$

$$14 \text{ мм} < [f] = 16 \text{ мм}.$$

Отрицательное значение перемещения означает, что его направление противоположно первоначально заданному направлению.

Вывод: жесткость обеспечена.

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Сложное сопротивление

Задача № 6.1. Изгиб с кручением. Расчёт вала на прочность и жёсткость.

Задача № 6.2. Косой изгиб. Определение несущей способности балки.

Задача № 6.3. Внецентренное сжатие. Определение несущей способности колонны. Построение ядра сечения.

Задача № 6.1

Изгиб с кручением. Расчёт вала на прочность и жёсткость

Задание: На стальной вал насажены два зубчатых колеса, на которые действуют тангенциальные усилия F_1 и F_2 (окружные силы). Определить диаметр стального вала из расчётов на прочность и жёсткость. Принять значения:

допускаемое напряжение $[\sigma]=160$ МПа, модуль продольной упругости $E=2{,}06\cdot10^5$ МПа; модуль сдвига $G=8\cdot10^4$ МПа;

допускаемый прогиб $[f]=0{,}0001l$ (l – длина вала между опорами);

допускаемый угол закручивания $[\varphi_{кр}]=1{,}7^\circ$ на 1 погонный метр.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 6.1 и схемам, представленным на рис. 6.1.1 и 6.1.2.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров.

2. Определить окружные силы. Разложить их по осям координат сечения.

3. Построить эпюры крутящих и изгибающих моментов, определив при необходимости опорные реакции.

4. Определить опасное сечение и приведённый момент по третьей теории прочности.

5. Определить диаметр вала из условия прочности.

6. Определить диаметр вала из условия жёсткости при кручении.

7. Построить единичные эпюры и определить линейные и угловые перемещения по формуле Максвелла-Мора с применением графоаналитических способов его вычисления.

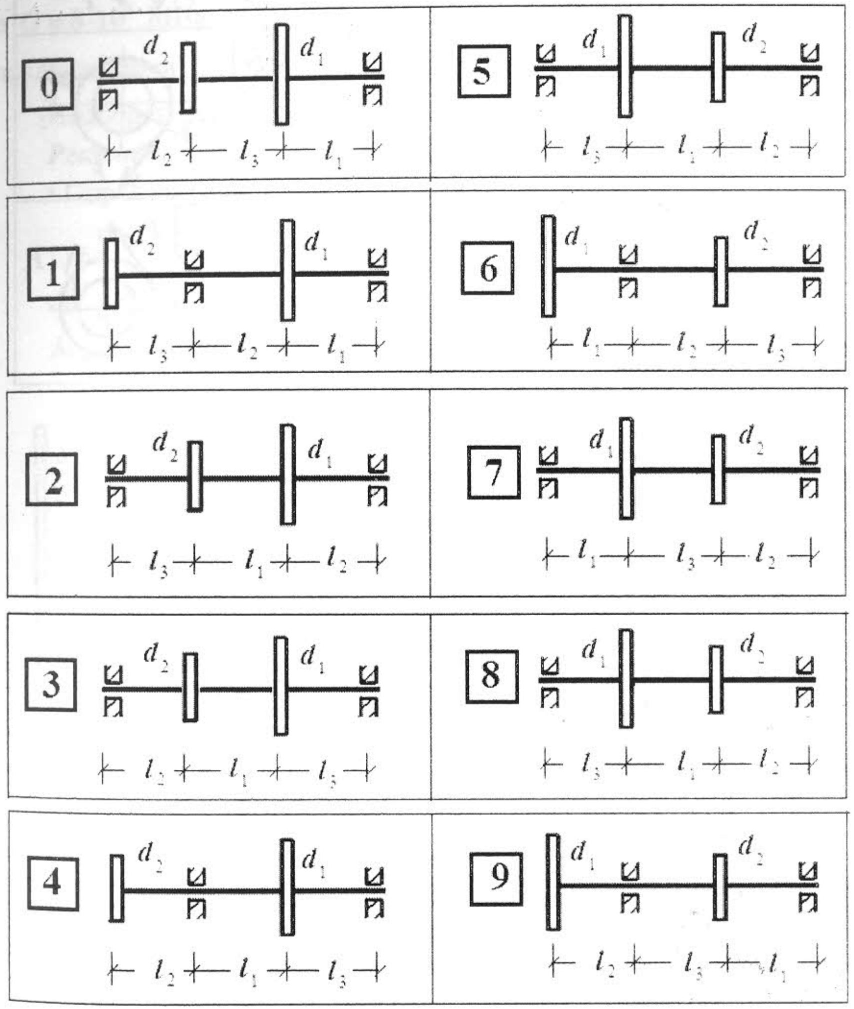


Рис. 6.1.1. Расчётные схемы вала

8. Определить диаметр вала из условия жёсткости при изгибе.
9. Выбрать окончательный вариант величины диаметра.

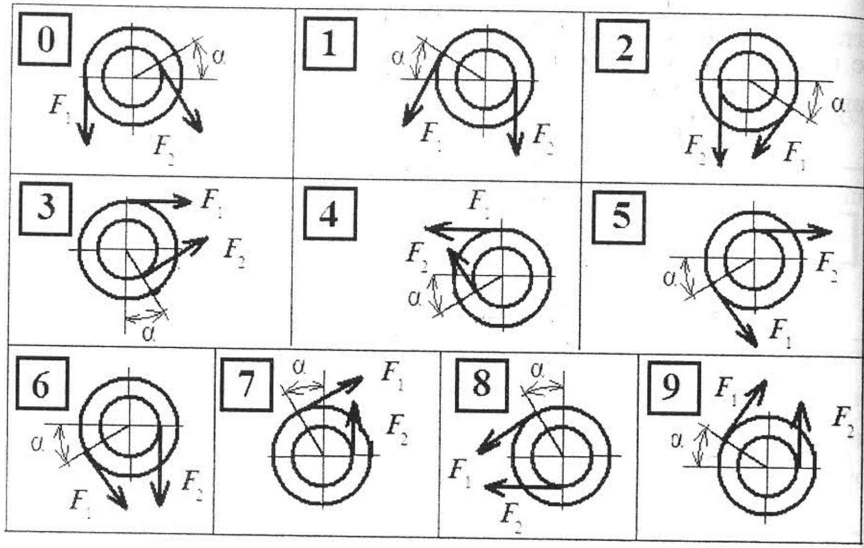


Рис. 6.1.2. Схемы окружных сил

Таблица 6.1

Первая цифра шифра	l_1 см	d_1 см	M кН·м	Вторая цифра шифра	Схема окружных сил	d_2 см	l_2 см	Третья цифра шифра № схемы	α°	l_3 см
0	9	38	0,40	0	0	16	10	0	30	7
1	7	32	0,38	1	1	18	14	1	45	8
2	6	35	0,40	2	2	22	16	2	60	10
3	8	36	0,28	3	3	24	15	3	30	9
4	5	40	0,34	4	4	20	10	4	45	8
5	6	32	0,32	5	5	26	12	5	60	6
6	8	30	0,38	6	6	23	15	6	30	10
7	5	35	0,36	7	7	28	16	7	45	8
8	6	34	0,35	8	8	21	12	8	60	6
9	7	38	0,42	9	9	19	14	9	30	10

Пример расчёта. Задача 6.1.

На стальной вал насажены два зубчатых колеса диаметром 20 см и 40 см, на которые действуют окружные усилия F_1 и F_2. Передаваемый на вал момент $M = 0{,}4$ кН·м. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа, модуль продольной упругости $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа; модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; допускаемый прогиб $[f] = 0{,}0001l$ (l – длина вала между опорами); допускаемый угол поворота $[\varphi] = 0{,}002$ рад.

Подобрать диаметр вала из условия прочности и жёсткости.

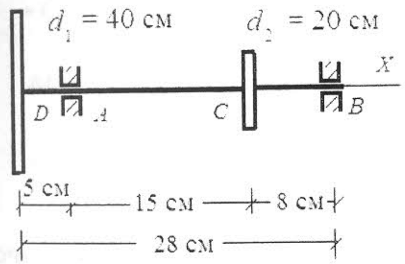
Решение:

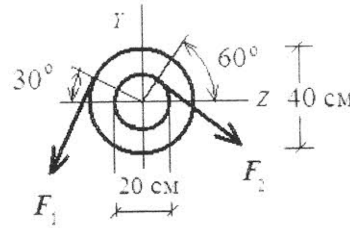
• Определяем радиусы шкивов вала:

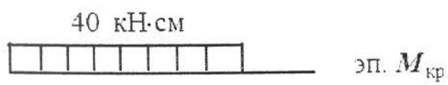
$$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ см}; \; r_2 = \frac{d_2}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см}.$$

• Строим эпюру крутящих моментов:

$$M_{кр} = M = 0{,}4 \text{ кН·м} = 40 \text{ кН·см}.$$







• Определяем окружные силы:

$$F_1 = \frac{M}{r_1} = \frac{40}{20} = 2 \text{ кН}; \; F_2 = \frac{M}{r_2} = \frac{40}{10} = 4 \text{ кН}.$$

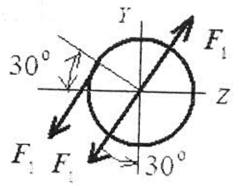
• Приводим силы F_1 и F_2 к центру окружностей колёс. Получаем силы и пары. Определяем величины проекций сил F_1 и F_2 на оси Y и Z:

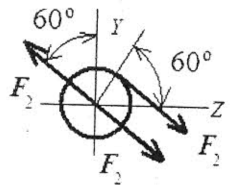
$F_{1y} = F_1 \cos 30^\circ = 2 \cdot 0{,}866 = 1{,}732$ кН;

$F_{1z} = F_1 \sin 30^\circ = 2 \cdot 0{,}5 = 1{,}0$ кН;

$F_{2y} = F_2 \cos 60^\circ = 4 \cdot 0{,}5 = 2{,}0$ кН;

$F_{2z} = F_1 \sin 60^\circ = 4 \cdot 0{,}866 = 3{,}464$ кН;





• Строим эпюру изгибающих моментов M_z в вертикальной плоскости $y0x$, предварительно определив опорные реакции.

