

Федеральное государственное автономное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ

УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

НОВОУРАЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра промышленной электроники

ЗАДАЧИ

ПО ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

Учебное пособие

для студентов направления

11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Новоуральск 2013

УДК 621.372

М и М-2.3._____

Автор Доцент кафедры «Промышленная электроника, к.т.н.
Посконный Г.И.

Рецензент Заведующий кафедрой автоматизации управления, доцент,
к.т.н. Дюгай П.А.

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ: Учебное пособие для студентов
направления 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника». – Новоуральск: НТИ
НИЯУ МИФИ, 2013. – 27 с.

В пособии приведены основные соотношения и формулы спектрального анализа сигналов, свойств преобразования Фурье, теории систем и свойств преобразования Лапласа. Пособие содержит варианты домашнего задания и задачи по основным разделам курса. Задачи расположены в той последовательности, в которой излагается лекционный материал. Домашнее задание направлено на освоение методики спектрального анализа различных по форме сигналов, задачи по теории систем – на приобретение умений в нахождении динамических характеристик линейных систем – передаточных функций, импульсных весовых и переходных, частотных характеристик по дифференциальным уравнениям, используя преобразование Лапласа.

Учебное пособие рассмотрено на заседании кафедры ПЭ
(протокол № 1 « 29 » августа 2013 г.) и рекомендовано к опубликованию
Заведующий кафедрой ПЭ

к.т.н., доцент

Зиновьев Г.С.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ПРЕДИСЛОВИЕ	4
1 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ФОРМУЛЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ	5
2 ЗАДАЧИ	
2.1 Ряды Фурье. Ортогональность функций разложения.	
Односторонние и двухсторонние АЧХ, ФЧХ	12
2.2 Преобразование Фурье непериодических сигналов	15
2.3 Преобразование Фурье периодических сигналов	16
3 ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ	
3.1 Часть 1. Спектральный анализ периодических несинусоидальных сигналов	17
3.2 Часть 2. Преобразование Фурье периодических сигналов	17
3.3 Варианты сигналов домашнего задания	18
4 СИСТЕМЫ	
4.1 Фильтрация сигналов	23
4.2 Дифференциальные уравнения и передаточные функции	25
ЛИТЕРАТУРА	26

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Теория сигналов и систем» введён в образовательную программу подготовки бакалавров по направлению 11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника» (профиль подготовки «Промышленная электроника») решением Учёного совета НТИ НИЯУ МИФИ как базовая обязательная дисциплина вариативной части образовательного стандарта НИЯУ МИФИ.

Программа курса предполагает проведение лекционных, практических (семинарских) занятий, а также отводит достаточно большое число часов на самостоятельную работу студента.

На лекциях студент традиционно знакомится с наиболее важными разделами теории, а на практических занятиях – с решениями задач по основным разделам теории. Самостоятельная работа, как один из важнейших видов деятельности студента, включает в себя не только подготовку к текущим аудиторным занятиям, но и самостоятельное решение задач соответствующих разделов, а также выполнение домашнего задания, которое состоит из двух частей.

Первая часть задания формирует навыки и умения нахождения частотных характеристик периодических несинусоидальных напряжений и токов (сигналов), которые создаются различными электронными устройствами преобразовательной техники (выпрямителями, инверторами), а также одного из важнейших показателей качества электрической энергии – коэффициента гармоник K_T – через ряды Фурье. Наличие высших гармоник кривых токов и напряжений необходимо учитывать при проектировании и выборе различных электромагнитных элементов (трансформаторов, реакторов, сглаживающих дросселей). Умение выполнять такого рода работы – одна из инженерной деятельности.

Вторая часть задания связана с формированием навыков и умений нахождения частотных характеристик периодических несинусоидальных сигналов через преобразование Фурье непериодического сигнала, выделенного в исходном сигнале.

Задачи по теории систем направлены на освоение способов и методов нахождения динамических характеристик систем, а также знакомство с некоторыми вопросами фильтрации сигналов.

1 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ФОРМУЛЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1 Представление несинусоидального периодического сигнала $S(t)$ в виде ряда Фурье:

$$S(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j(\omega_n t - \varphi_n)},$$

где $A_0 = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} S(t) dt$ - постоянная составляющая сигнала (амплитуда нулевой гармоники);

$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ - амплитуда n -ой гармоники;

$\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$ - начальная фаза n -ой гармоники;

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} S(t) \cos \omega_n t dt ;$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} S(t) \sin \omega_n t dt ;$$

$C_n = \frac{A_n}{2}$ - амплитуда n -ой гармоники показательной формы ряда Фурье, $n \neq 0$;

$$C_0 = A_0 ;$$

$\omega_n = \omega_1 \cdot n \cdot t$ - круговая (угловая) частота n -ой гармоники, рад/сек;

$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1$ - круговая (угловая) частота основной (первой) гармоники, рад/сек;

$f_1 = \frac{1}{T_1}$ - частота повторения основной (первой) гармоники, Гц;

T_1 - период повторения основной гармоники (период повторения несинусоидального периодического сигнала) – определяется по графику сигнала.

1.2 Свойства коэффициентов ряда Фурье:

$$a_{-n} = a_n ;$$

$$b_{-n} = -b_n ;$$

$$A_{-n} = A_n ;$$

$$C_{-n} = C_n ;$$

$$\varphi_{-n} = -\varphi_n$$

1.3 Свойства ряда Фурье:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{T_1} [S(t) - S_N(t)]^2 dt = 0,$$

где $S_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t - \varphi_n)$;

N – конечное число суммируемых гармоник.

1.4 Свойства периодичности сигнала:

$$S(t) = S(t + nT_1),$$

где n – любое целое вещественное число ($-\infty < n < +\infty$).

1.5 Определение 1. Зависимость амплитуд гармоник A_n от частоты $f_n = f_1 \cdot n$

($\omega_n = \omega_1 \cdot n$) – $A_n(f_n)$ – носит название амплитудной частотной характеристики сигнала (АЧХ сигнала). График АЧХ имеет дискретный характер. При изменении n от 0 до $+\infty$ график иногда называют графиком односторонней частотной характеристики, в отличие от зависимости $C_n(f_n)$, $-\infty < n < \infty$, которая носит название двухсторонней амплитудной частотной характеристики.

1.6 Определение 2. Зависимость начальных фаз φ_n от частоты $f_n = f_1 \cdot n$

1.7 ($\omega_n = \omega_1 \cdot n$) – $\varphi_n(f_n)$ – носит название фазовой частотной характеристики (ФЧХ) и также представляется в виде односторонних или двухсторонних графиков.

1.8 Коэффициент гармоник в сигнале $S(t)$:

$$K_r = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} A_n^2}}{A_1} \cdot 100\%.$$

1.9 Свойство ортогональности систем функций $\psi_n(t)$, $0 \leq n < \infty$ при представлении сигнала $S(t)$ в виде обобщённого ряда Фурье:

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_n(t) \psi_m(t) dt = 0, \quad n \neq m$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_n^2(t) dt \neq 0.$$

Здесь $[t_1, t_2]$ – интервал ортогональности.

