Федеральное агентство морского и речного транспорта

Федеральное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского»

И. А. Терлецкий

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

Учебное пособие

Владивосток
2020

УДК 538.3

Терлецкий, И. А. Контрольные работы по физике для заочников: учеб. пособие для заочников / И. А. Терлецкий – Владивосток : Мор. гос. ун-т, 2020. – 192 с.

В настоящем пособии даны основные законы и понятия разделов физики, приведены примеры решения типовых задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов заочного обучения по техническим специальностям.

Может быть использовано студентами технических специальностей не только Морского государственного университета им. адм. Г. И. Невельского, но и всех вузов города Владивостока.

Рецензенты:
В. Н. Савченко, д-р физ.-мат. наук, профессор, ДВФУ;

Л. И. Гайдай, канд. физ.-мат. наук, доцент, ДВФУ

ISBN [redacted]

Общие методические указания

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом. Для облегчения этой работы кафедра физики организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы. Поэтому процесс изучения физики состоит из следующих этапов:

1) проработка установочных и обзорных лекций;

2) самостоятельная работа над учебниками и учебными пособиями;

3) выполнение контрольных работ;

4) прохождение лабораторного практикума;

5) сдача зачетов и экзаменов.

Контрольные работы позволяют закрепить теоретический материал курса. В процессе изучения физики студент должен выполнить четыре контрольные работы. Решение задач контрольных работ является проверкой степени усвоения студентом теоретического курса, а рецензии на работу помогают ему доработать и правильно освоить различные разделы курса физики. Перед выполнением контрольной работы необходимо внимательно ознакомиться с примерами решения задач по данной контрольной работе, уравнениями и формулами, а также со справочными материалами, приведенными в конце методических указаний.

Контрольные работы содержат каждая по пять задач. Вариант задания контрольной работы определяется в соответствии с последней цифрой шифра зачетной книжки по таблице для контрольных работ. Если, например, последняя цифра 8, то в контрольной работе №4 студент решает задачи 418, 428, 438, 448, 458. Номера задач к контрольной работе № 4 определяются по таблице 1.

При выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1) указывать на титульном листе номер контрольной работы, наименование дисциплины, фамилию и инициалы студента, шифр зачетной книжки и домашний адрес;

2) контрольную работу следует выполнять аккуратно, оставляя поля для замечаний рецензента;

3) задачу своего варианта переписывать полностью, а заданные физические величины выписывать отдельно, при этом все числовые величины должны быть переведены в одну систему единиц;

4) для пояснения решения задачи там, где это нужно, аккуратно сделать чертеж;

5) решение задачи и используемые формулы должны сопровождаться пояснениями;

6) в пояснениях к задаче необходимо указывать те основные законы и формулы, на которых базируется решение данной задачи;

7) при получении расчетной формулы для решения конкретной задачи приводить ее вывод;

8) задачу рекомендуется решить сначала в общем виде, т. е. только в буквенных обозначениях, поясняя применяемые при написании формул буквенные обозначения;

9) вычисления следует проводить с помощью подстановки заданных числовых величин в расчетную формулу. Все необходимые числовые значения величин должны быть выражены в системе СИ;

10) проверить единицы полученных величин по расчетной формуле и тем самым подтвердить ее правильность;

11) константы физических величин и другие справочные данные выбирать из таблиц.

Таблица 1. Номера задач к контрольной работе № 4

Вари-ант	Номера задач				
1	411	421	431	441	451
2	412	422	432	442	452
3	413	423	433	443	453
4	414	424	434	444	454
5	415	425	435	445	455
6	416	426	436	446	456
7	417	427	437	447	457
8	418	428	438	448	458
9	419	429	439	449	459
10	420	430	440	450	460

Контрольная работа №1

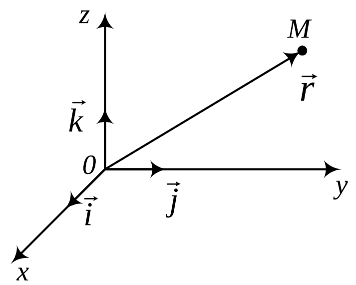
Основы механики

1.1 Кинематика поступательного и вращательного движения

Основные формулы

Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$, проведенный из начала координат в данную точку:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$



где x, y, z – координаты точки; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные орты, т.е. единичные векторы, направленные вдоль координатных осей x, y, z (рис.).

Мгновенная скорость есть производная радиус-вектора по времени.

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \ \vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k},$$

где $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ – компоненты вектора скорости, которые равны производным соответствующих координат по времени.

Абсолютное значение скорости

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Модуль мгновенной скорости частицы υ в момент времени t есть производная пути по времени:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

Средняя скорость движения определяется

$$\langle \upsilon \rangle = \Delta S / \Delta t,$$

где ΔS – путь, пройденный материальной точкой за интервал времен Δt.

Ускорение материальной точки есть производная скорости по времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t}, \; \vec{a} = \frac{d\,\vec{\upsilon}}{d\,t} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где $a_x = d\upsilon_x / dt$, $a_y = d\upsilon_y / dt$, $a_z = d\upsilon_z / dt$ – проекции ускорения на оси координат.

Среднее ускорение движения определяется

$$< a >= \Delta\upsilon / \Delta t,$$

где $\Delta\upsilon$ – изменение скорости частицы за интервал времен Δt.

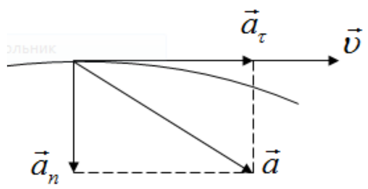
При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму тангенциальной a_τ и нормальной a_n составляющих ускорения

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Абсолютные значения этих ускорений

$$a_\tau = d\upsilon / dt, \; a_n = \upsilon^2 / R,$$

где R – радиус кривизны траектории в точке нахождения частицы.



Составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ перпендикулярны друг другу; следовательно, модуль полного ускорения определится

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Кинематическое уравнение равномерного движения материальной точки вдоль оси x

$$x = x_0 + \upsilon\, t,$$

где x_0 – начальная координата; t – время. При равномерном движении скорость v = const и ускорение a = 0.

Кинематическое уравнение равнопеременного движения (ускорение a = const) вдоль оси x

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + a\, t^2 / 2,$$

где v_0 – начальная скорость; t – время. Скорость точки при равнопеременном движении

$$\upsilon = \upsilon_0 + a\,t\,.$$

Вращательное движение характеризуется углом φ, на который поворачивается тело.

Мгновенная угловая скорость определяется производной угла поворота по времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}\,.$$

Средняя угловая скорость движения определяется

$$<\omega> = \Delta\varphi / \Delta t\,,$$

где $\Delta\varphi$ – изменение угла поворота за интервал времен Δt.

Угловое ускорение есть производная угловой скорости по времени или вторая производная угла поворота по времени.

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Связь между линейными и угловыми величинами; характеризующим вращение материально точки, выражается следующим формулами:

$$\upsilon = \omega R\,,\ a_\tau = \varepsilon R\,,\ a_n = \omega^2 R\,.$$

Кинематическое уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega\,t\,,$$

где φ_0 – начальное угловое перемещение; t – время. При равномерном вращении угловая скорость ω = const и угловое ускорение ε = 0.

Кинематическое уравнение равнопеременного вращения (угловое ускорение ε= const)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon\,t^2/2\,,$$

где ω_0 – начальная скорость; t – время. Угловая скорость точки при равнопеременном вращении

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\,t\,.$$

Примеры решения задач

Пример 1.1.

Материальная точка движется по прямой. Уравнение ее движения $S = 3 + 2t^2 + 2t^4$. Определить мгновенную скорость и ускорение точки в конце второй секунды от начала движения, среднюю скорость $<\upsilon>$ и среднее ускорение тела $<a>$за этот промежуток времени.

Решение

Мгновенная скорость – это первая производная от пути по времени:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} = 8t^3 + 4t\,.$$

Скорость в конце второй секунды: υ = 8·2³+4·2=72 м/с.

Мгновенное ускорение – это первая производная от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 24t^2 + 4\,.$$

Ускорение точки в конце второй секунды a = 24·2²+4 = 100 м/с².

Средняя скорость точки $<\upsilon>$ за время $\Delta t = t - t_0$ определяется по формуле

$$<\upsilon> = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

Так как $t_0 = 0$, то

$$<\upsilon> = \frac{3 + 2t^2 + 2t^4 - 3}{t} = 2t + 2t^3 = 20 \text{ м/с}.$$

Согласно определению среднее ускорение частицы на временном интервале от t_1 до t_2 определиться

$$<a> = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{\upsilon(t_2) - \upsilon(t_1)}{t_2 - t_1}, \text{ или } <a> = \frac{\upsilon(t) - \upsilon(t_0)}{t - t_0}.$$

Подставим числовые значения:

$$<a> = \frac{\upsilon(t) - \upsilon(0)}{t} = \frac{8t^3 + 4t}{t} = 8t^2 + 4 = 36 \text{ м/с}^2.$$

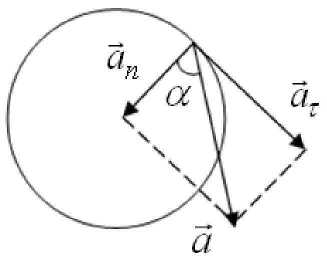
Ответ: $<\upsilon>$ = 20 м/с; $<a>$ = 36 м/с².

Пример 1.2.

Материальная точка вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 4 + 2t + t^2$. Найти величину и направление полного ускорения точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от оси вращения для момента времени t = 2 с.

Решение.

Точка описывает окружность радиуса R. Полное ускорение a точки,



движущейся по криволинейной траектории, равно геометрической сумме векторов тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений (рис.), угол между которыми равен *π/2:*

Величина полного ускорения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

Тангенциальное и нормальное ускорения выражаются формулами

$$a_\tau = \varepsilon R\,, a_n = \omega^2 R\,,$$

где ω – угловая скорость тела, ε – угловое ускорение, R – расстояние точки от оси вращения. Подставляя эти выражения в формулу для полного ускорения, получим:

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

Угловая скорость равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2t + 2\,.$$

При t = 2 с значение ω = 6 рад/с.

Угловое ускорение - это первая производная от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Тогда подставляя в формулу для полного ускорения, получим:

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ ,\ a = 0{,}1\sqrt{2^2 + 6^4}\ = 3{,}61\ \text{м/с}^2.$$

Из рисунка видно, что тангенс угла α между векторами $\vec{a}_n$ и $\vec{a}$ будет равен

$$tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\ ,\ tg\alpha = \frac{2}{36} = 0{,}055.$$

Угол $\alpha = arctg\,0{,}055 \approx 3{,}3°$.

Угол между векторами $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}$ равен $90° - 3{,}3° = 86{,}7°$.

Ответ: a = 3,61 м/с^2; α = 86,7^0.

Задачи для самостоятельного решения

111. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением 0,3 м/с^2. Определить полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны 10 м, если точка движется на этом участке со скоростью 2 м/с.

112. Зависимость пройденного телом пути S от времени t дается уравнением: S = A+Bt+Ct^2+Dt^3, где C = 2 м/с^2 и D = 1 м/с^3. Через какое время t после начала движения тело будет иметь ускорение равное 10 м/с^2? Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела за этот промежуток времени.

113. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 4 рад/с^2. Определите радиус колеса, если через 2 с после начала движения полное ускорение колеса равно 5 м/с^2.

114. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением 3 рад/с^2. Через какое время после начала движения нормальное ускорение точек колеса равно его тангенциальному ускорению.

115. Найти угловое ускорение колеса, если известно, что через 2 с после начала движения вектор полного ускорения точки, лежащей на ободе, составляет угол 45^0 с вектором ее линейной скорости.

116. В течение интервала времени от 2 с до 5 с скорость тела задается уравнением: v = B+Ct, где B = 4 м/с, C = 2 м/с^2. Найти среднюю скорость и среднее ускорение тела для этого интервала времени.

117. Частица движется по окружности радиусом 0,5 м. Закон ее движения выражается уравнением $S = A + Bt^3$, где A = 4 м; B = 0,5 м/с^3. Определить момент времени, когда нормальное ускорение точки равно 5 м/с^2. Найти скорость, тангенциальное и полное ускорение точки в тот же момент времени.

118. Первую треть пути автомобиль двигался со скоростью 30 км/ч, а оставшуюся часть пути со скоростью 15 км/ч. Определить среднюю скорость движения автомобиля на всем пути.

119. Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением: $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где A = 1,5 рад, B = 2 рад/с, C = 0,2 рад/с^2. Определить к концу второй секунды после начала движения: угловую скорость и угловое ускорение диска для точки, находящейся на расстоянии 50 см от оси вращения, тангенциальное, нормальное и полное ускорение.

120. Точка движется по окружности радиусом 0,5 м. Закон ее движения выражается уравнением $S = A + Bt^3$, где A = 4 м; B = 0,5 м/с^3. Определить момент времени, когда нормальное ускорение точки равно 5 м/с^2. Найти скорость, тангенциальное и полное ускорение точки в тот же момент времени.

1.2. Динамика поступательного движения

Основные формулы

Второй закон Ньютона (уравнение движения материальной точки)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \text{, или } m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i ,$$

где $\sum_i \vec{F}_i$ – геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; m – масса; a – ускорение; $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – импульс.

Виды сил:

Сила упругости $F_{упр} = -k\,x$, где k – коэффициент упругости (жесткости в случае пружины); x – абсолютная деформация (в случае пружины – ее растяжение).

Сила гравитационного взаимодействия $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между ними.

Сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N$, где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления.

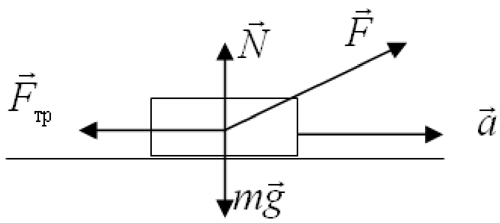
Примеры решения задач

Пример 1.3.

Тело массой m движется по горизонтальному столу под действием силы F, направленной под углом α к плоскости стола. Коэффициент трения равен μ. С каким ускорением движется тело?

Решение.

На тело действуют силы: сила тяги $\vec{F}$, под действием которой происходит движение, сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Направления сил указаны на рисунке. Вместе они сообщают телу ускорение $\vec{a}$, которое направлено горизонтально.



Направим оси координат x - горизонтально, y - вертикально. Второй закон Ньютона в векторной форме записывается так:

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Это уравнение в проекции на оси x и y имеет вид:

$$ma = F\cos\alpha - F_{тр},\ 0 = F\sin\alpha + N - mg\ .$$

Модуль силы трения связан с модулем силы реакции опоры соотношением

$$F_{тр} = \mu N\ .$$

С учетом уравнения в проекции на ось y, выражение для силы трения можно записать в виде:

$$F_{тр} = \mu N = \mu\left(mg - F\sin\alpha\right).$$

Подставив его в уравнение в проекции на оси x, получим

$$ma = F\cos\alpha - \mu\left(mg - F\sin\alpha\right).$$

$$a = \frac{F}{m}\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) - \mu g\ .$$

Ответ: $a = \frac{F}{m}\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right) - \mu g$.

Пример 1.4.

По наклонной плоскости с углом наклона α скользит брусок массой m. Коэффициент трения бруска о плоскость μ. Найдите ускорение a бруска.

Решение

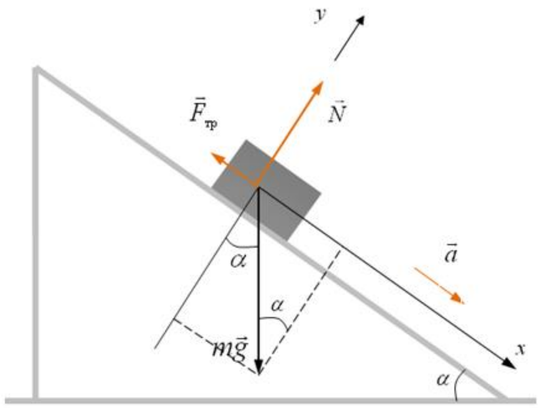
Эта задача механики, относится к случаю, когда на тело действует несколько сил. В уравнении, выражающем второй закон Ньютона,

$$m\vec{a} = \vec{F}\ ,$$

$\vec{F}$ - это векторная сумма всех сил, приложенных к телу. Векторное сложение сил можно заменить алгебраическим сложением их проекций на координатные оси.

Приступая к решению задачи, нужно сначала выбрать направление координатных осей и изобразить на чертеже векторы всех сил и вектор ускорения тела, если известно его направление. Затем необходимо найти проекции всех векторов на эти оси координат. Наконец, написать уравнение второго закона Ньютона для проекций на каждую ось и решать совместно полученные уравнения.

На брусок действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Направления сил указаны на рисунке. Вместе они и сообщают бруску ускорение $\vec{a}$, направленное вдоль плоскости вниз. Направим оси координат x и y так, как показано на рисунке.



Второй закон Ньютона в векторной форме записывается так:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Нам нужно записать уравнение в скалярной форме для проекций, входящих в него векторов, на оси x и y.

Уравнение второго закона Ньютона в проекции на оси x и y имеет вид:

$$ma = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр},\ 0 = N - mg \cdot \cos\alpha.$$

Модуль силы трения связан с модулем силы реакции опоры соотношением

$$F_{тр} = \mu N.$$

С учетом уравнения в проекции на ось y, выражение для силы трения можно записать в виде:

$$F_{тр} = \mu N = \mu m g \cdot \cos\alpha.$$

Подставив его в уравнение в проекции на оси x, получим

$$a = g \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Ответ: $a = g \cdot (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

Задачи для самостоятельного решения

121. Тело скользит по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Пройдя путь 120 см, тело приобретает скорость 2 м/с. Найти коэффициент трения тела о плоскость.

122. Автомобиль проходит середину выпуклого моста радиусом 40 м со скоростью 72 км/ч. Найдите вес автомобиля в этой точке, если его масса 2 т.

123. Тело массой 200 кг равномерно поднимают по наклонной плоскости, образующей угол 30^0 с горизонтом, прикладывая силу 1500 Н вдоль линии движения. С каким ускорением тело будет соскальзывать вдоль наклонной плоскости, его отпустить.

124. Троллейбус массой 10 т, трогаясь с места, приобрел на пути 250 м скорость 36 км/ч. Найдите коэффициент трения, если сила тяги равна 20 kН.

125. Наклонная плоскость образует угол $30°$. Тело скатывается с нее равномерно. Определить коэффициент трения тела о плоскость.

126. Невесомый блок укреплен на конце стола. Гири 1 и 2 массами m_1 = 2 кг, m_2 = 3 кг соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения гири 1 о стол равен 0,2. Найти ускорение, с которым движутся гири, и силу натяжения нити. Трением в блоке пренебречь.

127. Брусок скользит сначала по наклонной плоскости длиной 40 см и высотой 10 см, а потом, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние 120 см, останавливается. Определить коэффициент трения, считая его везде одинаковым.

128. Шайбу один раз бросают под углом $30°$ к горизонту, а второй раз пускают с такой же скоростью скользить по льду. Найти коэффициент трения, если во втором случае шайба переместилась на расстояние в 6 раз больше, чем в первом случае.

129. На шнуре, перекинутом через неподвижный блок, помешены грузы массами 500 г и 100 г. С каким ускорением движутся грузы? Какова сила натяжения шнура во время движения?

120. По наклонной плоскости длиной 50 см и высотой 10 см, лежит груз массой 2 кг. Коэффициент трения равен 0,4. Какую силу надо приложить к грузу вдоль плоскости, чтобы втащить груз? И чтобы стащить груз?

1.3 Механическая работа. Законы сохранения энергии и импульса.

Основные формулы

Работой силы F на перемещении dS называется проекция F_S этой силы на направление перемещения, умноженной на само перемещение:

$$dA = F_S\, dS = F\, dS \cos\alpha = \vec{F}\, d\vec{S},$$

где α – угол между векторами F и dS.

Работа на конечном перемещении определяется

$$A = \int_L \vec{F}\, d\vec{S},$$

где интегрирование ведется вдоль траектории L.

Работа, совершаемая постоянной силой

$$A = F\, S \cos\alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов силы F и перемещением S.

Кинетическая энергия материальной точки (или тела, движущегося поступательно)

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Потенциальная энергия U и сила (консервативная) F, действующая на тело в данной точке, связаны соотношением

$$\vec{F} = -grad\, U, \text{ или } \vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right),$$

где $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ – единичные векторы (орты), направленные вдоль координатных осей x, y, z.

Потенциальная энергия тела в однородном поле силы тяжести

$$U = m\, g\, h,$$

где m – масса; g – ускорение свободного падения; h – высота относительно нулевого уровня.

Потенциальная энергия упругодеформированного тела (сжатой или растянутой пружины)

$$U = \frac{k\,x^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости; x – абсолютная деформация.

Потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек

$$U = -G\frac{m_1\,m_2}{r},$$

где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел; r – расстояние между ними.

Закон сохранения энергии в механике

$$E = K + U = const,$$

– полная механическая энергия системы E, в которой действуют только консервативные силы остается постоянной.

Консервативные силы – это силы, работа которых не зависит от формы пути материальной точки, а определяется лишь начальным и конечным её положением.

Закон сохранения импульса

$$\sum_i \vec{p}_i = const, \text{ или} \sum_i m_i\,\vec{\upsilon}_i = const$$

импульс изолированной системы материальных точек сохраняется, т.е. остается постоянным во времени.

Примеры решения задач

Пример 1.5.

Тело массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $\upsilon_1 = 4$ м/с и ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2$ кг. Считая удар центральным и неупругим найти количество теплоты Q выделившееся при этом.

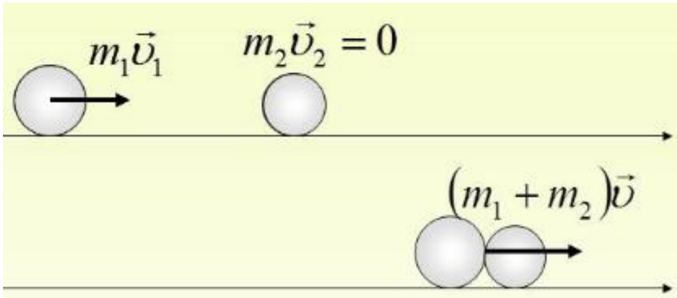
Решение:

При абсолютно неупругом ударе двух тел массами m_1 и m_2 они начинают двигаться как единое целое с массой ($m_1 + m_2$) (рис.). В результате неупругого удара механическая энергия не сохраняется, а количество теплоты Q

выделившееся при ударе определяется как разность кинетических энергий тел K_1 до и K_2 после удара:

$$Q = K_1 - K_2 .$$

До удара второе тело было неподвижным, следовательно, K_1 представляет кинетическую энергию первого тела $K_1 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2}$.



Так как удар неупругим, то после удара тела будут двигаться совместно с одной и той же скоростью υ. Определим эту скорость по закону сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}\text{, т.к. } \upsilon_2\text{=0, то}$$

$$m_1\vec{\upsilon}_1 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon} .$$

Так как тела движутся вдоль одной прямой, то это уравнение в скалярной форме будет иметь вид:

$$m_1\upsilon_1 = (m_1 + m_2)\upsilon ,$$

откуда найдем скорость тел υ после удара

$$\upsilon = \frac{m_1\,\upsilon_1}{m_1 + m_2} .$$

Кинетическая энергия тел после удара $K_2 = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2}$ будет равна

$$K_2 = \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2}\left(\frac{m_1\,\upsilon_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1^2\,\upsilon_1^2}{2(m_1 + m_2)} .$$

Количество теплоты Q определится как

$$Q = K_1 - K_2 = \frac{m_1\,\upsilon_1^2}{2} - \frac{m_1^2\,\upsilon_1^2}{2(m_1 + m_2)}$$

$$Q=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}-\frac{m_1^2\upsilon_1^2}{2(m_1+m_2)}=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

$$Q=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

Подставим числовые значения:

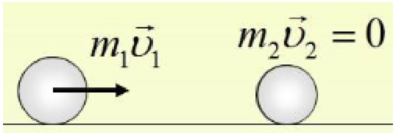
$$Q=\frac{3\cdot 4^2}{2}\frac{2}{3+2}=9{,}6\ \text{Дж.}$$

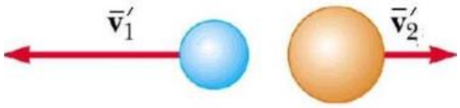
Ответ: $Q =$ 9,6 Дж.

Пример 1.6.

Шар массы m_1, движущийся со скоростью v, налетает на неподвижный шар массы m_2. Происходит упругий центральный удар. При каком соотношении масс m_1/m_2 шары после удара разлетятся в противоположные стороны с равными по модулю скоростями?

Решение:





При абсолютно упругом ударе двух тел одновременно выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:

$$m_1\vec{\upsilon}_1=m_1\vec{\upsilon}_1'+m_2\vec{\upsilon}_2',$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_1'^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2'^2}{2},$$

т.к. $v'=v'_1=v'_2$ - скорости шаров после удара одинаковы по модулю, то закон сохранения энергии запишется в форме:

$$\frac{m_1\upsilon^2}{2}=\frac{m_1\upsilon'^2}{2}+\frac{m_2\upsilon'^2}{2},$$

Спроецируем векторное уравнение, выражающее закон сохранения импульса на направление скорости первого шара v_1:

$$m_1\upsilon_1=-m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2',\ \text{или}$$

$$\upsilon' = \frac{m_1}{m_2 - m_1}\upsilon .$$

Подставляя найденную скорость v′ в закон сохранения энергии, найдем соотношение масс m_1/m_2 шаров:

$$m_1\upsilon^2 = \upsilon'^2(m_1 + m_2),\ m_1\upsilon^2 = (m_1 + m_2)\frac{m_1^{\ 2}}{(m_2 - m_1)^2}\upsilon^2,\ (m_1 + m_2)\frac{m_1}{(m_2 - m_1)^2} = 1,$$

$$\frac{m_1}{m_2 - m_1} = 1,\ ,\ m_1 / m_2 = 2 .$$

Ответ: $m_1/m_2 = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

131. Какую работу совершает человек при поднятии груза массой 2 кг на высоту 1 м с ускорением 3 м/с^2?

132. Пуля массой 10 г попадает в шар массой 5 кг подвешенный на нити, и застревает в нем. Скорость пули 500 м/с. На какую высоту поднимется шар?

133. С какой начальной скоростью υ_0 надо бросить мяч с высоты h, чтобы он поднялся на высоту $2h$? Считать удар о землю абсолютно упругим.

134. Шарик массой 800 г, подвешен на нерастяжимой нити длиной 1 м. На какую высоту надо отвести шарик от положения равновесия, чтобы при его прохождении через это положение сила натяжения нити была равна 12 Н.

135. Шар массой 300 г налетает на покоящийся шар и отражается назад с кинетической энергией 4 раза меньшей первоначальной. Считая соударение упругим, найти массу второго шара.

136. Тело может двигаться по окружности в вертикальной плоскости на нити длиной 1 м. Какую горизонтальную скорость необходимо сообщить телу в верхнем положении, чтобы сила натяжения нити в нижнем положении оказалась в 10 раз больше силы тяжести.

137. Тело массой 2 кг движется со скоростью 10 м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим найти количество теплоты выделившееся при этом.

138. Снаряд, летевший горизонтально со скоростью 20 м/с, разорвался на две части, массы которых кусков m и $2m$. Скорость большего осколка 40 м/с и направлена вертикально вниз. Найти величину скорости меньшего осколка

139. Конькобежец, разогнавшись до скорости 10 м/с въезжает на ледяную горку. На какую высоту от начала уровня горы он поднимется, ели гора составляет с горизонтом угол 30^0. Коэффициент трения коньков о лед 0,1.

140. Маятник массой 200 г отклонен на угол $60°$ от вертикали. Какова сила натяжения нити при прохождении маятником положения равновесия?

1.4 Динамика вращательного движения

Основные формулы

Основное уравнение динамики вращательного движения

$$I\,\varepsilon = M\ ,$$

где M – момент силы относительно оси, действующей на тело; I – момент инерции тела относительно той же оси; ε – угловое ускорение.

Модуль момента силы M относительно оси равен произведению проекции этой силы F на плоскость, перпендикулярную оси вращения, на её плечо l (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы):

$$M = F_{\perp}\, l\ .$$

Момент инерции материальной точки относительно оси

$$I = m r^2,$$

где m – масса точки; r – ее расстояние до оси вращения.

Момент инерции системы материальных точек относительно оси

$$I = \sum_i m_i\, r_i^2\ .$$

Момент инерции однородного диска радиуса R массой m относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска, проходящей через его центр

$$I = \frac{m R^2}{2}\ .$$

Момент инерции однородного стержня длиной l и массой m относительно оси, перпендикулярной к стержню, и проходящей через его центр равен:

$$I = \frac{m l^2}{12}.$$

Момент инерции однородного шара радиуса R и массой m относительно оси, проходящей через его центр (совпадающий с его диаметром) равен:

$$I = \frac{2 m R^2}{5}.$$

Теорема Гюйгенса–Штейнера. Момент инерции тела I относительно произвольной оси равен

$$I = I_C + m d^2,$$

где I_C – момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно заданной оси; d – расстояние между осями; m – масса тела.

Момент импульса L вращающегося тела относительно оси

$$L = I\,\omega,$$

где I – момент инерции тела относительно той же оси; ω – угловая скорость.

Примеры решения задач

Пример 1.7.

Однородный диск радиусом 40 см и массой 5 кг, вращается вокруг оси, проходящей через его центр; уравнение вращения имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где A = 2 рад, B = 16 рад/с, C = 3 рад/с^2. Найти законы, по которым меняются вращающий момент M и мощность N. Чему равна мощность в момент времени t = 3 с?

Решение:

Для получения закона изменения момента M вращающей силы воспользуемся основным законом динамики вращательного движения:

$$I\,\varepsilon = M\ ,$$

где I – момент инерции диска; ε – угловое ускорение, равное по определению производной угловой скорости по времени и соответственно второй производной угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},\ \omega = \frac{d\varphi}{dt}\ ,\ \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\ .$$

Выполним последовательно дифференцирование и найдём:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct\ ,\ \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(B + 2Ct) = 2C\ .$$

Момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска, и проходящей через его центр равен

$$I = \frac{m\,R^2}{2}\ .$$

Подставляя выражение для момента инерции и значение углового ускорения в основное уравнение динамики вращательного движения, получим закон, по которому меняется момент силы M

$$M\ = I\,\varepsilon = \frac{m\,R^2}{2}2\,C = m\,R^2\,C\ .$$

$M\ = m\,R^2\,C = 5\cdot 0{,}4^2\cdot 3 = 2{,}4$ Н·м.

Мощность есть работа, совершаемая системой (телом) за единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt}\ ,$$

Элементарная работа при повороте на угол $d\varphi$ определяется $dA = M\,d\varphi$.

$$N = \frac{dA}{dt} = M\,\frac{d\varphi}{dt} = M\,\omega\ .$$

В результате уравнение для мощности имеет вид:

$$N(t) = M\,\omega = M\,(B + 2Ct) = m\,R^2\,C(B + 2Ct)$$

В момент времени t = 3 с значение мощности будет:

$N(t) = m\,R^2\,C(B + 2Ct) = 5\cdot 0{,}4^2\cdot 3(16 + 2\cdot 3\cdot 3) = 81{,}6$ Вт.

Ответ: М = 2,4 Н·м; $N(t) = m\,R^2\,C(B + 2Ct)$; N(3 с) = 81,6 Вт.

Пример 1.8.

Через блок в виде диска, имеющий массу $m = 80$ г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г (рис.). С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

Решение.

Применим к решению задачи основные законы поступательного и вращательного движения. На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести mg, направленная вниз, и сила T натяжения нити, направленная вверх.

В векторной форме второй закон Ньютона для каждого из грузов имеет вид:

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}\ .$$

Так как по условию $m_2 > m_1$, то вектор ускорения $\vec{a}$ груза m_1 направлен вверх и $T_1 > m_1 g$. Равнодействующая этих сил вызывает равноускоренное движение и, по второму закону Ньютона, равна

$$m_1 a = T_1 - m_1 g\,,$$

откуда

$$T_1 = m_1 g + m_1 a\,.$$

Вектор ускорения $\vec{a}$ груза m_2 направлен вниз; следовательно, $T_2 < m_2 g$. Запишем формулу второго закона для этого груза:

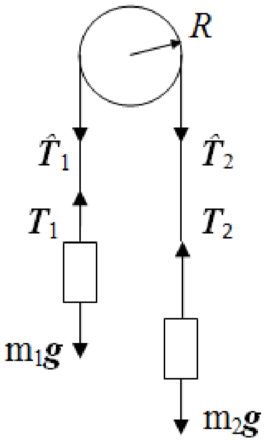
$$m_2 a = m_2 g - T_2\,,$$

откуда

$$T_2 = m_2 g - m_2 a\,.$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения, вращающий момент *M*, приложенный к диску, равен произведению момента инерции *I* диска на его угловое ускорение ε:

$$M = I\varepsilon .$$



Определим вращающий момент. Силы натяжения нитей действуют не только на грузы, но и на диск. По третьему закону Ньютона, силы $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$, приложенные к ободу диска, равны соответственно силам T_1 и T_2, но по направлению им противоположны. При движении грузов диск ускоренно вращается по часовой стрелке; следовательно, $\hat{T}_2 > \hat{T}_1$. Вращающий момент, приложенный к диску, равен произведению разности этих сил на плечо, равное радиусу диска, т. е. $M = \left(\hat{T}_2 - \hat{T}_1\right)R$.

Момент инерции диска $I = \dfrac{mR^2}{2}$, угловое ускорение связано с линейным ускорением грузов соотношением $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$. Подставив в основной закон динамики вращательного движения выражения *M, I* и *ε*, получим

$$\left(\hat{T}_2 - \hat{T}_1\right)R = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R},$$

откуда

$$\left(\hat{T}_2 - \hat{T}_1\right) = \frac{m}{2}a .$$

Так как, по третьему закону Ньютона, $T_1 = \hat{T}_1$ и $T_2 = \hat{T}_2$, то разность сил натяжения нитей можно определить из второго закона Ньютона:

$$T_2 - T_1 = m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a .$$

В результате

$$m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{m}{2}a, \text{ или}$$

$$\left(m_2 - m_1\right)g = \left(m_2 + m_1 + \frac{m}{2}\right)a,$$

откуда

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{m}{2}} g .$$

После подстановки получим

$$a = \frac{0,2 - 0,1}{0,2 + 0,1 + 0,04} 10 = 2,9 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a = 2,9$ м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

141. На барабан радиусом 50 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 10 кг. Найти момент инерции барабана, если известно, что груз опускается с ускорением 3 м/с^2.

142. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением: $\varphi = A + B\,t^2 + C\,t^3$, где $A = 1$ рад, $B = -2$ рад/с^2, $C = 5$ рад/с^3. Момент инерции маховика равен 100 кг·м^2. Найти законы, по которым меняются вращающий момент M и мощность N. Чему равна мощность в момент времени 5 с?

143. К ободу колеса, имеющего форму диска радиусом 0,5 м и массой 8 кг, приложена касательная сила в 4 Н. Найти угловое ускорение колеса? Через сколько времени после начала действия силы колесо будет иметь частоту вращения 100 об/с?

144. Две гири разного веса соединены нитью и перекинуты через блок, момент инерции которого 50 кг·м^2 и радиус 40 см. Блок вращается с трением и момент сил трения равен $M_{тр} = 100$ Н·м. Найти разность натяжения нити (T_1-T_2) по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением 2 рад/с^2.

145. Блок, имеющий форму диска массой $m = 400$ г, вращается под действием силы натяжения нити, к концам которой подвешены грузы $m_1 = 300$ г и $m_2 = 700$ г. Определить силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока.

146. Частота вращения маховика, момент инерции которого равен 100 кг·м^2, составляет 240 об/мин. После прекращения действия на него вращающего момента маховик остановился через 3,14 мин. Определить момент сил трения в подшипниках, считая его постоянным.

147. Двигатель равномерно вращает маховик. После отключения двигателя маховик в течение 30 с сделал 30 оборотов и остановился. Момент инерции маховика равен 0,5 кг·м^2. Найти мощность двигателя при равномерном вращении маховика, если при отключении двигателя его угловое ускорение постоянно.

148. Тонкий однородный стержень длиной $l = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M.

149. Однородный диск радиусом 50 см и массой 6 кг вращается вокруг оси, проходящей через его центр; уравнение вращения имеет вид: $\varphi = A+Bt+Ct^2$, где $A = 1$ рад, $B = 2$ рад/с, $C = 4$ рад/с^2. Вращение происходит под действием постоянной касательной силы в 80 Н, приложенной к ободу диска. Определить момент сил трения, действующих на диск при вращении.