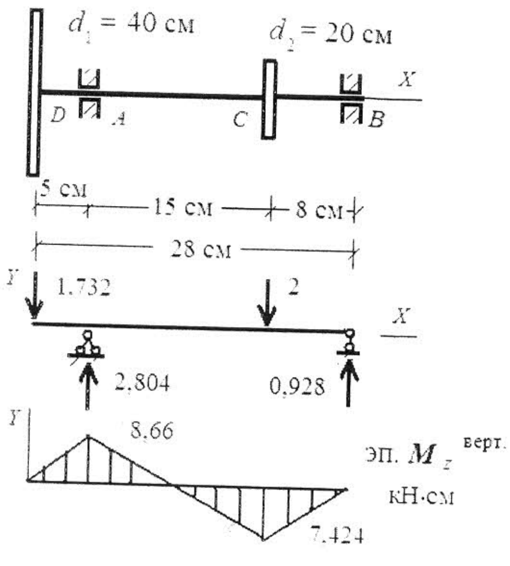
$\sum M_A = 0$. $F_{1y} \cdot 5 - F_{2y} \cdot 15 + R_B \cdot 23 = 0$.

$1{,}732 \cdot 5 - 2 \cdot 15 + R_B \cdot 23 = 0$. $R_B = 0{,}928$ кН.

$\sum M_B = 0$. $F_{1y} \cdot 28 + F_{2y} \cdot 8 - R_A \cdot 23 = 0$.

$1{,}732 \cdot 28 + 2 \cdot 8 - R_A \cdot 23 = 0$. $R_A = 2{,}804$ кН.

Проверка: $\sum Y = 2{,}804 + 0{,}928 - 2 - 1{,}732 = 0$.



• Строим эпюру изгибающих моментов M_y в горизонтальной плоскости $z0y$, предварительно определив опорные реакции.

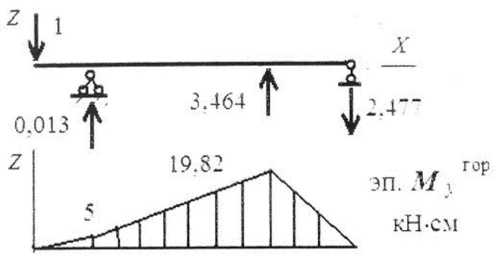
$\sum M_A = 0$. $F_{1z} \cdot 5 + F_{2z} \cdot 15 - R_B \cdot 23 = 0$.

$1{,}0 \cdot 5 + 3{,}464 \cdot 15 - R_B \cdot 23 = 0$. $R_B = 2{,}477$ кН.

$\sum M_B = 0$. $F_{1z} \cdot 28 - F_{2z} \cdot 8 - R_A \cdot 23 = 0$.

$1{,}0 \cdot 28 - 3{,}464 \cdot 8 - R_A \cdot 23 = 0$. $R_A = 0{,}013$ кН.

Проверка: $\sum Y = 3{,}464 - 1 - 2{,}477 + 0{,}013 = 0$.



• Определяем изгибающий момент в точках A и C:

$$M_A = \sqrt{M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = \sqrt{8{,}66^2 + 5^2} = 10 \text{ кН·см}.$$

$$M_C = \sqrt{M_{Cy}^2 + M_{Cz}^2} = \sqrt{7{,}424^2 + 19{,}816^2} = 21{,}16 \text{ кН·см} = M_{\max}.$$

• Определяем приведённый момент в точке C по третьей теории прочности:

$$M_{\text{пр}} = \sqrt{M_C^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{21{,}16^2 + 40^2} = 45{,}25 \text{ кН·м}.$$

• Определяем диаметр из условия прочности:

$$\frac{M_{\text{пр}}}{W} \le [\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2;\ W \ge \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]};\ W = \frac{\pi d^3}{32} = 0{,}1 d^3;$$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{\text{пр}}}{0{,}1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{45{,}25}{0{,}1 \cdot 16}} = 3{,}05 \text{ см}.$$

• Определяем диаметр вала из условия жёсткости при кручении.

Условие жесткости: $\varphi' = \dfrac{M_{кр}}{GI_p} \le \left[\varphi'_{кр}\right] = 1{,}7^\circ$ / м $=0{,}017^\circ$ / см.

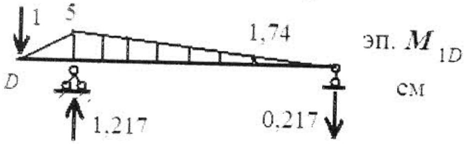
Полярный момент инерции: $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32} = 0{,}1d^4$.

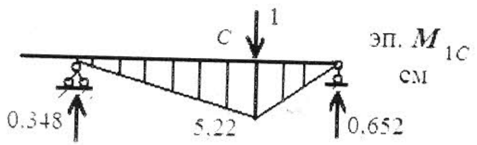
Модуль сдвига: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа $= 8 \cdot 10^3$ кН/см².

$$\varphi' = \frac{40}{0{,}1 \cdot d^4 \cdot 8 \cdot 10^3} \cdot \frac{180}{\pi} \le 0{,}017;\ d \ge \sqrt[4]{168{,}6} = 3{,}6 \text{ см.}$$

• Определяем диаметр вала из условия жёсткости при изгибе. Для этого строим единичные эпюры моментов и определяем линейные перемещения в опасных сечениях по формуле Мора-Максвелла, применяя графоаналитические способы его вычисления. Определяем прогибы в точках D и C.

Единичные эпюры.





$$\Delta_D^{верт} = \sum \int_0^l \frac{M_{1D} M_z}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 8{,}66 + \frac{15}{6}(2 \cdot 5 \cdot 8{,}66 - 2 \cdot 1{,}74 \cdot 7{,}424 + 1{,}74 \cdot 8{,}66 - 5 \cdot 7{,}424) - \frac{1}{2} \cdot 1{,}74 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7{,}424 \right) = \frac{134{,}5}{EI} \text{ см.}$$

$$\Delta_D^{гор} = \sum \int_0^l \frac{M_{1D} M_y}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{15}{6}(2 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot 1{,}74 \cdot 19{,}82 + 5 \cdot 19{,}82 + 5 \cdot 1{,}74) + \frac{1}{2} \cdot 1{,}74 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 19{,}82 \right) = \frac{700{,}6}{EI} \text{ см.}$$

$$\Delta_D = \sqrt{\left(\Delta_D^{верт}\right)^2 + \left(\Delta_D^{гор}\right)^2} = \frac{\sqrt{134{,}5^2 + 700{,}6^2}}{EI} = \frac{713{,}4}{EI} \text{ см.}$$

$$\Delta_C^{верт} = \sum \int_0^l \frac{M_{1C} M_z}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{15}{6}(2 \cdot 5{,}22 \cdot 7{,}424 - 5{,}22 \cdot 8{,}66) + \frac{1}{2} \cdot 5{,}22 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7{,}424 \right) = \frac{183{,}9}{EI} \text{ см.}$$

$$\Delta_C^{гор} = \sum \int_0^l \frac{M_{1C} M_y}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{15}{6}(-2 \cdot 5{,}22 \cdot 19{,}82 - 5 \cdot 5{,}22) - \frac{1}{2} \cdot 5{,}22 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 19{,}82 \right) = -\frac{858{,}4}{EI} \text{ см.}$$

$$\Delta_C = \sqrt{\left(\Delta_C^{верт}\right)^2 + \left(\Delta_C^{гор}\right)^2} = \frac{\sqrt{183{,}9^2 + 858{,}4^2}}{EI} = \frac{877{,}9}{EI} \text{ см.} = \Delta_{\max}.$$

• Определяем диаметр вала:

$\Delta_{\max} \le [f]$. $[f] = 0{,}001l = 0{,}001 \cdot 23 = 0{,}023$ см.

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 0{,}049d^4.\ \Delta_C = \frac{877{,}9}{2{,}06 \cdot 10^4 \cdot 0{,}049d^4} \le 0{,}023.\ d \ge 2{,}48 \text{ см.}$$

• Исходя из условия прочности и двух условий жесткости назначаем максимальный требуемый диаметр вала $d = 3{,}6$ см.

Задача № 6.2

Косой изгиб. Определение несущей способности и перемещений в балке, испытывающей косой изгиб

Задание: Определить несущую способность и перемещение сечения балки между опорами (участками B и C). Силовая плоскость (плоскость действия нагрузки) расположена под углом к вертикальной оси сечения.

Принять: модуль продольной упругости $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа, расчётное сопротивление материала $R = 210$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$, допускаемый прогиб $[f] = l/1000$.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 6.2 и схемам, представленным на рис.6.2.1 и 6.2.2.