1.10 Спектральные характеристики непериодических сигналов (формула прямого преобразования Фурье):

$$F(\omega) = F\{S(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)},$$

где $|F(\omega)|$ - амплитудная частотная характеристика (АЧХ);

$\varphi(\omega)$ - фазовая частотная характеристика (ФЧХ).

1.10 Формула обратного преобразования Фурье:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

1.11 Теоремы преобразования Фурье:

1.11.1 теорема о сдвиге сигнала в области времени –

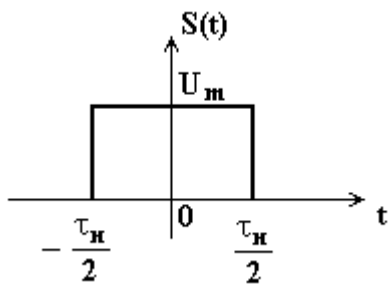
$$F\{S(t - t_0)\} = F\{S(t)\}e^{-j\omega t_0},$$

1.11.2 теорема об изменении масштаба –

$$F\{S(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right),$$

где $F(\omega) = F\{S(t)\}$.

1.12 Аналитическое описание прямоугольного импульса (рис.1.1):



$$S(t) = U_m \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{\tau_u}\right) = U_m \cdot \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau_u}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau_u}{2} \end{cases}.$$

Рисунок 1.1

1.13 Частотная характеристика прямоугольного импульса

$$F(\omega) = F\left\{U_m \text{rect}\left(\frac{t}{\tau_u}\right)\right\} = \tau \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau}$$

1.14 Частотная характеристика произведения двух сигналов:

$$F\{S_1(t) \cdot S_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F\{S_1(t)\} * F\{S_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega),$$

где $*$ - символ операции «свёртки».

Операция «свёртки» представляет собой следующее интегральное соотношение –

$$F_1(\omega) * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\Omega) F_2(\omega - \Omega) d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - \Omega) F_2(\Omega) d\Omega.$$

1.15 Частотная характеристика «свёртки» двух сигналов:

$$F\{S_1(t) * S_2(t)\} = F\{S_1(t)\} \cdot F\{S_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega),$$

где $S_1(t) * S_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\tau) S_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(t - \tau) S_2(\tau) d\tau.$

1.16 δ -функции Дирака. Определение:

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha t}{\pi t} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \frac{d1(t)}{dt},$$

где $1(t)$ – единичная функция,

или формально –

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}.$$

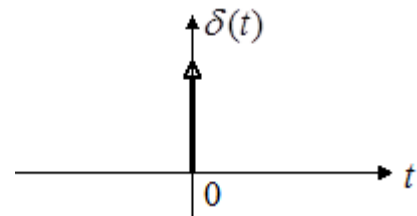


Рисунок 1.2 График δ -функции

1.17 Свойства δ -функции :

$$1.17.1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(u) du = f(0);$$

$$1.17.2 \quad S(t) \cdot \delta(t - t_0) = S(t_0) \delta(t - t_0);$$

$$1.17.3 \quad \delta[\alpha(t)] = \sum_{n=1}^N \frac{\delta(t - t_n)}{|\alpha'(t_n)|},$$

где t_n - корни уравнения $\alpha(t)=0$;

$\alpha'(t_n)$ – значение производной при $t=t_n$;

N – число корней.

$$1.17.4 \quad F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n \cdot T_1)\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_1})$$

$$1.17.5 \quad F\{S(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2} \cdot [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)],$$

$$1.17.6 \quad F\{S(t)\sin\omega_0 t\} = \frac{j}{2} \cdot [F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)],$$

где $F(\omega) = F\{S(t)\}$.

1.18 Преобразование Фурье периодического несинусоидального сигнала:

если

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_1(t - nT_1) = S_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1),$$

где $S_1(t)$ - непериодический сигнал;

T_1 - период его повторения,

то

$$F\{S(t)\} = F\{S_1(t)\} \cdot \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_1}).$$

1.19 Формула Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

1.20 Линейные инвариантные к сдвигу системы

1.20.1 Выходной сигнал системы (рис.1.3)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau)w(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} S(t - \tau)w(\tau)d\tau,$$

где $S(t)$ – входной сигнал системы;

$w(t)$ – импульсная весовая функция системы.

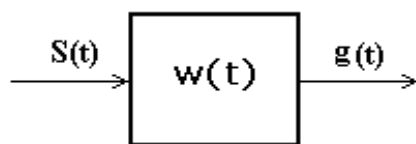


Рисунок 1.3

1.20.2 При $S(t) = \delta(t)$ $g(t) = w(t)$.

1.20.3 Спектр выходного сигнала системы

$$F_g(\omega) = F\{g(t)\} = F_s(\omega) \cdot H(\omega),$$

где $F_s(\omega) = F\{S(t)\}$ - спектр входного сигнала;

$H(\omega) = F\{w(t)\}$ – частотная характеристика системы.

1.21 Амплитудно-импульсная модуляция сигнала

1.21.1 Импульсно-модулированный (или импульсный) сигнал

$$S^*(t) = S(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_1}{\tau}\right),$$

где $S(t)$ – огибающая импульсного сигнала;

T_1 – период дискретности;

τ – длительность импульса.

1.21.2 Частотная характеристика импульсного сигнала

$$F\{S^*(t)\} = F(f) = \frac{\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \cdot n \cdot \tau / T_1)}{\pi \cdot n \cdot \tau / T_1} \cdot F_s\left(f - \frac{n}{T_1}\right),$$

где $F_s(f)$ – частотная характеристика сигнала $S(t)$.

1.21.3 Если f_g – верхняя частота в спектре сигнала $S(t)$, то период дискретности

$$T_1 \leq 1/(2f_g).$$

1.21.4 При заданных значениях ошибки σ и времени преобразования t_{np} аналогового сигнала в цифровой сигнал верхняя частота в спектре аналогового сигнала $S(t)$

$$f_g \leq \sigma / (2\pi t_{np}).$$

1.22 Преобразование Лапласа. Динамические характеристики звена (системы)

1.22.1 $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$ – изображение по Лапласу временной функции $f(t)$

– оригинала; (Здесь и далее знак $\stackrel{\cdot}{=}$ означает соответствие между оригиналом и изображением.)

1.22.2 $f'(t) \stackrel{\cdot}{=} s \cdot F(s) - f(0)$ – изображение по Лапласу первой производной функции $f(t)$; $f(0)$ – начальное значение временной функции при $t=0$;

(Применяя 1.22.2, можно распространить теорему о дифференцировании на производные любого n -го порядка и получить их изображения.)