150. На барабан радиусом 20 см, момент инерции которого 0,1 кг·м^2, намотан шнур, к концу которого привязан груз массой 0,5 кг. До начала вращения барабана высота груза над полом равнялась 1 м. Через какое время груз опустится до пола? Найти кинетическую энергию груза в момент удара о пол и силу натяжения нити. Трением пренебречь.

1.5 Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращательного движения

Основные формулы

Закон сохранения момента импульса

$$\sum_i \vec{L}_i = const ,$$

где L_i – момент импульса тела с номером i, входящего в состав системы; момент импульса изолированной системы материальных точек относительно оси сохраняется (если момент внешних сил относительно той же оси равен нулю), т.е. остается постоянным во времени.

Закон сохранения момента импульса для двух взаимодействующих тел

$$I_1\,\omega_1 + I_2\,\omega_2 = I_1'\,\omega_1' + I_2'\,\omega_2',$$

где I_1, I_2, ω_1, ω_2 – моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; I_1', I_2', ω_1', ω_2' – те же величины после взаимодействия.

Работа постоянного момента сил M, действующего на вращающееся тело,

$$A = M\,\varphi,$$

где φ – угол поворота тела.

Мгновенная мощность N, развиваемая при вращении тела

$$N = M\,\omega,$$

где ω – угловая скорость тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$K = \frac{I\,\omega^2}{2},$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – угловая скорость.

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\,\omega^2}{2},$$

есть сумма энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра инерции, и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр инерции тела.

Примеры решения задач

Пример 1.9.

Платформа в виде диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n = 10 мин$^{-1}$.

В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Р е ш е н и е.

По закону сохранения момента импульса,

$$\left(I_{\text{пл}} + I_{\text{ч}}\right)\omega = \left(I_{\text{пл}} + I'_{\text{ч}}\right)\omega',$$

где $I_{\text{пл}}$ – момент инерции платформы; $I_{\text{ч}}$ – момент инерции человека, стоящего в центре платформы; ω – угловая скорость платформы с человеком, стоящим в ее центре; $I'_{\text{ч}}$ – момент инерций человека, стоящего на краю платформы; ω' – угловая скорость платформы с человеком, стоящим на ее краю.

Линейная скорость человека, стоящего на краю платформы, связана с угловой скоростью соотношением

$$\upsilon = \omega' R.$$

Подставив выражение для ω', полученное из закона сохранения момента импульса в эту формулу будем иметь

$$\upsilon = \frac{\left(I_{\text{пл}} + I_{\text{ч}}\right)\omega R}{\left(I_{\text{пл}} + I'_{\text{ч}}\right)}.$$

Момент инерции платформы рассчитываем как для диска; следовательно, $I_{\text{пл}} = \dfrac{m_1 R^2}{2}$. Момент инерции человека рассчитываем как для материальной точки. Поэтому $I_{\text{ч}} = 0$, $I'_{\text{ч}} = m_2 R^2$. Угловая скорость платформы до перехода человека равна $\omega = 2\pi n$.

Подставим в формуле для линейной скорости величины $I_{\text{пл}}$, $I_{\text{ч}}$, $I'_{\text{ч}}$ и в результате получим

$$\upsilon = \frac{\dfrac{m_1 R^2}{2}}{\dfrac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2} 2\pi n R = \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} 2\pi n R.$$

Сделав подстановку значений m_1, m_2, n, R найдем линейную скорость человека:

$$\upsilon = \frac{180}{180 + 2 \cdot 60} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{10}{60} \cdot 1{,}5 = 0{,}942 \text{ м/с.}$$

Ответ: υ = 0,942 м/с.

Пример 1.10.

Шар и полый цилиндр одинаковой массы катятся равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности и обладают одинаковой кинетической энергией. Во сколько раз отличаются их линейные скорости?

Решение.

Кинетическая энергия тела, участвующего одновременно в двух движениях, складывается из кинетической энергии поступательного $K_{\text{п}}$ и вращательного $K_{\text{в}}$ движений

$$K = K_{\text{п}} + K_{\text{в}} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Момент инерции полого цилиндра равен $I_{\text{ц}} = mR^2$, шара $I_{ш} = \dfrac{2mR^2}{5}$. Угловая ω и линейная υ скорости связаны соотношением $\omega = \upsilon / R$.

В результате выражения для кинетической энергии полого цилиндра $K_{\text{ц}}$ и шара $K_{\text{ш}}$ будут иметь вид

$$K_{\text{ц}} = \frac{m\upsilon_{\text{ц}}^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\frac{\upsilon_{\text{ц}}^2}{R^2} = m\upsilon_{\text{ц}}^2,$$

$$K_{\text{ш}} = \frac{m\upsilon_{\text{ш}}^2}{2} + \frac{2}{5}\frac{mR^2}{2}\frac{\upsilon_{\text{ш}}^2}{R^2} = \frac{7}{10}m\upsilon_{\text{ш}}^2.$$

По условию задачи $K_{\text{ц}} = K_{\text{ш}}, m_{\text{ц}} = m_{\text{ш}} = m$ и тогда

$$m\upsilon_{\text{ц}}^2 = \frac{7}{10}m\upsilon_{\text{ш}}^2, \text{ откуда}$$

$$\frac{\upsilon_{\text{ш}}}{\upsilon_{\text{ц}}} = \sqrt{\frac{10}{7}} \approx 1{,}2.$$

Ответ: Скорость шара в 1,2 раза больше скорости цилиндра.

Задачи для самостоятельного решения

151. Шар массой 500 г, катящийся без скольжения, ударяется о стену и откатывается от нее. Скорость шара до удара о стену 10 м/с, после удара 8 м/с. Определить количество теплоты, выделившееся при ударе.

152. Полная кинетическая энергии диска, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 64 Дж. Определите кинетическую энергию поступательного и вращательного движения диска.

153. Горизонтальная платформа вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет от края платформы ближе к ее центру на расстояние равное половине радиуса платформы? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой.

154. Маховик, имеющий форму диска массой 4 кг и радиусом 60 см, находится в состоянии покоя. Какую работу надо совершить, чтобы сообщить маховику частоту 10 об/с?

155. Шар и цилиндр одинаковой массы катятся равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности и обладают одинаковой кинетической энергией. Во сколько раз отличаются их линейные скорости?

156. Колесо радиусом 30 см и массой 3 кг скатывается без скольжения с наклонной плоскости высотой 2 м. Определить момент инерции колеса, если его скорость в конце движения составляла 5 м/с. Трением пренебречь.

157. Полная кинетическая энергии шара, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 100 Дж. Определите кинетическую энергию поступательного и вращательного движения шара.

158. Шар катится без скольжения по горизонтальному участку со скоростью 20 м/с. Определить путь, который он пройдет в горку, расположенной под углом 30^0 к горизонту. Трением пренебречь.

159. Платформа в виде диска радиусом R = 1 м вращается по инерции с частотой n_1 = 6 мин$^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса которого равна 80 кг. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы равен 120 кг·м^2. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

160. Кинетическая энергия вращающегося маховика равна 1 кДж. Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно, и, сделав 80 оборотов, остановился. Определить момент M силы торможения.

Контрольная работа №2

Колебательные и волновые процессы

2.1 Гармонические колебания

Основные формулы

Колебания, при которых физическая величина изменяется по закону синуса или косинуса, называются гармоническими колебаниями. Уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия; t – время; A – амплитуда колебаний, представляет собой наибольшее отклонение колеблющейся величины x от равновесия; ω_0 – циклическая (круговая) частота; α – начальная фаза колебаний; $(\omega_0\, t + \alpha)$ – фаза колебаний в момент t.

Циклическая частота колебаний связана с периодом колебаний T и частотой ν:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi / T.$$

T – время, за которое система совершает одно полное колебание; период равен отношению времени t к числу колебаний N: $T=t/N$. Частота колебаний – обратная величина, равная числу колебаний N, совершаемых в единицу времени: $\nu=N/t$.

Пружинный маятник – груз массой m, связанный с упругой невесомой пружиной с коэффициентом упругости k. Частота и период пружинного маятника определяются, соответственно:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ и } \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Скорость колеблющейся частицы есть производная смещения x по времени:

$$\upsilon = dx/dt = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \alpha),\ \upsilon = -\upsilon_m \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

где $\upsilon_m = A\omega_0$ – максимальная скорость или амплитуда скорости.

Ускорение при гармоническом колебании

$$a = d^2x/dt^2 = d\upsilon/dt = -\omega_0^2\,A\cos(\omega_0 t + \alpha)\,,\ a = -a_m\cos(\omega_0 t + \alpha)\,,$$

где $a_m = \omega_0^2\,A$ – максимальное ускорение, или амплитуда ускорения.

Полная энергия *W* колебательного движения равна: сумме кинетической и потенциальной энергий

$$W_{пол} = W_k + W_n = \frac{m\,A^2\,\omega_0^2}{2}\,.$$

Примеры решения задач

Пример 2.1

Материальная точка массой $m = 100$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 10\cdot\sin(\pi t + \pi/6)$ см. Определить амплитуду скорости υ_m, максимальное значение силы F_m, действующей на точку, и ее полную энергию *W*.

Решение

Уравнение гармонических колебаний в данной задаче имеет вид

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)\,.$$

Сравнивая это уравнение с законом $x = 10\cdot\sin(\pi t + \pi/6)$, находим, что амплитуда колебаний равна A = 10 см = 0,1 м; циклическая частота $\omega_0 = \pi$ с$^{-1}$; начальная фаза $\alpha = \pi/6$.

Скорость колеблющейся точки есть производная от смещения по времени:

$$\upsilon = dx/dt = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \alpha) = \upsilon_m\cos(\omega_0 t + \alpha)\,,$$

где через υ_m обозначена максимальная скорость, $\upsilon_m = A\omega_0$.

Максимальное значение силы будет равно произведению массы на максимальное ускорение $F_m = ma_m$. Ускорение колеблющейся точки – это производная от скорости по времени:

$$a = d\upsilon/dt = -\omega_0^2\,A\sin(\omega_0 t + \alpha) = -a_m\sin(\omega_0 t + \alpha)\,,$$

где $a_m = \omega_0^2 A$ – максимальное ускорение. Тогда выражение для максимальной силы будет иметь вид: $F_m = m a_m = m\omega_0^2 A$.

Полная энергия W колебательного движения определится выражением:

$$W_{пол} = \frac{m A^2 \omega_0^2}{2}.$$

Подставив числовые значения в полученные формулы, рассчитаем результат.

$\upsilon_m = A\omega_0 = 0{,}1 \cdot 3{,}14 = 0{,}314$ = 0,314 м/с; $F_m = m\omega_0^2 A = 0{,}1 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}1 =$ 9,86·10^{-2} Н;

$W_{пол} = \frac{m A^2 \omega_0^2}{2} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}1^2\, 3{,}14^2}{2} = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ Дж.

Ответ: υ_m = 0,314 м/с, F_m = 9,86·10^{-2} Н, W = 4,9·10^{-3} Дж.

Пример 2.2

Тело совершает гармонические колебания с периодом T = 1,5 с, а максимальное ускорение тела составляет a_m = 5 см/с^2. Определить скорость колеблющего тела в тот момент, когда кинетическая энергия тела W_k в 2 раза меньше его потенциальной энергии W_n.

Решение

По закону сохранения энергии полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, остается постоянной. Величина полной энергии является суммой кинетической и потенциальной энергии и равна либо максимальной кинетической энергии $W_{к\ макс}$, либо максимальной потенциальной энергии $W_{п\ макс}$: $W_{пол} = W_k + W_n = W_{к\ макс} = W_{п\ макс}$.

Так как по условию $W_n = 2W_к$, то полная энергия равна

$$W_k + W_n = W_k + 2W_k = 3W_k = W_{к\ макс}.$$

Подставляя формулы $W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$, $W_{к\ макс} = \frac{m\upsilon_m^2}{2}$ в уравнение $3W_k = W_{к\ макс}$, получим: $3\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\upsilon_m^2}{2}$. Откуда $3\,\upsilon^2 = \upsilon_m^2$. Следовательно, величина скорости в тот момент, когда кинетическая энергия тела W_k в 2 раза меньше его потенциальной энергии W_n, определится по формуле $\upsilon = \upsilon_m / \sqrt{3}$.

Значение максимальной скорости равно $\upsilon_m = A\omega_0$, а максимального ускорения – $a_m = \omega_0^2 A$. Откуда $\upsilon_m = a_m / \omega_0$. Учитывая, что $\omega_0 = 2\pi / T$, получим:

$$\upsilon = \upsilon_m / \sqrt{3} = \frac{a_m T}{2\pi\sqrt{3}}.$$

Подставим числовые значения и рассчитаем результат:

$\upsilon = \dfrac{a_m T}{2\pi\sqrt{3}} = \dfrac{0{,}05 \cdot 1{,}5}{2\pi\sqrt{3}} = 6{,}9 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Ответ: υ = 6,9·10^{-3} м/с.

Пример 2.3

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой равной ν = 0,5 Гц. Амплитуда колебания *A* = 5 см. Определить скорость точки υ в тот момент, когда смещение равно *x* = 2,5 см.

Решение

Выберем в качестве закона изменения смещения *x*(*t*) точки относительно положения равновесия функцию косинуса:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Скорость движения точки есть производная смещения *x* по времени:

$$\upsilon = dx/dt = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \alpha).$$

Для определения скорости в некоторый момент времени необходимо знать значение фазы колебания $(\omega_0 t + \alpha)$ (ее синус) в этот момент. Косинус фазы колебания определим из уравнения смещения *x*:

$$\cos(\omega_0 t + \alpha) = x / A.$$

Воспользуемся тригонометрической формулой

$$\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega_0 t + \alpha)}.$$

Подставляя значение косинуса, получим

$$\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sqrt{1 - (x/A)^2}\ .$$

Учитывая, что $\omega_0 = 2\pi\nu$, найдем искомое значение модуля скорости точки:

$$\upsilon = \omega_0 A \sin(\omega_0 t + \alpha) = \omega_0 A\sqrt{1 - (x/A)^2} = 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}\ .$$

Подставив числовые значения

$\upsilon = 2\pi \cdot 0{,}5\sqrt{5^2 - 2{,}5^2} \cdot 10^{-2} = 13{,}6 \cdot 10^{-2}$ м/с.

Нетрудно показать, что если в качестве закона изменения смещения $x(t)$ точки относительно положения равновесия выбрали бы функцию синус, а не косинус, то результат был бы тот же.

Ответ: $\upsilon = 13{,}6 \cdot 10^{-2}$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

211. Тело совершает гармонические колебания. Максимальная скорость колеблющего тела равна 5 см/с, максимальное ускорение 10 см/с^2. Найти период и амплитуду колебаний.

212. Грузу, подвешенному на невесомой нерастяжимой нити длиной 40 см, сообщают горизонтальную скорость, в результате чего он начинает совершать гармонические колебания с амплитудой 3,2 см. Найти начальную скорость груза.

213. Груз массой 1 кг подвешен на вертикальной пружине жесткостью 2500 Н/м. Какой будет амплитуда колебаний этого груза, если ему сообщили скорость 2 м/с, после того как отклонили от положения равновесия на 3 см.

214. Уравнение движения точки дано в виде $x = 0{,}2 sin((\pi/2)t + \pi/4)$, (м). Найти период колебаний, максимальную скорость и максимальное ускорение точки.

215. Груз, массой 2 кг, подвешен на вертикальной пружине, жесткостью 5000 Н/м. Какой будет амплитуда колебаний этого груза, если ему сообщили скорость 4 м/с, после того как отклонили от положения равновесия на 6 см.

216. Тело совершает гармонические колебания с амплитудой 5 см и частотой 1,2 Гц. Определить величину средней скорости за время, в течение которого

оно проходит первую половину расстояния от положения равновесия, до положения, соответствующего максимальному отклонению.

217. Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и периодом 2 с.

218. Тело совершает гармонические колебания. Максимальная скорость колеблющего тела равна 11 м/с. Найти величину средней скорости за время, в течение которого оно переместилось из одного крайнего положения в другое.

219. Когда к пружине подвесили груз, она удлинилась на 2,5 см. Определить частоту гармонических колебаний, которые может совершать груз на пружине?

220. Груз массой 50 г, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с периодом 1,57 с. Максимальная сила, действующая на тело, равна 0,2 Н. Определите скорость тела при прохождении положения равновесия.

2.2 Математический и физический маятники

Основные формулы

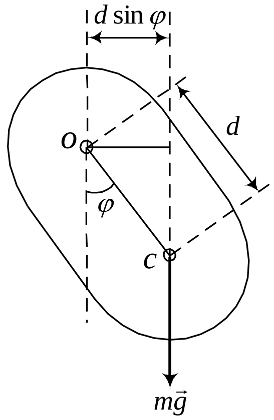
Математическим маятником называется тело точечной массы m, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити длиной l. Малые колебания математического маятника являются гармоническими колебаниями. Колебания математического маятника считаются малыми, если максимальный угол отклонения маятника не превышает величины примерно 7^0. Частота и период математического маятника определяются, соответственно:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ и } \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Частота и период математического маятника зависят только от длины маятника и ускорения свободного падения и не зависят от массы маятника.

Физический маятник – это тело, совершающее колебание под действием силы тяжести вокруг неподвижной точки или оси, не проходящей через центр масс C тела.



Частота и период физического маятника определяются, соответственно:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}\text{, или } T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \text{ и } \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgd}{I}},$$

где d – расстояние между осью вращения O и центром масс C; m – масса маятника; I – его момент инерции относительно оси вращения; L –приведенная длина маятника $L=I/(md)$.

Примеры решения задач

Пример 2.4

С каким ускорением и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный маятник, за время 16 с совершил 20 колебаний? Принять g = 10 м/с^2.

Решение

В системе отсчета, связанной с движущимся лифтом, на маятник кроме силы тяжести $m\vec{g}$ действует сила инерции $m\vec{a}$, которая будет совпадать с $m\vec{g}$, если лифт поднимается, и будет противоположно направленной, при опускании лифта. Таким образом, в лифте, движущимся с ускорением a, маятник длины l имеет период колебаний равным

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm a}},$$

знак плюс под корнем соответствует ускорению, направленному вверх, знак минус – ускорению, направленному вниз.

По условию задачи период колебаний маятника в лифте равен: $T = t/N$ = 0,8 с< T_0 = 1 с, т.е. стал меньше. Следовательно, лифт движется вверх, а его период колебаний маятника определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a}}.$$

Отношение периодов T_0/T равно $\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g+a}{g}}$, откуда $a = g\left((T_0/T)^2 - 1\right)$.

Подставка числовых значений дает результат:

$$a = 10\left((1{,}25)^2 - 1\right) = 5{,}625 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: вверх; a = 5,625 м/ с^2.

Пример 2.5

Тонкий однородный стержень длины $l = 1$ м совершает гармонические колебания вокруг горизонтальной оси, находящейся на расстоянии d = 25 см от его середины. Определить период T его колебаний. Принять g = 10 м/с^2.

Решение

Период колебаний физического маятника, каким является стержень, определяется выражением

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,d}},$$

где I – момент инерции тела относительно оси вращения; d – расстояние между осью вращения и центром масс; m – масса тела. Момент инерции стержня I относительно оси вращения можно определить по теореме Штейнера:

$$I = I_C + md^2,$$

где I_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; d – расстояние между осью вращения и осью, проходящей через центр масс. Момент инерции стержня длиной l относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню, определяется формулой: $I_C = ml^2/12$.

В результате формула для момента инерции стержня относительно оси вращения принимает вид: $I = ml^2/12 + md^2 = m\left(d^2 + l^2/12\right)$. Это выражение подставим в формулу периода колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,d}} = 2\pi\sqrt{\frac{d^2 + l^2/12}{g\,d}}.$$

Подставим числовые значения:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25^2 + 1/12}{10 \cdot 0{,}25}} = 1{,}52 \text{ с.}$$

Ответ: T = 1,52 с.

Задачи для самостоятельного решения

221. Математического маятник, установленный в кабине движущегося с ускорением лифта, совершает колебания с периодом 2 с. Найти ускорение лифта, если период колебаний этого маятника в кабине равномерно движущегося лифта равен 1,5 с.

222. Однородный диск радиусом 30 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через одну из образующих цилиндрической поверхности диска. Каков период его колебаний.

223. Математический маятник длиной l_1 = 40 см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной l_2 = 60 см синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определить расстояние d центра масс стержня от оси колебаний.

224. С каким ускорением и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный маятник, за время 2 мин 5 с совершил 100 колебаний?

225. Тонкий однородный стержень длины l совершает гармонические колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку, находящейся на расстоянии $d = l / 4$ от его середины. Период таких колебаний равен 2 с. Чему будет равен период его колебаний вокруг горизонтальной оси, проходящей через край стержня.

226. Математический маятник, находящийся в кабине лифта, опускается с ускорением 2 м/с^2 и совершает колебания с периодом 1,5 с. Определить период колебаний маятника, если лифт будет подниматься с ускорением 8 м/с^2.

227. Диск радиусом R = 24 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости

диска. Определить приведенную длину L и период T колебаний такого маятника.

228. Математического маятник – металлический шарик массой 2,5 г на нити совершает колебания с периодом 2,4 с. Когда под шариком поместили магнит, то период уменьшился до 2 с. Определить силу притяжения шарика к магниту.

229. Физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной l = 120 см колеблется около горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно стержню через точку, удаленную на некоторое расстояние $d = l / 3$ от центра масс стержня. Определить период T колебаний.

230. Один математический маятник имеет период 3 с, другой 4 с. Каков период колебаний математического маятника, длина которого равна сумме длин указанных маятников.

2.3. Сложение гармонических колебаний одинаковой частоты

Основные формулы

1. Сложение гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты.

Результатом сложения двух гармонических колебаний одинакового направления, одинаковой частоты ω с заданными амплитудами и начальными фазами:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

является гармоническое колебание той же частоты

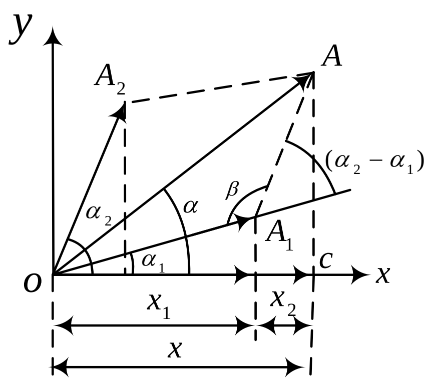
$$x = A\cos(\omega t + \alpha),$$

амплитуда A и начальная фаза α которого определяются по формулам:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$tg\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}.$$

Задачу сложения двух (и более) гармонических колебаний одинакового направления одинаковой частоты можно решить с помощью геометрического построения.



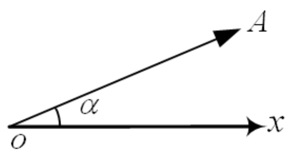
Гармоническое колебание может быть изображено на диаграмме вращающимся вектором A, длина которого равна амплитуде колебания. Изображение вектора A в начальный момент времени происходит под углом α к горизонтальной оси x, где величина угла α равна начальной фазе колебания.

Изобразив каждое гармоническое колебание на векторной диаграмме, и сложив эти вектора, мы получим амплитуду A и начальную фазу α результирующего колебания.

2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.

Если материальная точка одновременно совершает колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y с одинаковой частотой ω, с амплитудами A и B и начальными фазами α_1 и α_2:

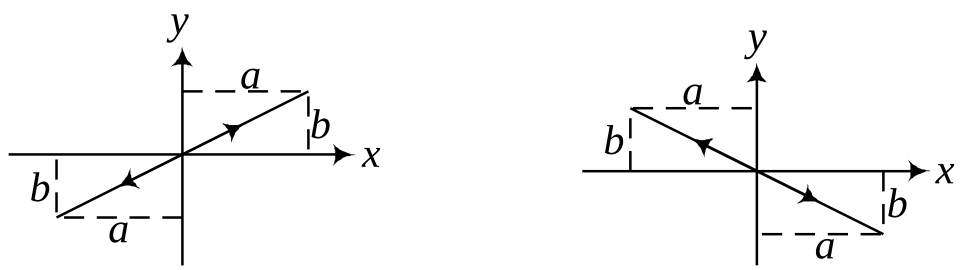
$$x = A\cos(\omega t + \alpha_1),\; y = B\cos(\omega t + \alpha_2),$$



то результат сложения определяется разностью фаз колебаний α_2 - α_1.

Рассмотрим некоторые частные случаи сложения этих колебаний.

1. Разность фаз двух колебаний равна нулю: $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$. Тогда уравнение траектории имеет вид: $y = \dfrac{B}{A}x$.

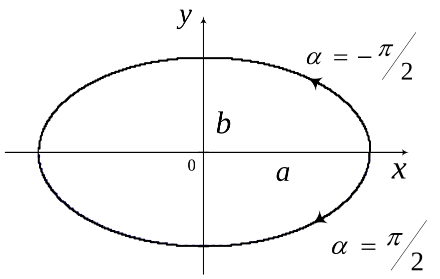


а) б)

Это уравнение прямой, проходящей в первой и третьей четверти через начало координат и образующей с осью *x* угол *α*, тангенс которого равен отношению амплитуд *B*/*A* (рис. а).

2. Разность фаз двух колебаний равна *π*: $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$. Уравнения принимает вид: $y = -\frac{B}{A}x$. Это уравнение прямой, проходящей во второй и четвертой четвертях через начало координат и образующей с осью *x* угол *α,* тангенс которого равен (- *B*/*A*) (рис.,б).

3. Разность фаз двух колебаний равна $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi/2$. Тогда траектория движения есть эллипс, оси которого совпадают с осями координат, а уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$.



Полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам (рис.).

Примеры решения задач

Пример 2.6

Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемые уравнениями $x_1 = A_1\cos(\pi t + \pi/4)$ и $x_2 = A_2\cos(\pi t + \pi/2)$, где A_1 = 4 см, A_2 = 4 см. Определить для результирующего колебания амплитуду *A*, начальную фазу *α*. Записать уравнение результирующего колебания *x*(*t*).

Решение

Результатом сложения двух гармонических колебаний одинакового направления, одинаковой частоты является гармоническое колебание той же частоты $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, амплитуда *A* и начальная фаза *α* которого определяются по формулам соответственно:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$tg\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Так как по условию задачи амплитуды колебаний одинаковы $A_1 = A_2$, а разность фаз равна $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi/4$ $(\cos\pi/4 = \sqrt{2}/2)$, то амплитуда A определится:

$$A^2 = A_1^2 + A_1^2 + 2A_1A_1\cos(\pi/4) = A_1^2\left(2+\sqrt{2}\right),\ A = A_1\sqrt{2+\sqrt{2}}\,.$$

Подставим числовые значения: $A = 4\sqrt{2+\sqrt{2}} = 7{,}4$ см.

$$tg\alpha = \frac{\sin\pi/4+\sin\pi/2}{\cos\pi/4+\cos\pi/2} = \frac{\sqrt{2}/2+1}{\sqrt{2}/2} = 2{,}414;\ \alpha = arctg\left(2{,}414\right)$$

Полученные данные амплитуды A и начальной фазы α подставим в уравнение результирующего колебания:

$$x = 7{,}4\cos(\pi t + arctg(2{,}414)),\ \text{см.}$$

Ответ: A = 7,4 см; $\alpha = arctg\left(2{,}414\right)$; $x = 7{,}4\cos(\pi t + arctg(2{,}414))$.

Пример 2.7

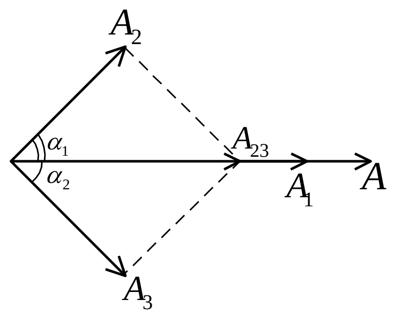
Частица принимает участие одновременно в трех гармонических колебаниях, происходящих вдоль одного направления по законам:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t),\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\pi/3),\ x_3 = A_3\cos(\omega t-\pi/3),$$

где $A_1 = 5$ см, $A_2 = A_3 = 4$ см, $\omega = 2$ с$^{-1}$. Определить графическим методом амплитуду A и начальную фазу α результирующего колебания.

Решение

Представим все три колебания на векторной диаграмме (рис.). Первое колебание на диаграмме изобразится вектором длиной A_1, направленным вдоль горизонтальной оси. Второе – вектором, длиной A_2, повернутым относительно горизонтальной оси против часовой стрелки на угол $\alpha_1=\pi/3$. Третье колебание изобразится вектором длиной A_3, повернутым относительно горизонтальной оси по часовой стрелке на угол $\alpha_2=\pi/3$.



Амплитуда A результирующего колебания будет равна длине вектора, являющимся геометрической суммой трех векторов, изображающих три колебания на векторной диаграмме. Из рисунка видно, что удобно сначала сложить второй и третий вектора. По теореме косинусов, квадрат длины амплитуды суммарного вектора A_{23} равен:

$$A_{23}^2 = A_2^2 + A_3^2 + 2A_2 A_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_1).$$

Угол между векторами A_2 и A_3 равен $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi/3$, $\cos(2\pi/3) = -1/2$. Так как амплитуды колебаний одинаковы $A_2 = A_3$, то следует:

$$A_{23}^2 = A_2^2 + A_2^2 + 2A_2 A_2 \cos(2\pi/3) = A_2^2, \text{ и } A_{23} = A_2.$$

Таким образом получили, что вектор A_{23}, изображающий сумму второго и третьего колебаний, имеет длину, равную A_2, и направлен вдоль горизонтальной оси. Тогда амплитуда A результирующего колебания определится суммой двух векторов A_1 и A_{23}, совпадающих по направлению. Следовательно, $A = A_1 + A_{23}$.

Подставим числовые значения: $A = 5+4=9$ см.

Так как вектор, изображающий результирующее колебание, направлен вдоль горизонтальной оси, относительно которой отсчитывается фаза колебания, то начальная фаза α результирующего колебания равна нулю.

Ответ: $A = 9$ см, $\alpha = 0$.

Пример 2.8

Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых имеют вид: $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, $y = B\sin(\omega t + \alpha)$, где $A = 4$ см, $B = 3$ см. Найти уравнение траектории частицы $y(x)$.

Решение

Результат сложения двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний одинаковой частоты определяется разностью фаз этих колебаний. Чтобы определить разность фаз колебаний, необходимо уравнения движения $x(t)$, $y(t)$ свести к одной функции, например, синус. Из тригонометрической формулы $\cos(\omega t + \alpha) = \sin(\omega t + \alpha + \pi/2)$ уравнения движения частицы можно привести к виду:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha + \pi/2),\ y = B\sin(\omega t + \alpha).$$

Из уравнений видно, что разность фаз двух колебаний равна $\pi/2$; следовательно, траектория частицы представляет собой эллипс.

Результирующую траекторию найдем с помощью следующих преобразований искомых уравнений:

$$x/A = \cos(\omega t + \alpha),\ y/B = \sin(\omega t + \alpha).$$

Возведем в квадрат левые и правые части этих уравнений и сложим их:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(\omega t + \alpha) + \sin^2(\omega t + \alpha) = 1.$$

Подставим числовые значения: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Ответ: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$

Задачи для самостоятельного решения

231. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$ см и $x_2 = 5\,(2\pi t + \pi/2)$ см. Определить для результирующего колебания амплитуду, начальную фазу. Записать уравнение результирующего колебания.

232. Частица принимает участие одновременно в трех гармонических колебаниях, происходящих вдоль одного направления по законам: $x_1 = 6\cos(\omega t)$ см, $x_2 = 4\cos(\omega t + \pi/2)$ см, $x_3 = 2\cos(\omega t + \pi)$ см. Определить графическим методом амплитуду и начальную фазу результирующего колебания.

233. Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых имеют вид: $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, $y = B\sin(\omega t + \alpha)$, где $A = 3$ см, $B = 8$ см. Найти уравнение траектории частицы.

234. Два гармонических колебания, направленных по одной прямой и имеющих одинаковые амплитуд и периоды, складываются в одно колебание той же амплитуды. Найти разность фаз складываемых колебаний.

235. Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых имеют вид: $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, $y = B\sin(\omega t + \alpha)$, где $A = 3$ см, $B = 8$ см. Найти уравнение траектории частицы.

236. Амплитуда результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одного направления одинаковой частоты, обладающих разностью фаз 60^0, равна $A = 6$ см. Определить амплитуду A_2 второго колебания, если $A_1 = 5$ см.

237. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3\cos(\pi t + \pi/6)$ см и $x_2 = 4\cos(\pi t + \pi/3)$, см. Определить для результирующего колебания амплитуду A, начальную фазу α. Записать уравнение результирующего колебания.

238. Частица принимает участие одновременно в трех гармонических колебаниях, происходящих вдоль одного направления по законам: $x_1 = 2\cos(\omega t)$ см, $x_2 = 4\cos(\omega t + \pi/4)$ см, $x_3 = 2\cos(\omega t + \pi/2)$ см. Определить графическим методом амплитуду и начальную фазу результирующего колебания.

239. Частица принимает участие одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения движения которых имеют вид: $x = A\cos(\omega t)$, $y = B\cos(\omega t + \pi/2)$, где $A = 5$ см, $B = 2$ см. Найти уравнение траектории частицы.

240. Точка участвует в двух одинаково направленных колебаниях: $x_1=A_1\cos\omega t$ и $x_2 = A_2\sin\omega t$, где $A_1 = 1$ см; $A_2 = 2$ см; $\omega = 1$ с$^{-1}$. Определить амплитуду A результирующего колебания, его частоту ν и начальную фазу α. Найти уравнение этого движения.

2.4. Затухающие и вынужденные колебания

Основные формулы

Уравнение затухающих колебаний

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha), \text{ или } x = A(t)\cos(\omega t + \alpha)$$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия; t – время; $A(t)$ – амплитуда колебаний в момент времени t; ω – циклическая частота свободных колебаний в системе с трением, ω_0 – циклическая частота свободных колебаний в системе без трения (собственная циклической частота системы), β – коэффициент затухания.

Циклическая частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \ .$$

Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени

$$A(t) = A_0 \, e^{-\beta t} \ ,$$

где A_0 – начальная амплитуда (значение амплитуды в начальный момент времени $t = 0$).

Зависимость энергии системы при затухающих колебаниях от времени

$$W(t) = W_0 \, e^{-2\beta t} \ ,$$

где W_0 – значение энергии в начальный момент времени $t = 0$.

Период затухающих колебаний

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \ .$$

Коэффициент затухания β для механических колебательных систем связан с коэффициентом сопротивления r и массой тела m:

$$\beta = r / 2m \, .$$

Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \ .$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период.

Добротность Q колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} \, .$$

Вынужденные колебания совершаются под действием внешней периодической силы

$$F(t) = F_0 \cos\omega t,$$

где F_0 – амплитуда внешней силы, ω – ее циклическая частота.

Установившиеся вынужденные колебания происходят по закону:

$$x = A\cos(\omega t - \varphi),$$

где A – амплитуда колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

φ – сдвиг фаз между внешней силой $F(t)$ и смещением $x(t)$

$$tg\varphi = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},\ A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Примеры решения задач

Пример 2.9

Математический маятник длины l = 50 см совершает малые колебания в среде, в которой коэффициент затухания β = 0,9 с$^{-1}$. Определить время τ, по истечении которых амплитуда маятника уменьшается в 5 раз и период затухающих колебаний.

Решение

При отсутствии трения малые колебания математического маятника происходят по гармоническому закону с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}.$$

Вследствие трения колебания будут затухающими, период которых равен:

$$T = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону:

$$A(t) = A_0\, e^{-\beta t} \ ,$$

где A_0 – значение амплитуды в начальный момент времени. Запишем выражения для амплитуды колебаний в момент времени t и $t+\tau$:

$$A(t) = A_0\, e^{-\beta t} \ , \ A(t+\tau) = A_0\, e^{-\beta\,(t+\tau)} \ .$$

Отношение амплитуд равно

$$A(t)\,/\,A(t+\tau) = e^{\beta\,\tau} = 5\,.$$

Логарифмируя это выражение, находим

$$\beta\,\tau = \ln 5\,,\ \tau = \ln 5\,/\,\beta \ .$$

Подставим числовые значения: $\tau = \ln 5\,/\,\beta$ =1,79 с.

Определим период затухающих колебаний математического маятника по формуле

$$T = 2\,\pi\,/\,\sqrt{g\,/\,l - \beta^2} \ .$$

Подставим числовые значения: $T = 2\,\pi\,/\,\sqrt{10\,/\,0{,}5 - 0{,}9^2} = 1{,}43$ с.