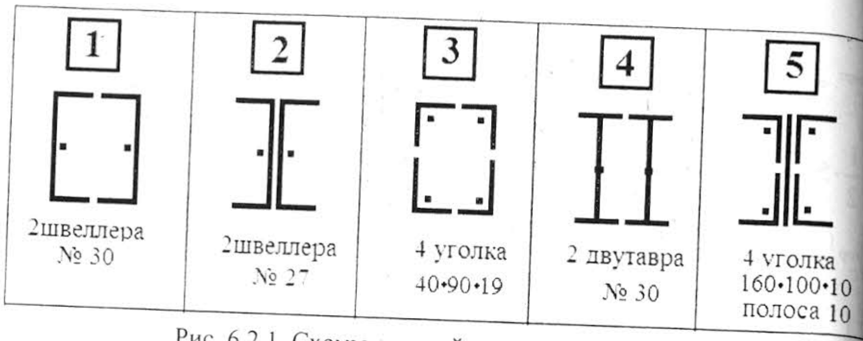
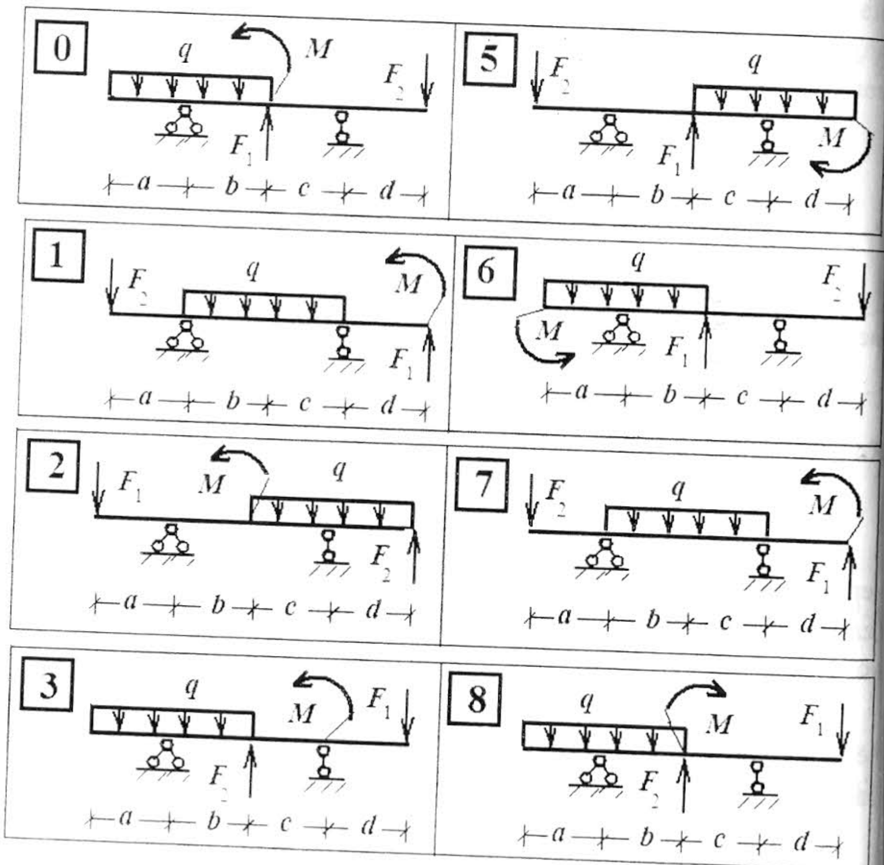


Рис. 6.2.1. Схемы сечений к задаче 6.2 РГР № 6



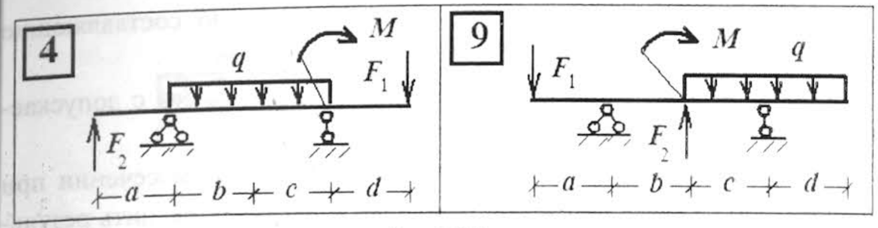


Рис.6.2.2.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить опорные реакции и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Выявить опасное сечение.

3. Определить центр тяжести сечения, главные оси инерции, определить геометрические характеристики сечения: осевые моменты инерции и осевые моменты сопротивления.

4. Спроектировать максимальный момент на главные оси инерции сечения.

5. Записать условие прочности при косом изгибе. Определить несущую способность балки q.

6. Определить положение нулевой линии (НЛ) и построить эпюру нормальных напряжений.

7. Определить линию перемещений ЛП.

8. Определить перемещение в опасном сечении. (Если опасное сечение не совпадает с границей участка, определить перемещение в сечении на границе ближайшего участка).

Для этого:

• Построить грузовую эпюру моментов M (при принятом значении нагрузки).

• Построить эпюры M_z и M_y, разложив эпюру M по осям координат.

• Построить единичную эпюру, приложив единичную безразмерную нагрузку по направлению предполагаемого перемещения.

• Определить вертикальную и горизонтальную составляющи искомого перемещения по формуле Максвелла-Мора.

• Определить искомое перемещение и сравнить его с допускаемым значением.

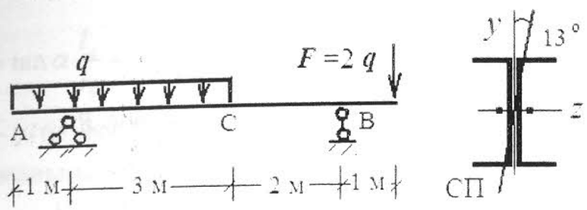
9. Вычислить нормальное напряжение в опасном сечении при условии, что силовая плоскость совпадает с осью y. Сравнить результаты.

Таблица 6.2

Первая цифра шифра	F_1 кН	F_2 кН	M кН·м	a м	Вторая цифра шифра	№ Сеч.	α°	Третья цифра шифра № схемы	b м	c м
0	0	$2q$	0	0,5	0	1	9	0	2	3
1	$3q$	0	0	1	1	2	10	1	3	2
2	0	0	q	0,6	2	3	15	2	4	1
3	$2q$	0	0	0,5	3	4	7	3	1	4
4	0	$3q$	0	0,8	4	5	16	4	2	3
5	0	0	$2q$	1,0	5	1	8	5	5	1
6	$2q$	0	0	0,6	6	2	12	6	3	3
7	0	$3q$	0	0,8	7	3	18	7	1	4
8	0	0	$3q$	1	8	4	14	8	3	2
9	q	0	0	0,5	9	5	20	9	2	3

Пример расчёта. Задача 6.2

Определить несущую способность балки, выполненной из двух швеллеров № 24. Силовая плоскость – плоскость действия нагрузки – расположена под углом $\alpha = 13^\circ$ к вертикальной оси сечения. Принять: модуль продольной упругости $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа, расчётное сопротивление материала $R = 210$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$, допускаемый прогиб $[f] = l/1000$. Определить перемещение точки C.



• Вычерчиваем схему балки в масштабе длин.

• Обозначим: СП – силовая плоскость – плоскость, в которой расположена нагрузка, НЛ – нулевая линия, ЛП – линия прогиба, вдоль которой происходят перемещения, СЛ – силовая линия – линия действия силы.

• Из таблицы сортамента проката выписываем необходимые данные для швеллера № 24:

$A = 30{,}6$ см^2; $s = 0{,}56$ см; $b = 9$ см; $W_z = 242$ см^3; $I_z = 2900$ см^4;

$I_y = 208$ см^4; $z_0 = 2{,}42$ см.

Тригонометрические функции угла:

$\cos\alpha = \cos 13^\circ = 0{,}973$; $\sin\alpha = \sin 13^\circ = 0{,}225$;

$\tan\alpha = \tan 13^\circ = 0{,}231$.

• Определяем геометрические характеристики сечения:

$$I_z = 2I_{z1} = 2 \cdot 2900 = 5800 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2\left(I_{y1} + z_0^2 \cdot A_1\right) = 2\left(208 + 2{,}42^2 \cdot 30{,}6\right) = 774{,}4 \text{ см}^4;$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = 2W_{z1} = 2 \cdot 242 = 484 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{I_y}{z_{\max}} = \frac{774{,}4}{9} = 86{,}04 \text{ см}^3;$$

• Определяем опорные реакции в силовой плоскости:

$\sum M_A = 0$. $q \cdot 4 \cdot 1 + 2q \cdot 6 - R_B \cdot 5 = 0$. $R_B = 3{,}2q$.

$\sum M_B = 0$. $-q \cdot 4 \cdot 4 + 2q \cdot 1 + R_A \cdot 5 = 0$. $R_A = 2{,}8q$.

Проверка: $\sum U = 2{,}8q + 3{,}2q - 2q - q \cdot 4 = 0$ (U – ось в силовой плоскости).

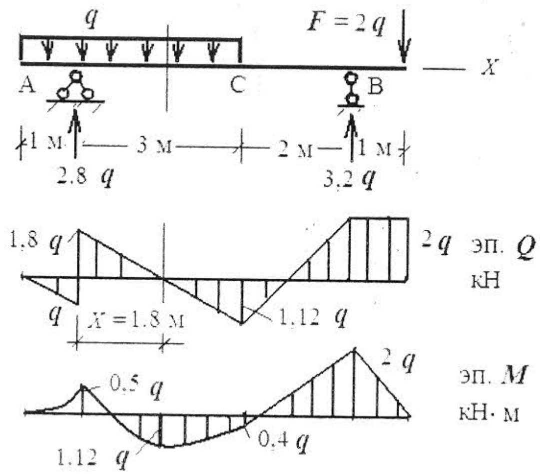
• Строим эпюры M и Q. Определяем экстремум момента M_{ext}:

$Q(x) = 2{,}8q - q(1+x) = 0$; $x = 1{,}8$ м.

$M_{ext} = 2{,}8q \cdot 1{,}8 - q \cdot 2{,}8 \cdot 1{,}4 = 1{,}12q$ кН·м;

Максимальный момент в сечении над опорой B:

$M_{\max} = 2q$ кН·м. Опасное сечение – точка B.