1.22.3 $\dot{f''(t)} \stackrel{\cdot}{=} s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$ – изображение по Лапласу второй производной функции $f(t)$; $f'(0)$ – начальное значение первой производной временной функции $f(t)$ при $t=0$;

1.22.4 если

$$u(t) = \int_0^t f(t)dt \text{ и } u(0)=u_0,$$

то

$$\dot{u(t)} \stackrel{\cdot}{=} U(s) = \frac{F(s)}{s} + \frac{u_0}{s} \text{ – изображение по Лапласу интеграла от временной функции } f(t);$$

1.22.5 предельные значения оригинала:

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \text{ – начальное значение оригинала;}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) \text{ – конечное значение оригинала;}$$

1.22.6 нахождение оригинала по его изображению (теорема разложения):

если изображение оригинала

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где $B(s)$ – характеристический (системный) полином n -ой степени,

то

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} \cdot \exp(s_i t),$$

где s_i – корни уравнения $B(s)=0$, $i=1..n$;

$B'(s_i)$ – значение производной $B'(s)$ при $s = s_i$.

Приведенное выражение справедливо тогда, когда $B(s)$ не имеет кратных корней. В случае наличия кратных корней нужно применять другую формулу, взятую, например, из [6].

2 ЗАДАЧИ

2.1 Ряды Фурье. Ортогональность функций разложения. Односторонние и двухсторонние АЧХ, ФЧХ.

2.1.1 Являются ли функции:

2.1.1.1 $\Psi_1(t) = \sin \omega_1 t$, $\Psi_2(t) = \sin 2\omega_1 t$ на интервале времени $0 \leq t \leq T_1 = \frac{1}{f_1}$ ортогональными;

2.1.1.2 $\Psi_1(t) = \cos 2\omega_1 t$, $\Psi_2(t) = \sin 4\omega_1 t$ на интервале времени $0 \leq t \leq T_1 = \frac{1}{f_1}$ ортогональными;

2.1.1.3 $\Psi_1(t) = e^{j\omega_1 t}$ и $\Psi_5(t) = e^{j5\omega_1 t}$ на интервале времени $0 \leq t \leq T_1 = \frac{1}{f_1}$ ортогональными;

2.1.1.4 $\Psi_0(t) = 1$, $\Psi_3(t) = \cos 3\omega_1 t$ на интервале времени $0 \leq t \leq T_1 = \frac{1}{f_1}$ ортогональными;

2.1.1.5 $\Psi_1(t) = \sqrt{2} \cos 2\pi f_1 n t$ и $\Psi_2(t) = \sqrt{2} \cos 2\pi f_1 (n-1)t$ на интервале времени $0 \leq t \leq T_1 = \frac{1}{f_1}$ ортогональными;

2.1.2 Являются ли функции, графики которых изображены на рис. 2.1 - рис. 2.4, ортогональными на интервале времени $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$.

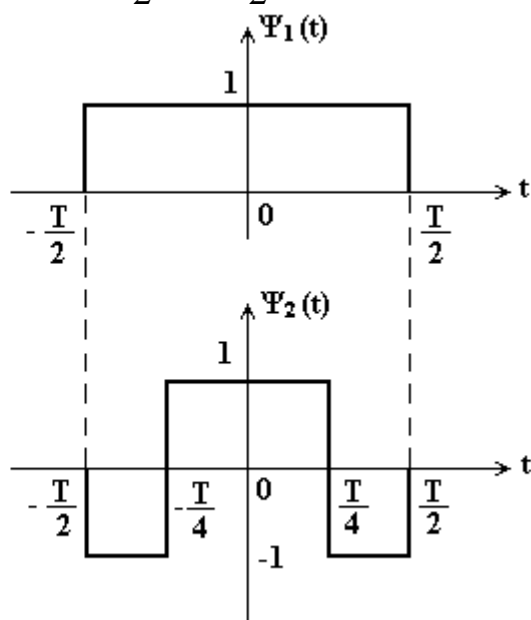
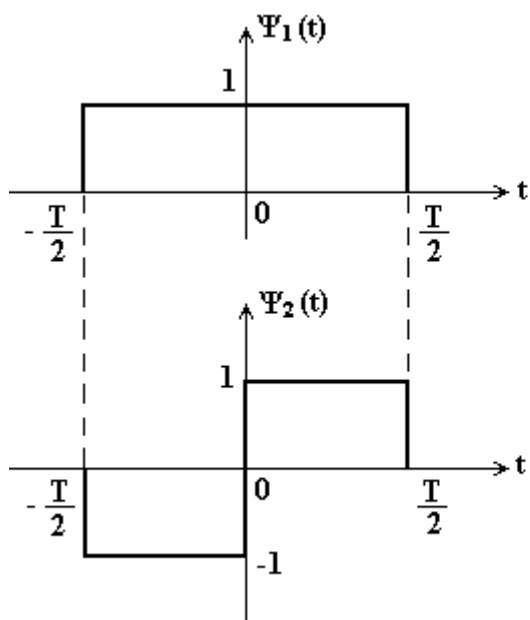


Рисунок 2.1

Рисунок 2.2

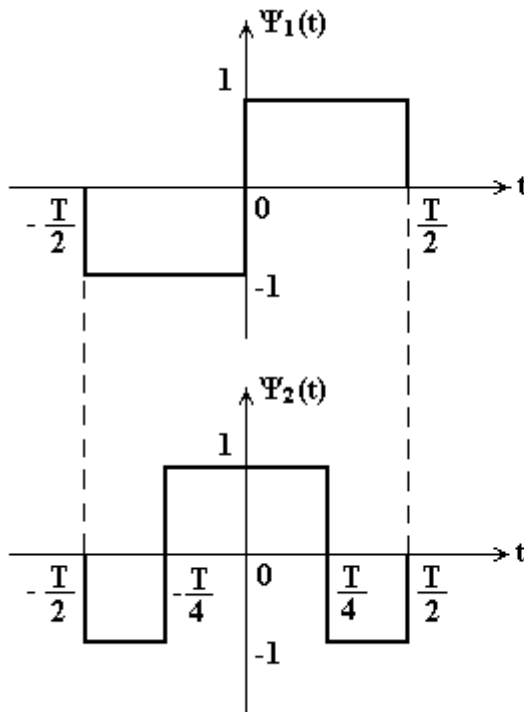


Рисунок 2.3

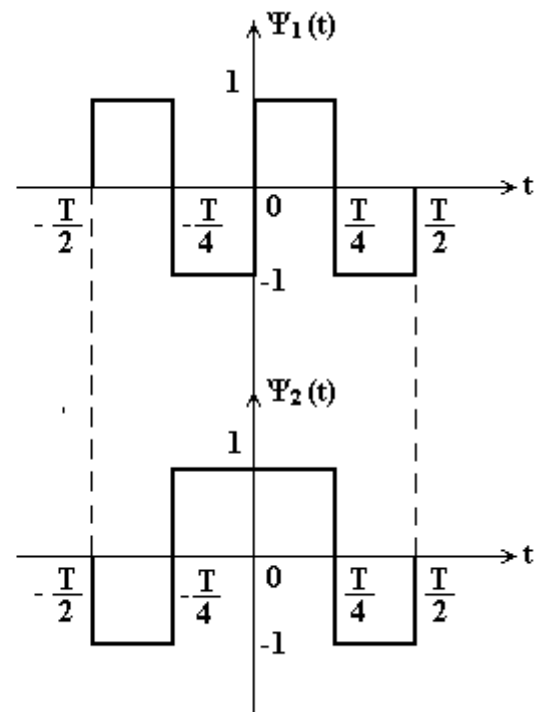


Рисунок 2.4

2.1.3 По данным представления сигнала $S(t)$ в виде ряда Фурье построить односторонние и двухсторонние графики АЧХ, ФЧХ:

2.1.3.1 $S(t) = 10 + 6,4\cos\omega_0 t - 2,1\cos 3\omega_0 t + 1,3\cos 5\omega_0 t - \cos 7\omega_0 t + 0,7\cos 9\omega_0 t + \dots$

2.1.3.2 $S(t) = 10 + 6,4\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) - 2,1\cos(3\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}) + 1,3\cos(5\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) - \cos(7\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}) + \dots$

2.1.3.3 $S(t) = 6,4\cos\omega_0 t - 2,1\cos 3\omega_0 t + 1,3\cos 5\omega_0 t - \cos 7\omega_0 t + 0,7\cos 9\omega_0 t + \dots$

2.1.3.4 $S(t) = 10 + 9\cos\omega_0 t + 6,4\cos 2\omega_0 t + 3\cos 3\omega_0 t - 1,8\cos 5\omega_0 t - 2,1\cos 6\omega_0 t - 1,3\cos 7\omega_0 t + \cos 9\omega_0 t + 0,8\cos 11\omega_0 t + \dots$

2.1.3.5

$$S(t) = 9\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) + 6,4\cos(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) + 3\cos(3\omega_0 t - \frac{3\pi}{4}) - 1,8\cos(5\omega_0 t - \frac{5\pi}{4}) + \\ + 2,1\cos(6\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}) - 1,3\cos(7\omega_0 t - \frac{7\pi}{4}) + \cos(9\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) + \dots$$

2.1.4 По приведённым ниже графикам АЧХ, ФЧХ записать сигнал $S(t)$ в виде ряда Фурье:

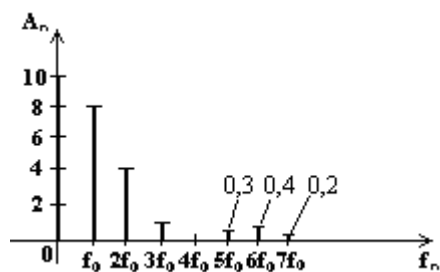


Рисунок 2.5

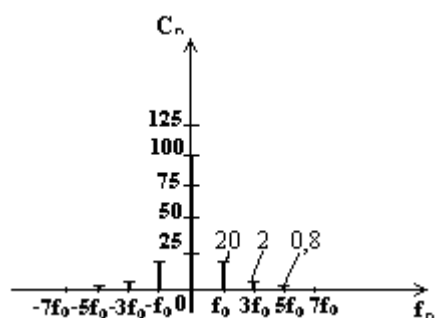


Рисунок 2.6

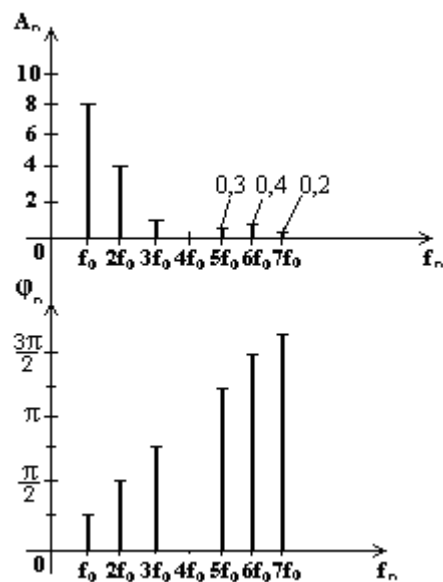


Рисунок 2.7

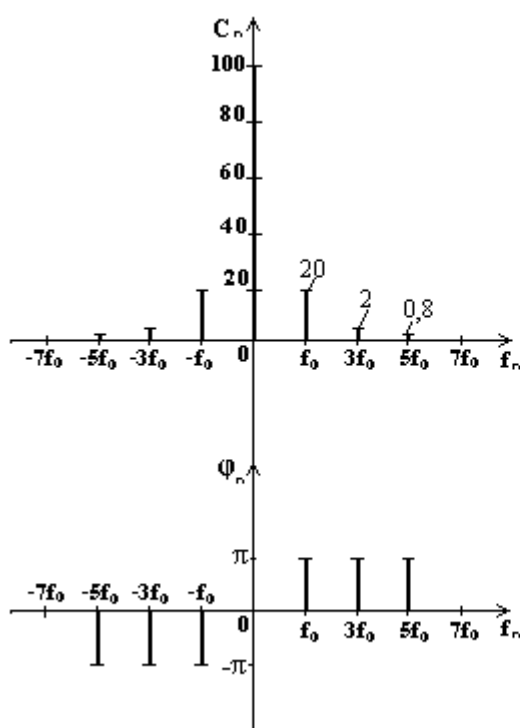


Рисунок 2.8

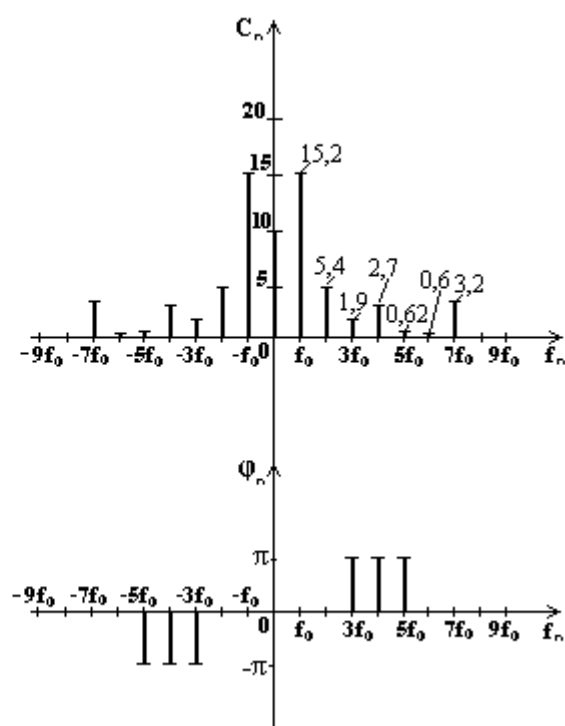


Рисунок 2.9

2.2 Преобразование Фурье (спектральный анализ) непериодических сигналов.

Построить графики сигналов $S(t)$ и найти их спектральные характеристики. Построить графики АЧХ, ФЧХ.

$$2.2.1 \quad S(t) = U_m \operatorname{rect}\left(\frac{t+t_0}{\tau_u}\right);$$

$$2.2.2 \quad S(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t+t_0}{\tau_u}\right) - \operatorname{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau_u}\right), t_0 = 10\tau_u$$

$$2.2.3 \quad S(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t+t_0}{\tau_u}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau_u}\right), t_0 = 10\tau_u$$

$$2.2.4 \quad S(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau_u}\right) + \operatorname{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau_u}\right), t_0 = 10\tau_u$$

$$2.2.5 \quad S(t) = U_m e^{-\alpha t}, t \geq 0$$

2.2.6 Сигнал представлен графиком на рисунке 2.10.