Ответ: τ = 1,79 с, T = 1,43 с.

Пример 2.10

Тело массой m = 5 г совершает затухающие колебания. За время 2 минуты теряется 40% энергии колебаний маятника. Определить коэффициент сопротивления r.

Решение

Коэффициент сопротивления r для механических колебательных систем связан с коэффициентом затухания β и массой тела m соотношением: $r = 2\,m\,\beta$

По условию задачи 40% энергии колебаний теряется. Следовательно, относительно первоначального запаса энергии осталось 60% энергии, т.е. $W = 0{,}6\ W_0$. Энергия системы при затухающих колебаниях убывает со временем по закону:

$$W(t) = W_0\, e^{-2\beta t} \ ,$$

где W_0 – значение энергии в начальный момент времени $t = 0$.

Выразим коэффициент затухания:

$$2\beta t = \ln(W_0 / W) = \ln 5/3, \text{ откуда } \beta = \frac{\ln 5/3}{2\,t}.$$

Коэффициент сопротивления r определится: $r = 2m\beta = \dfrac{\ln 5/3}{t} m$

Подставим числовые значения:

$$r = \frac{\ln 5/3}{120} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = \frac{0{,}511}{120} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 2{,}13 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с}.$$

Ответ: r = 2,13·10^{-5} кг/с.

Пример 2.11

Определить логарифмический декремент колебаний λ, при котором энергия маятника за N = 5 полных колебаний уменьшилась в 8 раз.

Решение

Логарифмический декремент затухания λ связан с коэффициентом затухания β и периодом затухающих колебаний T соотношением

$$\lambda = \beta T.$$

Энергия системы при затухающих колебаниях убывает со временем по закону:

$$W(t) = W_0\, e^{-2\beta t},$$

где W_0 – значение энергии в начальный момент времени t = 0. Выразим коэффициент затухания:

$$2\beta t = \ln(W_0 / W) = \ln 8, \text{ откуда } \beta = \frac{\ln 8}{2\,t}.$$

Период колебаний равен отношению времени t к числу колебаний N: T=t/N. Следовательно, время колебаний t будет равно: $t = N \cdot T$. В результате коэффициент затухания определится $\beta = \dfrac{\ln 8}{2\,NT}$.

Откуда получаем выражение для логарифмического декремента колебаний: $\lambda = \beta T = \dfrac{\ln 8}{2\,N}$.

Подставим числовые значения: $\lambda = \frac{\ln 8}{2 \cdot 5} = 0{,}208$.

Ответ: $\lambda = 0{,}208$.

Задачи для самостоятельного решения

241. Начальная амплитуда затухающих колебаний маятника равна $A_0 = 6$ см. По истечении времени $t_1 = 10$ с амплитуда равна $A_1 = 2$ см. Определите, через какое время t_2 амплитуда колебаний маятника станет равной $A_2 = 6$ мм.

242 Тело массой 2 г совершает затухающие колебания. В течение времени 30 с тело потеряло 80% своей энергии. Определить коэффициент сопротивления.

243. Колебательная система совершает затухающие колебания с частотой $\nu = 1000$ Гц. Определить частоту ν_0 собственных колебаний, если резонансная частота $\nu_{рез} = 998$ Гц.

244. За время, в течение которого маятник совершает 100 колебаний, амплитуда уменьшилась в 3 раза. Определить добротность колебательной системы.

245. Определить число полных колебаний системы, в течение которых энергия уменьшилась в 10 раз. Логарифмический декремент колебаний 0,01.

246. Амплитуда колебаний маятника длиной 1 м за время 10 мин уменьшилась в 2 раза. Определить логарифмический декремент колебаний.

247. Период T_0 собственных колебаний пружинного маятника равен 0,55 с. В вязкой среде период T того же маятника стал равным 0,56 с. Определить резонансную частоту $\nu_{рез}$ колебаний.

248. Шарик, подвешенный на нити в вагоне поезда, раскачивается из-за толчков о стыки рельсов. При какой скорости поезда амплитуда колебаний будет максимальна, если длина рельсов 3,5 м, длина нити 40 см.

249. Определить период T затухающих колебаний, если период T_0 собственных колебаний системы равен 1 с и логарифмический декремент колебаний 0,628.

250. Во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний будет меньше резонансной амплитуды, если частота изменения вынуждающей силы будет

больше резонансной частоты в два раза? Коэффициент затухания составляет $0{,}1\cdot\omega_0$ (ω_0 – циклическая частота собственных колебаний).

2.5. Упругие волны

Основные формулы

Уравнение плоской волны

$$\xi(x,t)=A\cos\omega(t-x/\upsilon),\ \text{или}\ \xi(x,t)=A\cos(\omega t-k\,x),$$

где $\xi(x,t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент в момент времени t; ω – циклическая частота; υ – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость); k – волновое число $k = 2\pi/\lambda$; λ – длина волны.

Длина волны λ связана с периодом T колебаний и частотой ν соотношениями

$$\lambda=\upsilon/\nu,\ \lambda=\upsilon T.$$

Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, расстояние между которыми (разность хода) равна Δx,

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x.$$

Примеры решения задач

Пример 2.12

Упругая волна распространяется вдоль оси x со скоростью $\upsilon = 15$ м/с. Период колебаний частиц среды равен $T = 1{,}2$ с, амплитуда $A = 2$ см. Определить длину волны λ, смещение ξ, скорость $d\xi/dt$ и ускорение $d\xi^2/dt^2$ точки, находящейся от источника колебаний на расстоянии $x = 45$ м в момент времени $t = 4$ с. Найти максимальную скорость колебаний частиц среды $(d\xi/dt)_{\max}$.

Решение

Длина волны равна расстоянию, на которое распространяется фаза колебания за время, равное периоду $\lambda=\upsilon T$. Запишем уравнение плоской волны

$$\xi(x,t)=A\cos\omega(t-x/\upsilon),$$

где ξ – смещение колеблющейся точки; x– расстояние точки от источника колебаний; ω – циклическая частота колебаний, равная $\omega = 2\pi / T$.

Скорость колебаний точки находим, взяв первую производную от смещения ξ по времени:

$$d\xi / dt = -\omega A \sin \omega (t - x / \upsilon).$$

Модуль величины, стоящей перед синусом, и представляет собой максимальную скорость колебаний частиц: $(d\xi / dt)_{\max} = \omega A = 2\pi \nu A$.

Взяв вторую производную ξ по времени, найдем ускорение колебаний точки:

$$d^2\xi / dt^2 = -\omega^2 A \cos \omega (t - x / \upsilon).$$

Подставим числовые значения:

$$\lambda = 15 \cdot 1{,}2 = 18 \text{ м}.$$

$$\xi = 0{,}02 \cdot \cos \frac{2\pi}{1{,}2}(4 - 45/15) = 0{,}01 \text{ м}.$$

$$d\xi / dt = -0{,}02 \cdot \sin \frac{2\pi}{1{,}2}(4 - 45/15) = 0{,}09 \text{ м/с},$$

$$(d\xi / dt)_{\max} = 2\pi \cdot 5/6 \cdot 0{,}02 = 0{,}105 \text{ м/с},$$

$$d^2\xi / dt^2 = -0{,}02 \cdot \left(\frac{2\pi}{1{,}2}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{1{,}2}(4 - 45/15) = 0{,}027 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: λ = 18 м, ξ = 0,01 м, $d\xi/dt$ = 0,09 м/с, $(d\xi / dt)_{\max}$ = 0,105 м/с, $d\xi^2/dt^2$ = 0,027 м/с^2.

Пример 2.13

Плоская волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ = 20 м/с. Амплитуда колебаний частиц среды равна A = 10 см. Две точки, находящиеся от источника колебаний на расстоянии x_1 = 12 м и x_2 = 15 м, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 3\pi/4$. Определить длину волны λ и смещение ξ данных точек в момент времени t = 1,2 с.

Решение

Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 2\pi$. А точки, находящиеся друг от друга на расстоянии Δx, колеблются с разностью фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_2 - x_1\right).$$

Из этой формулы получаем выражение для длины волны λ:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}\left(x_2 - x_1\right).$$

Подставим числовые значения: $\lambda = \dfrac{2\pi}{3\pi/4}\left(15 - 12\right) = 8$ м.

Смещение ξ колеблющейся точки в момент времени t определим из уравнения плоской волны $\xi(x,t) = A\cos\omega(t - x/\upsilon)$. Циклическую частоту колебаний найдем, зная скорость υ и длину волны λ: $\omega = 2\pi\upsilon/\lambda$.

Определим численное значение: $\omega = 2\pi \cdot 20/8 = 5\pi$ с$^{-1}$.

Чтобы найти смещение ξ данных точек, нужно подставить значения x и t в уравнение плоской волны:

$$\xi_1 = A\cos\omega(t - x_1/\upsilon) = 0{,}1 \cdot \cos 5\pi(1{,}2 - 12/20) = -0{,}1 \text{ м.}$$

$$\xi_2 = A\cos\omega(t - x_2/\upsilon) = 0{,}1 \cdot \cos 5\pi(1{,}2 - 15/20) = 0{,}071 \text{ м.}$$

Ответ: λ = 8 м, ξ_1 = -0,1 м, ξ_2 = 0,071 м.

Задачи для самостоятельного решения

251. Упругая волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ = 10 м/с. Частота колебаний частиц среды равна $\nu = 0{,}5$ Гц, амплитуда $A = 4$ см. Определить длину волны λ, смещение ξ, скорость $\dfrac{d\xi}{dt}$ и ускорение $\dfrac{d^2\xi}{dt^2}$ точки, находящейся от источника колебаний на расстоянии x = 5 м в момент времени t = 1,5 с.

252. Скорость звука в воде v = 1450 м. На каком расстоянии находятся две ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний υ = 725 Гц.

253. Плоская волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ = 10 м/с. Амплитуда колебаний частиц среды равна A = 3 см. Две точки, находящиеся от источника колебаний на расстоянии x_1 = 6 м и x_2 = 8 м, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \pi/3$. Определить длину волны λ и смещение ξ данных точек в момент времени t = 2 с.

254. Упругая волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ = 20 м/с. Максимальная скорость колебаний частиц равна $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{\max}$ = 10 см/с, максимальное ускорение $\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{\max}$ = 80 см/с^2. Определить длину волны λ.

255. Плоская волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ = 2 м/с. Амплитуда колебаний частиц среды равна A = 5 см. Две точки, находящиеся от источника колебаний на расстоянии x_1 = 3 м и x_2 = 4 м, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = \pi/4$. Определить длину волны λ и смещение ξ данных точек в момент времени t = 1 с.

256. Звуковые колебания, имеющие частоту ν = 400 Гц и амплитуду A = 0,5 мм, распространяются в воздухе. Длина волны λ = 60 см. Найти скорость распространения волн υ, максимальную скорость $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{\max}$ и максимальное ускорение $\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)_{\max}$ колебаний частиц воздуха.

257. Найти разность фаз между двумя точками звуковой волны, отстоящих друг от друга на расстоянии 0,25 м, если частота колебаний 680 Гц. Скорость звука в воздухе 340 м/с.

258. Упругая волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ = 20 м/с. Период колебаний частиц среды равен $T = 2$ с, амплитуда $A = 0{,}5$ см. Определить длину волны λ, смещение ξ, скорость $\frac{d\xi}{dt}$ и ускорение $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ точки,

находящейся от источника колебаний на расстоянии x = 5 м в момент времени t = 0,5 с.

259. Волна с периодом T = 1,2 с и амплитудой колебаний A = 2 см распространяется со скоростью v = 15 м/с. Чему равно смещение точки, находящейся на расстоянии x = 45 м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время t = 4 с?

260. Плоская волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ = 5 м/с. Амплитуда колебаний частиц среды равна A = 4 см. Две точки, находящиеся от источника колебаний на расстоянии x_1 = 7 м и x_2 = 10 м, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 6\pi/5$. Определить длину волны λ и смещение ξ данных точек в момент времени t = 4 с.

Контрольная работа №3

Основы термодинамики и молекулярной физики

3.1 Уравнения состояния, законы идеальных газов

Основные формулы

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клайперона - Менделеева)

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \text{, или } PV = \nu RT \text{,}$$

где P, V – давление и объем данного газа; m – масса газа; μ – молярная масса; $\nu = m / \mu$ – количество вещества; R – универсальная газовая постоянная (R = 8,31 Дж/(моль·К)).

Термодинамическая температура $T(K)$ связана с температурой $t\,(^0C)$ по шкале Цельсия соотношением $T(K) = t(^0C) + 273{,}15$.

Число частиц, содержащихся в одном моле вещества, называется постоянной Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ (моль$^{-1}$). Масса одного моля вещества (молярная масса) определяется произведением постоянной Авогадро N_A на массу одной молекулы m_0: $\mu = N_A \cdot m_0$.

Другая форма уравнения состояния идеального газа

$$P = nkT \text{,}$$

где $n = N/V$ – плотность или концентрация молекул (число молекул в единице объема); k – является отношением двух констант: газовой постоянной R и числа Авогадро N_A и называется постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К).

Процессы, происходящие в системе при постоянстве одного из параметров состояния: температуры, давления или объема называются изопроцессами. Для идеального газа изотермический процесс ($T = const$) подчиняется закону Бойля–Мариотта и описывается уравнением $PV = const$; изобарный процесс ($P = const$) подчиняется закону Гей-Люссака $V / T = const$. Процесс, происходящий при неизменном объеме газа, называется изохорным ($V = const$) и описываться уравнением $P / T = const$.

Закон Дальтона: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений этих газов

$$P = P_1 + P_2 + \ldots .$$

Под парциальным давлением газа понимают давление, которое каждый газ в отдельности оказывает на стенки сосуда.

Среднеквадратичная скорость молекул определяется:

$$\upsilon_{сркв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \text{ или } \upsilon_{сркв} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где m_0 – масса одной молекулы; μ – молярная масса; k – постоянная Больцмана; R – универсальная газовая постоянная.

Примеры решения задач

Пример 3.1.

В сосуде находиться масса m_1 = 10 г углекислого газа и масса m_2 = 15 г азота. Найти плотность ρ смеси при температуре $t = 27^0$С и давлении P = 150 кПа. Молярная масса углекислого газа $\mu_1 = 44\cdot 10^{-3}$ кг/моль; молярная масса азота $\mu_2 = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Решение:

По закону Дальтона давление смеси газов равно сумме парциальных давлений этих газов.

$$P = P_1 + P_2.$$

Под парциальным давлением газа понимают давление, которое каждый газ в отдельности оказывает на стенки сосуда; P_1 и P_2 – парциальные давления углекислого газа и азота. Согласно уравнению Менделеева – Клайперона

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT, \; P_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT.$$

Каждый из газов занимает весь объем сосуда и имеют одинаковую температуру T. Складывая уравнения, с учетом закона Дальтона, получим

$$(P_1 + P_2)V = \frac{m_1}{\mu_1} RT + \frac{m_2}{\mu_2} RT, \; PV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) RT.$$

Выразим из данного выражения объем сосуда V:

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_2} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{P}.$$

Плотность смеси определится как

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}.$$

Подставив выражение объема, получим окончательную формулу для плотности смеси

$$\rho = \frac{P(m_1 + m_2)}{RT(m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)}.$$

Подставим числовые значения:

$$\rho = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300 \cdot (10/44 + 15/28)} = 1{,}97 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: ρ = 1,97 кг/м^3.

Задачи для самостоятельного решения

311. Находившийся в закрытом баллоне газ нагрели от 300 до 360 К, при чем давление возросло на 120 кПа. Определить первоначальное давление.

312. В сосуде объемом $V = 2$ л находится масса $m = 10$ г кислорода при давлении $P = 90{,}6$ кПа. Найти среднюю квадратичную скорость, число молекул, находящихся в сосуде, и плотность газа.

313. Каково давление газа если средняя квадратичная скорость его молекул 500 м/с, а его плотность 1,35 кг/м^3?

314. Газ при давлении 200 кПа и температуре 15°С имеет объем 5 л. Чему равен объем газа этой массы при нормальных условиях?

315. В баллоне находится газ при температуре 15°С. Во сколько раз уменьшится давление газа, если 40 % его выйдет из баллона, а температура при этом понизится на 8°С?

316. Колба вместимостью 4 л содержит некоторый газ массой 0,6 г под давлением 200 кПа. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа.

317. Баллон содержит сжатый газ при температуре 300 К и давлении $4 \cdot 10^6$ Па. Каково будет давление, когда из баллона будет выпущена половина массы газа, а температура изменится до 285 К?

318. Плотность некоторого газа составляет 0,082 кг/м^3 при давлении 100 кПа и температуре 17°С. Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа. Какова молярная масса μ этого газа?

319. Какова при нормальных условиях плотность смеси газов, состоящей из азота (N_2) массой 56 г и углекислого газа (CO_2) массой 44 г?

320. Газ массой 12 г занимает объем $V = 4$ л при температуре 7°С. После нагревания газа при постоянном давлении его плотность стала равной 0,6 кг/м^3. До какой температуры нагрели газ?

3.2 Средняя кинетическая энергия молекул. Молярная теплоемкость. Адиабатический процесс

Основные формулы

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы молекул: на каждую степень свободы в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$. Средняя энергия молекулы определяется

$$< \varepsilon >= \frac{i}{2}kT ,$$

где i – число степеней свободы молекулы. Число степеней свободы i – это число независимых величин (координат), с помощью которых может быть задано состояние (положение) системы в пространстве. Положение одноатомной молекулы описывается тремя независимыми величинами: i = 3. Положение двухатомной молекулы описывается пятью независимыми величинами: 3 степени свободы описывают положение центра масс и 2 вращательные задают положение оси системы в пространстве $i = 5$.

Трехатомные молекулы имеют 6 степеней свободы – 3 поступательные, 2 вращательные и 1 колебательная степень свободы i = 6.

Теплоемкостью тела C называется отношение бесконечно малого количества теплоты δQ, полученного телом, к соответствующему приращению его температуры dT:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}.$$

Теплоемкость, отнесенная к одному молю вещества, называется молярной теплоемкостью: $C = \dfrac{\delta Q}{\nu\, dT}$, Дж/(моль·К). Теплоемкость, отнесенная к единице массы тела, называется удельной теплоемкостью: $C_{\text{уд}} = \dfrac{\delta Q}{m\, dT}$, Дж/(кг·К). Удельная и молярная теплоемкости связаны соотношением $C_{\text{уд}} = C / \mu$, где μ – молярная масса.

Молярные теплоемкости при постоянном давлении C_P и постоянном объеме C_V связаны соотношением (уравнение Майера)

$$C_P - C_V = R.$$

Для идеального газа C_P, C_V определяются числом степеней свободы молекул:

$$C_V = \frac{i}{2} R.$$

С учетом уравнение Майера теплоемкость идеального газа теплоемкость при постоянном давлении C_P определяется

$$C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2} R.$$

Процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой, называется адиабатическим. Соотношение между параметрами *P, V* и *T* для адиабатического процесса называется уравнение Пуассона.

$$PV^{\gamma} = const,\ TV^{\gamma - 1} = const,\ T^{\gamma} P^{1-\gamma} = const,$$

где γ – отношение теплостойкостей

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}.$$

Примеры решения задач

Пример 3.2.

Найти среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы водорода при температуре t = 27° С.

Решение:

Молекула водорода состоит из двух атомов. Положение двухатомной молекулы описывается пятью независимыми величинами: 3 степени свободы описывают положение центра масс – поступательные и 2 вращательные степени свободы задают положение оси системы в пространстве.

Средняя кинетическая энергия молекулы определяется формулой

$$<\varepsilon>= \frac{i}{2}kT,$$

причем на поступательное движение приходится 3 степени свободы i = 3:

$$<\varepsilon_{пост}>= \frac{3}{2}kT.$$

Подставляя численные значения, найдем

$$<\varepsilon_{пост}>= \frac{3}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300 = 6{,}21\cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Ответ: $<\varepsilon_{пост}>$ = $6{,}21\cdot 10^{-21}$ Дж.

Пример 3.3. При адиабатическом сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление измениться от P_1 = 100 кПа до P_2 = 350 кПа. Начальная температура воздуха t_1 = 40^0С. Найти температуру воздуха в конце сжатия.

Решение:

При адиабатическом процессе соотношение между параметрами P и T подчиняется уравнению Пуассона:

$$P_1^{1-\gamma}\, T_1^{\gamma} = P_2^{1-\gamma}\, T_2^{\gamma},$$

где γ – показатель адиабаты есть отношения теплостойкостей $\gamma = C_P / C_V$; $C_P = \frac{i+2}{2}R$, $C_V = \frac{i}{2}R$, $\gamma = \frac{i+2}{i}$, i – число степеней свободы молекулы. Считая воздух многоатомным газом, i = 6; показатель адиабаты γ = 4/3.

Из уравнения Пуассона

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \; T_2 = \frac{T_1}{\left(P_1 / P_2\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$T_2 = \frac{313}{(100/350)^{1/4}} = 428{,}1 \text{ К.}$$

$$t_2 = 428{,}1\text{-}273 = 115{,}1\ {}^0\text{C.}$$

Ответ: $t_2 = 115{,}1^0$C.

Задачи для самостоятельного решения

321. Определите молярную теплоемкость при постоянном давлении некоторого идеального газа, если постоянная адиабаты этого газа равна 7/5.

322. При адиабатическом сжатии воздуха в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания давление измениться от P_1 = 100 кПа до P_2 = 350 кПа. Начальная температура воздуха $t_1 = 27^0$ С. Найти температуру воздуха в конце сжатия.

323. Определить среднюю кинетическую энергию $<\varepsilon_п>$ поступательного движения и среднее значение $<\varepsilon>$ полной кинетической энергии молекулы водяного пара при температуре 400 К. Найти также кинетическую энергию W поступательного движения всех молекул пара, содержащего количество вещества ν = 5 моль.

324. При какой температуре средняя кинетическая энергия молекул одноатомного газа будет в два раза больше, чем при температуре -73° С?

325. Молярную теплоемкость при постоянном объеме некоторого идеального газа равна 5***R***/2. Определите постоянную адиабаты этого газа.

326. Найти среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре T = 286 К, а также кинетическую

энергию вращательного движения всех молекул этого газа, если его масса m = 4 г.

327. Определить среднее значение $< \varepsilon >$ полной кинетической энергии одной молекулы гелия, кислорода и водяного пара при температуре T = 400 К.

328. Разность удельных теплоемкостей c_p - c_v некоторого двухатомного газа равна 260 Дж/(кг·К). Найти молярную массу газа и его удельные теплоемкости c_p и c_v.

329. Определить кинетическую энергию $< \varepsilon >$, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота, при температуре 273^{0}С, а также среднюю кинетическую энергию $< \varepsilon_п >$ поступательного движения, $< \varepsilon_в >$ вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии $< \varepsilon >$ молекулы.

330. Двухатомный газ, находящийся при давлении P_1 = 200 кПа и температуре t_1 = 27^{0}С, сжимается адиабатически от объема V_1 до объема $V_2 = 0{,}5 \cdot V_1$. Найти температуру t_2 и давление P_2 газа после сжатия.

3.3 Работа, совершаемая идеальным газом, при различных изопроцессах. Первое начало термодинамики

Основные формулы

Первое начало термодинамики в общем случае записывается в виде

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу; ΔU – изменение его внутренней энергии; A – работа, совершаемая газом против внешних сил.

Внутренняя энергия идеального газа складывается из кинетических энергий молекул газа:

$$U = N < \varepsilon > = \frac{m}{\mu} N_A \frac{i}{2} kT, \; U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} RT.$$

Изменение внутренней энергии идеального газа связано с изменение его температуры ΔT:

$$\Delta U = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T, \; \Delta U = \nu C_V \, \Delta T.$$

Работа, связанная с изменением объем газа, в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV,$$

где V_1 и V_2 – начальное конечное значение объема;

– при изохорном процессе (V=*const*): $A_V = 0$.

– при изобарном процессе (P=*const*): $A_P = P(V_2 - V_1)$.

– при изотермическом процессе (T=*const*): $A_T = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

– при адиабатическом процессе: $A_S = \frac{\nu RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]$, $A_S = \nu C_V (T_1 - T_2)$.

Первое начало термодинамики

– при изохорном процессе (V=*const*):

$$A_V = 0,\ Q_V = \Delta U = \nu C_V \Delta T\ \ Q_V = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T$$

– при изотермическом процессе (T=*const*):

$$\Delta T = 0,\ \Delta U = 0,\ Q_T = A_T = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

– при адиабатическом процессе:

$$Q_S = 0,\ A_S = -\Delta U = -\nu C_V \Delta T = \nu C_V (T_1 - T_2)$$

– при изобарном процессе (P=*const*):

$$Q_P = A_P + \Delta U = \nu R(T_2 - T_1) + \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\Delta T = \frac{m}{\mu} C_P \Delta T.$$

Примеры решения задач

Пример 3.4.

Кислород, занимающий при давлении $P_1 = 100$ кПа объем $V_1 = 2$ л, расширяется до объема $V_2 = 4$ л. Найти работу A, совершенную газом при следующих процессах: а) изобарном; б) изотермическом; в) адиабатическом.

Решение:

а) При изобарном процессе $V/T = const$ работа A_p определяется выражением

$$A_p = P\left(V_2 - V_1\right).$$

$$A_p = 100 \cdot 10^3 \left(4 - 2\right) \cdot 10^{-3} = 200 \text{ Дж}.$$

б) При изотермическом процессе $PV = const$ работа A_T находится по формуле

$$A_T = \frac{m}{\mu} R\,T \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

С учетом уравнения Менделеева – Клайперона

$$PV = \frac{m}{\mu} RT = P_1 V_1,$$

выражение для работы A_T запишется как

$$A_T = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

$$A_T = 100 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \ln 2 = 138{,}6 \text{ Дж}.$$

в) Работа A_s, совершаемая газом при адиабатическом процессе, с одной стороны может быть определена выражением

$$A_S = \frac{m}{\mu} \frac{R\,T_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right],$$

а с другой – из первого начала термодинамики работа при адиабатическом расширении равна убыли внутренней энергии газа

$$A_S = -\Delta U = -\frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\,\Delta T = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\left(T_1 - T_2\right).$$

Используя уравнения Менделеева – Клайперона для начального и конечного состояний

$$P_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1,\; P_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2,$$

получим $A_S = \frac{i}{2}\frac{m}{\mu} R\left(T_1 - T_2\right),\; A_S = \frac{i}{2}\left(P_1 V_1 - P_2 V_2\right).$

Молекула кислорода состоит из двух атомов. Для двухатомной молекулы $i = 5$.

При адиабатическом процессе соотношение между параметрами P и V подчиняется уравнению Пуассона:

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} .$$

Из уравнения Пуассона находим давление P_2:

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} .$$

Подставляя давление P_2 в выражение для работы, получим

$$A_S = \frac{i}{2} \left(P_1 V_1 - P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} V_2 \right) = \frac{i}{2} P_1 \left(V_1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} V_2 \right),$$

$$A_S = \frac{i}{2} P_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} \frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{i}{2} P_1 V_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right).$$

Очевидно, что эта формула совпадает с формулой

$$A_S = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

т.к. $\gamma = (i + 2)/i$, $1/(\gamma - 1) = i/2$.

Подставляя численные значения, найдем

$$A_S = \frac{5}{2} 100 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \left(1 - 0{,}5^{0,4} \right) = 500 \cdot \left(1 - 0{,}5^{0,4} \right) = \text{ 120,6 Дж.}$$

Ответ: а) A_P = 200 Дж; б) A_T = 138,6 Дж; в) A_S = 120,6 Дж.

Пример 3.5. В сосуде объемом V = 0,1 литра находиться азот при давлении P = 100 кПа. Какое количество теплоты Q надо сообщить азоту, чтобы: а) при $P = const$ объем увеличился вдвое; б) при $V = const$ давление увеличилось вдвое?

Решение:

а) при $P = const$ количество теплоты Q_P определится

$$Q_P = \Delta U + A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{m}{\mu} C_P \Delta T .$$

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$PV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } PV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2\text{, откуда } P\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T \text{ или } \frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{P\Delta V}{R}.$$

Тогда количество теплоты Q_P, с учетом того, что для двухатомного газа $C_P = \frac{7}{2}R$, определится

$$Q_P = \frac{C_p}{R}P\Delta V = \frac{7}{2}P\Delta V.$$

$$Q_P = 700 \text{ Дж.}$$

б) при $V = const$ имеем

$$Q_V = \Delta U = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T.$$

Согласно уравнению Менделеева – Клапейрона

$$PV_1 = \frac{m}{\mu}RT_1 \text{ и } PV_2 = \frac{m}{\mu}RT_2,$$

Откуда $V\Delta P = \frac{m}{\mu}R\Delta T$ или $\frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{V\Delta P}{R}$.

Тогда количество теплоты Q_V, с учетом того, что для двухатомного газа $C_V = \frac{5}{2}R$, получим

$$Q_V = \frac{C_V}{R}V\Delta P = \frac{5}{2}V\Delta P.$$

$$Q_V = 500 \text{ Дж.}$$

Ответ: а) Q_P = 200 Дж; б) Q_V = 500 Дж;

Задачи для самостоятельного решения

331. Азот, занимающий объем 2 л, находится при давлении 100 кПа. Газ нагревают сначала при постоянном объеме до давления 150 кПа, а затем при постоянном давлении до объема 3 л. Какое количество теплоты было сообщено газу.

332. Кислород массой 320 г, находящийся при нормальных условиях, сжимается до объема V_2 = 3 л. Найти давление P_2 и температуру кислорода T_2

после сжатия, если кислород сжимается: а) изотермически; б) адиабатически. Найти работу в каждом из этих процессов.

333. Гелий массой 8 г при температуре 27^0 С охладили изохорно, вследствие чего его давление уменьшилось в 3 раза. Затем газ изобарно расширили так, что температура его стала равной первоначальной. Какую работу совершил газ? (μ = $4\cdot10^{-3}$ кг/моль, R = 8,3 Дж/моль·К)

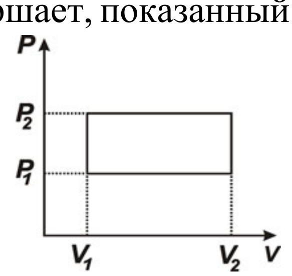
334. Работа изотермического расширения массы 10 г некоторого газа от объема V_1 до $V_2 = 2\cdot V_1$ оказалась равной 575 Дж. Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа при этой температуре.

335. Идеальный двухатомный газ из начального состояния с давлением 120 кПа и объемом 3 л переходит в состояние с давлением 240 кПа и объемом 2 л. Найти совершенную газом работу, если газу было передано количество теплоты 450 Дж.

336. Масса 1 кг воздуха, находящегося при давлении 150 кПа и температуре 30°С, расширяется адиабатически, и давление при этом падает до 100 кПа. Во сколько раз увеличился объем воздуха? Найти конечную температуру и работу, совершенную газом при расширении.

337. Какая часть количества теплоты, сообщенного двухатомному газу при изобарном процессе, идет на увеличение внутренней энергии и какая часть – на совершение работы?

338. Двухатомный идеальный газ в количестве 2 молей совершает, показанный на рисунке, цикл, состоящий из двух изобар и двух изохор. ($P_2 = 1{,}6\cdot P_1$, $V_2 = 2{,}5\cdot V_1$). Начальная температура равна $t_1 = 27^\circ$ С. Определите работу, совершенную газом за цикл. (**R** = 8,3 Дж/моль·К)



339. Азот в количестве 5 молей, находящий при нормальных условиях, расширяется адиабатически от объема V_1 до $V_2 = 5\cdot V_1$. Найти изменение внутренней энергии газа и работу, совершенную газом при расширении.

340. При изотермическом расширении газа, занимающего объем 3 л, давление его меняется от 120 кПа до 100 кПа. Найти работу, совершенную при этом.

3.4. Второе начало термодинамики. Изменение ΔS энтропии

Основные формулы

Второе для равновесных процессов выражается формулой

$$\delta Q = T\,dS\ ,$$

где S является функцией состояния и называется энтропией системы.

Изменение ΔS энтропии определяется

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T},$$

где 1 и 2 – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состояниям системы.

Примеры решения задач

Пример 3.6. Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы m = 10 г льда (t = - 20^{0}C) в пар (t = 100^{0}C). Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·К), удельная теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда 333 кДж/кг, удельная теплота парообразования 2,2·10^6 Дж/кг.

Решение:

Изменение энтропии ΔS определится

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}.$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4,$$

ΔS_1 – изменение энтропии при нагревании льда от t_1 = -20^{0}C до t_2 = 0^{0}C;

ΔS_2 – изменение энтропии при превращении льда в воду при t_2 = 0^{0}C;

ΔS_3 – изменение энтропии при нагревании воды от t_2 = 0^{0}C до t_3 = 100^{0}C;

ΔS_4 – изменение энтропии при превращении воды в пар при t_3 = 100^{0}C.

Для процессов 1–2 и 3–4, количество теплоты при повышении температуры на dT определится:

$$\delta Q = mc\,dT\ ,$$

c – удельная теплоёмкость.

В результате изменение энтропии при нагревании льда от t_1 = -20^{0}С до t_2 = 0^{0}С:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m c_л dT}{T} = m c_л \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Изменение энтропии при нагревании воды t_2 = 0^{0}С до t_3 = 100^{0}С:

$$\Delta S_3 = \int_{T_2}^{T_3} \frac{m c_в dT}{T} = m c_в \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Процессы 2–3 и 4–5 являются фазовыми переходами при постоянной температуре:

изменение энтропии при превращении льда в воду при t_2 = 0^{0}С

$$\Delta S_2 = \frac{m\lambda}{T_2},$$

λ – удельная теплота плавления льда.

Изменение энтропии при превращении воды в пар при t_3 = 100^{0}С

$$\Delta S_4 = \frac{m r}{T_3},$$

r – удельная теплота парообразования.

$$\Delta S_1 = m c_л \ln \frac{T_2}{T_1} = 0{,}01 \cdot 2100 \cdot \ln \frac{273}{253} = 1{,}596 \text{ Дж/К};$$

$$\Delta S_2 = \frac{0{,}01 \cdot 3{,}33 \cdot 10^5}{273} = 12{,}198 \text{ Дж/К};$$

$$\Delta S_3 = m c_в \ln \frac{T_3}{T_2} = 0{,}01 \cdot 4200 \cdot \ln \frac{373}{273} = 13{,}104 \text{ Дж/К};$$

$$\Delta S_4 = \frac{m r}{T_3} = \frac{0{,}01 \cdot 2{,}2 \cdot 10^6}{373} = 58{,}981 \text{ Дж/К};$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 = 85{,}88 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: 85,88 Дж/К.

Пример 3.7. Найти изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы m = 6 г водорода от давления P_1 = 200 кПа до давления P_2 = 100 кПа.

Решение:

Изменение энтропии ΔS определяется

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Для изотермического процесса $\Delta T = 0$, и изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$. Температуру можно вынести из-под знака интеграла, количество теплоты при постоянной температуре равно работе, совершаемой системой

$$Q_T = A_T = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Тогда $\Delta S = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_1^2 \delta Q = \dfrac{Q_T}{T} = \dfrac{m}{\mu} R \ln \dfrac{V_2}{V_1}$.

Из уравнения изотермического процесса $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{P_1}{P_2}$ и в результате получаем

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{P_1}{P_2}.$$

Подстановка численных значений дает

$$\Delta S = 3R \cdot \ln 2 = 17{,}3 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: ΔS = 17,3 Дж/К.

Пример 3.8. Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы m = 6 г водорода от объема V_1 =2 л под давлением P_1 = 150 кПа к объему V_2 = 6 л под давлением P_2 = 100 кПа.

Решение:

Изменение энтропии ΔS определяется

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Согласно первому началу термодинамики

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

С учетом формул $dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$, $\delta A = PdV$, $PV = \frac{m}{\mu} RT$ имеем

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_V dT + PdV = \frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} dV .$$

Подстановка данного выражения в определение ΔS дает

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \int_1^2 \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Из уравнения Клапейрона следует, что $\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1}$.

В результате получаем

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{P_2}{P_1} + \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} .$$

Подставим численные значения. Число молей $m/\mu = 3$; для двухатомного газа $C_V = \frac{5}{2} R$, $C_P = \frac{7}{2} R$.

$$\Delta S = \frac{15}{2} R \cdot \ln \frac{2}{3} + \frac{21}{2} R \cdot \ln 3 = 71 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: ΔS = 71 Дж/К.

Задачи для самостоятельного решения

341. Найти изменение ΔS энтропии при изотермическом расширении массы m = 6 г водорода от давления P_1 = 200 кПа до давления P_2 = 100 кПа.

