

Расчетно-графическая работа №2

Решение задач на транспортных сетях

Цель работы: ознакомиться с методикой решения задач на транспортных сетях

1 Общие сведения

Пусть некоторая сеть задана в виде орграфа (рис. 1), т.е. каждой ориентированной дуге соответствует определенное расстояние. Необходимо найти кратчайший путь из i -го узла сети в ее заданный j -й узел. К этой задаче, известной в *исследовании операций* как **задача выбора кратчайшего пути**, сводятся такие практически важные задачи, как задача о замене оборудования, задача о календарном планировании комплекса работ и т.д.

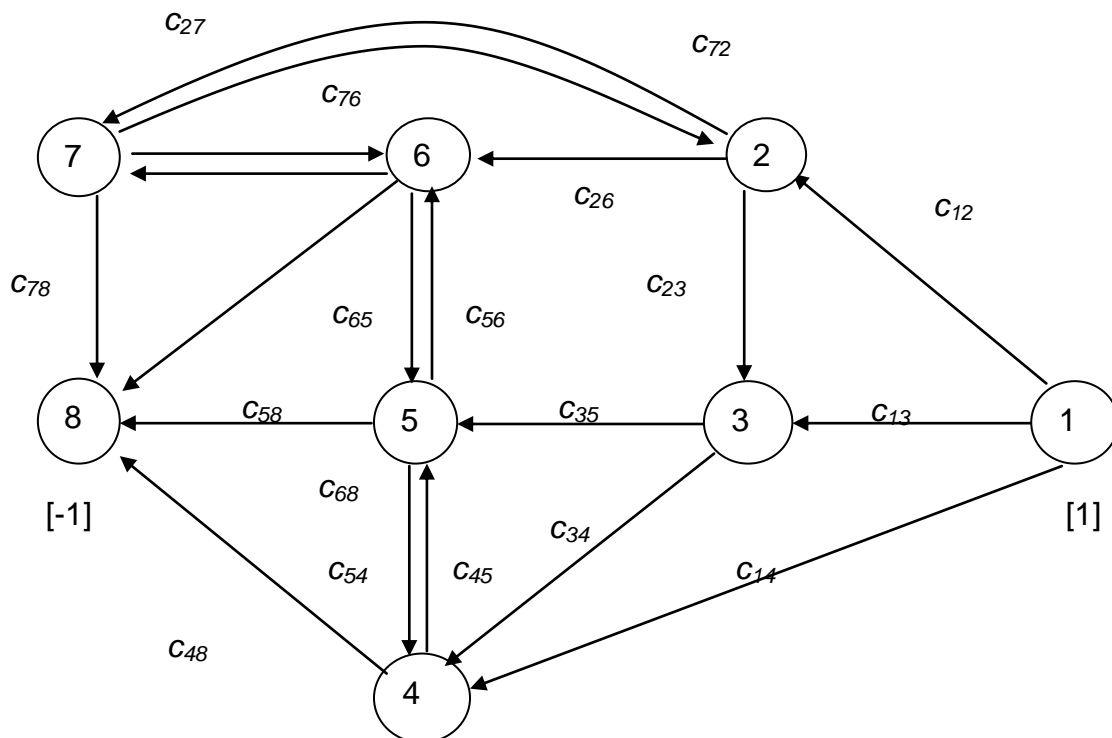


Рис. 1

Как правило, в сети выделяют один узел, который является конечным (пункт или станция назначения, *сток*). Задача заключается в отыскании кратчайшего пути в этот конечный узел (на рис. 1 конечным является узел с номером 8) из некоторого другого узла сети (например, из первого узла сети на рис. 1). Величина c_{ij} определяет расстояние от i -го узла сети до ее j -го узла.

Величина c_{ij} может измеряться в единицах, отличных от единиц длины. Так, например, c_{ij} может представлять собой стоимость проезда от i -го до j -го узла сети. Тогда задача заключается в отыскании пути минимальной стоимости. Величина c_{ij} может также определять время переезда от i -го до j -го узла сети. При этом необходимо найти путь с минимальной продолжительностью переезда.

При решении прикладных задач, сводящихся к задаче выбора кратчайшего пути, часто встречаются ситуации, когда $c_{ij} \neq c_{ji}$. Кроме того, как правило, не выполняется так называемое неравенство треугольника: $c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj}$ для всех некоторых значений индексов i, j, k .

Существуют сети, содержащие **циклы**, каждый из которых представляет собой замкнутый путь (путь, исходящий из некоторого узла сети и возвращающийся в него же). Так, в сети

представленной на рис. 1, много циклов, один из них содержит узлы с номерами 2, 3, 5, 6 и 7. Как правило, в задачах исследования операций значения c_{ij} положительны и общая длина цикла является положительной. Следовательно, решение задачи выбора кратчайшего пути не может содержать циклов.

Предположим, что для сети, представленной на рис. 1, необходимо найти кратчайший путь от узла с номером 1 (источник) до узла с номером 8 (сток). Установим связь этой задачи с классической транспортной задачей.