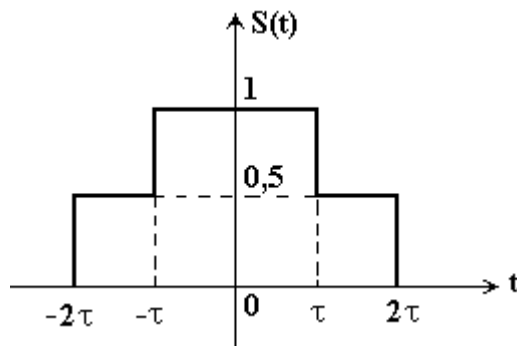


Рисунок 2.10

$$2.2.7 \quad S(t) = U_m \frac{\sin 100\pi(t+t_0)}{100\pi(t+t_0)} + U_m \frac{\sin 100\pi(t-t_0)}{100\pi(t-t_0)}, t_0 = 0,1 \text{ с.}$$

$$2.2.8 \quad S(t) = U_m \frac{\sin 10^3 \pi t}{10^3 \pi t} - U_m \frac{\sin 10^3 \pi(t-t_0)}{10^3 \pi(t-t_0)}, t = 10^2 \text{ с.}$$

$$2.2.9 \quad S(t) = U_m \cos \omega_0 t \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right), \tau = 10T_0$$

$$2.2.10 \quad S(t) = U_m \sin \omega_0 t \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right), \tau = 10T_0$$

$$2.2.11 \quad S(t) = U_m (1 + m \cos \omega_0 t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = 10T_0$$

$$2.2.12 \quad S(t) = U_m \frac{\sin 50\pi t}{50\pi t}$$

$$2.2.13 \quad S(t) = U_m \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) * U_m \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$2.2.14 \quad S(t) = U_m \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) * U_m \operatorname{rect}\left(\frac{t}{0.1 \cdot \tau}\right)$$

$$2.2.15 \quad S(t) = U_m \tau_u \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau_u}, & |t| \leq \tau_u \\ 0, & |t| > \tau_u \end{cases}$$

$$2.2.16 \quad S(t) = U_m \tau_2 \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\frac{\tau_1 - \tau_2}{2}}, & |t| > \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \\ 1, & |t| \leq \frac{\tau_1 - \tau_2}{2} \\ 0, & |t| \geq \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \end{cases}, \quad \tau_2 = \tau_1/4.$$

$$2.2.17 \quad S(t) = \delta(t - t_0)$$

$$2.2.18 \quad S(t) = \delta(t + t_0) - \delta(t - t_0)$$

$$2.2.19 \quad S(t) = \delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)$$

$$2.2.20 \quad S(t) = \delta(t^2 - 1)$$

$$2.2.21 \quad S(t) = \delta(\sin \omega_0 t)$$

$$2.2.22 \quad S(t) = \delta(t + t_0) + \delta(t - 2 \cdot t_0)$$

$$2.2.23 \quad S(t) = \delta(t^3 - t)$$

2.3 Преобразование Фурье периодических сигналов

$$2.3.1 \quad S(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \Omega, \quad 0 < m \leq 1.$$

$$2.3.2 \quad S(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \Omega, \quad 0 < m \leq 1.$$

$$2.3.3 \quad S(t) = U_m (1 + m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \Omega, \quad 0 < m \leq 1.$$

$$2.3.4 \quad S(t) = U_m (1 + m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \Omega, \quad 0 < m \leq 1.$$

3 ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

3.1 ЧАСТЬ 1 Представление сигнала $S(t)$ в виде ряда Фурье

По графику сигнала $S(t)$ и его аналитическому описанию (варианты сигналов приведены в таблице):

1. определить период повторения T_1 , частоту основной гармоники f_1 , коэффициенты a_n , b_n , A_n , φ_n ; записать сигнал в виде ряда Фурье;
2. построить односторонние и двухсторонние графики АЧХ, ФЧХ;
3. оценить (визуально) влияние числа суммируемых гармоник N в ряда Фурье на форму сигнала, представив графики сигналов при различных N (например, $N=1, 3, 5, 7, \dots, 100, \dots$), используя ППП (например, MathCad);
4. определить число N , при котором среднеквадратическая ошибка ξ не превышает 5%; привести график зависимости $\xi(N)$;
5. определить коэффициент гармоник в кривой $S(t)$;
6. сделать выводы.

Пояснительная записка должна содержать:

- ✓ **теоретическую часть** – краткое изложение теории рядов Фурье (*должно быть написано от руки!!*);
- ✓ **график исходного сигнала с показанным периодом повторения**;
- ✓ **графики АЧХ, ФЧХ** (*должны быть выполнены на миллиметровой бумаге от руки!!*).
- ✓ Пояснительная записка должна быть оформлена в соответствии с правилами оформления технической документации.

3.2 ЧАСТЬ 2 Преобразование Фурье периодического сигнала $S(t)$

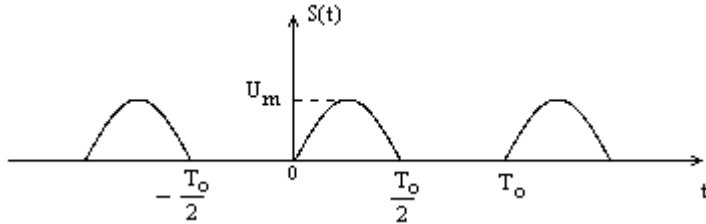
По графику сигнала $S(t)$:

1. привести аналитическое описание исходного периодического несинусоидального сигнала $S(t)$ в форме, удобной для выполнения преобразования Фурье (выделить непериодический сигнал $S_1(t)$, период его повторения T_1);
2. выполнить преобразование Фурье непериодического сигнала $S_1(t)$, найти выражение для АЧХ, ФЧХ; построить графики АЧХ, ФЧХ; построить график частотной характеристики суммы δ -функций и графики АЧХ, ФЧХ заданного сигнала $S(t)$;
3. сравнить численные значения полученных результатов АЧХ, ФЧХ в п.1 (Ч. 1) и п.2 (Ч. 2), например для $n=0$, $n=1$, $n=2$, и т.д., и сделать соответствующие выводы;
4. определить верхнюю частоту f_v сигнала $S(t)$, при которой мощность сигнала составляет 0,95 от полной мощности;
5. сделать выводы по всей работе.