342. Найти изменение ΔS энтропии при изохорном нагревании кислорода массы 16 г от температуры t_1 = 27˚ С до температуры t_2 = 127˚ С.

343. Азот массой 14 г расширяется изобарически от объема V_1 до объема $V_2 = 3 \cdot V_1$. Найти изменение ΔS энтропии при этом расширении.

344. Найти изменение ΔS энтропии при превращении 200 г льда при температуре -10°С в воду при температуре +60°С.

345. Найти изменение ΔS энтропии при превращении массы 50 г воды при температуре +30°С в пар при 100°С.

346. Найти изменение ΔS энтропии при изобарическом расширении водорода массой 8 г от объема V_1 = 2 л до объема V_2 = 6 л.

347. Найти изменение ΔS энтропии при изохорном нагревании азота массой 28 г от температуры t_1 = 40°С до температуры t_2 = 100°С.

348. Найти изменение ΔS энтропии при переходе массы m = 8 г водорода от объема V_1 = 2 л под давлением P_1 = 180 кПа к объему V_2 = 4 л под давлением P_2 = 90 кПа.

349. Найти изменение ΔS энтропии при превращении 200 г льда при температуре -10°С в воду при температуре +80°С.

350. Энтропия моля кислорода при температуре 27°С и давлении 100 кПа равна 204,8 Дж/(моль·К). В результате изотермического расширения объем, занимаемый газом, увеличился в 2 раза. Определить энтропию кислорода в конечном состоянии. Молярная масса кислорода $32\cdot10^{-3}$ кг/моль.

3.5. Коэффициент полезного действия тепловой машины. Цикл Карно

Основные формулы

Коэффициент полезного действия (к.п.д.) тепловой машины определяется

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, подведенное к системе, Q_2 – количество теплоты, отданное системой, $A = Q_1 - Q_2$ работа, совершаемая системой за цикл.

Цикл Карно равновесный обратимый цикл с одним нагревателем и одним холодильником, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. Коэффициент полезного действия тепловой машины, работающей по обратимому циклу Карно, зависит только от температуры нагревателя T_1 и холодильника T_2, и не зависит от природы используемого рабочего вещества и устройства машины:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Примеры решения задач

Пример 3.9. Нагреватель тепловой машины, работающей по циклу Карно, имеет температуру 200°С. Определить температуру, охладителя, если при получении от нагревателя количества теплоты Q_1 = 1 Дж машина совершает работу A = 0,4 Дж? Потери на трение и теплоотдачу не учитывать.

Решение.

Температуру охладителя найдем, использовав выражение для термического к.п.д. машины, работающей по циклу Карно,

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \text{ Отсюда } T_2 = T_1(1-\eta).$$

Термический к. п. д. тепловой машины определяется отношением количества теплоты, которое превращено в механическую работу A, к количеству теплоты Q_1, которое получено рабочим телом тепловой машины от нагревателя, т. е. $\eta = A/Q_1$. Подставив это выражение в формулу к.п.д. машины, найдем

$$T_2 = T_1(1 - A/Q_1).$$

Подставим численные значения

$$T_2 = 473(1-0{,}4) = 284 \text{ K}.$$

Ответ: T_2 = 284 К.

Задачи для самостоятельного решения

351. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80% количества теплоты, получаемого от нагревателя, передает холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты 630 Дж. Найти к.п.д. η цикла и работу A, совершаемую за один цикл.

352. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 1/4 количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает охладителю. Температура нагревателя равна 250°С. Определить температуру охладителя.

353. В идеальной тепловой машине газ получает теплоту 84 кДж. Какую работу совершает газ, если температура нагревателя T_1 в три раза выше температуры охладителя T_2.

354. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя в два раза выше температуры охладителя T_2. При изотермическом сжатии газ отдает охладителю количество теплоты Q_2 = 200 Дж. Определить термический к.п.д. цикла, а также работу при изотермическом расширении газа.

355. В результате кругового процесса газ совершил работу 1 Дж и передал охладителю количество теплоты 4,2 Дж. Определить термический к.п.д. цикла.

356. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температур t_2 охладителя равна 17°С. Во сколько раз увеличится к.п.д. цикла, если температура нагревателя повысится от $t_1 = 127^0$С до $t_1' = 247^0$С?

357. Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 2/3 количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает охладителю. Температура охладителя равна 280 К. Определить температуру нагревателя.

358. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя в три раза выше температуры охладителя. Нагреватель передал газу количество теплоты 42 кДж. Какую работу совершил газ?

359. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя равна T_1 = 470 К, температура T_2 охладителя равна 280 К. При изотермическом расширении газ совершает работу A = 100 Дж. Определить термический к.п.д. цикла, а также количество теплоты Q_2, которое газ отдает охладителю при изотермическом сжатии.

360. Идеальный газ совершает цикл Карно. Работа A_1 изотермического расширения газа равна 5 Дж. Определить работу A_2 изотермического сжатия, если термический к.п.д. цикла равен 0,2.

Контрольная работа №4

Электростатика и постоянный электрический ток

4.1 Закон Кулона. Взаимодействие заряженных тел

Основные формулы

Сила, с которой взаимодействуют два точечных электрических заряда q_1 и q_2, находящихся в вакууме, пропорциональны произведению модулей этих зарядов, обратно пропорциональны квадрату расстояния r между ними и направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл/(м^2·Н) – электрическая постоянная.

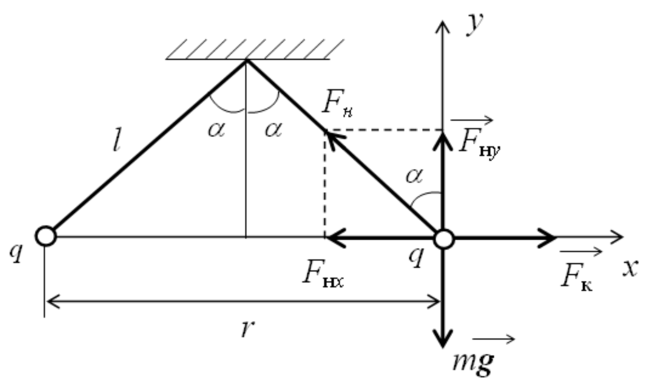
Закон сохранения электрического заряда – в замкнутой изолированной системе алгебраическая сумма зарядов не изменяется.

Примеры решения задач

Пример 4.1.

Два шарика одинакового радиуса и веса подвешены на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда q_0 = 0,4 мкКл они отталкиваются друг от друга и разошлись на угол 60^0. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шарика равно 20 см.

Решение.



Обозначим угол между нитями 2α. На каждый шарик действует три силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила кулоновского отталкивания $\vec{F}_k$ и сила натяжения нити $\vec{F}_н$.

Так как шарик неподвижен, то геометрическая сумма этих сил, действующих на шарик должна быть равна нулю:

$$\vec{F}_k + \vec{F}_н + m\vec{g} = 0.$$

Проецируем это уравнение на оси *x* и *y*. Ось *x* выбираем по направлению кулоновской силы $\vec{F}_k$, а ось *y* перпендикулярно ей, вверх. В проекции на оси *x* и *y*, уравнение будет иметь вид:

$$F_k - F_{\text{н}} \sin\alpha = 0, \; F_{\text{н}} \cos\alpha - mg = 0.$$

Представим эти уравнения в следующем виде:

$$F_k = F_{\text{н}} \sin\alpha = 0, \; mg = F_{\text{н}} \cos\alpha .$$

Поделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{F_k}{mg} = tg\alpha \text{, или } F_k = mg\, tg\alpha .$$

Сила кулоновского отталкивания F_k определится из закона Кулона

$$F_k = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

подставляя это выражение в равенство $F_k = mg\, tg\alpha$, получим:

$$mg\, tg\alpha = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

где r – расстояние между шариками, которое определяется

$$\frac{r}{2} = l\sin\alpha, \; r = 2l\sin\alpha .$$

Тогда $m = \dfrac{F_k}{g \cdot tg\alpha} = \dfrac{q^2}{g \cdot 4\pi\varepsilon_0 4l^2 \sin^2\alpha \cdot tg\alpha}$.

Заряд каждого шарика равен $q = \dfrac{q_0}{2}$.

Подставим числовые значения:

$$m = 9 \cdot 10^9 \frac{(2 \cdot 10^{-7})^2}{9{,}8 \cdot (2 \cdot 0{,}2 \cdot \sin 30°)^2 \cdot tg(30°)} = 1{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ кг.}$$

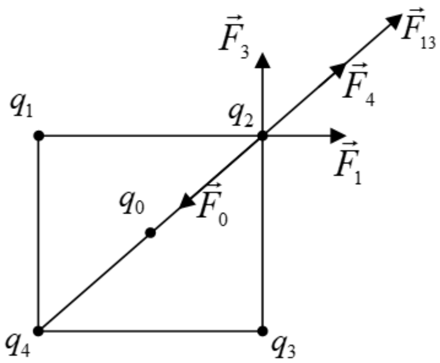
Ответ: $m = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг.

Пример 4.2.

Четыре одинаковых положительных точечных заряда $q = 5$ мкКл помещены в вершинах квадрата. Какой отрицательный заряд q_0 надо поместить в центре квадрата, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю.

Решение:

Выберем любой заряд, находящийся в вершине квадрата, например, заряд q_2, и найдем силы, действующие на него со стороны остальных четырех зарядов (см. рис.). Со стороны зарядов q_1 и q_3 модули сил одинаковы – $F_1 = F_3 = \dfrac{k\,q^2}{a^2}$. Со стороны заряда q_4 – $F_4 = \dfrac{k\,q^2}{2a^2}$; и со стороны заряда q_0, находящегося в центре квадрата, – $F_0 = \dfrac{2k\,q|q_0|}{a^2}$, здесь a – сторона квадрата.



Выбранный заряд q_2, будет находиться в равновесии, если геометрическая сумма сил, действующих на этот заряд со стороны остальных зарядов равна нулю:

$$\vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0.$$

Сложим векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_3$; модуль равнодействующей силы F_{13} определится по теореме Пифагора:

$$\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_3\right| = \left|\vec{F}_{13}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_3^2} = \sqrt{2}F_1,\ \left|\vec{F}_1 + \vec{F}_3\right| = \sqrt{2}\,\frac{kq^2}{a^2}.$$

Так как векторы $\vec{F}_{13}$ и $\vec{F}_4$ сонаправлены, то векторное суммирование можно заменить скалярной суммой:

$$\left|\vec{F}_{13} + \vec{F}_4\right| = F_{13} + F_4 = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{k\,q^2}{a^2}.$$

Чтобы выполнялось условие равновесия, необходимо чтобы

$$\left|\vec{F}_{13} + \vec{F}_4\right| = \left|\vec{F}_0\right|,\ \text{или}\ \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{k\,q^2}{a^2} = \frac{2k\,q\,q_0}{a^2}.$$

В результате искомый заряд q определится

$$q_0 = \frac{q}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right).$$

Подставим числовые значения:

$$|q_0| = \frac{q}{4}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) = 0{,}957 \cdot q = 4{,}79 \text{ мкКл.}$$

Ответ: q_0 = 4,79 мкКл.

Задачи для самостоятельного решения

411. В вершинах правильного шестиугольника со стороной 4 см помещены друг за другом заряды $+q$, $+q$, $+q$, $-q$, $-q$, $-q$. Найти силу, действующую на заряд $+q$, который находится в центре шестиугольника. (q = 5 мкКл)

412. Заряды +32 мкКл и -2 мкКл расположены на расстоянии 20 см друг от друга. Какой надо взять третий заряд и где следует его поместить, чтобы равнодействующая сил, действующая на него со стороны двух других зарядов, была бы равна нулю?

413. Одинаковые металлические шарики, заряженные одноименно зарядами q и $4q$, находятся на расстоянии r друг от друга. Шарики привели в соприкосновение. На какое расстояние x надо их развести, чтобы сила взаимодействия осталась прежней?

414. Положительно заряженный шарик массой 0,18 г и плотностью вещества 1800 кг/м^3 находится в равновесии в жидком диэлектрике плотностью 900 кг/м^3. В диэлектрике создано однородное электрическое поле, напряженность которого, равная по модулю 45 кВ/м, направлена вертикально вверх. Найти заряд шарика.

415. На нитях, закрепленных в одной точке, подвешены два шарика массой 6 г каждый. При сообщении шарикам одинаковых одноименных зарядов нити разошлись, образовав некоторый угол, так что сила натяжения нити составила 0,1 Н. Найти силу кулоновского взаимодействия зарядов.

416. Шарик массой 1 г и зарядом 20 нКл подвешен на шелковой нити в воздухе. Если поместить снизу под ним по вертикали второй маленький

шарик, заряженный таким же по модулю зарядом, сила натяжения нити увеличится в 3 раза. Определить расстояние между центрами шариков.

417. Три одинаковых точечных заряда $q = 3$ нКл помещены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд надо поместить в центре треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю.

418. Заряды +4 мкКл и -3 мкКл расположены на расстоянии 7 см друг от друга. Какая сила будет действовать на заряд +2 мкКл, помещенный в точку, удаленную на 3 см от первого и 6 см от второго заряда?

419. Два одинаковых шара заряжены разноименно так, что абсолютная величина заряда одного из них в пять раз больше величины другого. После соприкосновения шары удалены друг от друга на расстояние 20 см. Найти величину каждого из зарядов, если сила взаимодействия между ними равна 5,1 Н.

420. Шарик массой 0,25 г, висящий на нити, помещен в горизонтальное однородное электростатическое поле напряженностью 125 В/м. При сообщении шарику заряда, он отклонился так, что нить составила угол 30^0 с вертикалью. Определить заряд шарика.

4.2 Напряжённость и потенциал электрического поля. Принцип суперпозиции

Основные формулы

Напряженность электростатического поля – физическая величина, численно равная отношению силы F, действующей на заряд q со стороны электростатического поля, к величине этого заряда в данной точке поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Сила, действующая на произвольный заряд q со стороны поля в данной точке: $\vec{F} = q\vec{E}$.

Напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q в точке, находящейся на расстоянии r от заряда,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Если точечный заряд находится не в вакууме, а в веществе, то величина напряженности поля точечного заряда уменьшается в ε раз

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей, согласно которому напряженность E результирующего поля, созданного двумя (и более) точечным зарядами, равна векторной (геометрической) сумме напряженностей складываемых полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n, \text{ или } \vec{E} = \sum_i \vec{E}_i .$$

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Поверхностная плотность заряда – заряд, отнесенный к единице площади поверхности $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$. Если заряд q равномерно распределен по поверхности S, то $\sigma = q/S$.

Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром)

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0},$$

где τ – линейная плотность заряда, распределенного по нити (цилиндру), r – расстояние от нити (оси цилиндра) до точки, в которой определяется напряженность.

Линейная плотность заряда – заряд, отнесенный к единице длины нити $\tau = dq / dl$. Если заряд q равномерно распределен по длине l, то $\tau = q / l$.

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным шаром для точек вне шара ($r \geq R$, R – радиус шара)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2},$$

где r – расстояние от центра шара до точки, в которой определяется напряженность, q – заряд, распределенный по объему V шара с объемной плотностью ρ; $q = \rho V$. Эта формула совпадает с выражением для напряженности поля точечного заряда.

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным шаром для точек внутри шара ($r < R$, R – радиус шара)

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r,$$

где r – расстояние от центра шара до точки, в которой определяется напряженность, q – заряд, распределенный по объему шара

Потенциал электростатического поля есть величина, равная отношению потенциальной энергии W заряда к величине этого заряда q в данной точке поля

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Потенциал электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q в точке, находящейся на расстоянии r от заряда,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}.$$

Потенциал поля φ системы точечных зарядов q_1, q_2, … , q_n в некоторой точке поля равен алгебраической сумме потенциалов φ_1, φ_2, …, φ_n полей этих зарядов в этой же точке поля:

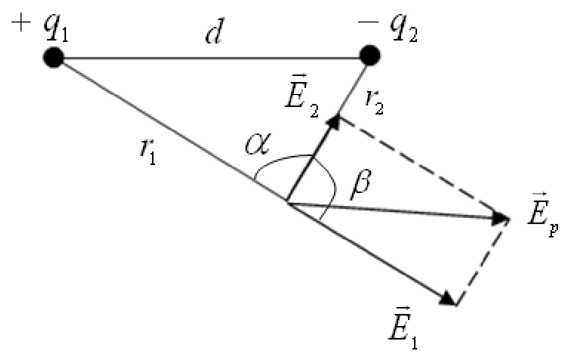
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n \text{, или } \varphi = \sum_i \varphi_i \text{ .}$$

Примеры решения задач

Пример 4.3

Два точечных заряда q_1 = 4 нКл и q_2 = -5 нКл находятся в воздухе на расстоянии d = 7 см друг от друга. Определить напряженность электрического поля и потенциал, созданного этими зарядами в точке, удаленной от положительного заряда на расстояние r_1 = 5 см и от отрицательного заряда на r_2 = 4 см. (1 нКл = 10^{-9} Кл)

Решение.



Согласно принципу суперпозиции полей напряженность электрического поля $\vec{E}_p$ в данной точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Напряженности электрического поля, создаваемые первым и вторым зарядами соответственно равны

$$E_1 = k\frac{q_1}{r_1^2} \text{, } E_2 = k\frac{q_2}{r_2^2} \text{,}$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}$ = $9 \cdot 10^9$ (Н·м^2/Кл^2) – коэффициент пропорциональности;

ε_0 = $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ (Ф/м) – электрическая постоянная.

Вектор $\vec{E}_1$ направлен по силовой линии заряда q_1 от заряда, т.к. q_1>0. Вектор $\vec{E}_2$ направлен по силовой линии заряда q_2 к заряду, т.к. q_2<0. Модуль результирующего вектора найдем по теореме косинусов:

$$E_p^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1\ E_2 \cos\beta\,,$$

где β – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

Угол β может быть найден из треугольника со сторонами d, r_1 и r_2, где противолежащий стороне d угол α, равен $\pi - \beta$. Применив теорему косинусов для данного треугольника, получим:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha\,, \text{ откуда } \cos\alpha = \cos(\pi - \beta) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}\,.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\cos\alpha = \frac{25 + 16 - 49}{2 \cdot 4 \cdot 5} = -\frac{1}{5} = -0{,}2, \text{ следовательно, } \cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = 0{,}2.$$

Вычислив модули напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$:

$$E_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-4}} = \frac{36}{25} \cdot 10^4 = 1{,}44 \cdot 10^4 \text{ (В/м)},$$

$$E_2 = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-9}}{16 \cdot 10^{-4}} = \frac{45}{16} \cdot 10^4 \approx 2{,}812 \cdot 10^4 \text{ (В/м)},$$

Поставляя численные значения, получим:

$$E_p^2 = (1{,}44 \cdot 10^4)^2 + (2{,}812 \cdot 10^4)^2 + 2 \cdot 1{,}44 \cdot 10^4 \cdot 2{,}812 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2 \approx 11{,}6 \cdot 10^8$$

Откуда, величина модуля результирующего вектора напряженности равна

E_p = 3,4·10^4 В/м.

Результирующий потенциал поля в искомой точке найдем согласно принципу суперпозиции для потенциалов, как алгебраическая сумма потенциалов φ_1 и φ_2, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности

$$\varphi_p = \varphi_1 + \varphi_2\,, \text{ где } \varphi_1 = k\frac{q_1}{r_1}\,,\ \varphi_2 = k\frac{q_2}{r_2}\,.$$

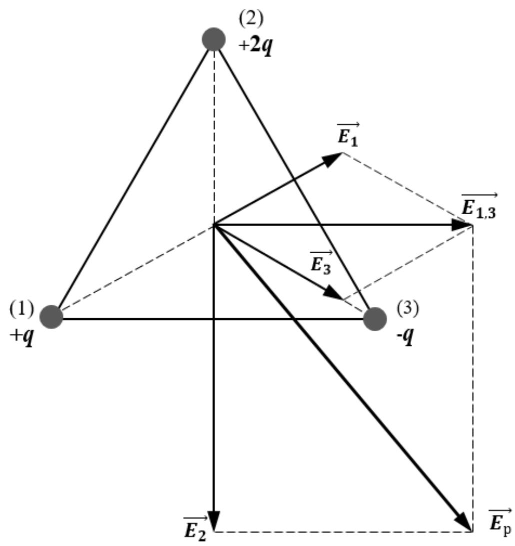
Т.к. $q_1>0$, потенциал $\varphi_1>0$, $q_2<0$, потенциал $\varphi_2<0$. Подставим числовые значения, найдем величину результирующего потенциала:

$$\varphi_p = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-9}}{0{,}05} - \frac{9\cdot 10^9 \cdot 5\cdot 10^{-9}}{0{,}04} = 720 - 1125 = -405 \text{ В}.$$

Ответ: $E_p = 3{,}4\cdot 10^4$ В/м; φ_p = -405 В.

Пример 4.4.

В вершинах равностороннего треугольника со стороной a = 3 см находятся заряды $+q$, $+2q$ и $-q$ (рис.). Найти напряженность поля E в центре треугольника. (q = 2·мкКл).



Решение

Согласно принципу суперпозиции полей напряженность электрического поля $\vec{E}_p$ в данной точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности

$$\vec{E}_p = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3.$$

Заряды q_1 и q_2 положительные – векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены по силовой линии заряда от зарядов; заряд q_3 отрицательный – вектор $\vec{E}_3$ направлен по силовой линии заряда к заряду.

Модули зарядов q_1, q_3 и расстояние r от зарядов до точки, где определяется поле, одинаковы, то и величина напряженности электрического поля, создаваемые каждым зарядом равны

$$E_1 = E_3 = k\frac{q}{r^2},$$

расстояние r от вершины треугольника до его центра равно $r = a/\sqrt{3}$. Заряд q_2 находится на том же расстояние r до точки, что и заряды q_1 и q_3, но его величина в два раза больше, поэтому величина напряженности $\vec{E}_2$ будет в два раза больше, чем $\vec{E}_1$

$$E_2 = k\frac{2q}{r^2} = 2E_1,$$

Сложим векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$. Модуль результирующего вектора найдем по теореме косинусов:

$$E_{13}^2 = E_1^2 + E_3^2 + 2E_1\ E_3 \cos\alpha,$$

α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ составляет 60^0.

$$E_{13}^2 = E_1^2 + E_1^2 + 2E_1 \cdot E_1 \cos 60^0,\ E_{13}^2 = 3E_1^2,\ E_{13} = \sqrt{3}\,E_1.$$

Угол между векторами $\vec{E}_{13}$ и $\vec{E}_2$ составляет 90^0, поэтому результирующий вектор определится по теореме Пифагора:

$$E_p = \sqrt{E_{13}^2 + E_2^2}$$

Подставляя значения E_{13} и E_2, получим $E_{13} = \sqrt{3}\,E_1$ $E_2 = 2E_1$

$$E_p = \sqrt{3E_1^2 + 4E_1^2} = \sqrt{7}\,E_1.$$

Модуль вектора напряженности E_1 равен:

$$E_1 = k\frac{q}{r^2} = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 3}{9\cdot 10^{-4}} = 6\cdot 10^7 \text{ В/м.}$$

Величина модуля результирующего вектора напряженности равна

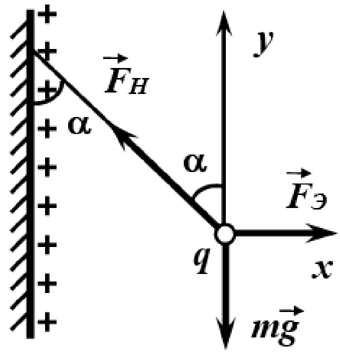
$$E_p = \sqrt{7}\,E_1 = 2{,}64\cdot 6\cdot 10^7 = 15{,}87\cdot 10^7 \text{ В/м.}$$

Ответ: $E = 15{,}87\cdot 10^7$ В/м.

Пример 4.5.

Нить, на которой подвешен заряженный шарик с массой в $m = 1$ г и зарядом $q = 1$ нКл, отклоняется от вертикали на угол $\alpha = 30^o$ в электрическом поле вертикальной заряженной бесконечной плоскости. Определить поверхностную плотность заряда σ этой плоскости.

Решение:



Бесконечная заряженная плоскость создает однородное электрическое поле, напряженность которого в любой точке определится

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда, распределенного по плоскости. Линии напряженности электрического поля перпендикулярны плоскости (см. рис.).

На шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{F}_н$ и сила, действующая со стороны электрического поля заряженной плоскости

$$\vec{F}_э = q\vec{E},$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля бесконечной заряженной плоскости.

Заряженный шарик, подвешенный на нити, отклоняется под действием силы $\vec{F}_э$ на угол α и остается неподвижным. Следовательно, геометрическая сумма сил, действующих на шарик, должна быть равна нулю:

$$\vec{F}_э + \vec{F}_н + m\vec{g} = 0.$$

Проецируем это уравнение на оси на оси x и y. Ось x выбираем горизонтально, по направлению силы $\vec{F}_э$, а ось y, перпендикулярно ей, вверх. Уравнение равновесия сил в проекциях на оси x и y, будет иметь вид

$$F_э - F_н \sin\alpha = 0,\; F_н \cos\alpha - mg = 0.$$

Представим эти уравнения в следующем виде:

$$F_э = F_н \sin\alpha,\; mg = F_н \cos\alpha.$$

Поделив одно уравнение на другое, получим

$$\frac{F_э}{mg} = tg\alpha, \text{ или } F_э = mg\,tg\alpha.$$

Определим силу $F_э$, учитывая формулу $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $F_э = qE = q\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, и подставим это выражение в формулу $F_э = mg\,tg\alpha$:

$$q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = mg\,tg\alpha\,.$$

Откуда определим поверхностную плотность заряда σ:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0\,mg\,tg\alpha}{q}\,.$$

Произведем подстановку числовых значений:

$$\sigma = \frac{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8\cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{10^{-9}} = 10^{-4}\ \text{Кл/м}^2.$$

Ответ: $\sigma = 10^{-4}$ Кл/м^2.

Задачи для самостоятельного решения

421. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 3 см находятся заряды +2 мкКл, +6 мкКл и -2 мкКл. Найти напряженность и потенциал поля в центре треугольника.

422. Заряды по 0,1 мкКл расположены на расстоянии 6 см друг от друга. Найти напряженность поля в точке, удаленной на 4 см от каждого из зарядов. Решить эту задачу для случаев: а) оба заряда положительные; б) один заряд положительный, а другой отрицательный.

423. Электрическое поле создано двумя одинаковыми по модулю разноименными зарядами, находящимися на некотором расстоянии друг от друга. На таком же расстоянии от одного из них по прямой, походящей через оба заряда, напряженность электрического поля равна 400 В/м. Определить напряженность электрического поля в точках пространства, находящихся на одинаковом расстоянии от зарядов, равных расстоянию между ними.

424. В трех вершинах квадрата со стороной 6 см расположены последовательно друг за другом заряды $+q$, $-2q$, $+q$. Найти напряженность и потенциал поля в свободной вершине квадрата.

425. В двух вершинах равностороннего треугольника находятся два разноименных заряда +***q*** и -***q***. Напряженность электрического поля в третей вершине треугольника равна 10 кВ/м. Чему будет равна напряженность электрического поля в центре треугольника.

426. В двух противоположных вершинах квадрата находятся два заряда +2***q*** и -***q***. Напряженность в третьей вершине квадрата равна 600 В/м. Чему будет равна напряженность в центре квадрата.

427. В вершинах квадрата со стороной 3 см расположены три отрицательных и один положительный заряд величиной 2·мкКл каждый. Определить напряжённость и потенциал электрического поля в центре квадрата.

428. В вершинах равностороннего треугольника со стороной a находятся заряды $+q$, $+q$ и $-q$. Найти напряженность поля E в центре треугольника.

429. В трёх вершинах квадрата со стороной 4 см последовательно находятся заряды +2 мкКл, -3 мкКл и +2 мкКл. Найти напряжённость и потенциал поля в четвёртой вершине квадрата.

430. Заряды -3 мкКл и +2 мкКл находятся на расстоянии 10 см. Определить напряженность E и потенциал φ поля в точке, удаленной на расстояние 8 см от первого заряда и 7 см от второго заряда.

4.3 Работа перемещения заряда в электрическом поле. Разность потенциалов

Основные формулы

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении заряда q из одной точки поля, имеющей потенциал φ_1, в другую, имеющей потенциал φ_2, равна

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ или } A = q\int E_l\, dl,$$

где E_l – проекция вектора напряженности E на направление перемещения; dl – перемещение. В случае однородного поля работа определится

$$A = qEl\cos\alpha,$$

где l – перемещение; α – угол между направлениями вектора E и перемещения l.

$(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов в начальной и конечной точках пути (напряжение)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int E_l \, dl \, .$$

Потенциал φ связан с напряженностью электростатического поля E

$$\vec{E} = -grad\varphi, \text{ где } grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \, .$$

В случае однородного поля, т. е. поля, напряженность которого в каждой точке одинакова и по абсолютному значению, и по направлению

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \, ,$$

где d – расстояние между начальной (с потенциалом φ_1) и конечной (φ_2) точкой вдоль силовой линии.

Примеры решения задач

Пример 4.6.

Сплошной шар радиусом $R = 40$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 2$ мкКл/м^3. Определить разность потенциалов двух точек поля, находящихся от центра шара на расстоянии $r_1 = 60$ см и $r_2 = 80$ см; найти потенциал электрического поля на поверхности шара.

Решение.

Разность потенциалов двух точек поля, создаваемого заряженным шаром, определится выражением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E \, dr \, .$$

Напряженность поля вне шара определяется формулой:

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \, .$$

Заряд, распределенный по шару, выразим через объемную плотность ρ

$$q = \rho \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Тогда формула напряженности поля вне шара примет вид

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \rho \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

В результате разность потенциалов двух точек поля, создаваемого заряженным шаром, определится

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Подставим численные значение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}4^3}{3 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{0{,}6} - \frac{1}{0{,}8} \right) = 2{,}0 \cdot 10^3 \text{ В} = 2 \text{ кВ}.$$

Для определения потенциала на поверхности шара воспользуемся той же формулой

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\, dr,$$

где за потенциал φ_1 возьмем потенциал на поверхности шара φ_R, а за потенциал φ_2 – потенциал на бесконечности (где потенциал считается равным нулю). Тогда потенциал на поверхности шара определится

$$\varphi_R = \int_R^\infty E\, dr.$$

Используя формулу напряженности поля шара

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

и подставляя ее в выражение для потенциала φ_R, получим

$$\varphi_R = \int_R^\infty E\, dr = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R},$$

где q – заряд шара, R – радиус шара. С учетом $q = \rho \cdot \dfrac{4}{3} \pi R^3$

$$\varphi_R = \frac{q}{4\pi\,\varepsilon\,\varepsilon_0\,R} = \frac{\rho}{4\pi\,\varepsilon_0\,R}\frac{4}{3}\pi\,R^3 = \frac{\rho\,R^2}{3\varepsilon_0}.$$

Подставим численные значение

$$\varphi_R = \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}4^2}{3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 12\cdot 10^3\ \text{В} = 12\ \text{кВ}.$$

Ответ: $\varphi_1 - \varphi_2$ = 2 кВ; φ_R = 12 кВ.

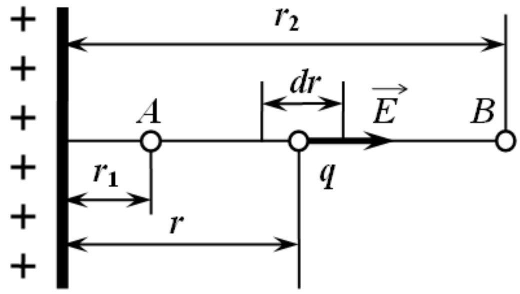
Пример 4.7.

Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии r_1 = 2 см от нити, до точки r_2 = 4 см, α-частица изменила свою скорость от $v_1 = 2\cdot 10^5$ м/с до $v_2 = 3\cdot 10^6$ м/с. Найти линейную плотность заряда нити. ($m_\alpha = 6{,}64\cdot 10^{-27}$ кг)

Решение

Заряд q перемещается в поле заряженной нити из точки A в точку B. При перемещении заряда на пути $d\vec{r}$, элементарная работа сил электростатического поля равна

$$dA = \vec{F}\,d\vec{r} = q\vec{E}\,d\vec{r}\ .$$



Так как векторы $\vec{E}$ и $d\vec{r}$ сонаправлены, то $dA = qE\,dr$. Работа по перемещению q из точки A в точку B определится интегрированием:

$$A = \int dA = q\int_{r_1}^{r_2} E\,dr\,.$$

Напряженность E, созданная полем бесконечно длинной заряженной нити, равна

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r},$$

где τ – линейная плотность заряда, r – расстояние от нити до точечного заряда.

Тогда работа

$$A = q\int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau dr}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

По закону сохранения энергии, работа по перемещению заряда равна приращению кинетической энергии частицы:

$$A = W_{K2} - W_{K1} = \frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2}.$$

Подставляя выражение для работы в последнее уравнение, получим:

$$\frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2}.$$

Отсюда найдем линейную плотность заряда τ как:

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{q\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2}\right).$$

Подставляя данные задачи, получим

$$\tau = \frac{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}{3{,}2\cdot 10^{-19}\cdot \ln 2}\cdot\frac{6{,}64\cdot 10^{-27}}{2}(900-4)\cdot 10^{10} = 7{,}5\cdot 10^{-7}\ \text{Кл/м}.$$

Ответ: $\tau = 7{,}5\cdot 10^{-7}$ Кл/м.

Задачи для самостоятельного решения

431. На расстоянии $r_1 = 4$ см от бесконечно длинной заряженной нити находится точечный заряд 4 нКл. Под действием поля заряд перемещается до расстояния $r_2 = 16$ см от нити, при этом совершается работа 5 мкДж. Найти линейную плотность заряда.

432. Электрон, летящий из бесконечности со скоростью 10^6 м/с остановился на расстоянии 80 см от поверхности отрицательно заряженного металлического шара радиусом 4 см. Определить потенциал шара.

433. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью с линейной плотностью заряда τ = 0,2 мкКл/м. Какую скорость получит электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния r_1 = 8 см до расстояния r_2 = 4 см?

434. Около заряженной бесконечно протяженной плоскости находится точечный заряд q = 6 мкКл. Заряд перемешается по линии напряженности поля на расстояние Δr = 2 см; при этом совершается работа A = 5 мкДж. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости.

435. Шарик массой m= 40 мг, имеющий положительный заряд q = 1 нКл, движется со скоростью v = 10 см/с. На какое расстояние r может приблизится шарик к положительному точечному заряду q_0 = 2 нКл?

436. Электрическое поле образовано положительно заряженным шаром радиусом 10 см, заряд распределен с объемной плотностью ρ = 0,5 мкКл/м^3. На расстоянии r_1 = 30 см от поверхности шара находится точечный заряд 2 нКл. Под действием поля заряд перемещается до расстояния r_2 = 10 см от поверхности шара. Определить работу по перемещению этого заряда.

437. При перемещении заряда 10 нКл из бесконечности в данную точку поля была совершена работа 10 мкДж. Определить работу по перемещению этого заряда из данной точки поля в точку с потенциалом 500 В.

438. Электрон вылетает из точки с потенциалом 615 В со скоростью $2{\cdot}10^6$ м/с. Определить потенциал точки, в которой: а) электрон остановится; б) скорость электрона увеличится в 2 раза.

439. Электрическое поле образовано положительно заряженным шаром радиусом 20 см, заряд распределен с объемной плотностью ρ = 0,2 мкКл/м^3. Какую скорость получит электрон под действием поля, приблизившись к поверхности шара с расстояния r_1 = 60 см до расстояния r_2 = 20 см?

440. Чтобы увеличить скорость от $2{\cdot}10^4$ до $7{\cdot}10^4$ м/с, заряженная частица должна пройти разность потенциалов 2,3 В. Какую разность потенциалов должна пройти эта частица, чтобы скорость увеличилась от $7{\cdot}10^4$ до $8{\cdot}10^4$ м/с?

4.4 Конденсаторы. Электроемкость. Энергия заряженного конденсатора

Основные формулы

Электроемкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{U},$$

где q – заряд на обкладках конденсатора; $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между обкладками.

Емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d},$$

где S – площадь каждой пластины; d – расстояние между пластинами (обкладками); $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Кл/(м^2·Н) – электрическая постоянная; ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

При параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов:

$$C = \sum_i C_i .$$

В частности, для двух конденсаторов при параллельном соединении конденсаторов емкость батареи равна

$$C = C_1 + C_2 .$$

При последовательном соединении конденсаторов обратная величина емкости батареи равна сумме обратных величин емкостей отдельных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i},$$

при последовательном соединении двух конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2},$$

где q – заряд на обкладках конденсатора; U – разность потенциалов между обкладками; C – емкость конденсатора.