• Проектируем $M_{\max}$ на оси Y и Z:

вертикальная плоскость:

$M_z = M_{\max}\cos 13^\circ = 2q \cdot 0{,}973 = 1{,}946q$ кН·м $= 194{,}6q$ кН·см.

горизонтальная плоскость:

$M_y = M_{\max}\sin 13^\circ = 2q \cdot 0{,}225 = 0{,}45q$ кН·м $= 45q$ кН·см.

• Условие прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \le R\gamma_c.$$

$\gamma_c = 1$; $R = 210$ МПа $= 21$ кН/см^2;

$$\sigma_{\max} = \frac{194{,}6q}{484} + \frac{45q}{86{,}05} = 0{,}92q \le 21;$$

$q \le 22{,}8$ кН/м. Принимаем $q = 22$ кН/м.

• Определяем нулевую линию *НЛ* и строим эпюру нормальных напряжений. Определяем опасные точки в сечении B.

$$\tan\beta = \tan\alpha\frac{I_z}{I_y} = 0{,}231 \cdot \frac{5800}{774{,}4} = 1{,}73. \ \beta = 60^\circ,$$

где β – угол наклона нулевой линии к оси Z.

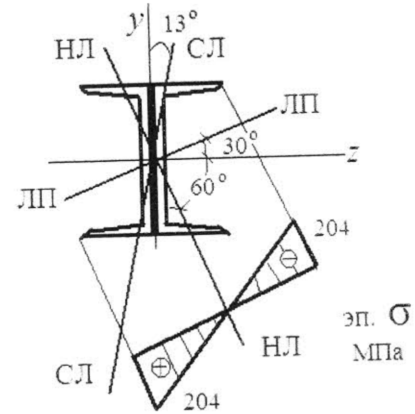
Максимальные напряжения в опасных точках:

$$\sigma_{\max,\min} = \pm\frac{194{,}6}{484} \cdot 22 \pm \frac{45}{86{,}05} \cdot 22 = \pm 20{,}4 \text{ кН/см}^2 = \pm 204 \text{ МПа}.$$

• Сравним это значение со значением максимальных напряжений при плоском прямом изгибе:

$M_{\max} = 2q = 2 \cdot 22 = 44$ кН·м $= 4400$ кН·см.

$$\sigma_{\max,\min} = \pm\frac{M_z^{\max}}{W_z} = \pm\frac{4400}{484} = \pm 9{,}09 \text{ кН/см}^2 = \pm 90{,}9 \text{ МПа}.$$



Следовательно, при отклонении силовой плоскости всего на 13^0, напряжения увеличиваются в $204/90{,}9 = 2{,}24$ раза.

• Определяем перемещение в точке C. Для этого проектируем эпюру M на оси координат:

$M_z = M\cos 13^\circ$; $M_y = M\sin 13^\circ$. Строим эпюры.

• Определим средние линии парабол:

$$M_z = \frac{10{,}7 - 8{,}56}{2} - \frac{22 \cdot 0{,}973 \cdot 3^2}{8} = 23 \text{ кН·м};$$

$$M_y = \frac{2{,}48 - 1{,}98}{2} - \frac{22 \cdot 0{,}225 \cdot 3^2}{8} = 5{,}32 \text{ кН·м}.$$

Здесь $22 \cdot 0,973 = q\cos\alpha$; $22 \cdot 0,225 = q\sin\alpha$; 3 м – длина участка

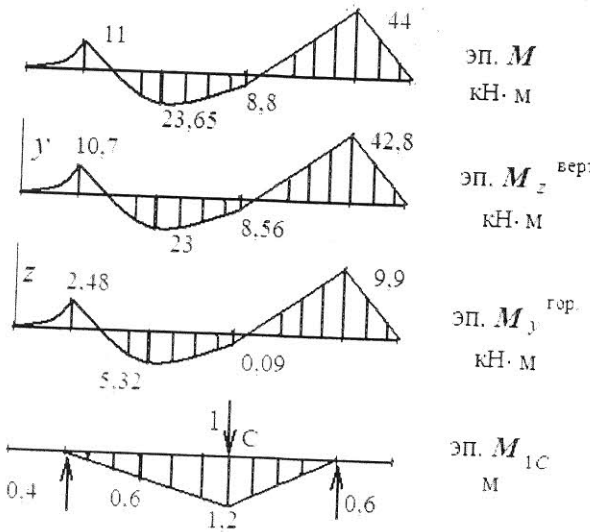
• Определим жёсткости сечения:

$EI_z = 2,06 \cdot 10^4 \cdot 5800 = 11948 \cdot 10^4$ кН·см^2 $= 11948$ кН·м^2.

$EI_y = 2,06 \cdot 10^4 \cdot 774,4 = 1595 \cdot 10^4$ кН·см^2 $= 1595$ кН·м^2.

• Строим единичную эпюру M_{1C} от единичной силы, приложенной в точке C по направлению искомого перемещения.

• Определяем перемещение точки C в вертикальной и горизонтальной плоскостях по формуле Максвелла-Мора, используя способ Верещагина и формулу Симпсона.



$$\Delta_{Cy} = \sum\int_0^l \frac{M_z M_{1C}}{EI_z}dx = \frac{1}{EI_z}\left(\frac{3}{6}(8,56 \cdot 1,2 + 4 \cdot 0,6 \cdot 23) + \frac{2}{6}(2 \cdot 1,2 \cdot 8,56 - \right.$$

$$\left. -42,8 \cdot 1,2)\right) = \frac{22,46}{EI_z} = \frac{22,46}{11948} = 0,0019 \text{ м} = 0,19 \text{ см}.$$

$$\Delta_{Cz} = \sum\int_0^l \frac{M_y M_{1C}}{EI_y}dx = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{3}{6}(1,98 \cdot 1,2 + 4 \cdot 0,6 \cdot 5,32) + \frac{2}{6}(2 \cdot 1,2 \cdot 1,98 - \right.$$

$$\left. -9,9 \cdot 1,2)\right) = \frac{5,2}{EI_y} = \frac{5,2}{1595} = 0,0033 \text{ м} = 0,33 \text{ см}.$$

$$\Delta_C = \sqrt{\Delta_{Cz}^2 + \Delta_{Cy}^2} = \sqrt{0,19^2 + 0,33^2} = 0,38 \text{ см}.$$

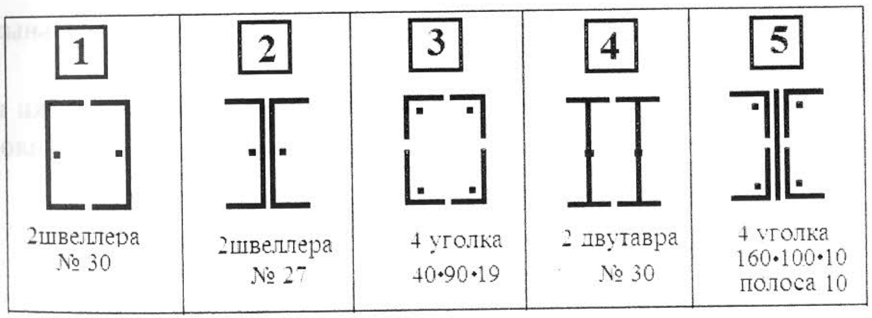
• Вычисляем допустимый прогиб балки. $[f] = \frac{l}{1000} = \frac{500}{1000} = 0,5$ см.

$\Delta_C = 0,38$ см $< [f] = 0,5$ см. Вывод: жёсткость обеспечена.

Задача № 6. 3. Внецентренное сжатие. Определение несущей способности колонны. Построение ядра сечения

Задание: Определить несущую способность колонны, нагруженной внецентренной силой F. Принять значения: расчётное сопротивление материала $R = 240$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$. Построить эпюру нормальных напряжений. Сравнить полученные значения напряжений с напряжениями при центральном приложении нагрузки. Построить ядро сечения.

Исходные данные к задаче определить по таблице № 6.3 и схемам, представленным ниже:



Схемы сечений к задаче № 6.3. РГР № 6.

Таблица 6.3

Первая цифра шифра	e_z см	Вторая цифра шифра	e_y см	Третья цифра шифра № схемы
0	1	0	2	0
1	2	1	3	1
2	3	2	4	2

3	4	3	5	3
4	1	4	2	4
5	2	5	3	5
6	3	6	4	6
7	4	7	5	7
8	1	8	2	8
9	2	9	3	9

Примечание к таблице: e_z - координата полюса по оси Z, e_y - координата полюса по оси Y.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Определить главные центральные оси инерции. Определить геометрические характеристики сечения: площадь поперечного сечения, осевые моменты инерции, осевые моменты сопротивления, радиусы инерции сечения.

3. Из условия прочности при внецентренном сжатии (растяжении) определить несущую способность колонны.

4. Определить нулевую линию и построить эпюру нормальных напряжений.

5. Определить напряжения при осевом приложении нагрузки и сравнить их с величиной напряжений при внецентренном её приложении.

6. Построить ядро сечения.

Пример расчёта. Задача 6.3

К колонне, выполненной из четырёх неравнополочных уголков ∟160×100×10, внецентренно приложена сила F. Полюс (точка приложения силы) имеет координаты в системе главных осей Z, Y (эксцентриситеты): $e_z = 9$ см, $e_y = 8$ см. Определить допустимую нагрузку на колонну $[F]$, построить эпюру нормальных напряжений.

Сравнить напряжения при внецентренном приложении нагрузки с напряжениями при центрально приложенной нагрузке. Построить

ядро сечения. Принять значения: расчётное сопротивление материала $R = 240$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$.