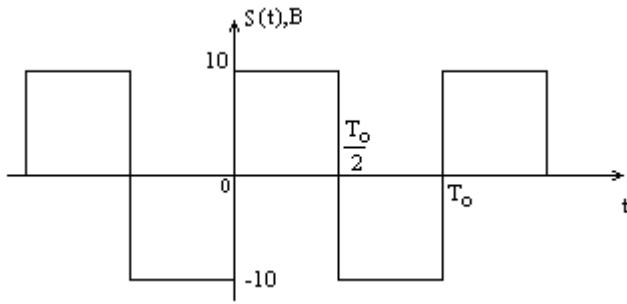
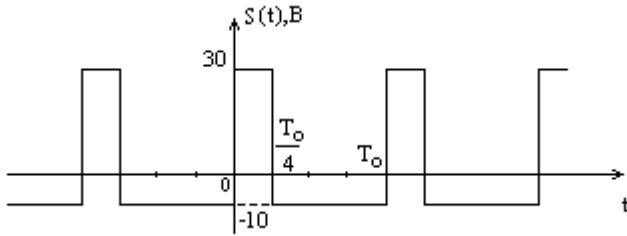
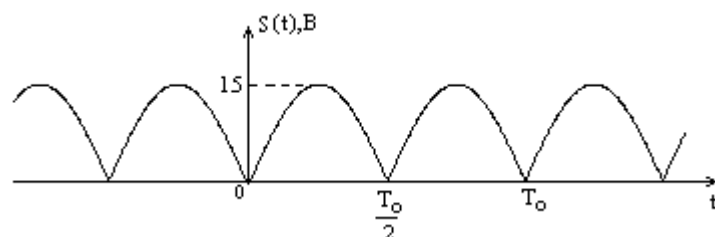
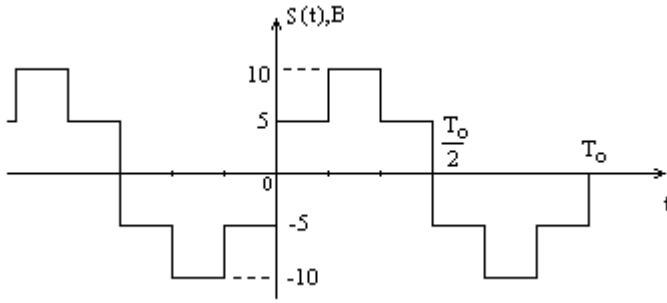
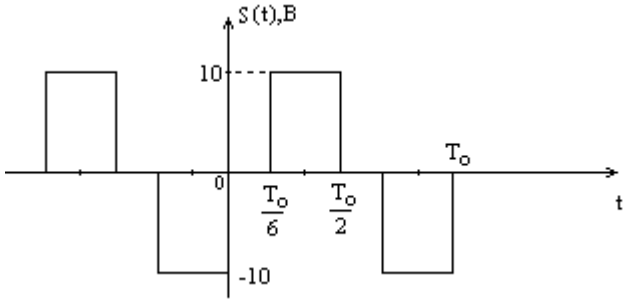
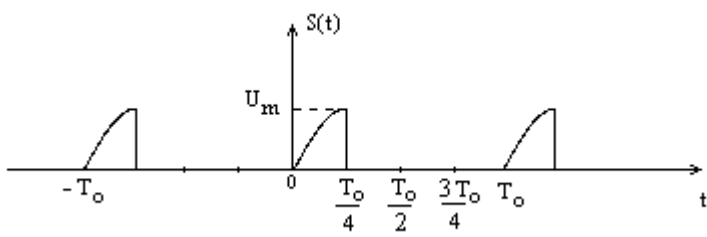
Пояснительная записка должна содержать:

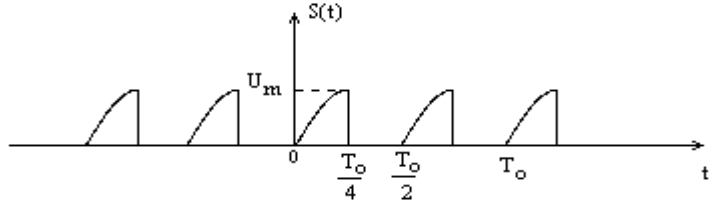
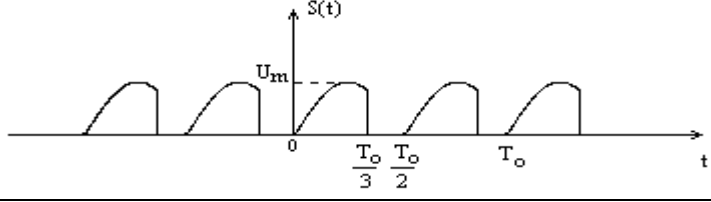
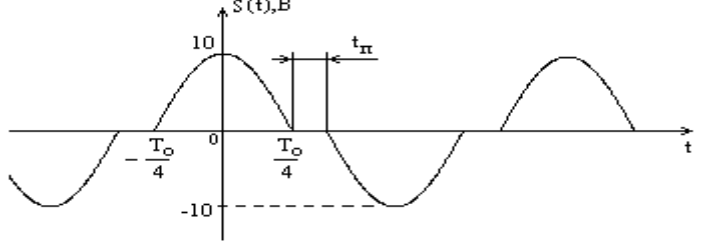
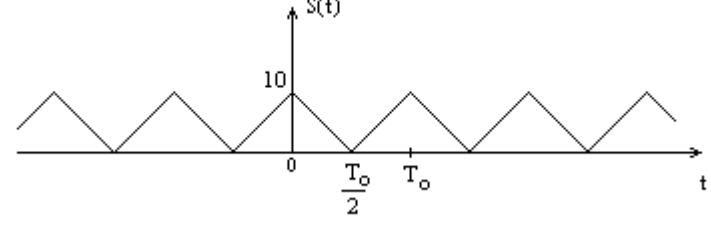
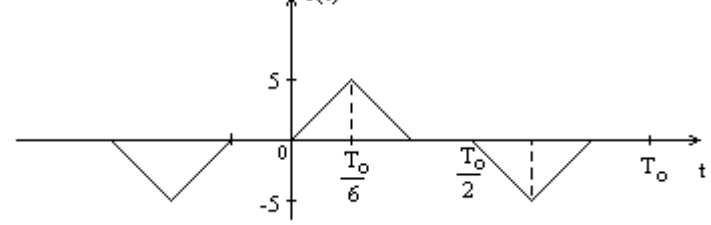
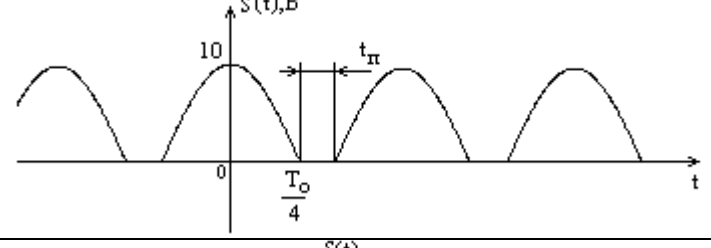
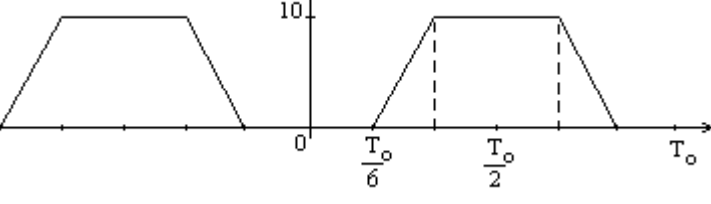
- ✓ **теоретическую часть** – краткое изложение теории применения преобразования Фурье к периодическим сигналам (*должно быть написано от руки!!*);
- ✓ **график исходного сигнала с показанным периодом повторения;**
- ✓ **графики АЧХ, ФЧХ.**
- ✓ Пояснительная записка должна быть оформлена в соответствии с правилами оформления технической документации.