Примеры решения задач

Пример 4.8

Воздушный конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-9}$ Ф зарядили до напряжения U_1 = 600 В. Отключив от источника, раздвинули пластины, увеличив расстояние между пластин в два раза. Определите конечные напряжение U_2, заряд q_2 и работу A, которую надо совершить, для увеличения расстояние между обкладками в два раза.

Решение

Так как, конденсатор отключили от источника тока, то заряд на пластинах, не изменился: $q_1 = q_2 = C_1 U_1$, $q_1 = 10^{-9} \cdot 600 = 6 \cdot 10^{-7}$ Кл.

Емкость плоского конденсатора определяется формулой $C = \dfrac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$, из которой видно, что емкость плоского конденсатора C прямо пропорционально площади пластин S, и обратно пропорционально расстоянию между обкладками d.

При раздвижении пластин, расстоянию между обкладками d увеличивается в два раза, следовательно, емкость конденсатора уменьшилась вдвое: $C \sim 1/d$, $C_2 = C_1/2 = 5 \cdot 10^{-10}$ Ф.

Конечное напряжение $U_2 = \dfrac{q}{C_2} = \dfrac{2q}{C_1} = 2U_1 = 1200$ В.

Работа, которую необходимо совершить для увеличения расстояние между обкладками, равна разности энергий электрического поля конденсатора в конечном и первоначальном положении W_2 и W_1. Первоначальная энергия электрического поля конденсатора

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{10^{-9} \cdot 36 \cdot 10^4}{2} = 1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Энергия конденсатора W_2 после раздвижения пластин определится по формуле $W_2 = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{2q^2}{2C_1} = 2W_1 \ = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Таким образом, численное значение работы будет равно:

$$A = W_2 - W_1 = 2W_1 - W_1 = W_1 = 1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Ответ: U_2 = 1200 В; $q_2 = 6 \cdot 10^{-7}$ Кл; $A = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ Дж.

Пример 4.9

Как изменится емкость плоского воздушного конденсатора, пластины которого расположены вертикально, если конденсатор погрузить до половины в жидкий диэлектрик с относительной диэлектрической проницаемостью равной 5?

Решение

После того как конденсатор погрузили в жидкий диэлектрик, его можно рассматривать как батарею параллельно соединенных конденсаторов: первый – заполненный диэлектриком с емкостью $C_1 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{2d}$, второй – воздушный с емкостью $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$.

Площадь пластин каждого стала равна $S/2$. Общая емкость батареи определится правилом параллельного соединения конденсаторов:

$$C_{об} = C_1 + C_2.$$

Емкости C_1 и C_2 можно выразить через первоначальную емкость плоского воздушного конденсатора $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$:

$$C_1 = \varepsilon C_0 /2, \; C_2 = C_0/2.$$

Отсюда общая емкость батареи будет равна:

$$C_{об} = \frac{C_0(\varepsilon + 1)}{2}.$$

Подставляя значение ε = 5, получаем ответ $C_{об}/C_0$ =3.

Ответ: увеличится в 3 раза.

Пример 4.10

Два плоских конденсатора одинаковой электроемкостью $C_1 = C_2 = C$ соединены в батарею последовательно и подключены к источнику тока с электродвижущей силой 10 В. Чему будет равна разность потенциалов на пластинах первого конденсатора, если пространство между пластинами второго конденсатора, не отключая источника тока, заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε = 7?

Решение

До заполнения второго конденсатора диэлектриком разность потенциалов на пластинах обоих конденсаторов была одинакова: $U_1 = U_2 = U/2$. После заполнения электроемкость второго конденсатора возросла в ε раз: $C_2^* = \varepsilon C_2 = \varepsilon C$.

Электроемкость первого конденсатора не изменилась, т. е. $C_1^* = C$. Так как источник тока не отключался, то общая разность потенциалов на батарее конденсаторов осталась прежней, она лишь перераспределилась между конденсаторами. На первом конденсаторе

$$U_1^* = \frac{q}{C_1^*} = \frac{q}{C},$$ где q – заряд на пластинах конденсатора.

Поскольку при последовательном соединении конденсаторов заряд на каждой пластине и на всей батарее одинаков, то

$$q = q = C_{общ}^* U, \text{ где } C_{общ}^* = \frac{C_1^* \cdot C_2^*}{C_1^* + C_2^*} = \frac{C \cdot \varepsilon \cdot C}{C + \varepsilon \cdot C} = \frac{\varepsilon \cdot C}{1+\varepsilon}.$$

Таким образом, $q = \dfrac{\varepsilon \cdot C}{1+\varepsilon} U$.

Подставив это выражение заряда в формулу для U_1^*, найдем

$$U_1^* = \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon \cdot C \cdot U}{(1+\varepsilon) \cdot C} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot U.$$

Подставляя значение $\varepsilon = 7$, получаем ответ $U_1^* = 8{,}75$ В.

Ответ: $U = 8{,}75$ В.

Задачи для самостоятельного решения

441. Площадь пластин плоского воздушного конденсатора $S = 100$ см^2, расстояние между ними $d = 5$ мм. Какая разность потенциалов U была приложена к пластинам конденсатора, если известно, что при заряде конденсатора выделилось количества тепла $Q = 4$ мДж?

442. Если плоский воздушный конденсатор, пластины которого расположены вертикально, погрузить на треть в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$, то его емкость будет равна 50 мкф. Чему будет равна емкость конденсатора, если его погрузить в жидкий диэлектрик на половину.

443. Плоский воздушный конденсатор, имеющий емкость 4 мкФ, заряжен до разности потенциалов 50 В и отключен от источника. Какую работу надо совершить, чтобы в полтора раза увеличить расстояние между обкладками

444. Конденсатор емкостью C_1 зарядили до напряжения 500 В. При параллельном подключении этого конденсатора к незаряженному конденсатору емкостью $C_2 = 4$ мкФ вольтметр показал 100 В. Найти емкость C_1.

445. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинами $d= 4$ мм погружён до половины в керосин. Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon_к = 2$. Насколько необходимо раздвинуть пластины конденсатора, чтобы его ёмкость осталась прежней?

446. В плоский конденсатор поместили плитку парафина толщиной $d = 1$ см, которая вплотную прилегает к его пластинам. На сколько нужно увеличить расстояние между пластинами, чтобы получить прежнюю емкость?

447. Плоский воздушный конденсатор, заряжен до разности потенциалов 100 В и отключен от источника. Для увеличения расстояние между обкладками в 3

раза была совершена работа 50 мДж. Найти первоначальную емкость конденсатора.

448. Рассчитать энергию поля заряженного конденсатора заполненного диэлектриком ($\varepsilon = 5$), площадь каждой пластины которого 100 см^2, расстояние между пластинами 5 см, а напряженность поля 20 кВ/м. $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

449. Как изменится по отношению к первоначальной емкость плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками поместить диэлектрическую пластинку ($\varepsilon = 8$) толщина которой равна половине расстояния между обкладками.

450. Между пластинами плоского конденсатора находится плотно прилегающая стеклянная пластинка. Конденсатор заряжен до разности потенциалов $U_1 = 100$ В. Какова будет разность потенциалов U_2, если вытащить стеклянную пластинку из конденсатора?

4.5 Постоянный электрический ток

Основные формулы

Сила тока – величина, численно равная заряду, переносимому через поперечное сечение проводника за единицу времени. Математически задается как производная заряда по времени:

$$I = dq / dt.$$

Электрический ток называется постоянным, если сила тока и его направление со временем не меняются. Сила постоянного тока

$$I = \Delta q / \Delta t,$$

где Δq – заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время Δt.

Плотность тока – это физическая величина, определяемая силой тока I, проходящего через единицу площади S поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока:

$$j = \frac{I}{S}, \text{ или } j = \frac{\Delta q}{\Delta t\, S}.$$

Сопротивление проводника R зависит от длины проводника l, площади поперечного сечения S:

$$R = \rho l / S,$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление проводника,

Закон Ома для однородного участка цепи: сила тока I в цепи прямо пропорциональна напряжению U, приложенному к концам проводника и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению R этого проводника:

$$I = U / R.$$

Закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной (локальной) форме

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}, \text{ или } \vec{j} = \sigma \vec{E},$$

где j – вектор плотности тока; E – вектор напряженности электрического поля E; σ – удельная электропроводимость, величина, обратная удельному сопротивлению $\sigma = 1/\rho$.

Закон Ома для неоднородного участка цепи (участка, содержащего источник тока)

$$I R = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E},$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; $\mathcal{E}$ – ЭДС источников тока, входящих в участок; U – напряжение на участке цепи; R – сопротивление участка цепи.

ЭДС – это физическая величина, определяемая работой сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда q:

$$\mathcal{E} = A_{ст} / q.$$

Закон Ома для замкнутой (полной) цепи –отношение ЭДС источника тока к полному сопротивлению всей цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

здесь полное сопротивление складывается из R – сопротивления внешней цепи и r – внутреннего сопротивления источника тока.

Закон Джоуля – Ленца – количество теплоты Q, выделяемое проводником с током, равно произведению квадрата силы тока I, сопротивлению проводника R и времени t прохождения тока

$$Q = I^2 R \Delta t.$$

Мощность тока $P = Q / \Delta t$ определится:

$$P = IU = U^2 / R = I^2 R.$$

Параллельное и последовательное соединение проводников.

При последовательном соединении проводников полное сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных проводников

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n, \text{ или } R = \sum_i R_i.$$

При параллельном соединении проводников величина, обратная сопротивлению всего разветвленного участка, равна сумме обратных сопротивлений каждого из параллельно соединенных проводников.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}, \text{ или } \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

КПД источника тока η определится как отношение полезной мощности $P = I R^2$, т.е. мощности P, выделяемой во внешней цепи, к полной мощности источника тока $P_{полн} = I \cdot \mathcal{E}$:

$$\eta = U / \mathcal{E}, \text{ или } \eta = \frac{R}{R + r}.$$

Примеры решения задач

Пример 4.11

Гальванический элемент замыкается один раз на сопротивление $R_1 = 9$ Ом, другой раз на $R_2 = 4$ Ом. В том и другом случаях количество теплоты, выделяющееся в сопротивлениях за одно и то же время, оказывается одинаковым. Каково внутреннее сопротивление элемента?

Решение:

Из того, что в обоих случаях за одинаковое время выделяется одинаковое количество теплоты, следует равенство мощностей: $P_1 = P_2 = P$.

Запишем закон Ома для замкнутой (полной) цепи в первом и втором случаях:

$$\mathcal{E} = I_1 (R_1 + r); \ \mathcal{E} = I_2 (R_2 + r).$$

Приравнивая правые части уравнений, получим равенство

$$I_1 (R_1 + r) = I_2 (R_2 + r).$$

Мощность, выделяемая во внешней цепи в первом и втором случаях, соответственно равна

$$P_1 = I_1^2 R_1, \ P_2 = I_2^2 R_2.$$

Из этих выражений выразим силу тока I_1 и I_2

$I_1 = \sqrt{P / R_1}$ и $I_2 = \sqrt{P / R_2}$ и подставим в равенство:

$$\sqrt{\frac{P}{R_1}}(R_1 + r) = \sqrt{\frac{P}{R_2}}(R_2 + r).$$

Сократив на P, возведем левую и правую часть уравнения в квадрат, получим следующее равенство:

$$R_2 (R_1 + r)^2 = R_1 (R_2 + r)^2.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$R_1^2 \cdot R_2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot r + R_2 \cdot r^2 = R_1 \cdot R_2^2 + 2 \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot r + R_1 \cdot r^2 \ ;$$

$R_1 \cdot R_2 (R_1 - R_2) = r^2 (R_1 - R_2)$, откуда следует,

$$r = \sqrt{R_1 \cdot R_2}.$$

Подставим числовые значения: $r = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$ Ом.

Ответ: $r = 6$ Ом.

Пример 4.12

Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока, если при сопротивлении нагрузки $R_1 = 2$ Ом сила тока в цепи $I_1 = 0{,}4$ А, а при $R_2 = 1{,}5$ Ом – $I_2 = 0{,}6$ А. Чему равна сила тока короткого замыкания $I_{КЗ}$?

Решение:

Ток короткого замыкания определяется отношением ЭДС к внутреннему сопротивлению:

$$I_{КЗ} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

По закону Ома для цепи, содержащей ЭДС,

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r},\ I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}.$$

Выразив из этих уравнений ЭДС, получаем

$$I_1\left(R_1 + r\right) = I_2\left(R_2 + r\right).$$

Из данного соотношения находим выражение для внутреннего сопротивления

$$r = \frac{I_2\,R_2 - I_1\,R_1}{I_2 - I_1}.$$

Подставим числовые значения:

$$r = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}5 - 0{,}4 \cdot 2}{0{,}6 - 0{,}4} = 0{,}5 \text{ Ом}.$$

Для нахождения ЭДС можно подставить значение r в одно из уравнений

$$\varepsilon = I_1\left(R_1 + r\right),\ \varepsilon = I_2\left(R_2 + r\right),$$

$$\varepsilon = 0{,}4 \cdot (2 + 0{,}5) = 1 \text{ В}.$$

Подставив значения ЭДС и внутреннего сопротивления в определение тока короткого замыкания, получаем численное значение $I_{КЗ}$:

$$I_{КЗ} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ А}.$$

Ответ: $I_{КЗ}$ = 2 А.

Задачи для самостоятельного решения

451. Определить ЭДС ε и внутреннее сопротивление r источника тока, если во внешней цепи при силе тока 4 А развивается мощность 10 Вт, а при силе тока 2 А мощность 8 Вт.

452. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора, если при увеличении внешнего сопротивления с 5 Ом до 10 Ом КПД схемы увеличился в 1,5 раза.

453. К источнику тока подключен реостат. При сопротивлении реостата 25 Ом и 16 Ом получается одинаковая полезная мощность 25 Вт. Найти ЭДС источника тока.

454. ЭДС батареи аккумуляторов $\varepsilon = 12$ В , сила тока I короткого замыкания равна 5 А. Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ можно получить во внешней цепи, соединенной с такой батареей?

455. Определить ток короткого замыкания источника ЭДС, если при внешнем сопротивлении $R_1 = 50$ Ом ток в цепи $I_1 = 0{,}2$ А , а при $R_2 = 110$ Ом ток в цепи ток в цепи – $I_2 = 0{,}1$ А.

456. Внутреннее сопротивление r элемента в k раз меньше внешнего сопротивления R, которым замкнут элемент с ЭДС ε. Найти, во сколько раз ЭДС отличается от напряжения U на зажимах элемента.

457. Внутреннее сопротивление аккумулятора 2 Ом. При замыкании его одним резистором сила тока равна 4 А, при замыкании другим – 2 А. Во внешней цепи в обоих случаях выделяется одинаковая мощность. Определить электродвижущую силу аккумулятора и внешние сопротивления.

458. Лампочка и реостат, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение U на зажимах лампочки равно 40 В, сопротивление R реостата равно 10 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $P = 120$ Вт. Найти силу тока I в цепи.

459. Элемент с ЭДС $\varepsilon = 2{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}02$ Ом соединен с реостатом. Определить силу тока в цепи и сопротивление реостата, если напряжение на зажимах элемента 2 В. Какой длинны надо взять для изготовления реостата железную проволоку, если площадь её сечения 0,75 мм^2?

460. ЭДС батареи равна 20 В. Сопротивление внешней цепи равно 2 Ом, сила тока 4 А. Найти к.п.д. батареи. При каком значении внешнего сопротивления к.п.д. будет равен 99%?

Контрольная работа №5

Электромагнетизм. Гармонические электромагнитные колебания

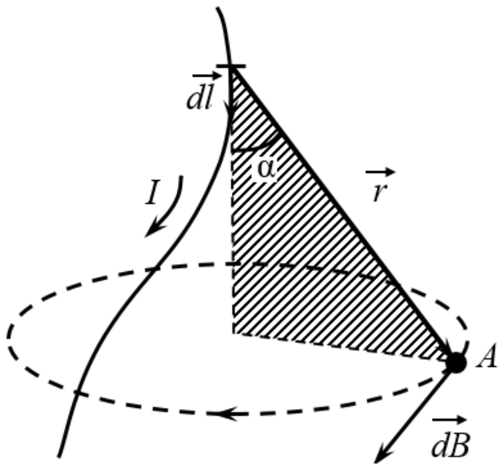
5.1. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био-Савара-Лапласа

Основные формулы

Закон Био-Савара-Лапласа - индукция магнитного поля, создаваемая элементом тока в некоторой точке ***A*** (см. рис.) равна

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\left[d\vec{l} \times \vec{r}\right]}{r^3},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, подведенный из элемента тока к рассматриваемой точке; $d\vec{l}$ – вектор, равный по модулю длине *dl* проводника и совпадающий по направлению с током; μ_0 – магнитная постоянная μ_0 =4π·10^{-7} Гн/м; *I* – сила тока.



Модуль магнитной индукции *dB* в точке, удаленной на расстоянии *r* от элемента тока равен

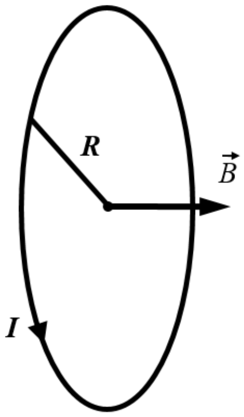
$$dB = \frac{\mu_0 I\, dl \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{r}$.

Единицей измерения магнитной индукции *B* в системе СИ является Тесла (Тл).

Магнитное поле в центре кругового проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R},$$



где I – сила тока в проводнике; R – радиус кругового витка.

Индукция магнитного поля на оси кругового проводника с током

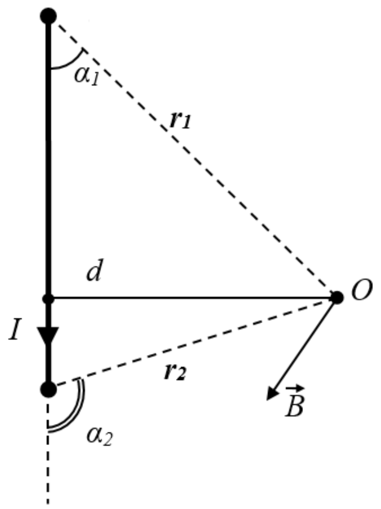
$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + h^2\right)^{3/2}},$$

где I – сила тока в проводнике; R – радиус кругового витка; h – расстояние от центра кругового витка до точки поля.

Магнитное поле прямого тока – тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d},$$

где I – сила тока в проводнике; d – расстояние от проводника до точки поля.



Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком прямого провода с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

где I – сила тока в проводнике; d – расстояние от проводника до точки поля, в которой над определить магнитную индукцию; α_1 и α_2 – углы, образованные направлением тока в проводнике и радиус–векторами, проведенными от концов проводника к точке О.

Магнитная индукция поля внутри длинного соленоида:

$$B = \mu_0 n I,$$

где $n = N / l$ – плотность намотки, то есть число витков на единице длины соленоида.

Принцип суперпозиции магнитных полей: индукция магнитного поля, создаваемая несколькими источниками (элементами тока), равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым источником в отдельности

$$\vec{B} = \int d\vec{B}\text{, или } \vec{B} = \sum d\vec{B}\text{ .}$$

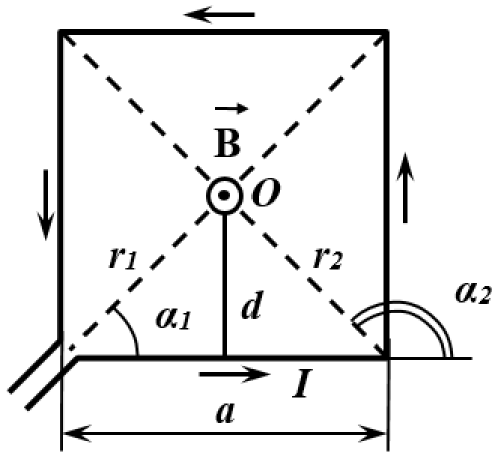
Примеры решения задач

Пример 5.1

По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной a = 10 см, течет ток силой $I = 5$ А. Найти магнитную индукцию B в точке О пересечения диагоналей квадрата.

Решение:

Для определения магнитной индукции квадрат условно разобьем на четыре проводника (отрезки длиной a, являющихся сторонами квадрата), и используем принцип суперпозиции полей, созданных отрезками в точке О (см. рис.).



Результирующая магнитная индукция B в точке О является векторной суммой индукций $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$, $\vec{B}_4$, создаваемых в этой точке токами, текущими в каждом из четырех проводов, т. е.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4\,.$$

Из соображений симметрии абсолютные значения всех четырех индукций одинаковы, так как все отрезки имеют одну и ту же длину, по ним протекает один и тот же ток, и расположены они на одном расстоянии от точки О. Поэтому $\left|\vec{B}_1\right| = \left|\vec{B}_2\right| = \left|\vec{B}_3\right| = \left|\vec{B}_4\right|$.

Кроме того, направления всех векторов индукции, определенные по правилу буравчика, одинаковы (перпендикулярны плоскости квадрата и направлены «к нам», что обозначено символом $\odot$). Это позволяет заменить в уравнении принципа суперпозиции векторную сумму скалярной, и тогда модуль результирующей магнитной индукции B определится как

$$B = 4 \cdot B_1.$$

Таким образом, для нахождения результирующей магнитной индукции достаточно определить ее значение от одной стороны квадрата. Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком прямого провода с током выражается формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$

где I – сила тока в проводнике; d – расстояние от проводника до точки поля, в которой над определить магнитную индукцию; α_1 и α_2 – углы, образованные направлением тока в проводнике и радиус–векторами, проведенными от концов проводника к точке О.

В этой задаче $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$, следовательно, $\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \alpha_1) = -\cos\alpha_1$, и данную формулу можно переписать в виде

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\alpha_1 - \left(-\cos\alpha_1\right)\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\cos\alpha_1 .$$

Учитывая, что расстояние $d = a/2$ и $\cos\alpha_1 = \sqrt{2}/2$ (т. к. $\alpha_1 = \pi/4$), получим формулу для магнитной индукции поля, создаваемой одной стороной квадрата

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}\,\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Результирующая магнитная индукция в центре квадрата – в четыре раза больше

$$B = 4B_1 = \frac{2\sqrt{2}\,\mu_0 I}{\pi a}.$$

Вычисляем в системе единиц СИ индукцию

$$B = \frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{\pi \cdot 0{,}1}$$ = 56,6·10^{-6} Тл = 56,6 мкТл.

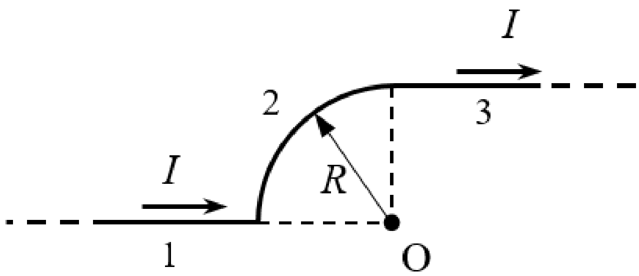
Ответ: B = 56,6 мкТл.

Пример 5.2

По бесконечно длинному проводнику, изогнутому так, как это изображено на рис., течет ток силой I = 2 А. Радиус дуги окружности R = 10 см. Определить индукцию магнитного поля B в точке O.

Решение:

Магнитную индукцию в точке О найдем, используя принцип суперпозиции магнитных полей. В нашем случае проводник можно разбить на три части: два прямолинейных проводника (1 и 3), одним концом уходящие в бесконечность, и дугу (2), составляющую четвертую часть окружности радиуса R. Тогда



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3,$$

где $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$ - магнитные индукции поля в точке O, создаваемые током, текущим в каждом из трех участках проводника.

Так как точка О лежит на оси проводника 1, то $B_1 = 0$ и тогда

$$\vec{B} = \vec{B}_2 + \vec{B}_3.$$

Векторы $\vec{B}_2$ и $\vec{B}_3$ направлены в соответствии с правилом буравчика перпендикулярно плоскости рисунка и направлены «от нас». Это позволяет заменить в уравнении принципа суперпозиции векторную сумму скалярной:

$$B = B_2 + B_3.$$

Магнитную индукцию поля B_2 найдем, используя выражение для магнитной индукции в центре кругового проводника с током

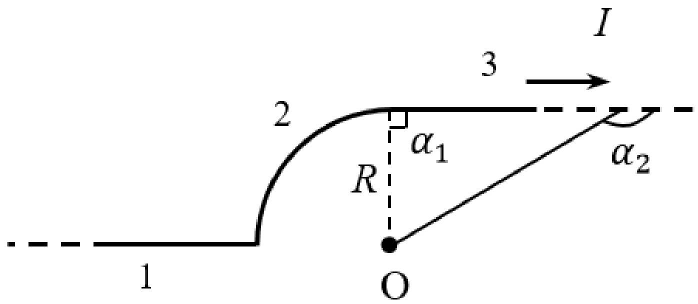
$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Так как магнитная индукция поля B_2 создается в точке О четвертой частью такого кругового проводника, то

$$B_2 = \frac{1}{4}\frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Магнитную индукцию поля B_3 найдем, используя выражение для магнитной индукции поля, создаваемого отрезком прямого провода с током

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right).$$



В нашем случае $d = R$, $\alpha_1 = \pi/2$ ($\cos\alpha_1 = 0$), $\alpha_2 = \to\pi$ ($\cos\alpha_2 = -1$). В итоге

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(0 - (-1)\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}.$$

Таким образом, результирующая магнитная индукция определиться

$$B = B_2 + B_3 = \frac{\mu_0 I}{8R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R},\ B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right).$$

$$B = \frac{10^{-7}\cdot 2}{0{,}1}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = 5{,}14\cdot 10^{-6}\ \text{Тл} = 5{,}14\ \text{мкТл}.$$

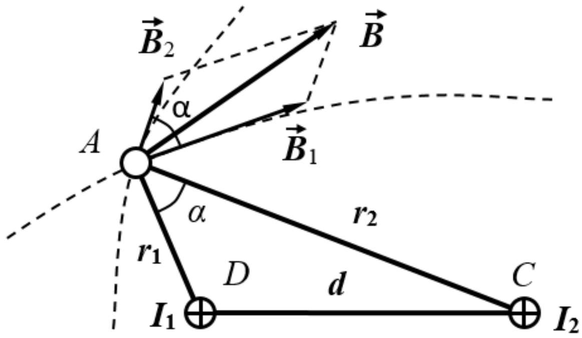
Ответ: B = 5,14 мкТл.

Пример 5.3

Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I_1 = I_2 = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию $\vec{B}$ поля, создаваемого проводником с током в точке A, отстоящей от оси одного проводника на расстояние $r_1 = 5$ см, от другого – $r_2 = 12$ см.

Решение:

Проведем через точку A часть силовой линии магнитного поля, создаваемого током I_1, а затем часть силовой линии магнитного поля, которое создается током I_2 (пунктирные дуги). Построим $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ как касательные к этим дугам в точке A. Значения магнитных индукций определяются по формулам



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \text{ и } B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2},$$

токи $I_1 = I_2 = I$, а $r_1 < r_2$, то $B_1 > B_2$.

Для нахождения в точке A магнитной индукции B, создаваемой системой проводников с токами, воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого сложим $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ геометрически, по правилу параллелограмма:

$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. Модуль вектора $\vec{B}$ найдем по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$. Подставляя значения магнитных индукций B_1 и B_2,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_1^2}{r_2^2} + \frac{2I_1 I_2}{r_1 r_2}\cos\alpha}$$

Так как по условию задачи токи одинаковы $I_1 = I_2 = I$, и вынося $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ за знак корня, получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}.$$

Найдем cos α из треугольника DAC. Заметим, что $\alpha = \angle$DAC, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами (AD$\perp\vec{B}_1$, AC$\perp\vec{B}_2$; AD, AC – радиусы, $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ – касательные в точке A). По теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha ,$$

где d = DC – расстояние между проводами. Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}; \ \cos\alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{23}{40} = 0{,}575 .$$

Подставим числовые значения физических величин и вычислим B:

$$B = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot 3{,}14} \sqrt{\frac{1}{0{,}05^2} + \frac{1}{0{,}12^2} + \frac{2}{0{,}05 \cdot 0{,}12} 0{,}575} = 3{,}08 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

Ответ: B = 308 мкТл.

Задачи для самостоятельного решения

511. По проводу, согнутому в виде прямоугольника со сторонами 8 см и 6 см, течет ток силой I = 5 А. Найти индукцию магнитного поля в центре и в вершинах прямоугольника.

512. По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, идет ток силой I = 2 А. При этом в центре рамки образуется магнитное поле с индукцией B = 20 мкТл. Найти длину проволоки, из которой сделана рамка.

513. По бесконечно длинному прямому проводу, согнутому под углом α = 120°, течет ток силой I = 5 А. Найти магнитную индукцию в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины его на расстояние a = 10 см.

514. По двум длинным параллельным проводам, расстояние между которыми d = 5 см, текут одинаковые токи I = 3 А. Определить индукцию магнитного поля в точке, удаленной от каждого провода на расстояние r = 5 см, если токи текут в одинаковом направлении.

515. Индукция магнитного поля в центре кругового витка радиусом r = 5 см равна 0,05 мТл. Определить индукцию магнитного поля на оси витка в точке, расположенной на расстоянии d = 6 см от центра витка.

516. Длинный прямой соленоид из проволоки диаметром d = 0,5 мм намотан так, что витки плотно прилегают друг к другу. Какова индукция магнитного поля внутри соленоида при силе тока l = 4 А? Толщиной изоляции пренебречь.

517. По проводу, согнутому в виде прямоугольника со сторонами 4 см и 6 см, течет ток силой $I = 5$ А. Найти индукцию магнитного поля в вершинах прямоугольника.

518. По двум длинным параллельным проводам, расстояние между которыми $d = 10$ см, текут токи силой $I_1 = 3$ А и $I_2 = 5$ А. Определить индукцию магнитного поля в точке, отстоящей от оси первого проводника на расстояние $r_1 = 8$ см, от другого – $r_2 = 6$ см, если токи текут в противоположных направлениях.

519. По проводу, согнутому в виде равностороннего треугольника со стороной 3 см, течет ток силой $I = 2$ А. Определить магнитную индукцию поля в вершинах треугольника.

520. Бесконечно длинный прямой провод согнут под прямым углом. По проводу течет ток силой $I = 10$ А. Вычислить магнитную индукцию в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершины угла на расстояние $a = 20$ см.

5.2. Силовое действие магнитного поля

Основные формулы

Сила, действующая на элемент тока $I\,d\vec{l}$ (сила Ампера), определяется как

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right].$$

Если прямолинейный проводник с током, длиной l, находится в однородном магнитном поле с индукцией B, то действие со стороны его находится

$$\vec{F} = I\left[\vec{l} \times \vec{B}\right].$$

Модуль силы равен $F = I\,l\,B\sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{l}$ (совпадающий с направлением тока) и $\vec{B}$.

Закон Ампера - сила взаимодействия двух параллельных бесконечно длинных проводников с токами (прямых токов), находящихся на расстоянии d друг от друга, рассчитанная на отрезок проводника длиной l, определяется

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d} l .$$

Магнитный момент контура с током $\vec{p}_m = I \cdot \vec{S}$, где I – сила тока в контуре; S – вектор, равный по модулю площади S, охватываемой контуром, и совпадающий по направлению с нормалью к его плоскости. Модуль магнитного момента равен $p_m = I \cdot S$.

Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле, определяется выражением

$$\vec{M} = \left\lfloor \vec{p}_m \times \vec{B} \right\rfloor.$$

Модуль механического момента $M = p_m B \sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$.

Работа, по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле, равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, сцепленного с контуром:

$$A = I\left(\Phi_2 - \Phi\right) = I\,\Delta\Phi,$$

где $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$ – изменение магнитного потока, вызванное поворотом контура в магнитном поле.

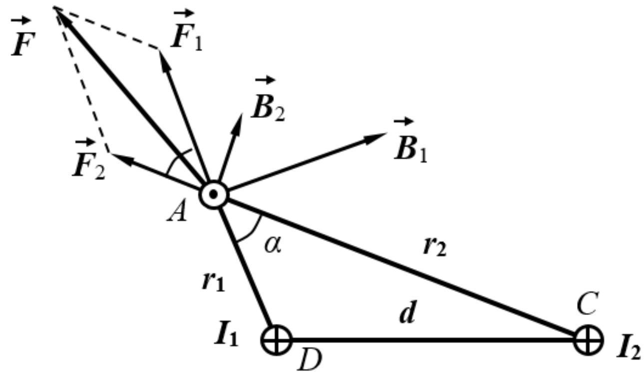
Примеры решения задач

Пример 5.4.

Два параллельных бесконечно длинных провода D и C, по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I_1 = I_2 = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. На расстоянии $r_1 = 5$ см от одного проводника и на расстоянии $r_2 = 12$ см от другого помещен третий проводник А, по которому течет ток противоположного направления силой $I_3 = 20$ А. Определить силу, действующую на третий проводник, если его длина $l = 10$ м.

Решение

Проводники D и C создают магнитные поля с индукциями $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ в месте нахождения третьего проводника A. В этих полях на проводник A действуют силы Ампера $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. $\vec{F}_1$ – сила взаимодействия между токами I_1 и I_3 ; $\vec{F}_2$ – сила взаимодействия между токами I_2 и I_3.



Результирующая сила, действующая на третий проводник, представляет собой векторную сумму этих двух сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

Для их определения сил взаимодействия между параллельными бесконечными проводниками $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ воспользуемся формулой

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi r_1} l ,\ F_2 = \frac{\mu_0 I_2 I_3}{2\pi r_2} l .$$

Токи в проводниках A и D, а также в проводниках A и C имеют противоположное направление, поэтому силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ являются силами отталкивания и направлены по r_1 и r_2 в стороны от проводников D и C (см. рис.). Результирующую силу $\vec{F}$ найдем как геометрическую сумму $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ по правилу параллелограмма. Из рисунка видно, что угол между $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ равен углу α в треугольнике DAC. Модуль $\vec{F}$ найдем по теореме косинусов

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} .$$

Подставляя в эту формулы выражения для сил Ампера и вынося $\dfrac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi} l$ за знак корня (т.к. токи по условию одинаковы $I_1 = I_2$), получим

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi} l \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha} .$$

Найдем $\cos\alpha$ из треугольника DAC. По теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\alpha,$$

где $d = DC$. Отсюда $\cos\alpha = \dfrac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}$;

$$\cos\alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{23}{40} = 0{,}575.$$

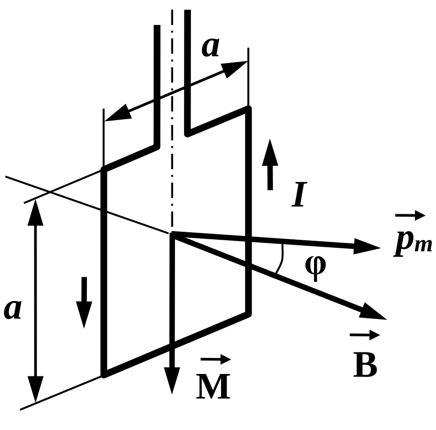
Подставим числовые значения физических величин в единицах СИ и вычислим F:

$$F = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 60 \cdot 20 \cdot 10}{2 \cdot 3{,}14} \sqrt{\frac{1}{0{,}05^2} + \frac{1}{0{,}12^2} + \frac{2}{0{,}05 \cdot 0{,}12} 0{,}575} = 6{,}16 \cdot 10^{-2}\text{Н}.$$

Ответ: F = 61,6 мН.

Пример 5.5.

Плоский квадратный контур со стороной a = 20 см, по которому течет ток силой I = 1 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,5 Тл. Определить работу A, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол $\varphi = 90^\circ$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.



Решение.

На контур с током в магнитном поле действует момент силы

$$M = p_m B \sin\varphi,$$

где $p_m = I\,S = I\,a^2$ – магнитный момент контура; B – магнитная индукция; φ – угол между векторами $\vec{\mathbf{p}}_m$ (направлен по нормали к контуру) и $\vec{\mathbf{B}}$.