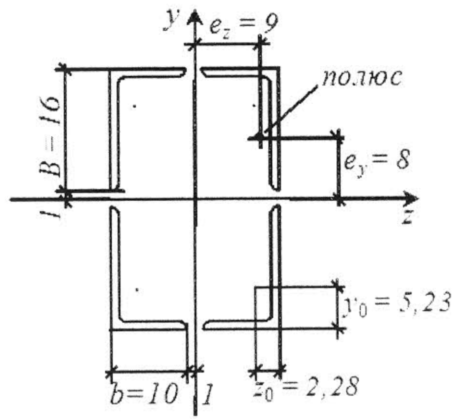
Решение:

• Из таблиц проката выбираем необходимые данные для уголка ∟160×100×10:

Размеры: $B = 16$ см; $b = 10$ см; $z_0 = 2{,}28$ см; $y_0 = 5{,}23$ см.

Площадь и моменты инерции: $A_1 = 25{,}3$ см²; $I_{z1} = 667$ см⁴; $I_{y1} = 204$ см⁴.

• Чертим схему сечения в масштабе длин. Проводим главные оси и указываем местоположение полюса – точки приложения силы. Все размеры на схеме – в сантиметрах.



• Определяем геометрические характеристики сечения:

$A = 4A_1 = 4 \cdot 25{,}3 = 101{,}2$ см²;

$a_y = B + 1 - y_0 = 16 + 1 - 5{,}23 = 11{,}77$ см;

$a_z = b + 1 - z_0 = 10 + 1 - 2{,}28 = 8{,}72$ см.

$I_z = \sum\left(I_{zi} + a_{yi}^2 A_i\right) = 4\left(667 + 11{,}77^2 \cdot 25{,}3\right) = 16688$ см⁴;

$I_y = \sum\left(I_{yi} + a_{zi}^2 A_i\right) = 4\left(204 + 8{,}72^2 \cdot 25{,}3\right) = 8511$ см⁴.

$z_{max} = 10 + 1 = 11$ см; $y_{max} = 16 + 1 = 17$ см.

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}} = \frac{16688}{17} = 982 \text{ см}^3; \; W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = \frac{8511}{11} = 774 \text{ см}^3;$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{16688}{101,2}} = 12,84 \text{ см}; \; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{8511}{101,2}} = 9,17 \text{ см}.$$

• Определяем допустимую нагрузку.

Условие прочности при внецентренном приложении нагрузки:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \le R\gamma_c$$ (используются модули всех усилий).

Определяем усилия:

$N = F$ кН; $M_z = Fe_y = F \cdot 8$ кН·см; $M_y = Fe_z = F \cdot 9$ кН·см;

Максимальное сжимающее напряжение:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{101,2} + \frac{F \cdot 8}{982} + \frac{F \cdot 9}{774} = 0,0099F + 0,0197F = 0,0296F.$$

$0,0296F \le 24$; допускаемая нагрузка: $F \le \dfrac{24}{0,0296} = 810,8$ кН.

Принимаем $F = 810$ кН.

При этом максимальные напряжения с учетом знака:

$\sigma^-_{max} = -0,0296F = -0,0296 \cdot 810 = -23,98$ кН/см² $= -239,8$ МПа.

$\sigma^+_{max} = -0,0099F + 0,0197F = 0,0098F = 0,0098 \cdot 810 = 7,94$ кН/см² $= 79,4$ МПа.

При центральном приложении нагрузки:

$\sigma^+_{max} = \dfrac{F}{A} = \dfrac{810}{101,2} = 8,00$ кН/см². $\sigma^-_{max} = -\dfrac{F}{A} = -8,00$ кН/см².

Отношение модулей максимальных напряжений

$$n = \frac{23,98}{8,00} = 3,00.$$

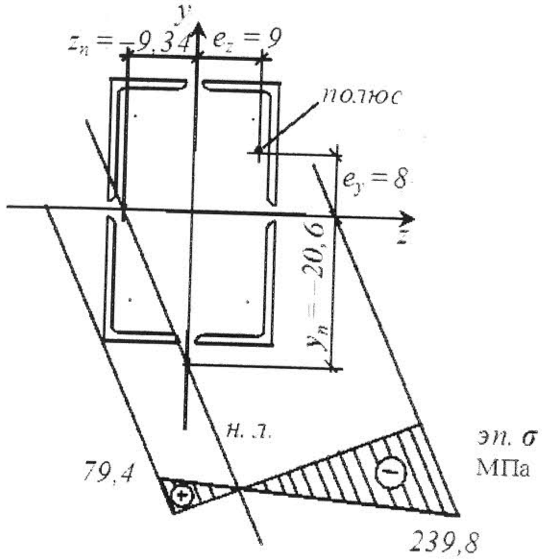
Вывод: напряжения в сечении в 3 раза больше при внецентренном приложении нагрузки, чем при центральном её приложении.

• Строим нулевую линию. Уравнение нулевой линии:

$\dfrac{z}{z_n} + \dfrac{y}{y_n} = 1$, где

$z_n = -\dfrac{i_y^2}{e_z} = -\dfrac{9,17^2}{9} = -9,34$ см; $y_n = -\dfrac{i_z^2}{e_y} = -\dfrac{12,84^2}{8} = -20,6$ см – отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях Z и Y соответственно.

• Строим нулевую линию и эпюру нормальных напряжений.



• Строим ядро сечения. Для этого будем определять значения эксцентриситетов полюса z_p и y_p на главных осях сечения, располагая нулевую линию касательно к сечению и перпендикулярно соответствующим главным осям.

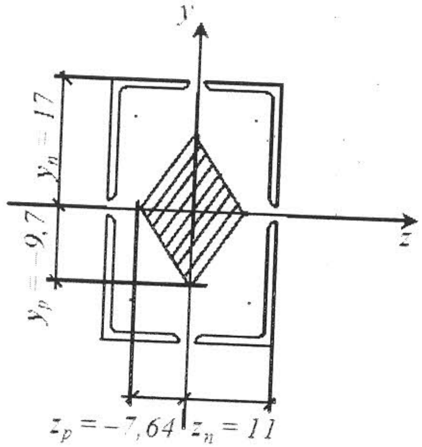
1) Нейтральная линия проходит вертикально по касательной к сечению. Тогда координата полюса:

$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_n} = -\frac{9,17^2}{11} = -7,64 \text{ см}.$$

2) Нейтральная линия проходит горизонтально по касательной к сечению. Тогда координата полюса

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_n} = -\frac{12,84^2}{17} = -9,70 \text{ см}.$$

Отложим значения $z_p = -7,64$ см и $y_p = -9,70$ см на осях Z и Y получив 2 вершины ядра сечения на этих осях. Для каждой из этих вершин строим симметричную точку относительно соответствующей главной оси. Полученные четыре точки соединим отрезками прямых линий. Образованный в результате ромб представляет собой ядро сечения.



РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Устойчивость центрально сжатых стержней

Задача № 7.1. Определение величины критической силы для центрально сжатого стержня

Задание: Определить величину критической силы и критического напряжения для центрально сжатого стержня.

Исходные данные к задаче определить по таблице 7.1 и схемам, представленным на рис. 7.1 и 7.2

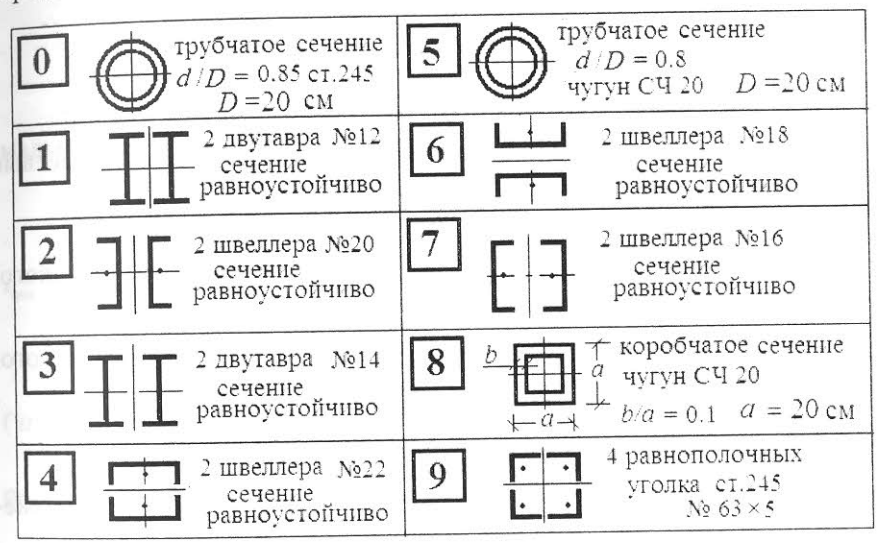


Рис. 7.1.1. Номера типов сечений

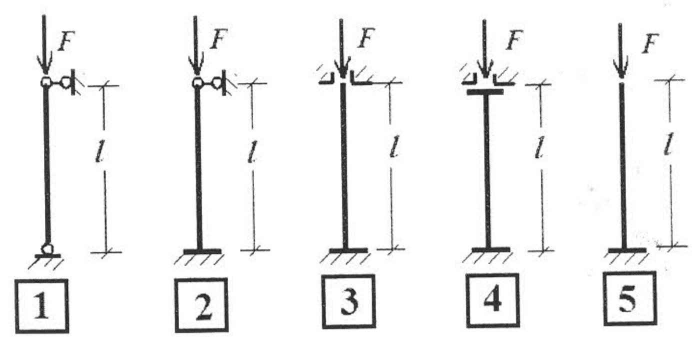


Рис. 7.1.2. Номера схем

Таблица 7.1

Вторая цифра шифра	l м	№ схемы	Третья цифра шифра	Тип сечения
0	3,0	1	0	0
1	3,3	2	1	1
2	4,0	3	2	2
3	3,2	4	3	3
4	2,0	5	4	4
5	2,8	1	5	5
6	3,5	2	6	6
7	3,4	4	7	7
8	3,6	3	8	8
9	2,2	5	9	9

Примечания: 1. Равно устойчивое сечение имеет равные осевые моменты инерции: $I_{max} = I_{min}$.

