Контрольные работы
ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы:

1) Ознакомиться с теорией двойственности в задачах линейного программирования.
2) Научиться строить пары двойственных задач.
3) Изучить анализ полученного оптимального решения исходной задачи с помощью двойственных оценок.

1.Общие сведения

Двойственность в задачах линейного программирования

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая двойственной; первоначальная задача называется исходной, или прямой.

Связь исходной и двойственной задач заключается, в частности, в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой.

Хорошо разработанный математический аппарат линейного программирования позволяет не только получать с помощью эффективных вычислительных процедур оптимальный план, но и делать ряд экономически содержательных выводов, основанных на свойствах задачи, двойственной к исходной ЗЛП. Переменные двойственной задачи y_i называют объективно обусловленными оценками, или двойственными оценками, или «ценами» ресурсов, или теневыми ценами.

Каждая из задач двойственной пары фактически является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо от другой.

Двойственная задача по отношению к исходной составляется согласно следующим правилам:

1. Целевая функция исходной задачи формулируется на максимум, а целевая функция двойственной задачи - на минимум, при этом в задаче на максимум все неравенства в функциональных ограничениях имеют вид $\leq$, в задаче на минимум - вид $\geq$.

2. Матрица A, составленная из коэффициентов при неизвестных в системе ограничений исходной задачи, и аналогичная матрица A^T в двойственной задаче получаются друг из друга транспонированием.

3. Число переменных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений исходной задачи, а число ограничений в системе двойственной задачи - числу переменных в исходной задаче.

4. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи, а правыми частями в ограничениях двойственной задачи -коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи.

5. Каждому ограничению одной задачи соответствует переменная другой задачи: номер переменной совпадает с номером ограничения; при этом ограничению, записанному в виде неравенства $\leq$, соответствует переменная, связанная с условием неотрицательности. Если функциональное ограничение исходной задачи является равенством, то соответствующая переменная двойственной задачи может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Модель исходной (прямой) задачи в общем виде может быть записана следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i,$$

$$X_j \ge 0.$$

Модель двойственной задачи имеет вид:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \ge C_j,$$

$$Y_i \ge 0.$$

Рассмотрим экономическую интерпретацию двойственной задачи на примере задачи оптимального использования ресурсов.

Сформулируем экономико-математическую модель двойственной задачи к следующей задаче

Фабрика имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов: рабочую силу, деньги, сырье, оборудование, производственные площади и т.п. Допустим, например, ресурсы трех видов: рабочая сила, сырье и оборудование - имеются в количестве соответственно 80 (чел./дней), 480 (кг) и 130 (станко/ч). Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для производства одного ковра каждого вида, и доходах, получаемых предприятием от единицы каждого вида товаров, приведена в таблице.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу изделия				Наличие ресурсов
	ковер «Лужайка»	ковер «Силуэт»	ковер «Детский»	ковер «Дымка»	
Труд	7	2	2	6	80
Сырьё	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена (тыс.руб.)	3	4	3	1	

Требуется найти такой план выпуска продукции, при котором будет максимальной общая стоимость продукции.

Количество неизвестных в двойственной задаче равно числу функциональных ограничений в исходной задаче. В исходной задаче три ограничения: по труду, по сырью и по оборудованию. Следовательно, в двойственной задаче - три неизвестных:

Y_1 - двойственная оценка ресурса труд, или «цена» труда;

Y_2 - двойственная оценка ресурса сырье, или «цена» сырья;

Y_3 - двойственная оценка ресурса оборудование, или «цена» оборудования.

Целевая функция двойственной задачи формулируется на минимум. Коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены в системе ограничений исходной задачи.

$$g(\overline{y}) = 80 \cdot Y_1 + 480 \cdot Y_2 + 130 \cdot Y_3 \to \min$$

Необходимо найти такие «цены» на ресурсы (Y_i), чтобы общая стоимость используемых ресурсов была минимальной.

Ограничения. Число ограничений в системе двойственной задачи равно числу переменных в исходной задаче. В исходной задаче четыре переменных, следовательно, в двойственной задаче четыре ограничения. Правыми частями в ограничениях двойственной задачи являются коэффициенты при неизвестных в целевой функции исходной задачи. Левая часть ограничения определяет стоимость ресурсов, затраченных на производство единицы продукции. Каждое ограничение соответствует определенному виду продукции.

$$7Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 \geq 3,$$
$$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \geq 4$$
$$2Y_1 + 4Y_2 + 1Y_3 \geq 3$$
$$6Y_1 + 3Y_2 + 8Y_3 \geq 1$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0.$$

Проведем анализ полученного оптимального решения приведенной выше задачи.

1. Анализ использования ресурсов в оптимальном плане выполняется с помощью соотношений 2-й теоремы двойственности:

$$\text{если } Y_i > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i, \ i = 1,\dots,m;$$

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Xj < b_i, \text{ то } Y_i = 0, \ i = 1,\dots,m$$

Ресурсы труд и оборудование имеют отличные от нуля оценки 4/3 и 1/3 - эти ресурсы полностью используются в оптимальном плане, являются дефицитными, сдерживающими рост целевой функции. Правые части этих ограничений равны левым частям:

$$7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 \leq 80,$$
$$2X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4 \leq 130,$$
$$7 \cdot 0 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 0 = 80 = 80$$
$$2 \cdot 0 + 4 \cdot 30 + 1 \cdot 10 + 8 \cdot 0 = 130 = 130.$$

Ресурс «сырье» используется не полностью (280 < 480), поэтому имеет нулевую двойственную оценку ($Y_2 = 0$).

$$5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 480,$$
$$5 \cdot 0 + 8 \cdot 30 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 0 = 280 < 480.$$

Этот ресурс не влияет на план выпуска продукции.