По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле. При этом момент сил равен нулю (M = 0), а значит, φ = 0, т.е. векторы $\vec{\mathbf{p}}_m$ и $\vec{\mathbf{B}}$ сонаправлены. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил будет стремиться возвратить контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешних сил. Так как момент сил переменный (зависит от угла поворота φ, то для подсчета применим формулу работы в дифференциальной форме $dA = M\,d\varphi$. Учитывая формулу для момента силы, получаем

$$dA = p_m B \sin\varphi\, d\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте на конечный угол:

$$A = I\,B\,a^2 \int_0^{\varphi} \sin\varphi\, d\varphi .$$

Работа при повороте на угол φ = 90°:

$$A = I\,B\,a^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi = I\,B\,a^2 \left|(-\cos\varphi)\right|_0^{\pi/2} = I\,B\,a^2 = 1\cdot 0{,}5\cdot 0{,}2^2 = 0{,}02 \text{ Дж}.$$

Задачу можно решить и другим способом. Работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока через контур:

$$A = -I\,\Delta\Phi = I\,(\Phi_1 - \Phi_2),$$

где Φ_1 – магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения; Φ_2 – магнитный поток после перемещения.

Если φ = 90°, то $\Phi_1 = BS\cos 0^\circ = BS$, $\Phi_2 = 0$. Тогда

$$A = I\,B\,S = I\,B\,a^2 = 0{,}02 \text{ Дж},$$

что совпадает с ранее полученным выражением.

Ответ: A = 0,02 Дж.

Задачи для самостоятельного решения

521. В однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл находится прямой провод длиной 8 см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По

проводу течет ток силой 2 А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние 5 см. Найти работу сил поля.

522. Плоский контур с током силой $I = 5$ А свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл. Площадь контура $S = 200$ см^2. Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол 30°. Определить совершенную при этом работу A.

523. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I_1 = 10$ А, $I_2 = 20$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. На расстоянии $r_1 = 10$ см от одного проводника и на расстоянии $r_2 = 10$ см от другого помещен третий проводник, по которому течет ток противоположного направления силой $I_3 = 30$ А. Определить силу, действующую на третий проводник, если его длина $l = 20$ м.

524. Виток, в котором поддерживается максимальная сила тока $I = 3$ А, свободно установился в однородном магнитном поле ($B = 20$ мТл). Диаметр витка $d = 10$ см. Какую работу A нужно совершить для того, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол $\pi/3$?

525. Два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с одинаковыми токами, текущими в одном направлении, находятся друг от друга на расстоянии R. Чтобы их раздвинуть до расстояния $2R$, на каждый метр длины проводника затрачивается работа 138 нДж. Определите силу тока в проводниках.

526. По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $a = 10$ см друг от друга, текут одинаковые токи силой $I = 2$ А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F, действующую на отрезок длиной $l = 1$ м каждого провода.

527. Плоский контур, площадь которого равна 300 см^2, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,01 Тл. Плоскость контура

перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный ток силой 10 А. Определить работу внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, магнитное поле в которой отсутствует.

528. В однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 50 мТл на двух тонких нитях подвешен горизонтально проводник длиной 50 см. Масса проводника 10 г. Если пропустить по проводнику ток силой в 2 А, то нити отклонятся от вертикали на некоторый угол. Определить силу натяжения нитей.

529. На проволочный виток радиусом r = 10 см, помещенный между полюсами магнита, действует максимальный механический момент M = 5 мкН. Сила тока в витке равна 2 А. Определить магнитную индукцию поля между полюсами магнита. Действием магнитного поля Земли пренебречь.

530. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью S = 100 см^2. Поддерживая в контуре постоянную силу токи I = 5 А, его переместили из поля в область пространства, где поле отсутствует. Определить индукцию B магнитного поля, если при перемещении контура, была совершена работа A = 0,4 Дж.

5.3. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в магнитном поле

Основные формулы

Сила F, действующая на заряд q, движущийся со скоростью v в магнитном поле с индукцией B (сила Лоренца), выражается формулой

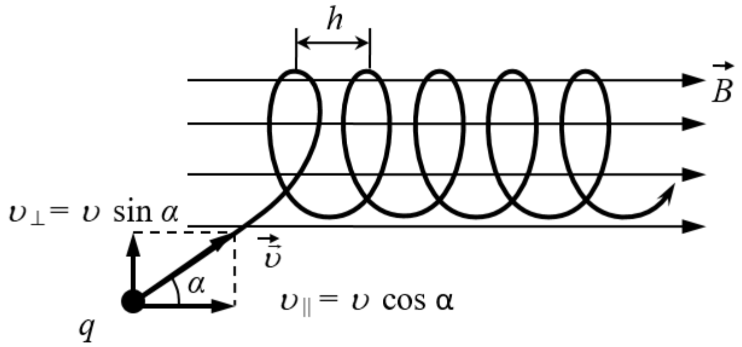
$$\vec{F} = q\left[\vec{\upsilon} \times \vec{B}\right].$$

Модуль силы равен $F = q\upsilon B\sin\alpha$, где α – угол между векторами скорости $\vec{\upsilon}$ движения частицы и индукцией магнитного поля $\vec{B}$.

Траектория движения заряженной частицы в однородном магнитном поле зависит от угла α:

1. α=0, α=π – движение вдоль линий магнитной индукции (траектория прямая);
2. α=π/2 – движение по окружности радиуса $R = \dfrac{m\upsilon}{qB}$ с периодом $T = 2\pi\dfrac{m}{qB}$.

3. Если скорость $\vec{\upsilon}$ заряженной частицы направлена под углом α к вектору $\vec{B}$ (рис.), то ее движение можно представить в виде суперпозиции:



а) равномерного прямолинейного движения вдоль поля со скоростью $\upsilon_{\parallel} = \upsilon \cdot \cos \alpha$; б) равномерного движения со скоростью $\upsilon_{\perp} = \upsilon \cdot \sin \alpha$ по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Радиус окружности определяется формулой $R = \dfrac{m\upsilon \sin\alpha}{qB}$. В результате сложения обоих движений возникает движение по спирали, ось которой параллельна магнитному полю, шаг винтовой линии равен $h = \upsilon T \cos\alpha$.

Примеры решения задач

Пример 5.6.

Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U = 400 В, попал в однородное магнитное поле с индукцией B = 2 мкТл. Определить радиус R кривизны траектории и частоту ν обращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости перпендикулярен линиям поля.

Решение.

На движущийся в магнитном поле заряд действует сила Лоренца $\vec{F}_л$ (действием силы тяжести можно пренебречь). Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости (угол α между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$ равен 90º) и, следовательно, сообщает электрону нормальное (центростремительное) ускорение. По второму закону Ньютона $F_л = ma_n$, где a_n – нормальное ускорение или

$$q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R},$$

где q – модуль заряда электрона; v – скорость электрона; B – магнитная индукция; m – масса электрона; R – радиус кривизны траектории.

Из формулы найдем радиус кривизны траектории

$$R = \frac{m\upsilon}{qB}.$$

Входящий в это равенство импульс $p = m$v может быть выражен через кинетическую энергию $W_к$ электрона:

$$W_к = m\upsilon^2/2 = p^2/2m \; W_к = m\mathrm{v}^2/2 = p^2/2m, \; p = m\upsilon = \sqrt{2mW_к}.$$

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U, определяется работой электрического поля по ускорению электрона по закону сохранения энергии $W_к = A = q \cdot U$. Подставляя это выражение в формулу для импульса, получим $p = \sqrt{2mqU}$. Подставив это выражение в формулу радиуса, получим

$$R = \frac{\sqrt{2mqU}}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Проведем вычисления в единицах системы СИ:

$$R = \frac{1}{2\cdot 10^{-6}}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 400}{1{,}6\cdot 10^{-19}}} = 33{,}7 \text{ м}.$$

Частота вращения заряда по окружности обратна периоду $\nu = 1/T$, где

$$T = 2\pi R/\upsilon, \; T = 2\pi\frac{m}{qB}.$$

В результате частота вращения определится

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m}.$$

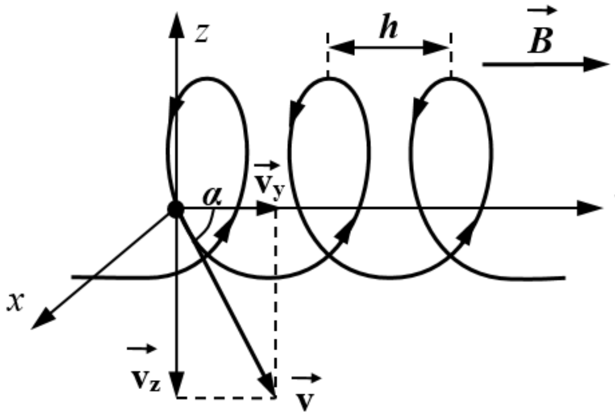
Проведем вычисления в единицах системы СИ:

$$\nu = \frac{1}{2\cdot 3{,}14}\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 400}{9{,}1\cdot 10^{-31}} = 11{,}2\cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $R = 33{,}7$ м; $\nu = 11{,}2\cdot 10^{12}$ с$^{-1}$.

Пример 5.7.

Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 6$ кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом α = 30º к направлению поля и движется по винтовой траектории. Индукция магнитного поля B = 13 мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой траектории.



Решение.

Разложим скорость электрона, влетающего в магнитное поле, по двум направлениям: вдоль линий поля – v_y и перпендикулярно им – v_z. Из рисунка видно, что $v_z = v \sin \alpha$, $v_y = v \cos \alpha$.

На основании закона сохранения энергии работа электрического поля переходит в кинетическую энергию электрона:

$$qU = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Из этой формулы определим скорость: $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$.

Формула для радиуса R может быть получена из второго закона Ньютона $F_л = ma_n$,

$$q\upsilon B\sin\alpha = \frac{m(\upsilon\sin\alpha)^2}{R}, \; R = \frac{m\upsilon \sin \alpha}{qB},$$

где q – модуль заряда электрона; v – скорость электрона; B – магнитная индукция; m – масса электрона; R – радиус кривизны траектории.

Подставляя в формулу выражение для скорости, получим

$$R = \frac{m \sin \alpha}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{\sin \alpha}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Проведем вычисления в единицах системы СИ:

$$R = \frac{0{,}5}{0{,}013}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 6000}{1{,}6\cdot 10^{-19}}} = 10^{-2}\text{ м} = 1\text{ см}.$$

Шаг винтовой линии есть расстояние, на которое перемещается заряд вдоль поля со скоростью $v_y = v\ \cos\alpha$ за время T полного оборота по окружности со скоростью $v_z = v\sin\alpha$ в плоскости, перпендикулярной полю,

$h = v_y\ T = v\ T\ \cos\ \alpha$ ($h = \upsilon_y T = \upsilon T\cos\alpha$), $T = 2\pi R/\upsilon_z$, или $2\pi R = \upsilon_z T$.

Из этих соотношений следует,

$$h = 2\pi R\frac{\upsilon\cos\alpha}{\upsilon\sin\alpha} = 2\pi R\, ctg\,\alpha\ .$$

Проведем вычисления в единицах системы СИ:

$h = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}01\cdot \text{ctg } 30^{\circ} = 0{,}0628\cdot 1{,}732 = 0{,}109$ м $= 10{,}9$ см.

Ответ: $R = 1$ см; $h = 10{,}9$ см.

Задачи для самостоятельного решения

531. Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов 500 В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией 2 мТл и движется по окружности. Определить радиус этой окружности и период обращения частицы.
($q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг)

532. Протон, пройдя ускоряющую разность потенциалов, влетел в однородное магнитное поле с индукцией 5 мТл. Шаг винтовой линии 5 см и радиус 1 см. Определить эту разность потенциалов. ($q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг)

533. Протон и альфа-частица, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Масса протона в 4 раза, а заряд в 2 раза меньше соответствующих значений для α - частицы. Чему равно отношение периода обращения протона по окружности, по которой он движется, к периоду обращения альфа-частицы?

534. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 6$ кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30^{\circ}$ к направлению поля и движется

по винтовой траектории. Индукция магнитного поля B = 2 мТл. Найти радиус R, шаг h винтовой траектории, период T обращения электрона, его кинетическую энергию.

535. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов U = 400 В, попал в однородное магнитное поле с индукцией равной 0,4 мТл. Определить радиус R кривизны траектории и частоту ν обращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости перпендикулярен линиям поля.

536. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле Во сколько раз радиус кривизны R_1, траектории протона больше радиуса кривизны R_2 траектории электрона?
($m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $q_p = |q_e| = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл).

537. Найти скорость заряженной частицы, которую она приобрела, пройдя ускоряющую разность потенциалов 100 кВ и попав в магнитное поле с индукцией 0,2 Тл, описала окружность радиусом 10 см.

538. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов U = 100 В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое (E = 10 кВ/м) и магнитное (B = 0,1 Тл) поля. Найти отношение q/m заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

539. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл по окружности. Определите угловую скорость вращения электрона.
($m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $|q_e| = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл).

540. Протон и альфа-частица, обладающие одинаковой скоростью, влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Масса протона в 4 раза, а заряд в 2 раза меньше соответствующих значений для α - частицы. Найти отношение периодов обращения и радиусов окружности по которой движутся частицы.

5.4. Явление электромагнитной индукции

Основные формулы

Основной закон электромагнитной индукции – значение электродвижущей силы индукции (ЭДС индукции) $\mathcal{E}_i$ определяется скоростью изменения магнитного потока

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

Знак «минус» в формуле – это математическое выражение правила Ленца: магнитное поле индукционного тока направлено так, чтобы препятствовать изменению магнитного потока.

Магнитный поток Φ через поверхность S определяется выражением

$$\Phi = \int B_n \, dS,$$

здесь интеграл берется по поверхности S.

В том случае, если поле однородное, а поверхность является плоской, то

$$\Phi = B_n S = B S \cos\alpha,$$

где α – угол между направлением вектора $\boldsymbol{B}$ и нормалью $\boldsymbol{n}$ к поверхности S, $B_n = B\cos\alpha$ – проекция вектора $\boldsymbol{B}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$.

Электродвижущая сила самоиндукции $\mathcal{E}_S$, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы ток в нем,

$$\mathcal{E}_i = -L\frac{dI}{dt},$$

где L – индуктивность контура; dI/dt – производная силы тока по времени. Индуктивность соленоида определяется

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}, \text{ или } L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

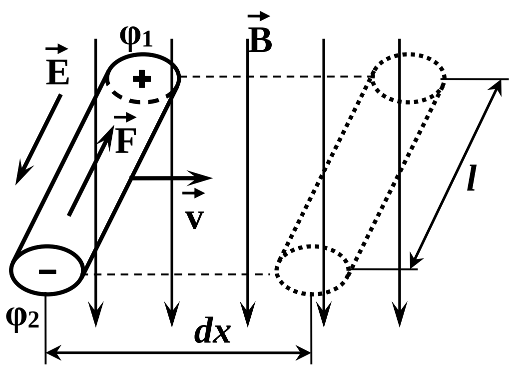
где N – число витков соленоида; l – его длина; S – площадь сечения; μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость вещества (сердечника); n – число витков на единице длины соленоида n=N/l.

.

Примеры решения задач

Пример 5.8.

Проводник из металла длиной 1,5 м перемещается в магнитном поле индукции 0,2 Тл равномерно со скоростью 3 м/с. Найти ЭДС индукции в проводнике, если линии магнитного поля перпендикулярны длине проводника и направлению его движения.



Решение.

В задаче рассматривается явление электромагнитной индукции. По закону электромагнитной индукции Фарадея

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $d\Phi$ – магнитный поток, пересеченный проводником при его движении через площадь dS (см. рис.). Изменение магнитного потока в данном случае идет за счет изменения площади, которую описывает проводник при своем движении: $dS = lx$ (см. рис.).

$$|\mathcal{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Bl\,\mathrm{v}.$$

Численное значение ЭДС (или разности потенциалов на концах проводника) равно

$$\mathcal{E}_i = \varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}2\cdot 1{,}5\cdot 3 = 0{,}9\ \text{В}.$$

Ответ: $\mathcal{E}_i$ = 0,9 В.

Пример 5.9.

В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,1 Тл равномерно с частотой ν = 10 с$^{-1}$ вращается рамка, содержащая N = 1000 витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь *S* рамки равна 150 см^2.

Определить: мгновенное значение ЭДС индукции ε_i, соответствующее углу φ поворота рамки, равному 30º; максимальное значение ЭДС индукции ε_{max}; среднее значение ЭДС индукции $<\varepsilon_i>$, за время, в течение которого поток, пронизывающий рамку изменится от 0 до максимального значения.

Решение.

Мгновенное значение ЭДС индукции ε_i определяется основным законом электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

При вращении рамки, магнитный поток *Ф*, пронизывающий рамку в момент времени *t*, определяется соотношением

$$\Phi = N\,B\,S\cos\omega t,$$

где *B* – магнитная индукция; *S* – площадь рамки; *ω* –циклическая частота.

Подставив в основной закон электромагнитной индукции выражение магнитного потока *Ф* и продифференцировав полученное выражение по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = \omega N\,B S\sin\omega t, \text{ или } \varepsilon_i = \omega N\,B S\sin\varphi,\ \varphi = \omega t.$$

Круговая частота ω связана с частотой вращения ν соотношением *ω* = 2πν. Подставляя выражение для ω в формулу и заменив *ωt* на *φ*, получим

$$\varepsilon_i = 2\pi\nu N\,B S\sin\varphi.$$

Произведем вычисления в единицах системы СИ:

$$\varepsilon_i = 2\cdot 3{,}14\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 0{,}015\cdot 0{,}5 = 47{,}1 \text{ В}.$$

ЭДС индукции будет максимальна при максимальном значении синуса *φ*, т. е. при sin *φ* = 1 (*φ* = 90º). Тогда максимальное значение ЭДС индукции можно найти по формуле

$$\varepsilon_{max} = 2\pi\nu N\,B S.$$

Произведем вычисления в единицах системы СИ:

$$\varepsilon_{max} = 2\cdot 3{,}14\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 0{,}015 = 94{,}2 \text{ В}.$$

Среднее значение ЭДС индукции можно найти по формуле

$$<\mathcal{E}_i> = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta t}, \text{ или } <\mathcal{E}_i> = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\Delta t}.$$

Максимальный и нулевой магнитные потоки определяем по формулам:

$$\Phi_1 = BS\cos 0^{\circ} = BS \text{ и } \Phi_2 = BS\cos 90^{\circ} = 0.$$

Магнитный поток изменяется по закону косинуса, так что от нулевого до максимального значения проходит время, равное четверти периода $T/4$. Поэтому $\Delta t = \frac{T}{4} = \frac{1}{4\nu}$.

В результате получим выражение для среднего значения ЭДС индукции:

$$<\mathcal{E}_i> = 4\nu NBS.$$

Произведем вычисления в единицах системы СИ:

$$<\mathcal{E}_i> = 4\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 0{,}015 = 60 \text{ В}.$$

Ответ: $\mathcal{E}_i$ = 47,1 В; $\mathcal{E}_{max}$ = 94,2 В; $<\mathcal{E}_i>$ = 60 В.

Пример 5.10

В магнитном поле находится замкнутый проволочный контур, пронизываемый потоком магнитной индукции $\Phi_1 = 4$ мВб. При изменении положения контура поток уменьшается до величины $\Phi_2 = 1$ мВб. Сопротивление контура равно $R = 4$ Ом. Вычислить полный заряд, прошедший по цепи.

Решение.

Мгновенное значение ЭДС в процессе исчезновения магнитного потока выражается формулой

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Следовательно, согласно закону Ома, мгновенное значение силы тока есть

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt},$$

где R – полное сопротивление цепи. Прошедший заряд равен

$$q = \int I\,dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

$$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R},\ q = \frac{(4-1)\cdot 10^{-3}}{4} = 0{,}75\cdot 10^{-3}\ \text{Кл} = 0{,}75\ \text{мКл}.$$

Ответ: q = 0,75 мКл.

Задачи для самостоятельного решения

541. Рамка площадью S = 50 см, содержащая N = 100 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B = 40 мТл. Определить максимальную ЭДС $\mathcal{E}_i$, индукции, если ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линии индукции, а рамка вращается с частотой n = 960 об/мин.

542. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл находится прямой провод длиной 20 см, концы которого замкнуты вне поля. Сопротивление R всей цепи равно 0,5 Ом. Найти силу F, которую нужно приложить к проводу, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью 2 м/с.

543. Проволочный виток, имеющий площадь 100 см^2 разрезан в некоторой точке и в разрез включен конденсатор емкостью 10 мкФ. Виток помещен в однородное магнитное поле, линии индукции которого, перпендикулярны к плотности витка. Индукция магнитного поля равномерно изменяется со временем со скоростью $5\cdot 10^{-3}$ Тл/с. Определить заряд конденсатора.

544. Рамка площадью S = 100 см^2 равномерно вращается с частотой ν = 5 с$^{-1}$ относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля (B = 0,5 Тл). Определить среднее значение э. д. с. индукции $<\varepsilon>$ за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения.

545. На расстоянии 1,5 м от длинного прямого провода с током 2 А находится кольцо радиусом 1 см. Кольцо расположено так, что поток, пронизывающий его максимален. Определить заряд, который протечет по кольцу, когда ток в проводнике будет выключен. Сопротивление кольца 50 Ом.

546. Определите максимальный магнитный поток через прямоугольную рамку, которая вращается в однородном магнитном поле с частотой 15 $с^{-1}$. Амплитудное значение ЭДС равно 6 В.

547. В однородном магнитном поле расположен плоский проволочный виток, площадью 10^3 $см^2$ и сопротивлением 4 Ом, таким образом, что его плоскость перпендикулярна силовым линиям. Виток замкнут на гальванометр. При повороте витка на угол 60° полный заряд, прошедший через гальванометр 5 мКл. Определить индукцию магнитного поля, в котором находится виток.

548. Проволочное кольцо радиусом 10 см лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца равно 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

549. В однородном магнитном поле, индукция которого равна $B = 0{,}1$ Тл, вращается катушка, состоящая из $N = 200$ витков. Ось вращения катушки перпендикулярна к её оси и направлению магнитного поля. Период обращения катушки $T = 0{,}2$ мс; площадь поперечного сечения $S = 4$ $см^2$. Найти максимальную ЭДС индукции ε_{max} во вращающейся катушке.

550. Проволочный виток радиусом 4 см, имеющий сопротивление 0,01 Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,04 Тл. Плоскость рамки составляет угол 30° с линиями индукции поля. Какой заряд протечет по витку, если магнитное поле исчезнет?

5.5. Гармонические электромагнитные колебания.

Основные формулы

Гармонические электромагнитные колебания – периодические процессы, происходящие в цепи, содержащей катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C (идеальный колебательный контур).

Изменение заряда q на обкладках конденсатора происходит по закону

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где q_m – максимальное значение заряда или амплитуда заряда; t – время; α – начальная фаза колебаний; $(\omega_0 t + \alpha)$ – фаза колебаний в момент t; ω_0 – циклическая частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где L – индуктивность контура; C – его электроемкость.

Период (Формула Томсона) и частота собственных колебаний в контуре:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},\ \nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Сила тока в цепи контура есть производная заряда q по времени:

$$I = dq/dt = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

$$I = -I_m \sin(\omega_0 t + \alpha),$$

где $I_m = \omega_0 q_m$ – максимальное значение силы тока или амплитуда силы тока.

Напряжение на обкладках конденсатора U_C

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \alpha) = U_{Cm}\cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где $U_{Cm} = q_m / C$ – амплитуда напряжения на обкладках конденсатора.

Напряжение на катушке индуктивности U_L всегда преодолевает ЭДС самоиндукции, возникающей в ней, и поэтому равно ЭДС с обратным знаком:

$$U_L = -\varepsilon_S = L\frac{dI}{dt} = \omega_0 L I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi),$$

$$U_L = U_{Lm}\cos(\omega_0 t + \alpha + \pi),$$

где $U_{Lm} = \omega_0 L I_m$ – амплитуда напряжения на катушке индуктивности.

В идеальном колебательном контуре (отсутствии сопротивления) выполняется закон сохранения энергии – максимальное значение энергии электрического поля $W_{Э\max}$ заряженного конденсатора равно максимальному значению энергии магнитного поля $W_{M\max}$ катушки:

$$W_{\text{Э max}} = W_{\text{М max}}\text{, или } \frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

В произвольный же момент времени сумма энергии электрического и магнитного полей является величиной постоянной:

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = const = \frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Примеры решения задач

Пример 5.11

Уравнение изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид: $U = 20\,cos(400\,\pi t)$, В. Емкость конденсатора 50 мкФ. Найти индуктивность контура L и закон изменения силы тока в цепи $I\,(t)$.

Решение:

Уравнение изменения разности потенциалов в общем виде будет выглядеть $U = U_m \cos\omega_0 t$. Сравнивая это уравнение с законом $U = 20 \cdot \cos 400\,\pi t$, находим, что амплитуда напряжения на обкладках конденсатора U_m = 20 В; циклическая частота $\omega_0 = 400\pi$ с$^{-1}$. По определению циклическая частота электромагнитных колебаний ω_0 равна $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Тогда индуктивность контура L определится $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$.

Подставим числовые значения: $L = \frac{1}{(400\pi)^2 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 0{,}0127$ Гн.

Для того чтобы найти закон изменения силы тока в цепи контура, необходимо найти закон изменения заряда на обкладках конденсатора в колебательном контуре $q(t)$ и взять от него производную по времени. Заряд на обкладках конденсатора связан с напряжением $q = CU$. Поэтому закон изменения заряда будет иметь вид:

$$q(t) = 20 \cdot C \cdot \cos(400\pi t) = 10^{-3}\cos(400\pi t)\,\text{Кл}.$$

Взяв производную по времени от $q(t)$, получим:

$$I(t)=\frac{dq}{dt}=-400\pi\cdot 10^{-3}\sin 400\pi t=-1{,}256\sin 400\pi t\,;$$

$$I(t)=-1{,}256\sin 400\pi t=1{,}256\cos(400\pi t+\pi/2)\ \text{А}.$$

Ответ: L = 0,0127 Гн, $I(t)=1{,}256\cos(400\pi t+\pi/2)$ А.

Пример 5.12

Максимальное значение силы тока в колебательном контуре, состоящего из катушки индуктивности и конденсатора, равна I_m = 0,1 А, максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора U_m = 200 В. Определить циклическую частоту колебаний, если энергия контура равна W = 0,2 мДж.

Решение:

В идеальном электрическом контуре максимальная энергия электрического поля $W_{Э\max}$ заряженного конденсатора равно максимальной энергии магнитного поля $W_{M\max}$ катушки:

$$W_{Э\max}=W_{M\max}\text{, или }\frac{CU_m^2}{2}=\frac{LI_m^2}{2}.$$

Из закона сохранения энергии следует равенство:

$$\sqrt{C}\,U_m=\sqrt{L}\,I_m.$$

Энергия контура можно определить следующим образом:

$$W=\frac{CU_m^2}{2}=\frac{\sqrt{C}\,U_m\sqrt{L}\,I_m}{2}=\frac{\sqrt{LC}\,I_mU_m}{2}.$$

Циклическая частота электромагнитных колебаний определяется $\omega_0=1/\sqrt{LC}$. Подставляя ее значение в выражение для энергии контура, получим

$$W=\frac{\sqrt{LC}\,I_mU_m}{2}=\frac{I_mU_m}{2\omega_0}.$$

Откуда найдем окончательное выражение для циклической частоты:

$$\omega_0=\frac{I_mU_m}{2W}.$$

Подставим числовые значения и рассчитаем результат:

$$\omega_0 = \frac{0{,}1 \cdot 200}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}.$$

Ответ: $\omega_0 = 5 \cdot 10^4$ с$^{-1}$.

Задачи для самостоятельного решения

551. Закон изменения силы тока в колебательном контуре $I = 0{,}05 \sin(100\pi t)$ А. Емкость конденсатора 15 мкФ. Найти индуктивность контура, период колебаний, максимальную энергию электрического поля и закон изменения разности потенциалов на обкладках конденсатора.

552. Конденсатор электроемкостью $C = 500$ пФ соединен параллельно с катушкой длиной $l = 40$ см и площадью S сечения, равной 5 см^2. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Сердечник немагнитный. Найти период T колебаний.

553. Закон изменения силы тока в колебательном контуре $I = 36 \cdot \cos(200 \cdot t + \pi/4)$, (время t в секундах, ток I в мА). Электрическая емкость конденсатора равна 6 мкФ. Определить максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора.

554. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью, равной 0,2 Гн, и конденсатора емкостью 10 мкФ. В момент, когда напряжение на конденсаторе равно 1 В, ток в контуре равен 10 мА. Определить максимальное значение силы тока в контуре.

555. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 40 мкФ и катушки индуктивностью 25 мГн. Найти амплитуду колебаний силы тока, если амплитуда колебаний напряжения 75 В.

556. Закон изменения силы тока в колебательном контуре $I = 5 \cdot \cos(2000 \cdot t + \pi/6)$, (время t в секундах, ток I в мА). Электрическая емкость конденсатора равна 8 мкФ. Определить разность потенциалов на обкладках конденсатора, в тот момент, когда энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

557. Максимальный заряд на обкладках конденсатора колебательного контура равен 20 мкКл, период 1,57 мс. Определить значение заряд на обкладках конденсатора, в тот момент, когда сила тока в контуре равна 64 мА.

558. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью равной 15 мГн и конденсатора емкостью 1,5 мкФ. В момент, когда напряжение на конденсаторе равно 40 В, ток в контуре равен 0,3 А. Определить максимальное значение напряжения на обкладках конденсатора.

559. Сила тока в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности и конденсатора, ёмкостью 8 мкФ, изменяется по закону $I = 5 \cdot \cos(125 \cdot t + \pi/3)$, (мА). Определить напряжение на обкладках конденсатора колебательного контура в тот момент, когда сила тока в контуре равна 3 мА.

560. Максимальное значение силы тока в колебательном контуре равно 8 мА. Определить максимальный заряд на обкладках конденсатора контура, если период колебаний составляет 1,57 мс.

Контрольная работа №6

Волновая оптика

6.1 Интерференция света

Основные формулы

Скорость света в среде определяется

$$\upsilon = c / n,$$

где c – скорость света в вакууме; n –абсолютный показатель преломления среды.

Оптическая длина пути световой волны

$$L = n l,$$

где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n.

Оптическая разность хода Δ двух волн есть разность оптических длин L световых волн

$$\Delta = L_2 - L_1 = n_2 l_2 - n_1 l_1.$$

Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с оптической разностью хода Δ световых волн

$$\Delta\varphi = 2\pi \Delta / \lambda_0, \ \Delta\varphi = 2\pi (n_2 l_2 - n_1 l_1) / \lambda_0,$$

где λ_0 – длина волны в вакууме.

Интерференция – сложение когерентных волн. Монохроматические волны считаются когерентными, если они имеют одинаковые частоты, а разность фаз между ними остается неизменной с течением времени.

Условие максимумов интенсивности света при интерференции

$$\Delta = \pm m \lambda_0, \ (m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

– оптическая разность хода Δ двух когерентных волн кратна длине волны света в вакууме.

Условие минимумов интенсивности света при интерференции

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2}, \ (m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

– оптическая разность хода Δ двух когерентных волн кратна нечетному числу полуволн света в вакууме.

Разность хода лучей при интерференции в тонких пленках и пластинках определяется выражением:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda_0}{2},$$

где d – толщина пленки (пластинки), α – угол падения лучей на пленку, n – абсолютный показатель преломления пленки.

Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0 R},$$

где m – номер кольца (m = 1, 2, 3, ...); R – радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной стеклянной пластинкой.

Радиусы темных колец в отраженном свете

$$r_m = \sqrt{m\lambda_0 R}.$$

Примеры решения задач

Пример 6.1.

Два когерентных источника света S_1 и S_2 с длиной волны λ = 0,5 мкм дают интерференционную картину на плоскости, удаленной от них на расстоянии L = 2 м. Определить расстояние d между источниками света, если расстояние Δx между соседними интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см.

Решение:

Положение интерференционных максимумов определяется условием – оптическая разность хода Δ кратна целому числу длин волн в вакууме λ_0:

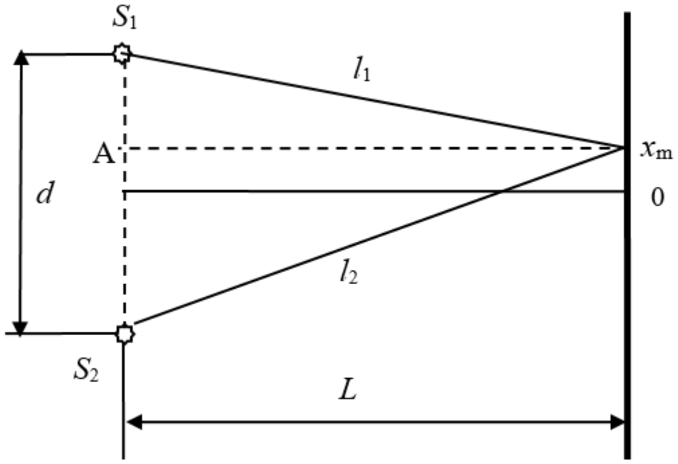
$$\Delta = \pm m\lambda_0,$$

где m – целое число, включая 0 (m = 0, 1, 2, 3…).

Оптическая разность хода Δ связана с геометрической разностью Δl

$$\Delta = n(l_2 - l_1) = n \cdot \Delta l,$$

которую определим из рис., на котором представлена оптическая схема опыта. В этой интерференционной картине – среда воздух, показатель преломления n =1, оптическая разность хода Δ совпадает с геометрической разностью Δl, а длина волны $\lambda = \lambda_0 / n = \lambda_0$.



На рисунке через x_m обозначено расстояние от центра интерференционной картины до m-го интерференционного максимума, находящегося вблизи центра интерференционной картины (точка 0) Из прямоугольных треугольников AS_1x_m и S_2Ax_m по теореме Пифагора имеем:

$$l_1^2 = (d/2 - x_m)^2 + L^2,\ l_2^2 = (d/2 + x_m)^2 + L^2.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$l_2^2 - l_1^2 = 2d\,x_m.$$

Раскрывая разность квадратов в этом уравнении, имеем:

$$(l_2 - l_1)(l_2 + l_1) = 2d\,x_m \text{ или } \Delta l \cdot 2L = 2d\,x_m.$$

В последнем уравнении мы учли, что $l_2 - l_1 = \Delta l$, $l_2 + l_1 \approx 2L$, т.к. расстояние d между источниками света намного меньше расстояния L до экрана d<<L. С учетом формулы $\Delta = \pm m\lambda_0$ находим координату интерференционного максимума:

$$x_m = \Delta l \cdot L/d\ ,\ x_m = \frac{L}{d}\,m\lambda.$$

Тогда расстояние между соседними интерференционными полосами будет равно

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{L}{d}\lambda \ .$$

Из последней формулы окончательно получаем:

$$d = \frac{L}{\Delta x}\lambda \, .$$

Подставим числовые значения:

$$d = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{10^{-2}} = 10^{-4} \text{ м} = 0{,}1 \text{ мм.}$$

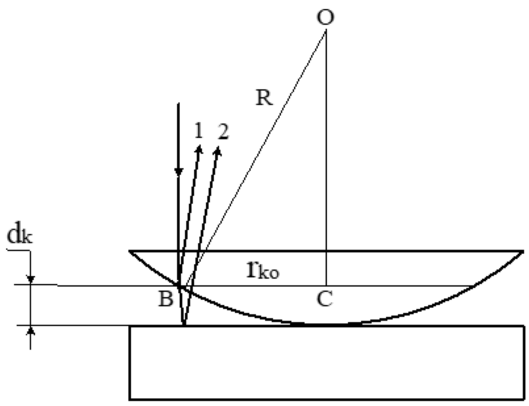
Ответ: d = 0,1 мм.

Пример 6.2.

Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. После того как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,25 раза. Найти показатель преломления n жидкости.

Решение:

Кольца Ньютона наблюдаются при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны.



В отраженном свете оптическая разность хода (с учетом потери полуволны при отражении) определится выражением

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \frac{\lambda_0}{2},$$

где d – толщина пленки (пластинки), α – угол падения лучей на пленку, n – абсолютный показатель преломления пленки. При условии, что показатель преломления воздуха n = 1, а угол падения α = 0, получим

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Геометрическая разность хода когерентных лучей 1, 2 определяется двойной толщиной воздушного зазора между линзой и пластинкой d_k, см. рис. Найдем как связан радиус интерференционного кольца $r_{\text{ко}}$ с радиусом кривизны линзы R. Из прямоугольного треугольника OBC (см. рис.) по теореме Пифагора имеем:

$$R^2 = (R - d_k)^2 + r_{k0}^2,$$

где OB = R – радиус кривизны линзы; OC = R–d_k; BC = $r_{\text{ко}}$ – радиус интерференционного кольца.

$$R^2 = R^2 - 2Rd_k + d_k^2 + r_{k0}^2,\ 2Rd_k = d_k^2 + r_{k0}^2,$$

если пренебречь слагаемым d_k^2, как величиной второго порядка малости, получим

$$d_k \approx r_{\text{ко}}^2 / 2R.$$

Подставляя это выражение в формулу для оптической разности хода,

$$\Delta = 2d_к + \frac{\lambda_0}{2},\ \Delta = \frac{r_{к0}^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}.$$

Для темных колец получаем условие:

$$\Delta = \frac{r_{к0}^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = (2k+1)\frac{\lambda_0}{2}.$$

Для темных колец, наблюдаемых в воздухе n = 1

$$r_{к0}^2 = k\lambda_0 R.$$

Для колец, наблюдаемых в жидкости с показателем преломления n

$$r_к^2 = kR\lambda_0 / n,$$

r_{ko} – первоначальный радиус k-го кольца, r_{k} – радиус этого же кольца с жидкостью.