Рассмотрим транспортную задачу с промежуточными пунктами, сеть которой представлена на рис. 1. При этом предположим, что: а) в узле с номером 1 имеется избыточная единица товара; б) в узле с номером 8 имеется недостаток единицы товара; в) узлы с номерами 2,...,7 являются промежуточными пунктами с нулевыми чистыми запасами (потребность в дополнительных поставках товара равна нулю). Необходимо разработать план перевозок товара между узлами сети (складами), который при минимальных транспортных затратах позволит на каждом складе поддерживать нулевой чистый запас товара.

Считаем, что каждой ориентированной дуге сети соответствует переменная модели x_{ij} , представляющая собой количество товара, которое должно быть отправлено с i -го склада на j -й. Для каждого k -го промежуточного пункта вводим переменную x_{kk} с соответствующим ему коэффициентом $c_{kk} = 0$ в целевой функции, а величину чистого запаса обозначаем через T_k . Если множество пар индексов (i, j) , соответствующих ориентированным дугам сети, представленной на рис. 1, обозначить через J , то рассматриваемую задачу можно записать следующим образом:

Сформулированная выше задача о нахождении кратчайшего пути эквивалентна классической транспортной задаче.

Решение задачи о нахождении кратчайшего пути в Excel

Рассмотрим методику решения в Excel задачи о нахождении кратчайшего пути.

Задача. Задача выбора кратчайшего пути задана сетью, изображенной на рис. 1. Найдите кратчайший путь от узла с номером 1 до узла с номером 8, если $c_{12}=1$ км, $c_{13}=4$ км, $c_{14}=6$ км, $c_{23}=3$ км, $c_{26}=5$ км, $c_{27}=1$ км, $c_{34}=3$ км, $c_{35}=5$ км, $c_{45}=1$ км, $c_{48}=4$ км, $c_{54}=1$ км, $c_{56}=1$ км, $c_{58}=2$ км, $c_{65}=1$ км, $c_{67}=3$ км, $c_{68}=4$ км, $c_{72}=1$ км, $c_{76}=3$ км, $c_{78}=7$ км.

На рис. 2 представлены **Таблица кратчайших расстояний** и **План перевозок товара по кратчайшему пути**, сформированные на рабочем листе Excel. Здесь в **Таблице кратчайших расстояний** мы видим, что если между отдельными складами отсутствует возможность перевозки товара, то в соответствующие ячейки таблицы (выделенные темным фоном) заносится любое большое число (в данном случае 100).

Не сложно заметить, что данная задача решается аналогично решению транспортной задачи с промежуточными пунктами. В целевую ячейку, в данном случае C24, необходимо занести формулу: **=СУММПРОИЗВ(C4:I10;C16:I22)**.

Рис. 2.

Рис. 3.

Используя меню **Сервис**⇒**Поиск решения** открываем диалоговое окно **Поиск решения** (см. рис. 2), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек и ограничения и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке **Выполнить**.

Результат решения данной задачи представлен на рис. 2.

Рис. 3.

Здесь мы видим, что кратчайший путь перевозки товара следующий: 1→2→7→6→5→8. Расстояние перевозки при этом составит 8 км. Аналогично данную задачу можно решить и на максимум, т.е. найти самый длинный путь доставки товара.

3 Задачи для самостоятельного решения

Решите задачу, представленную на рисунке 1, используя данные о расстояниях между узлами транспортной сети, представленные в таблице ниже.

Таблица - Варианты заданий для самостоятельного решения

$c(ij)$	Расстояние между смежными узлами транспортной сети $c(ij)$, км по вариантам											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$c(12)$	1	20	18	6	17	1	3	6	14	12	15	16
$c(13)$	5	6	9	9	14	19	17	6	1	14	20	20
$c(14)$	16	8	12	7	9	15	10	18	6	10	6	14
$c(23)$	2	12	4	9	1	15	13	1	10	19	4	18
$c(26)$	1	9	17	20	9	18	11	11	8	2	16	17
$c(27)$	16	3	16	17	11	12	3	10	18	14	18	17
$c(34)$	15	3	20	10	7	18	20	7	9	16	20	5
$c(35)$	17	2	11	20	8	12	20	2	13	11	12	2
$c(45)$	17	12	9	11	11	2	12	6	11	3	10	19
$c(48)$	17	3	4	4	6	12	10	18	10	4	6	12
$c(54)$	17	1	8	3	19	4	7	15	2	18	2	3
$c(56)$	10	8	10	6	5	9	20	7	20	12	17	5
$c(58)$	5	11	3	19	4	8	16	2	2	20	6	4
$c(65)$	1	19	7	6	19	10	16	6	8	11	14	3
$c(67)$	6	16	2	10	8	20	20	6	1	15	17	13
$c(68)$	14	17	11	2	11	5	13	17	14	16	19	1
$c(72)$	10	11	15	4	3	20	7	4	4	19	14	3
$c(76)$	7	1	7	9	12	20	14	14	5	17	9	5
$c(78)$	1	18	13	9	4	7	1	9	14	13	11	8