2. Необходимые величины:

для стали: $\lambda_{пред} = 100$, $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа, в формуле Ясинского: $a = 31$ кН/см²; $b = 0{,}114$ кН/см²; $c = 0$;

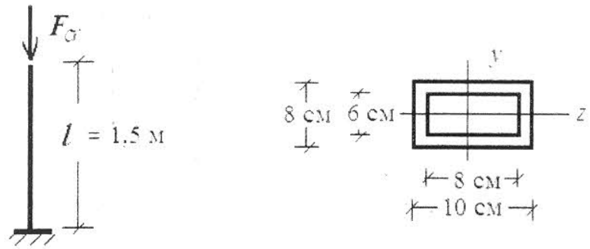
для чугуна: $\lambda_{пред} = 80$, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, в формуле Ясинского: $a = 76{,}1$ кН/см²; $b = 1{,}177$ кН/см²; $c = 0{,}0052$ кН/см².

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.
2. Определить необходимые для расчёта геометрические характеристики сечения.
3. Определить гибкость стержня и сравнить её с предельной гибкостью для данного материала.
4. Выбрать необходимую формулу для определения критической силы (по формуле Л. Эйлера) или для определения критического напряжения (по формуле Ф. С. Ясинского).
5. Определить величину критической силы и критического напряжения.

Примеры расчёта

Пример 7.1.1. Определить величину критической силы и критического напряжения для центрально сжатого стержня. Сечение коробчатое. Материал – чугун. $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\lambda_{пред} = 80$.



• Определяем минимальный осевой момент инерции и минимальный радиус инерции сечения:

$$A = 10 \cdot 8 - 8 \cdot 6 = 32 \text{ см}^2,\quad I_{min} = \frac{10 \cdot 8^3}{12} - \frac{8 \cdot 6^3}{12} = 282{,}67 \text{ см}^4,$$

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{282{,}67}{32}} = 2{,}97 \text{ см}.$$

• Определяем гибкость стержня: $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{min}} = \dfrac{2 \cdot 150}{2{,}97} = 101 > \lambda_{пред}$ ($\mu = 2$, $l = 150$ см).

• Определяем величину критической силы по формуле Л. Эйлера:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu l)^2} = \frac{3{,}14^2 \cdot 10^4 \cdot 282{,}67}{(2 \cdot 150)^2} = 309{,}68 \text{ кН}.$$

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{309{,}68}{32} = 9{,}68 \text{ кН/см}^2.$$

Пример 7.1.2. Определить величину критической силы и критического напряжения для центрально сжатого стержня длиной 4.5 м. Сечение стержня – 2 швеллера № 12, отстоящих друг от друга на 2 см.

• Определяем минимальный осевой момент инерции и минимальный радиус инерции сечения.

$A_1 = 13{,}3$ см² (площадь сечения одного швеллера по сортаменту);

$A = 2A_1 = 13{,}3 \cdot 2 = 26{,}6$ см²;

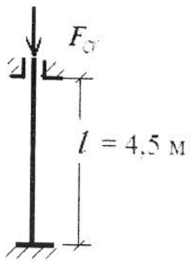
$I_{z1} = 304$ см^4; $I_{y1} = 31{,}2$ см^4; $z_0 = 1{,}54$ см (характеристики одного швеллера по сортаменту);

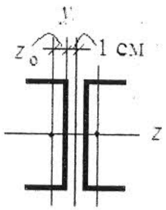
$$I_z = 2\left(I_{z1} + a_y^2 A_1\right) = 2I_{z1} = 2 \cdot 304 = 608 \text{ см}^4 = I_{\max} \ (a_y = 0);$$

$$I_y = 2\left(I_{y1} + a_z^2 A_1\right) = 2\left(31{,}2 + 2{,}54^2 \cdot 13{,}3\right) = 234 \text{ см}^4 = I_{\min}$$

$(a_z = z_0 + 1 = 1{,}54 + 1 = 2{,}54$ см);

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{234}{26{,}6}} = 2{,}97 \text{ см}.$$





• Определяем гибкость стержня:

$$\lambda = \lambda_y = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0{,}5 \cdot 450}{2{,}97} = 75{,}76 \ (\mu = 0{,}5;\ l = 450 \text{ см}).$$

• Определяем величину критической силы. В случае $\lambda = 76{,}53 < \lambda_{\text{пред}} = 100$ используем формулу Ф. С. Ясинского:

для стали $a = 31$ кН/см^2; $b = 0{,}114$ кН/см^2; $c = 0$;

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda - c\lambda^2 = 31 - 0{,}114 \cdot 75{,}76 = 22{,}36 \text{ кН/см}^2;$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 22{,}36 \cdot 26{,}6 = 594{,}9 \text{ кН}.$$

Примечание. Если сечение равно устойчиво, то необходимо обеспечить равенство моментов инерции относительно материальной оси I_z и относительно свободной оси I_y. Момент инерции относительно материальной оси известен: он равен $I_z = 2I_{z1}$. Тогда из равенства моментов инерции следует:

$$2I_{z1} = 2\left(I_{y1} + a_z^2 A_1\right).$$

Отсюда определяется требуемое расстояние между центрами тяжести всего сечения и отдельного швеллера:

$$a_z = \sqrt{\frac{I_{z1} - I_{y1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{304 - 31{,}2}{13{,}3}} = 4{,}53 \text{ см}.$$

Тогда расстояние между стенками швеллеров должно быть принято $\delta = 2\left(a_z - z_0\right) = 2\left(4{,}53 - 1{,}54\right) = 5{,}98$ см (примерно 6 см).

Задача № 7.2. Подбор поперечного сечения центрально сжатого стержня

Задание: Подобрать поперечное сечение стержня из условия устойчивости (возможно несколько попыток). Определить величину критической силы.

Принять следующие значения характеристик:
модуль продольной упругости для стали $E = 2{,}06 \cdot 10^5$ МПа;
то же для чугуна $E = 1 \cdot 10^5$ МПа,
расчётное сопротивление для стали $R = 240$ МПа,
то же для чугуна $R = 200$ МПа,
коэффициент условий работы $\gamma_c = 1$,
предельная гибкость для стали $\lambda_{\text{пред}} = 100$,
то же для чугуна $\lambda_{\text{пред}} = 80$.

Исходные данные к задаче определить по таблице 7.2 и схемам, представленным на рис. 7.2.1 и 7.2.2.

Последовательность расчёта

1. Изобразить в масштабе расчётную схему с указанием размеров и нагрузки.

2. Записать условие устойчивости: $\sigma = \dfrac{N}{\varphi A} \le R$.

3. Произвести первую попытку подбора сечения, задавшись произвольным значением коэффициента продольного изгиба φ_1 из интервала $0 < \varphi_1 \le 1$:

• определить необходимую площадь сечения: $A \ge \dfrac{N}{\varphi R}$.

• назначить размеры сечения.
• определить гибкость стержня.
• определить коэффициент продольного изгиба φ_2 по таблице приложения.
• проверить устойчивость стержня.

4. Если условие устойчивости стержня не выполняется, произвести вторую попытку подбора сечения (см. пункт 3).

5. Выбрав необходимое сечение стержня, определить величину критической силы. Для этого надо сравнить гибкость стержня λ с предельной гибкостью $\lambda_{\text{пред}}$ для данного материала и выбрать формулу для определения критической силы:

если $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$, следует определять критическую силу по формуле Л. Эйлера $F_{cr} = \dfrac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}$;

если $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, следует определять критическую силу по формуле Ф. С. Ясинского $\sigma_{cr} = a - b\lambda - c\lambda^2$; $F_{cr} = \sigma_{cr} A$.

Принять: для стали: $a = 31$ кН/см^2; $b = 0{,}114$ кН/см^2; для чугуна: $a = 76{,}1$ кН/см^2; $b = 1{,}177$ кН/см^2; $c = 0{,}0052$ кН/см^2.

Таблица 7.2

Первая цифра шифра	F_l кН	Вторая цифра шифра	h м	№ схемы	Третья цифра шифра	Тип сечения
0	240	0	4	1	0	0
1	340	1	3	2	1	1
2	320	2	4	3	2	2
3	300	3	5	4	3	3
4	260	4	6	1	4	4
5	350	5	5	3	5	5
6	300	6	3	2	6	6
7	340	7	4	4	7	7
8	350	8	5	3	8	8
9	280	9	3	1	9	9