Разделив эти уравнения друг на друга получим:

$$r_{к0}^2 / r_к^2 = n.$$

Подставим данные условия задачи, получим: $n = 1{,}25^2 = 1{,}56$.

Ответ: $n = 1{,}56$.

Задачи для самостоятельного решения

611. В установке Юнга расстояние между щелями 1,5 мм, экран расположен на расстоянии 2 м от щелей. Щели освещаются источником с красным светофильтром (λ = 687 нм). Определить расстояние между интерференционными полосами на экране. Как изменится расстояние между полосами, если заменить красный светофильтр зеленым (λ = 527 нм)?

612. На пути световой волны, идущей в воздухе, поставили стеклянную пластинку толщиной $h = 1$ мм. На сколько изменится оптическая длина пути, если волна падает на пластинку: 1) нормально; 2) под углом α = 30°?

613. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Расстояние между вторым и двадцатым темными кольцами 4,8 мм. Найти расстояние между третьим и шестнадцатым темными кольцами Ньютона.

614. В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом (λ = 600 нм). Расстояние между отверстиями $d = 1$ мм, расстояние от отверстий до экрана L = 3 м. Найти положение трех первых светлых полос.

615. Сколько длин волн монохроматического света с частотой колебаний $\nu = 5 \cdot 10^{-14}$ Гц уложится на пути длиной l = 1,2 мм: 1) в вакууме; 2) в стекле?

616. Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиусы двух соседних темных колец равны r_k = 4,0 мм и r_{k+1} = 4,38 мм. Радиус кривизны линзы R = 6,4 м. Найти порядковые номера колец и длину волны падающего света.

617. Расстояние d между двумя когерентными источниками света (λ = 0,5 мкм) равно 0,1 мм. Расстояние b между интерференционными полосами на экране в средней части интерференционной картины равно 1 см. Определить расстояние l от источников до экрана.

618. Определить длину l_1 отрезка, на котором укладывается столько же длин волн в вакууме, сколько их укладывается на отрезке l_2 = 3 мм в воде.

619. Расстояние d между двумя щелями в опыте Юнга равно 1 мм, расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определить длину волны λ, испускаемой источником монохроматического света, если ширина b полос интерференции на экране равна 1,5 мм.

620. В опыте Юнга расстояние d между щелями равно 0,8 мм. На каком расстоянии l от щелей следует расположить экран, чтобы ширина b интерференционной полосы оказалась равной 2 мм?

6.2 Дифракция Френеля

Основные формулы

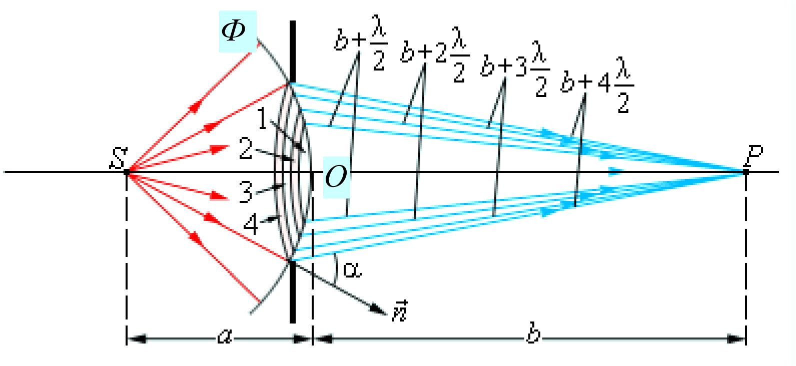
Принцип Гюйгенса–Френеля – каждая точка фронта волны является источником вторичных когерентных сферических волн, результат интерференции которых определяет интенсивность волны в любой последующий момент времени.

Метод зон Френеля – волновая поверхность Φ (см. рис.) разбивается на кольцевые зоны, такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до точки P отличались на $\lambda/2$. При разности хода $\lambda/2$ разность фаз равна π. Поэтому вторичные волны, излучаемые с краёв зон, приходят в точку P в противофазе и гасят друг друга.

Площади всех зон Френеля σ одинаковы и равны:

$$\sigma = \frac{\pi a b}{a+b}\lambda ,$$

где a – длина отрезка SO – радиус сферы Φ, b – длина отрезка OP – расстояние от поверхности волнового фронта до точки наблюдения.



Но одинаковые по размеру зоны Френеля дают различный вклад в интенсивность в точке P.

Амплитуды колебаний, возбуждаемые зонами Френеля в точке P, образуют убывающую последовательность

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots A_m .$$

Поскольку разность хода от краёв зон равна $\lambda/2$, амплитуда результирующего колебания может быть представлена в виде:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots + A_m, \text{ или } A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2},$$

где знак «плюс» соответствует нечётным m, знак «минус» – чётным m.

Радиус произвольной m зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda} ;$$

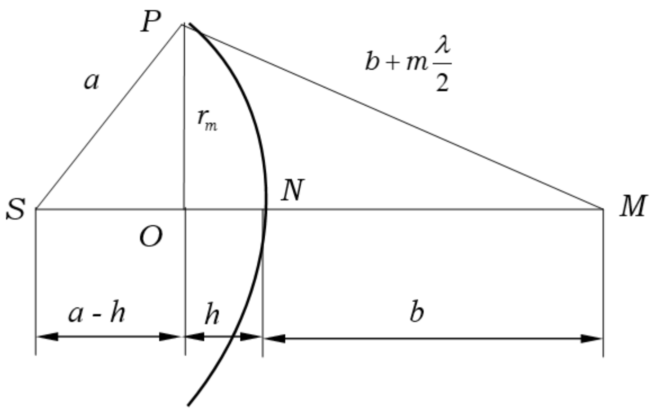
для плоской волны $r_m = \sqrt{bm\lambda}$.

Примеры решения задач

Пример 6.3.

Экран находится на расстоянии $L = 40$ м от точечного монохроматического источника света ($\lambda = 5\ 10^{-4}$ мм). На расстоянии $a = 20$ м от источника света помещен экран с ирисовой диафрагмой. При каком радиусе отверстия диафрагмы центр дифракционного изображения отверстия будет: а) наиболее темным; б) наиболее светлым?

Решение:



Для ответа на вопрос задачи необходимо определить число зон Френеля, открываемых диафрагмой. При четном числе зон центр дифракционного изображения будет темным, наиболее темным при $m=2$, светлым – при нечетном числе зон Френеля, наиболее светлым, когда на отверстии диафрагмы укладывается одна зона Френеля $m=1$. Для определения диаметра отверстия следует найти радиус произвольной зоны Френеля. Радиус m -ой зоны Френеля определим из рисунка. Так как источник света точечный, то фронт волны есть сфера радиуса $R = O_1C$. Расстояние между источником света (точка O_1) и фронтом волны обозначим – a, между фронтом волны и точкой наблюдения – через b. По условию задачи $a+b=L$.

Из треугольников ΔO_1CD и ΔDCO_2 (см. рис.) выразим r_m^2 и приравняем, получим:

$$r_m^2 = a^2-(a-h)^2,\; r_m^2 = (b+m\lambda/2)^2-(b+h)^2.$$

Приравнивая правые части этих уравнений

$$b^2+bm\lambda+(m\lambda/2)^2-b^2-2bh-h^2 = a^2-a^2+2ah-h^2,$$

определим h,

$$h=\frac{bm\lambda}{2(a+b)}.$$

При выводе этой формулы пренебрегаем величинами второго порядка малости (содержащими λ^2), затем подставим h в первое из этих уравнений, получим выражение для радиуса *m-ой* зоны Френеля:

$$r_m = \sqrt{\frac{a\,b}{a+b}m\lambda}\text{, или } r_m = \sqrt{\frac{a\left(L-a\right)}{L}m\lambda}\ .$$

Приравнивая радиус отверстия радиусу m – ой зоны Френеля для каждого случая, и подставляя данные задачи, получим:

а) радиус отверстия диафрагмы, когда изображение является наиболее темным $r_2 = \sqrt{\frac{20\cdot 20}{40}2\cdot 5\cdot 10^{-7}} = 3{,}16\cdot 10^{-3}$ м.

б) радиус отверстия диафрагмы, когда изображение является наиболее светлым $r_1 = \sqrt{\frac{20\cdot 20}{40}5\cdot 10^{-7}} = 2{,}23\cdot 10^{-3}$ м.

Ответ: r_m = 3,16·10^{-3} м; $r_с$ = 2,23·10^{-3} м.

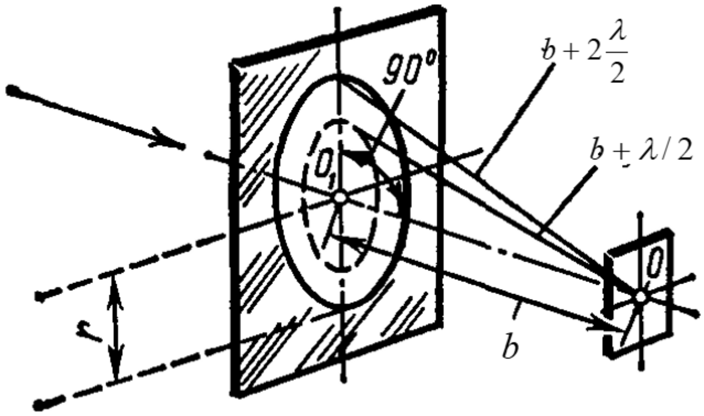
Пример 6.4.

На диафрагму с круглым отверстием радиусом r = 1 м падает нормально параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Н пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определите максимальное расстояние $b_{\max}$ от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

Решение.

Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон четное, то в центре дифракционной картины будет темное пятно. Число зон Френеля, помещающих в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимально расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должно поместиться две зоны Френеля.

Из рисунка следует, что расстояние от точки наблюдения О на экране до



края отверстия на 2 (λ/2) больше, чем расстояние b_{max}.

По теореме Пифагора имеем:

$$r^2 = (b + 2\lambda/2)^2 - b^2 = 2\lambda b + \lambda^2.$$

Учитывая, что $\lambda \ll b$ и величиной λ^2, можно пренебречь, последнее равенство перепишем в виде

$$r^2 = 2\lambda b, \text{ откуда } b = r^2/(2\lambda)$$

Произведем вычисления

$$b = (10^{-3})^2/(2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}) = 1 \text{ м.}$$

Ответ: b_{max} = 1 м.

Задачи для самостоятельного решения

621. На диафрагму с круглым отверстием радиусом r = 1 мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны λ = 0,5 мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние b_{max} от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

622. Точечный источник монохроматического света (λ = 0,500 мкм) расположен на расстоянии 1 м перед диафрагмой с круглым отверстием радиуса 1 мм. Определить расстояние от диафрагмы до точки наблюдения, если отверстие открывает три зон Френеля.

623. Вычислить радиус r_5 пятой зоны Френеля для плоского волнового фронта (λ = 0,5 мкм), если построение делается для точки наблюдения, находящейся на расстоянии b = 1 м от фронта волны.

624. Радиус r_4 четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта равен

3 мм. Определить радиус r_6 шестой зоны Френеля.

625. На диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 4$ мм падает нормально параллельный пучок лучей монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $b = 1$ м от него. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии? Темное или светлое пятно получится в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения поместить экран?

626. Плоская световая волна ($\lambda = 0{,}5$ мкм) падает нормально на диаграмму с круглым отверстием диаметром $d = 1$ см. На каком расстоянии b от отверстия должна находиться точка наблюдения, чтобы отверстие открывало: 1) одну зону Френеля? 2) две зоны Френеля?

627. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии $L = 4$ м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе R отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

628. Определить радиус четвертой зоны Френеля для случая плоской волны ($\lambda = 0{,}63$ мкм). Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения равно 2 м.

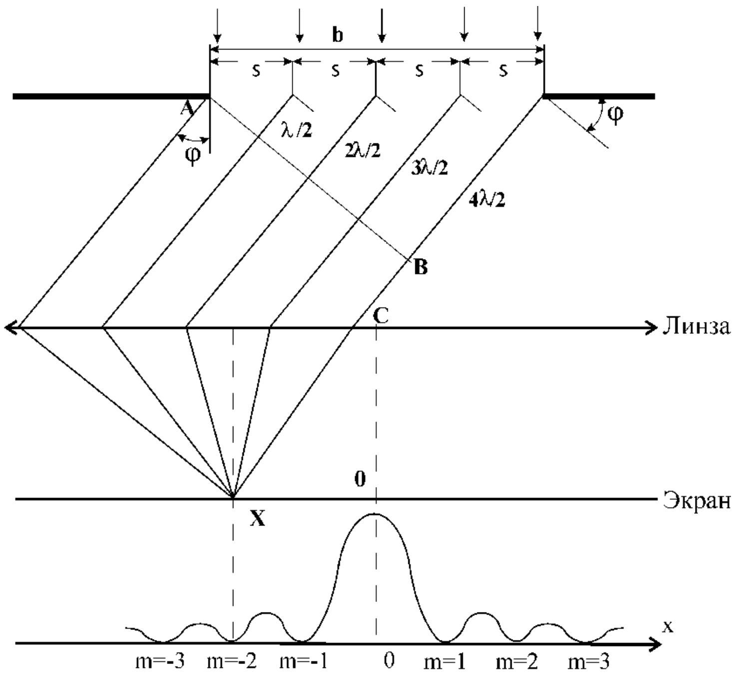
629. На диафрагму с диаметром отверстия $D = 1{,}96$ мм падает нормально параллельный пучок монохроматического, света ($\lambda = 600$ нм). При каком наибольшем расстоянии между диафрагмой и экраном в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно?

630. Зонная пластинка дает изображение источника света, удаленного от него на 2 м, на расстоянии 1 м от своей поверхности. Где получится изображение источника, если удалить его на бесконечность?

6.3 Дифракция Фраунгофера

Основные формулы

Дифракция Фраунгофера – дифракция света, наблюдаемая в параллельных лучах.



Дифракция света на одной щели (шириной b) при нормальном падении лучей.

Условие минимумом интенсивности света, соответствует случаю, когда число зон Френеля, укладывающихся на ширине щели четное

$$b\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2},$$

где $m = 1, 2, 3\ldots$ – номер минимума; b – ширина щели; φ – угол дифракции; λ – длина волны.

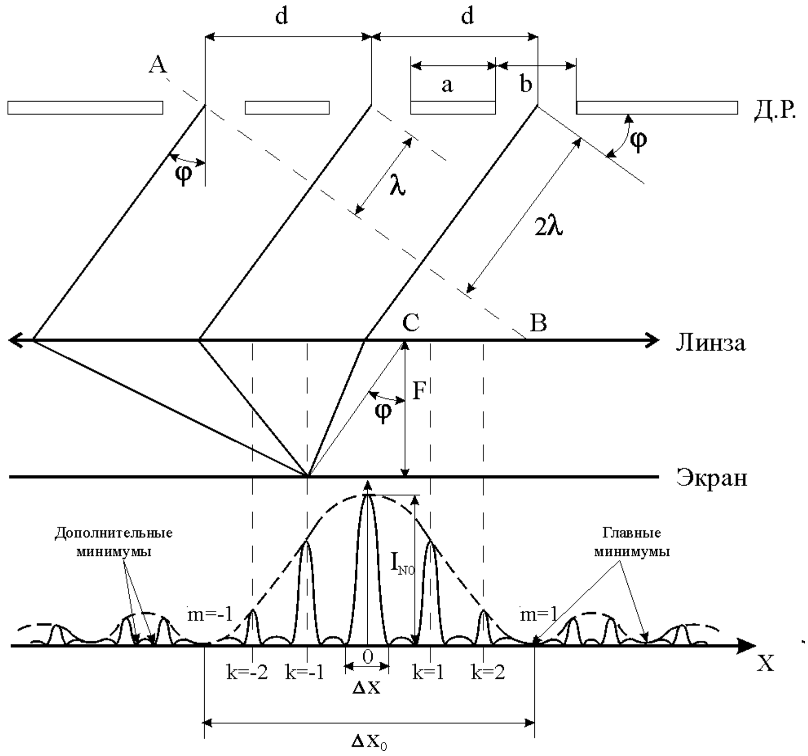
Условие максимумом интенсивности света, соответствует случаю, когда число зон Френеля, укладывающихся на ширине щели нечетное

$$b\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $m = 1, 2, 3\ldots$ – «порядок» максимума.

Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении

лучей. Одномерная дифракционная решетка – система параллельных щелей равной ширины b, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине a непрозрачными промежутками.



Условие главных максимумом интенсивности

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda,$$

$d = a + b$ – период (постоянная) решетки; m – номер главного максимума; φ – угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагированных волн.

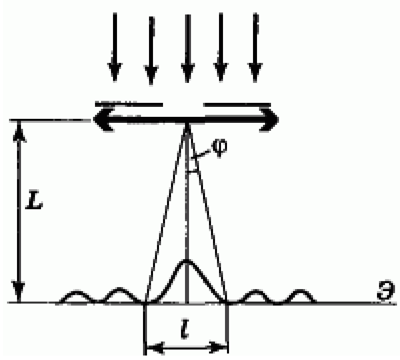
Примеры решения задач

Пример 6.5.

На щель шириной b = 0,1 мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника (λ = 0,6 мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии L = 1 м.

Решение.

Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности (рис.).



Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются по углам φ, определяемые условием

$$b\sin\varphi = \pm m\lambda \ ,$$

где m – порядок минимума; в нашем случае равен единице. Расстояние между двумя минимумами на экране определим по чертежу: $l = 2L\ tg\varphi$. При малых углах $tg\varphi \approx \sin\varphi$, тогда эта формула примет вид

$$l = 2L\ \sin\varphi \ .$$

Выразим синус φ из условия минимума интенсивности и подставим его в последнее равенство:

$$l = 2L\ k\lambda / b \ .$$

Подставим числовые значения:

$$l = 2\cdot 1\cdot 6\cdot 10^{-7}/10^{-4} = 1{,}2\cdot 10^{-2} \text{ м} = 1{,}2 \text{ см}.$$

Ответ: l = 1,2 см.

Пример 6.6.

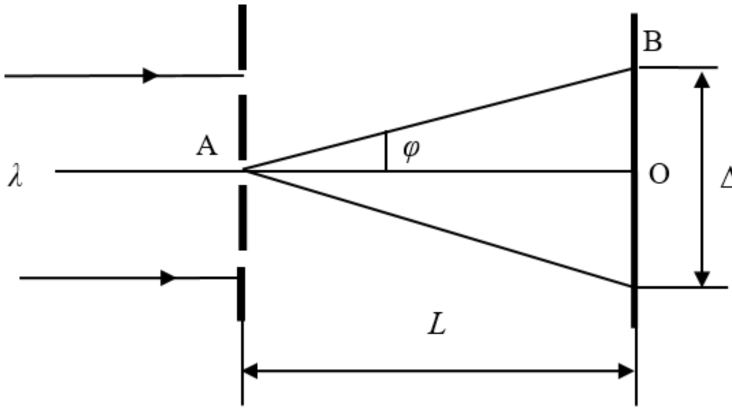
Каков период d решётки, если при нормальном падении на неё лучей с длиной волны λ = 750 нм на экране, отстоящем от решётки на расстоянии L = 1 м, максимумы первого порядка отстоят друг от друга на x = 30,3 см? Каково число штрихов на 1 см решётки? Какое количество максимумов даёт эта дифракционная решётка? Каков максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму?

Решение:

Максимумы первого порядка располагаются симметрично центральному максимуму, см. рис. Тогда положение первого максимума относительно центрального максимума равно половине расстояния между первыми максимумами.

Из рисунка видно, что угол дифракции, соответствующий данному максимуму, определяется соотношением:

$$tg\varphi = OB/OA = \frac{\Delta x}{2L}; \;\; \varphi = arctg\left(\frac{\Delta x}{2L}\right) = 8{,}61^{\circ}.$$



Период решетки найдем из уравнения, определяющего положения главных дифракционных максимумов для дифракционной решетки:

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda; \;\; d = m\lambda/\sin\varphi,$$

Зная период решетки, можно определить число штрихов на длине *l*:

$$N = l/d.$$

Порядок дифракции определяется из уравнения:

$$m = d\sin\varphi/\lambda, \;\; m_{\max} = d\sin 90^{\circ}/\lambda, \;\; m_{\max} = d/\lambda.$$

Подставляя числовые значения в полученные уравнения, получим:

период решетки – $d = 1\cdot 7{,}5\cdot 10^{-7}/\sin 8{,}61^{0} = 5{,}01\cdot 10^{-6}$ м;

число штрихов на 1 см длины решетки *N* – $N = 1$ см$/5{,}01\cdot 10^{-4}$ см ≈ 2000;

количество максимумов – $m_{\max} = 5{,}01\cdot 10^{-6}/7{,}5\cdot 10^{-7} = 6{,}7$; $m_{\max} = 6$.

Для $m_{\max.}$ взяли число 6, т.к. порядок дифракции по определению есть целое число. Максимальный угол дифракции определим из уравнения:

$$\alpha_{\max} = \arcsin\left(m_{\max}\cdot\lambda/d\right).$$

Подставляя в последнее уравнение числовые данные, получим:

$$\alpha_{\max} = \arcsin\left(6\cdot 7{,}5\cdot 10^{-7} / 5{,}01\cdot 10^{-6}\right) \approx 64^{0}.$$

Ответ: $d = 5{,}01\cdot 10^{-6}$ м; $N = 2000$; $m_{\max} = 6$; $\alpha_{\max} = 64^{o}$.

Задачи для самостоятельного решения

631. Сколько штрихов на каждый миллиметр содержит дифракционная решетка, если при наблюдении в монохроматическом свете (λ = 0,6 мкм) максимум пятого порядка отклонен на угол φ = 18°?

632. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка отклонен на угол φ_1 = 14°. На какой угол φ_2 отклонен максимум третьего порядка?

633. На дифракционную решетку нормально падает свет. Чему равна постоянная решетки d, если в направлении φ = 41° совпадают максимуму двух линий λ_1 = 0,41 мкм и λ_2 = 0,656 мкм.

634. На щель шириной a = 0,05 мм падает нормально монохроматический свет (λ = 0,6 мкм). Определить угол φ между первоначальным направлением пучка света и направлением на четвертую темную дифракционную полосу.

635. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия (λ = 589 нм) дает в спектре первого порядка угол дифракции φ_1 = 17°8'. Некоторая линия дает в спектре второго порядка угол дифракции φ_2 = 24°12'. Найти длину волны этой линии и число штрихов N_0 на единицу длины решетки.

636. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновского излучения (λ = 147 пм). Определить расстояние d между атомным плоскостям кристалла, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается, когда излучение падает по углом ϑ = 31°30' к поверхности кристалла.

637. Дифракционная решетка содержит 200 штрихов на 1 мм. На решетку падает нормально монохроматический свет (λ = 0,6 мкм). Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

638. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Красная линия (λ_1 = 630 нм) видна в спектре третьего порядка под углом φ = 60°. Какая

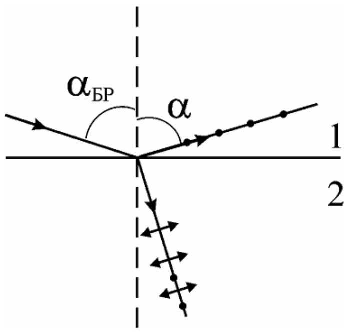
спектральная линия λ_2 видна под этим же углом в спектре четвертого порядка? Какое число штрихов N_0 на единицу длины имеет дифракционная решетка?

639. Дифракционная решетка содержит 400 штрихов на 1 мм. На решетку падает монохроматический красный свет с длиной волны 650 нм. Под каким углом виден первый максимум? Сколько всего максимумов дает эта решетка?

640. Параллельный пучок рентгеновского излучения падает на грань кристалла. Под углом 65° к плоскости грани наблюдается максимум первого порядка. Расстояние d между атомными плоскостями кристалла 280 пм. Определить длину волны к рентгеновского излучения.

6.4. Поляризация световых волн

Основные формулы



Закон Брюстера:

$$tg\alpha_Б = n_{1,2},$$

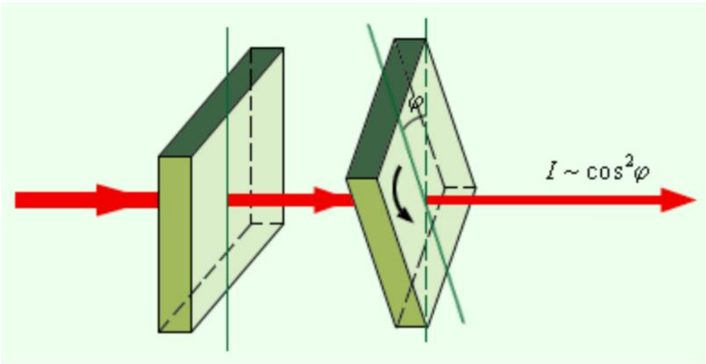
где $\alpha_Б$ – угол падения света из первой среды во вторую, при котором отраженный от первой среды свет оказывается полностью плоскополяризованным, $n_{1,2}$ – относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

Закон Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi,$$

где φ – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора, I_0 – интенсивность света, прошедшего через анализатор,

$I_0 = 1/2 \cdot I_{ест}$, $I_{ест}$ – интенсивность естественного света, падающего на анализатор.



Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

где I_{max} и I_{min} – максимальная и минимальная интенсивности частично-поляризованного света, пропускаемого анализатором. Для плоскополяризованного света $I_{min} = 0$ и $P = 1$.

Угол поворота φ плоскости поляризации оптически активными веществами определяется соотношениями:

в твердых телах – $\varphi = \alpha \cdot d$,

где α – постоянная вращения; d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

в жидких растворах $\varphi = [\alpha] \cdot C \cdot d$, где $[\alpha]$·– удельное вращение; C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

Примеры решения задач

Пример 6.7.

Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен φ. Как поляризатор, так и анализатор поглощают и отражают совместно 8% падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, равна 9% интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найти угол φ.

Решение:

Для нахождения угла между плоскостями поляризации анализатора и поляризатора воспользуемся законом Малюса. При этом учтем, что при прохождении света через поляризатор отражается и поглощается k-тая доля естественного света, следовательно, интенсивность прошедшего через поляризатор света будет равна:

$$I_0 = 1/2 \cdot I_{\text{ест}}(1-k).$$

При прохождении через анализатор теряется еще k-тая доля света, прошедшего через анализатор, а проходит $(1 - k)$ часть света. Тогда закон Малюса можно записать в виде:

$$I = I_0 \cdot (1-k)\cos^2\varphi = 1/2 \cdot I_{\text{ест}}(1-k)\cdot(1-k)\cos^2\varphi \;,$$

$$I = 1/2 \cdot I_{\text{ест}}(1-k)^2 \cdot \cos^2\varphi.$$

С учетом условия задачи, это уравнение примет вид:

$$0{,}09 \cdot I_{\text{ест}} = 0{,}5 \cdot I_{\text{ест}}(1-k)^2 \cdot \cos^2\varphi.$$

Решая уравнение, найдем косинус угла φ и угол между их главными плоскостями:

$$\cos\varphi = \sqrt{0{,}18}/(1-0{,}08) = 0{,}4611;\; \varphi = \arccos(0{,}4611) = 62{,}5^0.$$

Ответ: φ = 62,5°.

Пример 6.8.

Раствор глюкозы с массовой концентрацией C_1 = 280 кг/м^3, содержащийся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через этот раствор, на угол φ_1 = 32°. Определить массовую концентрацию C_2 глюкозы в другом растворе, налитом в трубку такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол φ_2 = 24°.

Решение:

Вращение плоскости поляризации в жидких оптически активных растворах определяется уравнением:

$$\varphi = [\alpha] \cdot C \cdot d,$$

159

где C – массовая концентрация раствора, $[\alpha]$ – удельное вращение, d – длина пути света в растворе. Запишем данное уравнение для 1-го и 2-го растворов:

$$\varphi_1 = [\alpha] C_1 d, \; \varphi_2 = [\alpha] C_2 d.$$

Так как длина пути света в обоих растворах одинакова, то поделив почленно эти уравнения, получим для C_2 выражение:

$$C_2 = C_1 \varphi_2 / \varphi_1.$$

Подставим числовые данные задачи в уравнение:

$$C_2 = 280 \cdot 24 / 32 = 210 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: C_2 = 210 кг/м^3.

Задачи для самостоятельного решения

641. Интенсивность естественного света, прошедшего через два кристалла турмалина, уменьшилась в 8 раз. Определить угол между оптическими осями кристаллов.

642. Раствор глюкозы с массовой концентрацией $2{,}8 \cdot 10^2$ кг/м^3, налитый в стеклянную трубку, поворачивает плоскость поляризации света, проходящего через раствор, на угол 64°. Другой раствор, налитый в эту же трубку, вращает плоскость поляризации на 48°. Найти концентрацию второго раствора.

643. Пучок естественного света, идущий в воде, отражается от грани алмаза, погруженного в воду. При каком угле падения отраженный свет полностью поляризован?

644. Степень поляризации P частично-поляризованного света равна 0,5. Во сколько раз отличается максимальная интенсивность света, пропускаемого через анализатор, от минимальной?

645. Угол φ поворота плоскости поляризации желтого света натрия при прохождении через трубку с раствором сахара равен 40°. Длина трубки L = 15 см. Удельное вращение α сахара равно $1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад·м$^{-3}$/(м·кг). Определить плотность ρ раствора.

646. Угол Брюстера при падении света из воздуха на кристалл каменной соли равен 57°. Определить скорость света в этом кристалле.

647. Пучок света, идущий в воздухе, падает на поверхность жидкости под углом α = 54°. Определить угол преломления β пучка, если отраженный пучок полностью поляризован.

648. В частично-поляризованном свете амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 2 раза больше амплитуды, соответствующей минимальной интенсивности. Определить степень поляризации P света.

649. На систему, состоящую из двух поляроидов, у которых угол между оптическими осями составляет 30°, падает естественный свет. Во сколько раз уменьшится интенсивность светового пучка? Потерями на отражение света пренебречь.

650. Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд (n = 1,5), и отражается от дна. Отраженный луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом 42°37'. Найти показатель преломления жидкости.

6.5 Поглощение света

Основные формулы

Закон Бугера

$$I = I_0 \, e^{-kd},$$

где I и I_0 – соответственно интенсивность света на входе и выходе из вещества, d – толщина слоя вещества, через который проходит свет, k – коэффициент поглощения, зависящий от химической природы вещества, состояния поглощающей среды и длины волны света.

Примеры решения задач

Пример 10.1.

Коэффициент поглощения воды для излучения с длиной волны 0,77 мкм равен 0,0024 мм$^{-1}$. На какой глубине монохроматический пучок лучей будет ослаблен в 2,7 раза? Во сколько раз надо увеличить яркость падающего пучка, чтобы изменить толщину слоя воды с 1 до 5 см, без уменьшения яркости излучения, выходящего из водяного фильтра?

Решение:

Поглощение света в веществе описывается законом Бугера:

$$I = I_0\, e^{-kd},$$

где I_0 – интенсивность света, падающего на раствор, k – коэффициент поглощения, d – толщина слоя вещества. Выразим из уравнения величину d

$$d = \frac{\ln(I_0 / I)}{k}.$$

Подставляя числовые значения из условия задачи, получим:

$$d = \frac{\ln 2{,}7}{0{,}0024} = 414 \text{ мм}.$$

Для ответа на второй вопрос запишем уравнения для первого и второго слоя воды:

$$I_1 = I_{01}\, e^{-k d_1}, \;\; I_2 = I_{02}\, e^{-k d_2}.$$

Решим систему уравнений с учетом условия равенства интенсивностей выходящего излучения $I_1 = I_2$:

$$I_{02} / I_{01} = e^{k\,(d_2 - d_1)}.$$

Подставим числовые значения из условия задачи, получим:

$$I_{02} / I_{01} = e^{0{,}0024\,(50-10)} = 1{,}10.$$

Следовательно, интенсивность первичного пучка следует увеличить в 1,10 раза.

Ответ: d = 414 мм; I_{02}/ I_{01} = 1,10.

Задачи для самостоятельного решения

651. Коэффициент поглощения воды для излучения с длиной волны 0,77 мкм равен 2,4 м$^{-1}$. На какой глубине монохроматический пучок лучей будет ослаблен в 2,7 раза?

652. При прохождении в некотором веществе пути 2 см интенсивность света

уменьшилась в 4 раза. Во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении пути 8 см?

653. Прозрачная пластинка пропускает половину падающего на нее светового потока. Определить коэффициент поглощения, если толщина пластинки $d = 4{,}2$ см. Рассеянием пренебречь.

654.Свет падает нормально поочередно на две пластинки, изготовленные из одного и того же вещества, имеющие толщины $x_1 = 4$ мм и $x_2 = 8$ мм. Определить коэффициент поглощения этого вещества, если интенсивность прошедшего света при прохождении через первую пластинку составляет 82 %, а через вторую – 67 %?

655. Коэффициент поглощения среды для некоторой длины волны светового потока равен 1,2 м$^{-1}$. Определить, на сколько процентов уменьшится интенсивность света при прохождении пути 20 мм?

656. Из одного и того же вещества изготовили две пластинки толщиной 3,8 мм и 9,0 мм. Пластинки поочередно вводят в узкий пучок монохроматического света и наблюдают, что первая пластинка пропускает 0,84 светового потока, вторая – 0,70. Определить коэффициент поглощения и толщину слоя половинного поглощения этого вещества. Вторичными отражениями света пренебречь.

657. Прозрачная пластинка пропускает половину падающего на нее светового потока. Определить коэффициент поглощения, если толщина пластинки $d = 4{,}2$ см. Рассеянием пренебречь. Считать, что 10% падающего потока отражается от поверхности пластинки.

658. При прохождении через пластинку свет длиной волны λ_1 ослабляется в результате поглощения в N_1 раз, а свет длиной волны λ_2 – N_2 раз. Определить коэффициент поглощения для света с длиной волны λ_2, если коэффициент поглощения для λ_1 равен k_1.

659. При прохождении в некотором веществе пути x интенсивность света уменьшилась в 3 раза. Во сколько раз уменьшится интенсивность света при

прохождении пути 2 x?

660. В 4%-ном растворе вещества в прозрачном растворителе интенсивность света на глубине d_1 = 20 мм ослабляется в 2 раза. Во сколько раз ослабляется интенсивность света на глубине d_2 = 30 мм в 8%-ном растворе того же вещества?

Контрольная работа №7

Элементы квантовой физики

7.1 Тепловое излучение

Основные формулы

Закон Стефана-Больцмана

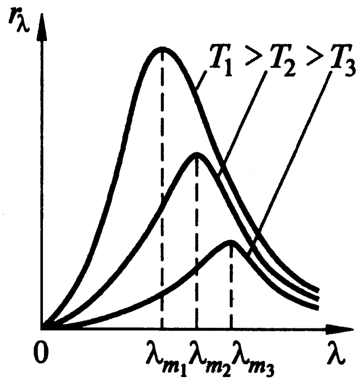
$$R = \sigma T^4,$$

где R – энергетическая светимость (излучательность) абсолютно черного тела; T – абсолютной температуры; σ – коэффициент пропорциональности (постоянная Стефана-Больцмана) σ = 5,67·10^{-8} Вт/(м^2·К).

Энергетическая светимость серого тела

$$R = A\sigma T^4,$$

где A – степенью черноты коэффициент черноты серого тела.



Закон смещения Вина

$$\lambda_m = b/T,$$

где λ_m – длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела; T – абсолютной температуры; b = 2,9·10^{-3} м·К – постоянная Вина.

Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от температуры (второй закон Вина)

$$(r_\lambda)_{\max} = CT^5,$$

где постоянная C равна – C = 1,3·10^{-5} Вт/(м^3·К^5).

Формула Планка

$$r_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1},\quad r_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1},$$

где r_ν , r_λ – спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела; λ – длина волны; c – скорость света в вакууме; k –постоянная Больцмана; h – постоянной Планка, h = 6,62·10^{-34} Дж·с.