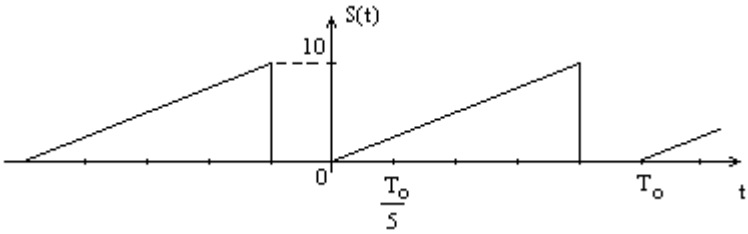
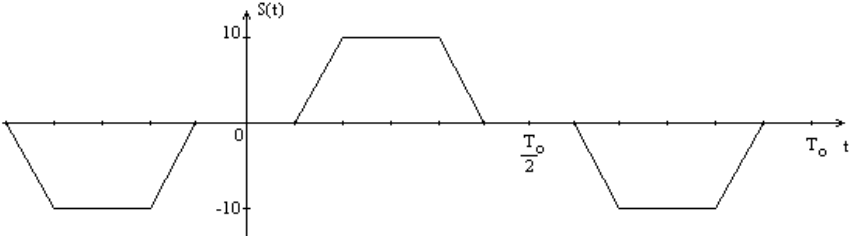
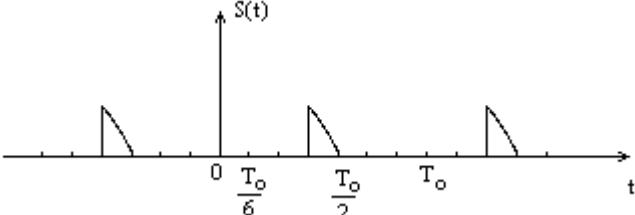
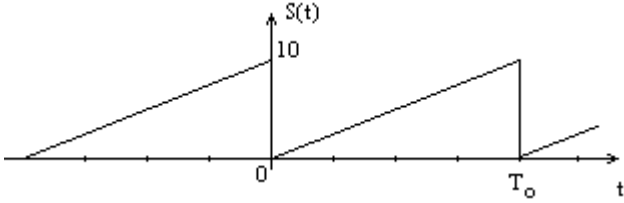
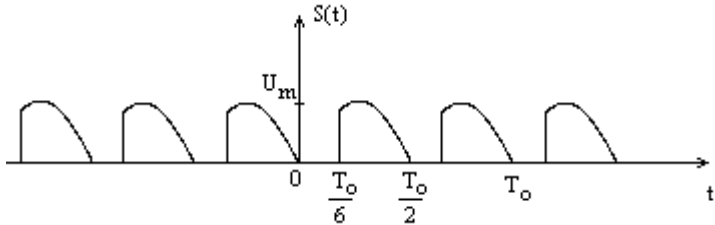
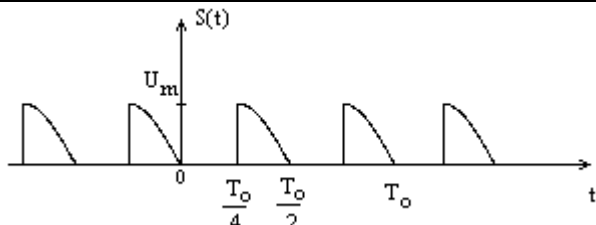
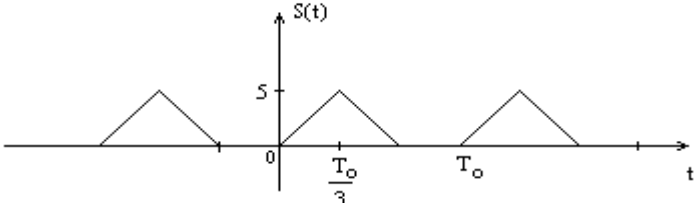
3.3 Варианты сигналов домашнего задания

№ варианта	График сигнала $S(t)$	Параметры сигнала
1	2	3
1		$S(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega_0 t, & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$ $T_0 = 20 \text{ мсек,}$ $U_m = 100 \text{ В}$

1	2	3
2		$S(t) = \begin{cases} 4 \cdot 10^3 t, & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{4} \\ 20 - 4 \cdot 10^3 t, & \frac{T_0}{4} < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$ $T_0 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$
3		$S(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \pi/6)$ $\omega_0 = 314 \text{ рад/сек}$ $0 \leq t \leq T_0/3$ $U_m = 10 \text{ В}$
4		$T_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$
5		$T_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$
6		$T_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$
7		$T_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$

1	2	3
8		$T_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$
9		$T_0 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$
10		$S(t) = U_m \sin \omega_0 t $ $\omega_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$
11		$T_0 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$
12		$T_0 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$
13		$S(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega_0 t , & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < t < T_0 \end{cases}$ $T_0 = 20 \text{ мсек},$ $U_m = 10 \text{ В}$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

1	2	3
14		$S(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega_0 t , & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < t < \frac{T_0}{2} \end{cases}$ $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ с,}$ $U_m = 10 \text{ В,}$ $\omega_0 = 314 \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$
15		$S(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega_0 t , & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{3} \\ 0, & \frac{T_0}{3} < t < \frac{T_0}{2} \end{cases}$ $U_m = 10 \text{ В,}$ $f_0 = 50 \text{ Гц}$
16		$S(t) = U_m \cos \omega_0 t,$ $T_0 = 20 \text{ мксек,}$ $t_n = 2 \text{ мксек,}$ $-\frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{4}$
17		$T_0 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$
18		$T_0 = 60 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$
19		$S(t) = U_m \cos \omega_0 t,$ $\omega_0 = 314 \text{ рад / сек,}$ $t_n = 2 \text{ мксек,}$ $-\frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{4}$
20		$T_0 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$

1	2	3
21		$T_0 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$
22		$T_0 = 60 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$
23		$S(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega_0 t, & \frac{T_0}{3} < t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{3} \end{cases}$ $U_m = 20 \text{ В}, f_0 = 50 \text{ Гц}$
24		$T_0 = 10 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$
25		$S(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega_0 t, & \frac{T_0}{6} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & 0 < t < \frac{T_0}{6} \end{cases}$ $U_m = 20 \text{ В}, f_0 = 50 \text{ Гц}$
26		$S(t) = \begin{cases} U_m \sin \omega_0 t, & \frac{T_0}{4} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & 0 < t < \frac{T_0}{4} \end{cases}$ $U_m = 100 \text{ В}, f_0 = 50 \text{ Гц}$
27		$T_0 = 30 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$