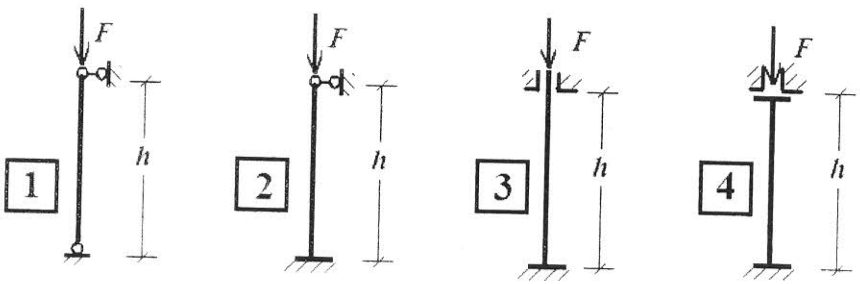


Рис. 7.2.1 Номера схем

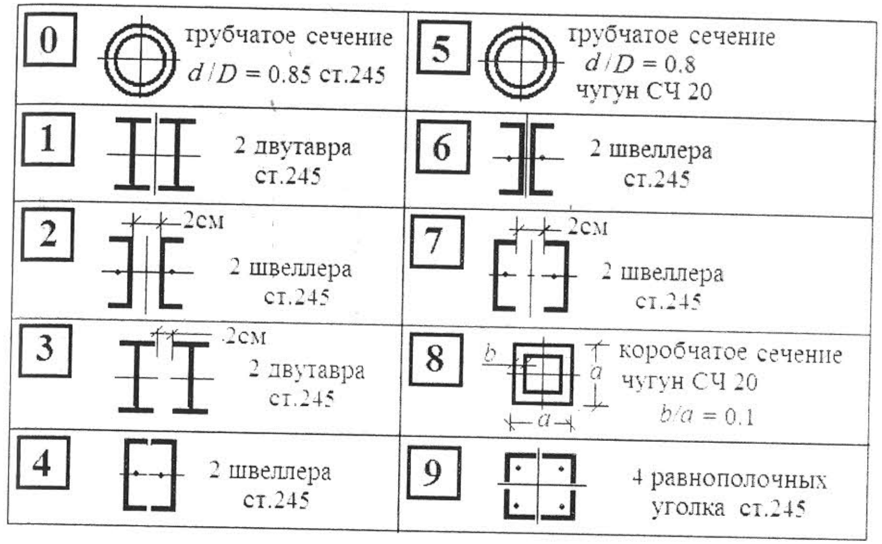


Рис. 7.2.2. Номера типов сечений

Примеры расчёта

Задача 7.2.1. Подобрать равно устойчивое сечение из 4-х равнополочных уголков из условия устойчивости. Определить величину критической силы для этого сечения. $F = 350$ кН, $h = 4{,}2$ м, $R = 240$ МПа, $\gamma_c = 1$, $\lambda_{\text{пред}} = 100$.

• Условие устойчивости: $\sigma = \dfrac{N}{\varphi A} \le R\gamma_c$, отсюда $A \ge \dfrac{N}{\varphi R}$.

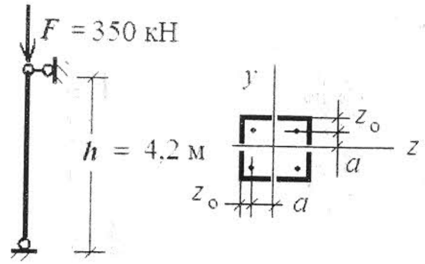
• Первая попытка: принимаем $\varphi_1 = 0{,}7$.

$A \ge \dfrac{350}{0{,}7 \cdot 24} = 20{,}83$ см^2.

Выбираем 4 уголка $\llcorner 56 \times 5$; $A = 5{,}41 \cdot 4 = 21{,}64$ см^2.

Вычисляем гибкость: $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$, $\mu = 1$, $l = 420$ см.

Для одного уголка по таблице сортамента $I_1 = 16$ см^4; $A_1 = 5{,}41$ см^2; $z_0 = 1{,}57$ см.



Сечение равно устойчиво, поэтому:

$I_{\min} = I_{\max} = I = 4\left(I_1 + a^2 A_1\right)$; $a = 5{,}6 - z_0 = 5{,}6 - 1{,}57 = 4{,}03$ см.

$I = 4\left(16 + 4{,}03^2 \cdot 5{,}41\right) = 415{,}45$ см^4.

$$i_{\min} = i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = i = \sqrt{\frac{415{,}45}{21{,}64}} = 4{,}38 \text{ см.}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 420}{4{,}38} = 95{,}9.$$

Из таблицы приложения 4 находим:

$$\varphi_1 = 0{,}612 - \frac{0{,}612 - 0{,}542}{10} \cdot 5{,}9 = 0{,}571.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{350}{0{,}571 \cdot 21{,}64} = 28{,}32 > 24 \text{ кН/см}^2.$$

• Делаем вторую попытку:

$$\varphi_2 = \frac{0{,}7 + 0{,}571}{2} = 0{,}64. \quad A \ge \frac{350}{0{,}64 \cdot 24} = 22{,}8 \text{ см}^2.$$

Выбираем 4 уголка $\llcorner\, 63 \times 5$; $A = 6{,}13 \cdot 4 = 24{,}52$ см^2.

$I_1 = 23{,}1$ см^4; $A_1 = 6{,}13$ см^2; $z_0 = 1{,}74$ см; $a = 6{,}3 - 1{,}74 = 4{,}56$ см.

$I = 4\left(23{,}1 + 4{,}56^2 \cdot 6{,}13\right) = 602{,}26$ см^4.

$$i = \sqrt{\frac{602{,}26}{24{,}52}} = 4{,}96 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{1 \cdot 420}{4{,}96} = 84{,}67.$$

$$\varphi_3 = 0{,}686 - \frac{0{,}686 - 0{,}612}{10} \cdot 4{,}67 = 0{,}65.$$

Проверяем устойчивость:

$$\sigma = \frac{350}{0{,}65 \cdot 24{,}52} = 21{,}96 < 24 \text{ кН/см}^2.$$

• Вывод: выбираем $\llcorner\, 63 \times 5$.

• Определяем величину критической силы. При $\lambda = 84{,}67 < \lambda_{\text{пред}} = 100$ критическую силу определяем по формуле Ф. С. Ясинского:

для стали: $a = 31$ кН/см^2; $b = 0{,}114$ кН/см^2; $c = 0$.

$\sigma_{cr} = a - b\lambda - c\lambda^2 = 31 - 0{,}114 \cdot 84{,}67 = 21{,}35$ кН/см^2.

$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 21{,}35 \cdot 24{,}52 = 523{,}4$ кН.

Задача 7.2.2. Подобрать сечение чугунной трубы из условия устойчивости. Определить величину критической силы для этого сечения.

$F = 250$ кН, $h = 3{,}2$ м, $R = 200$ МПа, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\gamma_c = 1$, $\lambda_{\text{пред}} = 80$, $d = 0{,}8D$.

• Условие устойчивости: $\sigma = \dfrac{N}{\varphi A} \le R\gamma_c$, отсюда $A \ge \dfrac{N}{\varphi R}$.

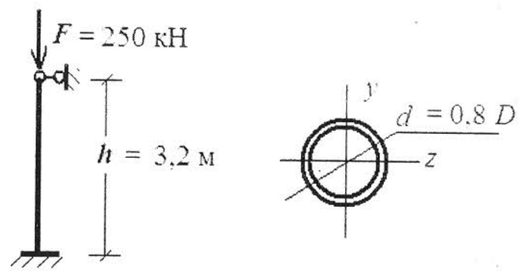
• Первая попытка: принимаем $\varphi_1 = 0{,}7$.

$A \ge \dfrac{250}{0{,}7 \cdot 20} = 17{,}86$ см^2. По условию $d = 0{,}8D$. Тогда

$$A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - \left(0{,}8D\right)^2\right) = 0{,}2826 D^2$$

Приравнивая значение и выражение для площади, получим $0{,}2826 D^2 = 17{,}86$ см^2; $D = 7{,}95$ см. Принимаем $D = 8$ см, $d = 6{,}4$ см.

Проверяем устойчивость: $\lambda = \dfrac{\mu l}{i_{\min}}$, $\mu = 0{,}7$, $l = 320$ см.



Сечение равно устойчиво, поэтому:

$$I_{\min} = I_{\max} = I = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64}\left(8^4 - 6,4^4\right) = 118,65 \text{ см}^4;$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left(8^2 - 6,4^2\right) = 18,1 \text{ см}^2;\ i = \sqrt{\frac{I}{A}} = i = \sqrt{\frac{118,65}{18,1}} = 2,56 \text{ см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 320}{2,56} = 87,5.$$

Из таблицы приложения 4 находим:

$$\varphi_1 = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} \cdot 7,5 = 0,63.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{250}{0,63 \cdot 18,1} = 21,92 > 20 \text{ кН/см}^2.$$

• Делаем вторую попытку:

$$\varphi_2 = \frac{0,7 + 0,63}{2} = 0,665.\ A \geq \frac{250}{0,665 \cdot 20} = 18,8 \text{ см}^2.$$

$0,2826D^2 = 18,8$ см²; $D = 8,16$ см. Принимаем $D = 8,2$ см, $d = 6,6$ см.

$$I_{\min} = I_{\max} = I = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64}\left(8,2^4 - 6,6^4\right) = 128,8 \text{ см}^4;$$

$$A = \frac{\pi}{4}\left(8,2^2 - 6,6^2\right) = 18,6 \text{ см}^2;\ i = \sqrt{\frac{I}{A}} = i = \sqrt{\frac{128,72}{18,6}} = 2,63 \text{ см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 320}{2,63} = 85,17.$$

$$\varphi_2 = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} \cdot 5,17 = 0,65.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{250}{0,65 \cdot 18,6} = 20,67 > 20 \text{ кН/см}^2.$$

Перегрузка сечения: $\dfrac{20,67 - 20}{20} \cdot 100\% = 3,35\% < 5\%$, что допустимо. Следовательно, принимаем окончательно $D = 8,2$ см, $d = 6,6$ см.

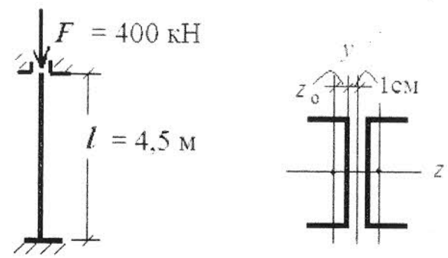
• Определяем величину критической силы: $\lambda = 85,17 > \lambda_{\text{пред}} = 80$, поэтому критическую силу определяем по формуле Л. Эйлера

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 10^4 \cdot 128,8}{(0,7 \cdot 320)^2} = 253,3 \text{ кН}.$$

Задача 7.2.3. Подобрать сечение из 2-х швеллеров из условия устойчивости. Определить величину критической силы для этого сечения и коэффициент запаса устойчивости. $F = 400$ кН, $h = 4,5$ м, $R = 240$ МПа, $\gamma_c = 1$, $\lambda_{\text{пред}} = 100$.