Примеры решения задач

Пример 7.1

Определить температуру T и энергетическую светимость R абсолютно черного тела, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны λ_m = 600 нм. Определить значение этого максимума $(r_\lambda)_{max}$.

Решение

По закону смещения Вина, длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре:

$$\lambda_m = b/T \text{, откуда } T = b/\lambda_m,\ b = 2{,}9\cdot 10^{-3}\ \text{м·К}.$$

Энергетическая светимость R абсолютно черного тела определится по закону Стефана-Больцмана

$$R = \sigma T^4,\ \sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \text{Вт/(м}^2\text{·К)}.$$

Значение максимума спектральной плотности энергетической светимости $(r_\lambda)_{max}$, согласно второму закону Вина:

$$(r_\lambda)_{\max} = CT^5,$$

где C = 1,3·10^{-5} Вт/(м^3·К^5).

Подставив числовые значения, рассчитаем результат. Температура T определиться

$$T = \frac{2{,}9\cdot 10^{-3}}{6\cdot 10^{-7}} = 4833\ K;\ R = 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot (4833)^4 = 3{,}1\cdot 10^7\ \text{Вт/м}^2.$$

Максимум спектральной плотности его энергетической светимости равен

$(r_\lambda)_{max} = 1{,}3\cdot 10^{-5}\cdot (4833)^5$ = 3,4·10^{13} Вт/м^3.

Ответ: T = 4833 К, R = 3,1·10^7 Вт/м^2, $(r_\lambda)_{max}$ = 3,4·10^{13} Вт/м^3.

Пример 7.2

Поток излучения шарообразного светильника диаметром d = 30 см при некоторой постоянной температуре равен Φ = 150 Вт. Найти температуру светильника T, считая его серым телом с коэффициентом черноты A = 0,25.

Решение

По определению, энергетическая светимость тела связана с потоком энергии Φ выражением:

$$R = \Phi / S,$$

где S – площадь излучающей поверхности тела. Площадь поверхности шара

$$S = 4\pi r^2 = \pi d^2.$$

Энергетическая светимость R серого тела равна

$R = A\sigma T^4$, где A – коэффициент черноты серого тела.

Из этих формул получим:

$$\Phi / S = A\sigma T^4,\ T = \sqrt[4]{\frac{\Phi}{S\,A\sigma}}.$$

Подставляя в формулу выражение для площади поверхности шара, получим:

$$T = \sqrt[4]{\frac{\Phi}{\pi d^2 A\sigma}}.$$

Подставив числовые значения, рассчитаем результат:

$$T = \sqrt[4]{\frac{150}{3{,}14 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}25 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}}} = 440 \text{ К}.$$

Ответ: T = 440 К.

Задачи для самостоятельного решения

711. Черное тело имеет температуру t_1 = 27°С . Какова будет температура t_2 тела, если в результате нагревания поток излучения увеличится в n = 16 раз?

712. Температура абсолютно черного тела T = 2000 К. Определить длину волны λ_m, на которую приходится максимум энергии излучения, и спектральную плотность энергетической светимости $(r_\lambda)_{\max}$ для этой длины волны.

713. Определить температуру T и энергетическую светимость R абсолютно черного тела, если максимум энергии излучения приходится на длину волны λ_m = 600 нм.

714. Из смотрового окошечка печи излучается поток $\Phi = 4$ кДж/мин. Определить температуру T печи, если площадь окошечка S = 8 см^2. Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

715. При увеличении термодинамической температуры T абсолютно черного тела в два раза длина волны λ_m, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости $(r_{\lambda,T})_{max}$ уменьшилась на $\Delta\lambda$ = 400 нм. Определить начальную и конечную температуры T_1 и T_2.

716. Какую энергетическую светимость R имеет абсолютно черное тело, если максимум его спектральной плотности энергетической светимости приходится на длину волны 484 нм?

717. Мощность P излучения шара радиусом $a = 10$ см при некоторой постоянной температуре T равна 1 кВт. Найти эту температуру, считая шар серым телом со степенью черноты A = 0,25.

718. Поток энергии Ф, излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, равен 34 Вт. Определить температуру T печи, если площадь отверстия S = 6 см^2.

719. Как и во сколько раз изменится поток излучения абсолютно черного тела, если максимум спектральной плотности энергетической светимости излучения переместится с λ_{m1} = 780 нм на длину волны λ_{m2} = 380 нм.

720. Абсолютно черное тело имеет температуру 2900 К. В результате остывания длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на 9 мкм. До какой температуры охладилось тело?

7.2 Фотоэлектрический эффект

Основные формулы

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

$$\varepsilon = h\nu = A_{вых} + E_{кин},$$

где $\varepsilon = h\nu$ – энергия электромагнитного излучения (фотона), падающего на поверхность металла; $E_{кин}$ – максимальная кинетическая энергия электрона; $A_{вых}$ – работа выхода электрона из металла – минимальная энергия, затраченная электроном для того, чтобы покинуть пределы металла.

Максимальная кинетическая энергия электрона в двух случаях (1 – нерелятивистском и 2 – релятивистском) выражается различными формулами:

1) Если энергия электромагнитного излучения меньше энергии покоя электрона – $h\nu << m_0c^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж = 0,51 МэВ, то данный случай является нерелятивистским и при решении задачи необходимо воспользоваться формулой $E_{кин} = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$.

Если энергия электромагнитного излучения соизмерима с энергией покоя электрона: $h\nu \approx m_0c^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}$ Дж = 0,51 МэВ, то этот случай называется релятивистским, кинетическая энергия фотоэлектрона связана с его скоростью релятивистским соотношением:

$$E_{кин} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

Задерживающее напряжение $U_з$ – обратное напряжение при котором фотоэффект прекращается (фототок равен нулю). Соотношение между задерживающим напряжением $U_з$ и максимальной кинетической энергией $E_{кин}$ электрона

$$eU_з = E_{кин},$$

где e – заряд электрона.

Красная граница фотоэффекта – минимальная частота (максимальная длина волны), при которой возможен фотоэффект, соответствует $E_{кин} = 0$ $h\nu_{кр} = A_{вых}$, откуда

$$\nu_{кр} = \frac{A_{вых}}{h} \text{ и } \lambda_{кр} = \frac{hc}{A_{вых}}.$$

Примеры решения задач

Пример 7.3

Определить максимальную скорость $\upsilon_{\max}$ фотоэлектронов, вырываемых: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}155$ мкм; 2) электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda_2 = 1$ пм с поверхности серебра. Работа выхода для серебра $A_{вых} = 4{,}7$ эВ.

Решение

Максимальную скорость фотоэлектронов можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A_{вых} + E_{кин},$$

$E_{кин}$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов. Энергия фотона вычисляется по формуле:

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda,$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме; λ – длина волны излучения. Подставляя числовые значения, получим, что энергия электромагнитного излучения в первом случае $\varepsilon_1 = 1{,}28 \cdot 10^{-18}$ Дж = 8 эВ; во втором – $\varepsilon_2 = 1{,}99 \cdot 10^{-13}$ Дж = 1,24 МэВ.

Так как энергия фотона $\varepsilon_1 = 1{,}28 \cdot 10^{-18} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 8$ эВ << 0,51 МэВ – меньше энергии покоя электрона, то данный случай является нерелятивистским, и при решении задачи максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона определим по формуле $E_{кин} = \frac{m\text{v}^2}{2}$.

Отсюда максимальная скорость $\text{v}_{\max}$ фотоэлектронов:

$$\text{v}_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{кин}}{m}} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A_{вых})}{m}}.)$$

$$\text{v}_{\max 1} = \sqrt{\frac{2 \cdot (8 - 4{,}7) \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}08 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Энергия фотона $\varepsilon_2 = 1{,}99 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}24$ МэВ > 0,51 МэВ – больше энергии покоя электрона. Следовательно, максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона во втором случае будет определяться релятивистской формулой

$$E_{кин} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - 1 \right).$$

В релятивистском случае, когда $A_{вых} << \varepsilon_2$ и $\varepsilon_2 \approx E_{кин}$, максимальная скорость v_{max} фотоэлектронов определится следующим образом:

$$v_{max} = c \frac{\sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2) \cdot \varepsilon_2}}{E_0 + \varepsilon_2},$$

где $E_0 = m_0 c^2 = 0{,}51$ МэВ – энергия покоя электрона. Подставив числовые значения (энергию в формуле удобнее брать в МэВ), рассчитаем результат.

$$v_{max} = c \frac{\sqrt{(2 \cdot 0{,}51 + 1{,}24) \cdot 1{,}24}}{0{,}51 + 1{,}24} = 0{,}957 \cdot c = 2{,}85 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_{max1} = 1{,}08 \cdot 10^6$ м/с; $v_{max2} = 2{,}85 \cdot 10^8$ м/с.

Пример 7.4

На металлическую пластину падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}413$ мкм. Поток фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, полностью задерживается, когда разность потенциалов тормозящего электрического поля достигает $U_з = 1$ В. Определить работу выхода $A_{вых}$ и красную границу фотоэффекта $\nu_{кр}$.

Решение

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = hc / \lambda = A_{вых} + E_{кин}.$$

Выражение для задерживающего напряжения определяется из условия: работа электростатического поля по торможению электронов $A_{вых} = eU_з$ равна начальной кинетической энергии вылетающих из вещества фотоэлектронов $E_{кин} = eU_з$. Отсюда

$$A_{вых} = hc/\lambda - E_{кин} = hc/\lambda - eU_з.$$

Подставив числовые значения, получим:

$$A_{вых} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0{,}413 \cdot 10^{-6}} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 = 3{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Красная граница фотоэффекта определяется формулой $\nu_{кр} = A_{вых}/h$.

Подставив числовые значения, получаем результат:

$$\nu_{кр} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-19}}{6{,}62 \cdot 10^{-34}} = 4{,}8 \cdot 10^{14} \text{ Гц.}$$

Ответ: $A_{вых} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж; $\nu_{кр} = 4{,}8 \cdot 10^{14}$ Гц.

Задачи для самостоятельного решения

721. При поочередном излучении поверхности некоторого металла светом с длиной волны $\lambda = 0{,}35$ мкм и $\lambda = 0{,}54$ мкм, обнаружили что соответствующие максимальные скорости отличаются в 2 раза. Определить работу выхода электронов из этого металла.

722. Красная граница фотоэффекта для цинка $\lambda_{кр} = 310$ нм. Определить максимальную кинетическую энергию W_{max} фотоэлектронов, если на цинк падает свет с длиной волны $\lambda = 200$ нм.

723. На металл падает рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}01$ нм. Пренебрегая работой выхода, определить максимальную скорость v_{max} фотоэлектронов.

724. С какой скоростью вылетают электроны из цезия при освещении желтым светом с длиной волны $\lambda = 5{,}9 \cdot 10^{-7}$ м, если работа выхода для цезия $A_{вых} = 1{,}89$ эВ.

725. Какую длину волны λ имеют световые волны, падающие на поверхность цезия, если фотоэлектроны, вылетающие из цезия, имеют скорость $2 \cdot 10^6$ м/с? Красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_{кр} = 6{,}9 \cdot 10^{-7}$ м.

726. Определить красную границу фотоэффекта для цезия, если при освещении его излучением с длиной волны $\lambda = 0{,}35$мкм задерживающее напряжение $U_з = 1{,}47$ В.

727. Какова должна быть длина волны электромагнитного излучения, падающего на платиновую пластину, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была $v_{max} = 2{,}5\cdot10^8$ м/с?

728. Фотоэлектроны, вырываемые с поверхности металла, полностью задерживаются при приложении обратного напряжения $U_з = 3$ В. Начинается фотоэффект при частоте падающего излучения $6\cdot10^{14}$ Гц. Определить работу выхода электронов из этого металла и частоту применяемого излучения.

729. На поверхность калия падает излучение с длиной волны $\lambda = 400$ нм. Работа выхода электронов из калия равна 2,2 эВ. Определить величину задерживающего напряжения.

730. Задерживающее напряжение для платиновой пластинки с работой выхода 6,3 эВ составляет 3,7 В. При использовании излучения с такой же частотой для другой пластинки, задерживающее напряжение составило 5,3 В. Определить работу выхода электронов из этой пластинки.

7.3 Давление света. Эффект Комптона

Основные формулы

Давление, производимое светом при нормальном падении,

$$P = (1+\rho)\frac{I}{c} = (1+\rho)w,$$

где I – интенсивность света (энергия всех фотонов, падающих на поверхность площадью 1 м^2 за время 1 с); c – скорость света в вакууме; ρ – коэффициент отражения света от поверхности тела; $w = I/c$ – объемная плотность энергии излучения.

Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda, \text{ или } \varepsilon = \hbar\omega,$$

где ν – частота света; λ – длина волны; c – скорость света в вакууме; ω – циклическая частота; h – постоянной Планка; $\hbar = h/2\pi$ – постоянной Планка с чертой (приведённая постоянная Планка), $\hbar$ = 6,62·10^{-34} / 2π=1,05·10^{-34} Дж·с.

Масса фотона

$$m = \frac{h\nu}{c^2}, \text{ или } m = \frac{h}{c\lambda}.$$

Изменение длины волны $\Delta\lambda$ фотона при рассеянии его на электроне на угол θ (эффект Комптона)

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0\, c}(1 - \cos\theta) = \lambda_c\,(1 - \cos\theta),$$

где m_0 – масса покоя электрона; c – скорость света; h – постоянная Планка; λ_c – комптоновская длина волны $\lambda_c = \dfrac{h}{m_0 c}$ = 2,42·10^{-12} м.

Примеры решения задач

Пример 7.5

Пучок монохроматического света, с длиной волны λ = 662 нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии Φ = 0,6 Вт. Определить силу давления F, испытываемую этой поверхностью, а также число фотонов N, падающих на неё за 5 с.

Решение

По определению, сила давления на плоскую поверхность есть произведение давления P на величину поверхности S: $F = P\,S$. Давление света определяется формулой

$$P = \frac{I}{c}\left(1 + \rho\right),$$

где I – интенсивность света; ρ – коэффициент отражения; c – скорость света в вакууме. Так как поверхность зеркальная, то коэффициент отражения ρ = 1. Следовательно,

$$P = 2I/c.$$

Связь между интенсивностью света и потоком энергии Φ определяется выражением:

$$I = \Phi / S .$$

В результате $P = \dfrac{2\Phi}{S\,c}$, сила давления $F = 2\Phi / c$.

Энергия излучения W, падающего на поверхность зеркала за некоторое время t, определяется через поток энергии $W = \Phi \cdot t$. Число фотонов, падающих на поверхность, определяется отношением энергии излучения W к энергии одного фотона ε_0: $N = W / \varepsilon_0$. Энергия одного фотона, падающего на поверхность зеркала: $\varepsilon_0 = h\nu = h\,c/\lambda$. Тогда $N = \dfrac{\Phi t \lambda}{h c}$.

Подставив числовые значения, получаем результат:

$$F = \frac{2 \cdot 0{,}6}{3 \cdot 10^{-8}} = 4{\cdot}10^{-9}\ \text{Н};\ N = \frac{0{,}6 \cdot 5 \cdot 6{,}62 \cdot 10^{-7}}{6{,}62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 10^{19}.$$

Ответ: $F = 4{\cdot}10^{-9}$ Н; $N = 10^{19}$ фотонов.

Пример 7.6

Фотон с энергией $\varepsilon_0 = 0{,}75$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\varphi = 60°$. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения пренебрежимо малы, определить энергию рассеянного фотона и кинетическую энергию электрона отдачи.

Решение

Энергию рассеянного фотона найдем, воспользовавшись формулой Комптона:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0}\left(1 - \cos\theta\right),$$

где λ' и λ – длины волн рассеянного и падающего излучения; θ – угол рассеяния; m_0 – масса покоя электрона; c – скорость света; h – постоянная Планка. Для этого разделим правую и левую части этого равенства на hc:

$$\frac{\lambda'}{hc}-\frac{\lambda}{hc}=\frac{1}{m_0c^2}(1-cos\theta).$$

Так как энергия и длина волны связаны соотношением $\varepsilon = hc/\lambda$, то получим:

$$\frac{1}{\varepsilon'}-\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta).$$

Для удобства умножим правую и левую части этого равенства на ε:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}-1=\frac{\varepsilon}{m_0c^2}(1-cos\theta).$$

Тогда энергия рассеянного фотона будет определяться выражением:

$$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{\frac{\varepsilon}{m_0c^2}(1-cos\theta)+1}.$$

При подстановке численных значений можно упростить расчеты, учитывая, что величина $m_0\,c^2$ = 0,51 МэВ представляет собой энергию покоя электрона. Тогда подставив в формуле для ε' значения для $m_0\,c^2$ и ε в МэВ, получаем:

$$\varepsilon'=\frac{0{,}75}{\frac{0{,}75}{0{,}51}(1-0{,}5)+1}=0{,}43\text{ МэВ}.$$

Кинетическая энергия электрона отдачи, как следует из закона сохранения энергии, $W'_e=\varepsilon-\varepsilon'$. Подставив числовые значения, получаем результат

$$W'_e=0{,}75-0.43=0{,}32\text{ МэВ}.$$

Ответ: ε' = 0,43 МэВ; W'_e = 0,32 МэВ.

Задачи для самостоятельного решения

731. Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90°$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины

волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию W_e' электрона отдачи.

732. Определить коэффициент отражения ρ поверхности, если при интенсивность света I = 120 Вт/м^2, давление P света на нее оказалось равным 0,5 мкПа.

733. Фотон с длиной волны λ = 15 пм рассеялся на свободном электроне. Длина волны рассеянного фотона λ' = 16 пм. Определить угол θ рассеяния.

734. Свет с длиной волны λ = 600 нм нормально падает на зеркальную поверхность и производит на нее давление P = 4 мкПа. Определить число N фотонов, падающих за время t = 10 с на площадь S = 1 мм^2 этой поверхности.

735. В результате эффекта Комптона фотон с энергией ε = 1,02 МэВ рассеян на свободных электронах на угол θ = 150°. Определить энергию ε' рассеянного фотона.

736. На зеркальную поверхность площадью S = 6 см^2 падает нормально поток излучения Φ = 0,8 Вт. Определить давление P и силу давления F света на эту поверхность.

737. Фотон с энергией ε = 0,51 МэВ при рассеянии на свободном электроне потерял половину своей энергии. Определить угол рассеяния θ.

738. На поверхность площадью S = 0,01 м^2 в единицу времени падает поток излучения Φ = 1,05 Вт. Найти световое давление в случаях, когда поверхность полностью отражает и полностью поглощает падающие на неё лучи.

739. Определить максимальное изменение длины волны $(\Delta\lambda)_{max}$ при комптоновском рассеянии света на свободных электронах.

740. При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяются поровну между фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\pi/2$. Найти энергию ε' рассеянного фотона.

7.4 Атом водорода по Бору

Основные формулы

Момент импульса электрона на стационарных орбитах

$$L = m_e \upsilon r = n\hbar,$$

где m_e – масса электрона; r – радиус орбиты; v – скорость электрона на орбите; n – главное квантовое число; $\hbar = h/2\pi$ – постоянной Планка с чертой, $\hbar$ = 1,05·10^-34^ Дж·с.

Энергия фотона, излучаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния с энергией E_n в другое состояние с энергией E_m

$$\varepsilon = h\nu = E_n - E_m, \text{ или } \varepsilon = E_i\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

где ν – частота излучения; h – постоянная Планка; E_i – энергия ионизации атома водорода

$$E_i = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2}$$

здесь m_e – масса электрона; e – заряд электрона;

Энергия электрона, находящегося на n- орбите,

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2},$$

радиус орбиты электрона

$$r_n = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi e^2 m_e} n^2.$$

Сериальная формула, определяющая частоту света, излучаемого или поглощаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты (n) на другую (m),

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

где $R = 3{,}29\cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ – постоянная Ридберга, m = (n+1, n+2, …..).

Целое число n принимает следующие значения: n = 1 для серии Лаймана (ультрафиолетовая часть спектра), n = 2 для серии Бальмера (видимая часть спектра), n = 3 для серии Пашена (инфракрасная часть спектра) и т.д. Вторая инфракрасная серия (серии Брэккета) – n = 4 и т.д.

Сериальная формула, определяющая длину волны света,

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

где $R' = R/c = 1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$; c – скорость света.

Примеры решения задач

Пример 7.7

Электрон в атоме водорода находится на четвертом энергетическом уровне ($n = 4$). Определить, радиус орбиты электрона r, кинетическую $E_{кин}$, потенциальную $E_{пот}$ и полную энергии $E_п$. Определить энергию фотона ε, испущенного при переходе электрона на второй энергетический уровень ($m = 2$).

Решение

Радиус орбиты r_n электрона в атоме водорода определяется выражением:

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi e^2 m_e} = n^2\cdot r_1,$$

где $r_1 = \dfrac{h^2 \varepsilon_0}{\pi e^2 m_e} = 0{,}529\cdot10^{-10}$ м – первый боровский радиус (радиус первой орбиты электрона в атоме).

Следовательно, радиус орбиты на четвертом энергетическом уровне ($n = 4$):

$$r_4 = 4^2\cdot0{,}529\cdot10^{-10} = 8{,}46\cdot10^{-10}\ \text{м}.$$

Полная энергия:

$$E_п = -\frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{1}{n^2}E_{ион},$$

где $E_{ион}$ – энергия ионизации атома водорода, $E_{ион}$ = 13,53 эВ. Подставляя значения $n = 4$ в формулу для полной энергии, получим:

$$E_4 = -\frac{1}{4^2}\cdot 13{,}53 = -\ 0{,}86\ \text{эВ}.$$

Кинетическая энергия: $E_{кин} = \dfrac{m_e \upsilon^2}{2} = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

Потенциальная энергия: $E_{пот} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -2E_{кин}$.

Из формул для кинетической и потенциальной энергий следует, что потенциальная энергия электрона в атоме водорода отрицательна по знаку и по модулю в два раза больше его кинетической энергии. Так как полная энергия есть сумма кинетической и потенциальной энергий, то легко получить, что

$$E_{пот} = 2\cdot E_{п}\,,\ E_{кин} = -E_{п}.$$

Энергия испускаемого фотона:

$$\varepsilon = E_n - E_m = \frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = E_{ион}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Подставив числовые значения, получим результат.

$$\varepsilon = 13{,}53\cdot\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = 2{,}53\ \text{эВ}.$$

Ответ: $r_4 = 8{,}46\cdot 10^{-10}$м, $E_{п} = -0{,}86$ эВ, $E_{кин} = 0{,}86$ эВ, $E_{пот} = -1{,}72$ эВ, $\varepsilon = 2{,}53$ эВ.

Пример 7.8

Определить энергию ε фотона, соответствующего третей линии в первой инфракрасной серии (серии Пашена) спектра атома водорода.

Решение

Энергия испускаемого фотона атомом водорода при переходе с орбиты номер n на орбиту с номером m определяется:

$$\varepsilon = E_n - E_m = E_{ион}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где $E_{ион}$ – энергия ионизации атома водорода $E_{ион}$ = 13,53 эВ..

Первая инфракрасная серия (серия Пашена) соответствует переходам электрона с орбиты номер n = 4, 5, 6,… на орбиту номер m = 3. Так, первая линия этой серии соответствует переходу электрона с орбиты номер n = 4 на орбиту номер m = 3. Третья линия в первой инфракрасной серии спектра атома водорода соответствует переходу электрона с орбиты номер $n = 6$ на орбиту номер $m = 3$.

Таким образом, энергия испускаемого фотона равна:

$$\varepsilon = 13{,}53 \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} \right) = 1{,}13 \text{ эВ} .$$

Ответ: $\varepsilon = 1{,}13$ эВ.

Задачи для самостоятельного решения

741. Определить энергию ε фотона, соответствующего второй линии ультрафиолетовой серии (серии Лаймана) спектра атома водорода.

742. Вычислить по теории Бора радиус r_2 второй стационарной орбиты и скорость v_2 электрона на этой орбите для атома водорода.

743. Вычислить по теории Бора период T вращения электрона в атоме водорода, находящегося в возбужденном состоянии, определяемом главным квантовым числом $n = 2$.

744. Определить наименьшую ε_{min} и наибольшую ε_{max} энергии фотона в ультрафиолетовой серии спектра водорода (серии Лаймана).

745. Атом водорода в основном состоянии поглотил квант света с длиной волны $\lambda = 121{,}5$ нм. Определить радиус r электронной орбиты возбужденного атома водорода.

746. Найти наибольшую λ_{max} и наименьшую λ_{min} длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серии Пашена).

747. Определить длину волны излучения, соответствующего третей линии в видимой части спектра атома водорода.

748. Вычислить частоты f_1 и f_2 вращения электрона в атоме водорода на второй и третьей орбитах. Сравнить эти частоты с частотой v изучения при переходе электрона с третьей на вторую орбиту.

749. Определить длину волны излучения, испускаемого атомами водорода при переходе электронов с пятого энергетического уровня на второй. К какой серии относится эта линия и какая она по счету?

750. Фотон с энергией ε = 16,5 эВ выбил электрон из невозбужденного атома водорода. Какую скорость v будет иметь электрон вдали от ядра атома?

7.5 Элементы физики атомного ядра

Основные формулы

Ядро обозначается тем же символом, что и атом в таблице Менделеева с указанием массового и зарядового числа:

$$^{A}_{Z}X$$

где X – символ химического элемента; Z – атомный номер (число протонов в ядре); A – массовое число (число нуклонов в ядре). Число N нейтронов в ядре равно разности $N = A - Z$.

Энергия связи ядра определяется работой, которую нужно совершить для расщепления ядра на составляющие его нуклоны без придания им кинетической энергии. Энергия связи ядра равна разности между суммарной энергией свободных нуклонов, составляющих данное ядро, и их энергией в ядре.

Дефект массы ядра – разность между массой ядра $m_я$ и массой составляющих его нуклонов:

$$\Delta m = \left[Z \cdot m_p + N \cdot m_n\right] - m_я .$$

Энергия связи ядра нуклонов в ядре определяется выражением:

$$E_{св} = \Delta m \cdot c^2 = \left[Z \cdot m_p + \left(A - Z\right) \cdot m_n - m_я\right] c^2 .$$

Дефект масс наблюдается также и при протекании ядерных реакций, т.е. реакций, в результате которых происходит превращение одних ядер в другие. Ядерные реакции обычно протекают по следующей схеме:

$$\boldsymbol{X} + \boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{X}$ – материнское ядро; $\boldsymbol{a}$ – частица, взаимодействующая с материнским ядром; $\boldsymbol{Y}$ – дочернее ядро; $\boldsymbol{b}$ – частица, освобождающаяся при появлении дочернего ядра. В этом случае изменение массы в результате реакции, т.е. дефект масс участвующих ядер и частиц, определяется выражением:

$$\Delta m = [m_X + m_a] - [m_Y + m_b],$$

а выделяемая или поглощаемая в результате реакции энергия – энергетический эффект реакции – определяется выражением:

$$Q = \Delta m \cdot c^2 = ([m_X + m_a] - [m_Y + m_b])c^2 .$$

Удельная энергия связи $\delta E_{св}$ – энергия связи, приходящаяся на один нуклон:

$$\delta E_{св} = \frac{E_{св}}{A} .$$

Основной закон радиоактивного распада

$$N = N_0\, e^{-\lambda t},$$

где N_0 – количество нераспавшихся ядер в начальный момент времени; N – количество нераспавшихся ядер в момент времени t; e – основание натурального логарифма; λ – постоянная радиоактивного распада.

Количество ядер ΔN, распавшихся за время t, определится формулой:

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Среднее время жизни τ радиоактивного ядра – это время, за которое время первоначальное число ядер уменьшится в ***e*** раз; время τ равно обратной величине постоянной распада $1/\lambda$.

$$\tau = 1/\lambda .$$

С этой характеристикой закон радиоактивного распада примет следующий вид:

$$N = N_0\, e^{-t/\tau} .$$

Период полураспада $T_{1/2}$ – время, за которое распадается половина первоначального количества ядер. За время, равное периоду полураспада, количество нераспавшихся ядер будет равно $N = N_0/2$. Из определения периода полураспада, на основе закона радиоактивного распада, получаем соотношение между $T_{1/2}$ и постоянной распада λ:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda} .$$

Примеры решения задач

Пример 7.9

Вычислить дефект массы Δm, энергию связи $E_{св}$ и удельную энергию связи $\delta E_{св}$ ядра ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$.

Решение

Дефект массы Δm ядра определяется по формуле

$$\Delta m = Z\,m_p + (A - Z)m_n - m_я\,,$$

где Z – зарядовое число; A – массовое число; m_p – масса протона; m_n – масса нейтрона; $m_я$ – масса ядра.

В справочной таблице приведены массы нейтральных атомов m_a, поэтому формулу для дефекта масс можно преобразовать так, чтобы в нее входила масса нейтрального атома m_a. Для этого в правой части формулы прибавим и отнимем величину $Z{\cdot}m_e$:

$$\Delta m = Z(\,m_p + m_e\,) + (A - Z)m_n - (\,m_я + Z\cdot m_e\,)\,.$$

Сумма масс протона m_p и электрона m_e равна массе изотопа ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$, а сумма масс ядра и Z электронов равна массе атома $m_я + Z\cdot m_e = m_a$.

Окончательно формула для дефекта массы примет вид:

$$\Delta m = Z\cdot {}^{1}_{1}H + (A - Z)m_n - m_a\,.$$

Из таблицы следует, что масса изотопа ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$ равна m_a = 15,99491 а. е. м. Так как 1 а. е. м. = $1{,}66\cdot 10^{-27}$ кг, то масса атома $m_a = 26{,}5516\cdot 10^{-27}$ кг.

С учетом того, что массы водорода и нейтрона соответственно: $m_p = 1{,}6731\cdot 10^{-27}$ кг и $m_n = 1{,}6749\cdot 10^{-27}$ кг, получим результат для дефекта масс: $\Delta m = 0{,}2284\cdot 10^{-27}$ кг.

Энергия связи связана с дефектом массы соотношением

$$E_{св} = \Delta m{\cdot}c^2,$$

где $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Удельная энергия связи

$$\delta E_{св} = E_{св}\,/\,A\,.$$

Подставив числовые значения, получим результат.

$E_{св} = 0{,}2284\cdot 10^{-27}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\right)^{2} = 2{,}0556\cdot 10^{-11}$ Дж; $E_{св}$ = 128 МэВ;

$\delta E_{св}$ = 128/16 = 8 МэВ.

Ответ: Δm = 0,2284·10^{-27} кг; $E_{св}$ = 128 МэВ; $\delta E_{св}$ = 8 МэВ.

Пример 7.10

Вычислить энергетический эффект Q ядерной реакции ${}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He \rightarrow p + {}^{7}_{3}Li$.

Решение

Энергия ядерной реакции определяется по формуле

$$Q = \left(\left[m_X + m_a\right] - \left[m_Y + m_b\right]\right)c^2 .$$

При расчете энергии ядерных реакций в МэВ массы удобнее брать в а.е.м., тогда формулу для энергии можно записать в виде:

$$Q = 931\left(\left[m_X + m_a\right] - \left[m_Y + m_b\right]\right).$$

Для данной задачи:

$$Q = 931\left(\left[m_{He} + m_{He}\right] - \left[m_p + m_{Li}\right]\right).$$

При вычислении энергии ядерной реакции можно использовать вместо масс их ядер массы атомов.

Из справочных данных находим:

m_{He} = 4,00260 а.е.м.; m_p = 1,00783 а.е.м.; m_{Li} = 7,01601 а.е.м.

Подставляя числовые значения, получим:

Q = 931·(–0,01864 а. е. м.) = –17,3 МэВ.

Поскольку $Q < 0$, энергия в результате реакции поглощается.

Ответ: Q = –17,3 МэВ.

Пример 7.11

Определить, сколько ядер ΔN в m_0 = 1мг изотопа церия ${}^{144}_{58}Ce$ распадётся в течение времени: 1) t_1 = 1 с; 2) t_2 = 1год. Период полураспада цезия 285 суток.

Решение

1) Так как промежуток времени t_1 намного меньше периода полураспада $t_1 << T_{1/2}$ ($\lambda t << 1$), то $e^{-\lambda t} \approx -\lambda t$ и формулу $\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right)$, можно записать в упрощенном виде:

$$\Delta N_1 = \lambda N_0 t_1.$$

Постоянная распада λ связана с периодом полураспада соотношением $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$. Начальное число ядер в препарате массой m определяется выражением:

$$N_0 = \frac{m_0}{M} N_A,$$

где $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ – число Авогадро; $M = 140{,}12 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса церия. Отсюда

$$\Delta N_1 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \frac{m}{M} N_A t_1.$$

Подставив числовые значения, получим результат

$$\Delta N_1 = 0{,}693 \cdot \frac{1}{285 \cdot 24 \cdot 3600} \frac{10^{-6}}{140{,}12 \cdot 10^{-3}} 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}2 \cdot 10^{11}.$$

2) t_2 и $T_{1/2}$ – величины одного порядка, поэтому: $\Delta N_2 = N_0 - N$

$$\Delta N_2 = N_0\left(1 - e^{-\lambda t_2}\right) = \frac{m N_A}{M}\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t_2}\right).$$

Подставив числовые значения, получим результат

$$\Delta N_2 = 6{,}02 \cdot 10^{23} \frac{10^{-6}}{140{,}12 \cdot 10^{-3}}\left(1 - e^{-0{,}693 \frac{365}{285}}\right) = 2{,}5 \cdot 10^{18}.$$

Ответ: $\Delta N_1 = 1{,}2 \cdot 10^{11}$; $\Delta N_2 = 2{,}5 \cdot 10^{18}$.

Задачи для самостоятельного решения

751. Вычислить энергию связи $E_{св}$ ядра дейтерия ${}_1^2\mathrm{H}$.

752. Определить число ΔN ядер, распадающихся в радиоактивном изотопе фосфора ${}_{15}^{32}\mathrm{P}$ массой $m = 1$ мг в течение времени: 1) $t_1 = 1$ мин; 2) $t_2 = 5$ сут.

753. Найти энергию связи ядра изотопа ${}_3^7 Li$.

754. Определить число ΔN атомов радиоактивного препарата йода ${}^{131}_{53}I$ массой m = 0,5 мкг, распавшихся в течение времени t = 1 мин.

755. Вычислить энергетический эффект Q реакции ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{12}_{6}\mathrm{C}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

756. Найти тепловой эффект реакции ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}+{}^{2}_{1}\mathrm{H}\rightarrow{}^{8}_{4}\mathrm{Be}+{}^{1}_{0}\mathrm{n}$.

757. Определить, какая доля радиоактивного изотопа актиния ${}^{225}_{89}\mathrm{Ac}$ распадается в течение времени t = 6 сут.

758. Найти среднюю продолжительность жизни τ атома радиоактивного изотопа кобальта ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$.

759. Найти энергию, поглощенную при реакции ${}^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{1}_{1}\mathrm{H}+{}^{17}_{8}\mathrm{O}$.

760. Из каждого миллиона атомов радиоактивного изотопа каждую секунду распадается 200 атомов. Определить период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

Литература

1. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями. М.: Изд. «Абрис», 2012. – 591 с.

2. Чертов А. Г., Воробьев А. А, Задачник по физике: Учеб.пособие. – 7- изд., перераб. и доп. – М.: Издательство физико-математической литературы, 2001. – 640 с.

3. Иродов И.Е. Задачи по общей физике: Учеб.пособие для вузов/И.Е.Иродов. –12-е, 13-е изд.стереот. – СПб:Лань, 2009, 2007. – 416 с.

4. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 т. – Т.1. Механика. Молекулярная физика. – М.: Наука, 2008

5. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 т. – Т.2. Электричество и магнетизм. – М.: Наука, 2008.

6. Савельев И.В. Курс общей физики. В 3 т. – Т.3. Атомная и ядерная физика – М.: Наука, 2008.

7. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2001.

8. Ляхова Л.П., Осуховская Л.П., Терлецкий И.А., Физика. Часть 2. "Электричество и магнетизм". Учебно-методическое пособие для студентов-заочников. Владивосток: Издательство ДВГТУ – 2007. – 98 с.

9. Дымченко Н.П., Терлецкий И.А., Физика. Часть 3. «Колебания и волны. Волновая оптика». Учебно-методическое пособие для студентов-заочников. Владивосток: Издательство ДВГТУ – 2006. – 157 с.

10. Терлецкий И.А., Каменев О.Т., Физика. Часть 4. "Атомная физика". Учебно-методическое пособие для студентов-заочников. Владивосток: Издательство ДВГТУ – 2006. – 87 с.

Содержание