1	2	3
28		$T_0 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ сек}$
29		$S(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}),$ $0 \leq t \leq \frac{T_0}{6},$ $\omega_0 = 50 \text{ Гц}$
30		$T_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ сек}$

4 СИСТЕМЫ

4.1 Фильтрация сигналов

При решении задач данного подраздела необходимо в обязательном порядке давать графическую интерпретацию

Определить выходной сигнал системы (рис. 1.2) $g(t)$ при следующих условиях:

4.1.1 $S(t) = (1 + m \cos \Omega t) \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \Omega, \quad m \leq 1,$

$$H(\omega) = \text{rect} \left(\frac{\omega}{\omega_0/2} \right).$$

4.1.2 $S(t) = \text{rect} \left(\frac{t + t_0}{\tau_u} \right) - \text{rect} \left(\frac{t - t_0}{\tau_u} \right), \quad t_0 = 10 \tau_u,$

$$\omega(t) = \delta(t).$$

4.1.3 $S(t) = \frac{\sin 10^3 (t + t_0) \pi}{10^3 \pi (t + t_0)} + \frac{\sin 10^3 \pi (t - t_0)}{10^3 \pi (t - t_0)}, \quad t = 10^{-1} \text{ с},$

$$w(t) = \frac{\sin 10^3 t \pi}{10^3 \pi};$$

4.1.4 $S(t) = (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \Omega, \quad m \leq 1,$

$$w(t) = \frac{\omega_0}{2} \frac{\sin \frac{\omega_0}{4} t}{\frac{\omega_0}{4} t}.$$

$$4.1.5 \quad S(t) = (1 + m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 \gg \Omega, \quad m \leq 1,$$

$$w(t) = \delta(t) - \frac{\omega_0}{2} \frac{\sin \frac{\omega_0}{4} t}{\frac{\omega_0}{4} t}.$$

$$4.1.6 \quad S(t) = (1 + m \cos \omega_0 t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = 40T_0,$$

$$H(\omega) = \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{0,1\omega_0}\right).$$

$$4.1.7 \quad S(t) = (1 + m \cos \omega_0 t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = 40T_0,$$

$$w(t) = \delta(t) - \frac{\omega_0}{10} \frac{\sin \frac{\omega_0}{20} t}{\frac{\omega_0}{20} t}.$$

$$4.1.8 \quad S(t) = \delta(t^3 - t),$$

$$w(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

$$4.1.9 \quad S(t) = \delta(t^2 - t),$$

$$w(t) = \delta(t^2 - 4).$$

$$4.1.10 \quad S(t) = \frac{\sin t}{t},$$

$$w(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{t}.$$

$$4.1.11 \quad S(t) = \delta(t^2 - 1),,$$

$$w(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{a}\right);$$

$$4.1.12 \quad S(t) = \delta(\sin \omega_0 t),$$

$$\omega(t) = e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

$$4.1.13 \quad \text{Определить энергию сигнала}$$

$$S(t) = U_m \left(\frac{\sin 10\pi t}{10\pi t} \right)$$

$$4.1.14 \quad \text{Определить энергию сигнала на выходе системы с импульсной весовой функцией } w(t) = \frac{10^2 \pi \sin 50\pi t}{50\pi t}, \text{ если сигнал на входе системы } S(t) = \delta(t).$$

4.1.15 Определить энергию сигнала на выходе системы с импульсной весовой функцией $w(t) = 10^3 \pi \frac{\sin 5 \cdot 10^2 \pi t}{5 \cdot 10^2 \pi t}$, если сигнал на входе

$$S(t) = U_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{t - nT_0}{T_0/2} \right), T_0 = 2 \text{ мсек.}$$

4.2 Дифференциальные уравнения и передаточные функции

По дифференциальному уравнению, которым описывается система, найти:

- передаточную функцию;
- импульсную весовую функцию;
- переходную характеристику;
- частотную характеристику;
- выражение логарифмической амплитудной частотной характеристики.

4.2.1 $y'' + y' + 5y = x(t), y(0) = 0, y'(0) = 2.$

4.2.2 $y'' + 4y' + 3y = t, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.3 $y'' + 9y = e^{-3t}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.4 $y'' + 2y' + 5y = 2\cos(314t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.5 $y'' + 4y = \sin(314t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.6 $y^{IV} - y = 5 \cos(t)$, начальные условия – нулевые.

4.2.7 $y^{IV} - 8y'' + 16y = x(t)$, начальные условия – нулевые.

4.2.8 $y'' - 2ay' + a^2y = e^t, a \neq 1, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.9 $y'' + 6y' + 5y = e^{-2t}, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.10 $y'' - 7y' + 6y = \sin(314t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.11* $y'' + 6y' + 9y = x(t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.12 $y'' + 6y' + 13y = x(t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.13 $y'' - y' - 2y = x(t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.14* $y'' + 4y = x(t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.15 $y'' - 7y' + 6y = x(t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

4.2.16 $y^{IV} - 13y' + 36y = x(t), y(0) = 0, y'(0) = 0.$

* – в характеристическом уравнении есть кратные корни.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – М.: ВШ, 2000. – 464 с.: ил.
- 2 Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Руководство к решению задач: Учеб. пособие для радиотехн. спец. вузов. – М.: ВШ, 2002. – 214 с.: ил.
- 3 Дубищев Ю.Н. Теория и преобразование сигналов в оптических системах: Учебное пособие. 4-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. – 368 с.: - (Учебники для вузов. Специальная литература) – Гл. 1, Гл. 2, раздел 2.1.
- 4 Порфирьев Л.Ф. Основы теории преобразования сигналов в оптико-электронных системах: Учебник. – 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2013. – 400 с.: - (Учебники для вузов. Специальная литература) – Гл. 1.
- 5 Певзнер Л.Д. Практикум по математическим основам теории систем: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2013. – 400 с.: - (Учебники для вузов. Специальная литература) – Гл. 5.

3– 4 - доступ с авторизованных компьютеров: e.lanbook.com

- 6 Математические основы теории автоматического регулирования: Учеб. пособие для вузов. Т. 2/ В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко. Под ред. Б.К. Чемоданова – М.: Высш. шк., 1977. – 455 с.
- 3 Топчеев Ю.И. Атлас проектирования систем автоматического регулирования: Учебное пособие для втузов. – М.: Машиностроение, 1989. – 752 с.: ил.

621.372

Автор	Доцент кафедры «Промышленная электроника, к.т.н. Посконный Г.И.
Рецензент	Заведующий кафедрой автоматизации управления, доцент, к.т.н. Дюгай П.А.

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ: Учебное пособие для студентов направления 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника». – Новоуральск: НТИ НИЯУ МИФИ, 2013. – 27 с.

Сдано в печать	Формат А5	Бумага писчая
Печать плоская.	1.81 усл. печ. л.	Тираж 30 экз.
Заказ	Издательство НТИ НИЯУ МИФИ Лицензия ИД №00751 г. Новоуральск, ул. Ленина, 85	