• Условие устойчивости: $\sigma = \dfrac{N}{\varphi A} \leq R\gamma_c$, отсюда $A \geq \dfrac{N}{\varphi R}$.

• Первая попытка: принимаем $\varphi_1 = 0,7$. $A \geq \dfrac{400}{0,7 \cdot 24} = 23,81$ см².



Выбираем 2 швеллера № 12. $A = 13,3 \cdot 2 = 26,6$ см².

Для одного швеллера по таблице сортамента $I_{z1} = 304$ см⁴; $I_{y1} = 31,2$ см⁴; $A_1 = 13,3$ см²; $z_0 = 1,54$ см.

Для составного сечения:

$A = 13,3 \cdot 2 = 26,6$ см²;

$$I_z = 2\left(I_{z1} + a_y^2 A_1\right) = 2I_{z1} = 2 \cdot 304 = 608 \text{ см}^4; = I_{\max}\ \left(a_y = 0\right).$$

$$I_y = 2\left(I_{y1} + a_z^2 A_1\right) = 2\left(31,2 + 2,54^2 \cdot 13,3\right) = 234 \text{ см}^4 = I_{\min};$$

$$a_z = z_0 + 1 = 1,54 + 1 = 2,54 \text{ см}.$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{234}{26,6}} = 2,97 \text{ см}.$$

$$\mu = 0,5;\ l = 450 \text{ см};\ \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 450}{2,97} = 75,76.$$

Из таблицы приложения 4 находим:

$$\varphi = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} \cdot 5,76 = 0,715.$$

Проверяем условие устойчивости:

$$\sigma = \frac{400}{0,715 \cdot 26,6} = 21,0 < 24 \text{ кН/см}^2.$$

Вывод: принимаем швеллер №12.

• Определяем величину критической силы. При $\lambda = 75,76 < \lambda_{\text{пред}} = 100$ критическую силу определяем по формуле Ф. С. Ясинского:

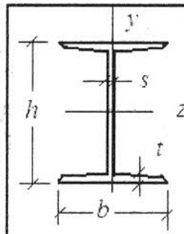
для стали: $a = 31$ кН/см²; $b = 0,114$ кН/см²; $c = 0$.

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda - c\lambda^2 = 31 - 0,114 \cdot 75,76 = 22,36 \text{ кН/см}^2.$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 22,36 \cdot 26,6 = 594,9 \text{ кН}.$$

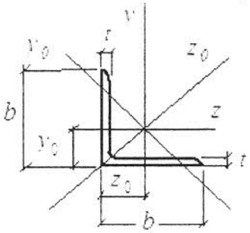
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Таблицы сортамента прокатной стали



Двутавры горячекатаные
(ГОСТ 8239 – 89)

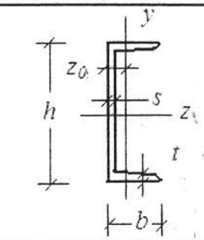
№	Масса 1 п.м., кг	Размеры, мм				A, см²	I_z, см⁴	W_z, см³	i_z, см	S_z, см³	I_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1280	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	365	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54



Уголки горячекатаные равнополочные

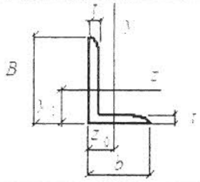
(по ГОСТ 8509 – 93)

№ Уголка	Масса 1п.м. кг	Размеры мм		A см^2	I_z см^4	i_z см	$I_{z_0 max}$ см^4	$i_{z_0 max}$ см	$I_{y_0 max}$ см^4	$i_{y_0 max}$ см	$\lvert I_{zy}\rvert$ см^4	z_0 см
		b	t									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,8	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,6
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	7,36	80	6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51



Швеллеры горячекатаные
(ГОСТ 8240 – 89)

№ швеллера	Масса 1п.м. кг	Размеры, мм				A, см^2	I_z, см^4	W_z, см^3	i_z, см	S_z, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	z_0, см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	133	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,7	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,4	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



Уголки стальные горячекатаные неравнополочные (ГОСТ 8240 – 89)

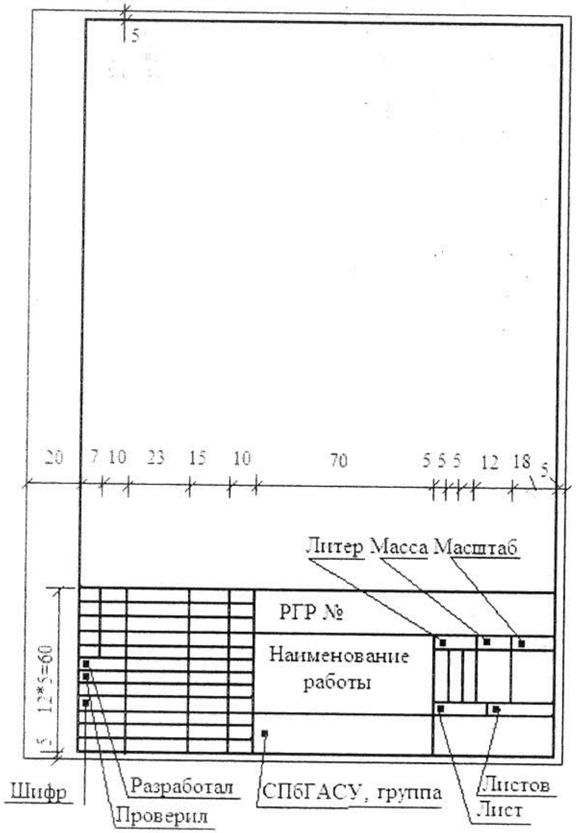
№ уголка	Масса 1 п.м., кг	Размеры, мм			A, см^2	I_z, см^4	i_z, см	I_y, см^4	i_y, см	z_0, см	y_0, см
		B	b	t							
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,9	1,59	2,56	0,9	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	1,42	3,23
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,8	275	3,12	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,1	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	2,99	6,71

Приложение 2. Коэффициенты продольного изгиба

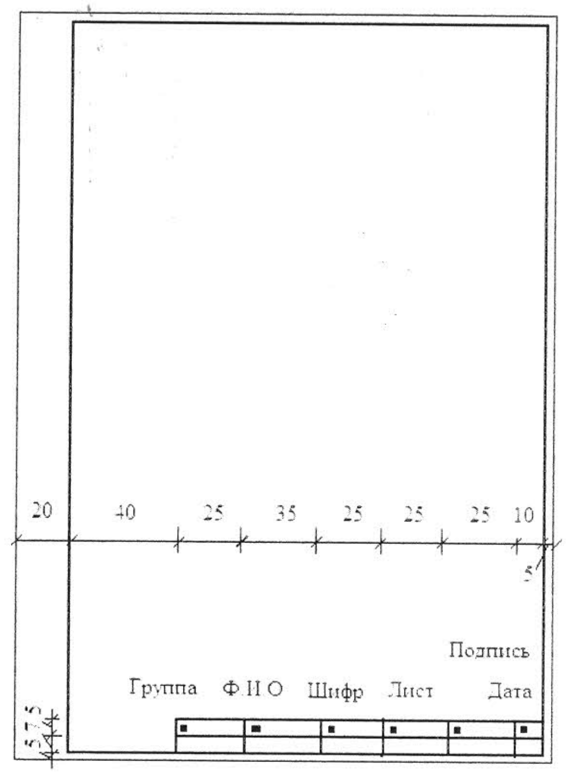
$\lambda=l_0/i$	Коэффициенты φ для элементов, изготовленных из					$\lambda=l_0/i$
	стали, с R_y, МПа		чугуна	дюралюминия	древесины	
	200	240				
10	0,988	0,987	0,97	0,999		10
20	0,967	0,962	0,91	0,998		20
30	0,939	0,937	0,81	0,835		30
40	0,906	0,894	069	0,700	$1-0,8\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$	40
50	0,869	0,852	0,57	0,568		50
60	0,827	0,805	0,44	0,455		60
70	0,782	0,754	0,34	0,353		70
80	0,734	0,686	0,26	0,269		80
90	0,665	0,612	0,20	0,212		90
100	0,559	0,542	0,16	0,172		100
110	0,537	0,478		0,142		110
120	0,479	0,419		0,119		120
130	0,425	0,364		0,101		130
140	0,376	0,315		0,087		140
150	0,328	0,276		0,076	$\frac{3100}{\lambda^2}$	150
160	0,290	0,244				160
170	0,259	0,218				170
180	0,233	0,196				180
190	0,210	0,177				190
200	0,191	0,161				200
210	0,174	0,147				210
220	0,160	0,135				220

Приложение 3.

Образец оформления первого листа расчета
(формат листа А-4)



Образец оформления последующих листов расчета
(формат листа А-4)



Рекомендуемая литература

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. М.: «Высшая школа», 1995.

2. Бабанов В. В. Теоретическая механика для архитекторов: учебник для студ. Вузов, обучающихся по направлению «Архитектура», в 2-х т. М.: «Академия», 2008.

3. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. М.: Госиздат. техн.-теор. лит.1954.

4. Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов. М.: Физматгиз, 1977.

5. Дарков А. В., Шапиро Г. С. Сопротивление материалов. «Высш. школа», 1989.

6. Масленников А. М. Начальный курс строительной механики стержневых систем: учебное пособие. – 2-е изд., доп. СПб.: Проспект Науки, 2009.

7. Снитко Н. К. Сопротивление материалов. Л.: ЛГУ. 1975.

8. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: «Наука».1986.

Содержание