Общая стоимость используемых ресурсов при выпуске 30 ковров второго вида и 10 ковров третьего вида составит 150 тыс. руб.

$$g(\bar{y}) = 80 \cdot Y_1 + 480 \cdot Y_2 + 130 \cdot Y_3 = 80 \cdot 4/3 + 480 \cdot 0 + 130 \cdot 1/3 = 150 \text{ тыс. руб.}$$

Экономическое истолкование оценок есть интерпретация их общих экономико-математических свойств, применительно к конкретному содержанию задачи. Не использованный полностью в оптимальном плане ресурс получает нулевую оценку. Нулевая оценка ресурса свидетельствует о его недефицитности. Ресурс недефицитен не из-за его неограниченных запасов (они ограничены величиной b_i), а из-за невозможности его полного использования в оптимальном плане. Так как суммарный расход недефицитного ресурса меньше его общего количества, то план производства им не лимитируется. Данный ресурс не препятствует и дальше максимизировать целевую функцию $f(\bar{X})$.

Заметим, что ценность видов ресурсов нельзя отождествлять с действительными ценами, по которым осуществляется его закупка. В данном случае речь идет о некоторой мере,

имеющей экономическую природу, которая характеризует ценность ресурса только относительно полученного оптимального решения.
Анализ эффективности отдельных вариантов плана

Если изделие вошло в оптимальный план (X_j, > 0), то в двойственных оценках оно не убыточно, т.е. стоимость ресурсов, затраченных на производство единицы изделия, равна его цене. Такие изделия эффективны, выгодны с точки зрения принятого критерия оптимальности. В нашей задаче это ковры второго и третьего видов.

Если стоимость ресурсов, затраченных на производство одного изделия, больше его цены, то это изделие не войдет в оптимальный план из-за его убыточности. В нашей задаче в план выпуска не вошли ковры первого и четвертого видов, потому что затраты по ним превышают цену на 7(10 - 3) тыс. руб. и 9.666(10.666 - 1) тыс. руб. соответственно. Это можно подтвердить, подставив в ограничения двойственной задачи оптимальные значения вектора Y.

$$7 \cdot 4/3 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1/3 = 30/3 = 10 > 3,$$
$$2 \cdot 4/3 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1/3 = 12/3 = 4 = 4,$$
$$2 \cdot 4/3 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1/3 = 9/3 = 3 = 3,$$
$$6 \cdot 4/3 + 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1/3 = 32/3 = 10.666 > 1.$$

Разницу между правыми и левыми частями ограничений двойственной задачи можно найти в *Отчете по устойчивости* в столбце «Нормируемая стоимость».

Анализ влияния изменения правых частей ограничений на значения целевой функции (чувствительность решения к изменению запасов сырья)

Предположим, что запас сырья ресурса «труд» изменился на 12 ед. т.е. теперь он составляет 80+12=92 ед. Известно, что колебание величины b_i, приводит к увеличению или уменьшению $f(X)$. Оно определяется величиной y_i в случае, когда при изменении величин b_i значения переменных y_i в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи остаются неизменными. В нашей задаче увеличение запасов ресурса «труд» приведет к увеличению значения целевой функции на 16 тыс. руб. $(\Delta f(x) = \Delta b_1 \cdot y_1 = 12 \cdot 4/3 = 16)$. Для двойственных оценок оптимального плана весьма существенное значение имеет их предельный характер. Точной мерой влияния ограничений на функционал оценки являются лишь при малом приращении ограничения. Известно, что оценки не меняют своей величины, если не меняется набор векторов, входящих в базис оптимального плана, тогда как интенсивности этих векторов (значения неизвестных) в плане могут меняться.

Поэтому необходимо знать такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы ограничений исходной ЗЛП, или интервалы устойчивости двойственных оценок, в которых оптимальный план двойственной задачи не менялся бы. Эту информацию можно получить из *Отчета по устойчивости*. В нашей задаче в нижеприведенном фрагменте отчета видно, что запасы дефицитных ресурсов «труд» и «оборудование» могут быть как уменьшены, так и увеличены, увеличение запаса ресурса «сырье» не повлияет на план выпуска продукции.

Ограничение правая часть	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
80	150	15
480	1E+30	200
130	30	90

После увеличения запаса ресурса «труд» до 92 чел./ч было получено новое решение задачи. Изменение запасов ресурсов в пределах интервалов устойчивости двойственных оценок привело не только к изменению значения целевой функции на 16 тыс. руб., но и к изменению плана выпуска. При этом структура плана не изменилась - изделия, которые были убыточны, не вошли и в новый план выпуска, так как цены на ресурсы не изменились. Новый план выпуска составляет 28 ковров второго вида и 18 ковров третьего вида. Изменение общей стоимости продукции на 16 тыс. руб. (24 - 8 = 16) получено за счет уменьшения на 2 ед. ковров второго вида по цене 4 тыс. руб.

(4 тыс. руб. х (28 - 30) = -8 тыс. руб.) и увеличения на 8 ед. ковров третьего вида по цене

3 тыс. руб. (3 тыс. руб. х (18-10) = 24 тыс. руб.).

Отчет по устойчивости 2

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой коэффи-циент	Допустимое увеличение	Допусти-мое уменьше-ние
B3	значение X1	0	-7	3	7	1E+30
C3	значение X2	28	0	4	8	1
D3	значение X3	18	0	3	1	1.75
E3	значение X4	0	-9.6667	1	9.6667	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая цена	Ограни-чение правая часть	Допустимое увеличение	Допусти-мое уменьше-ние
F7	труд левая часть	92	1.3333	92	138	27
F8	сырье левая часть	296	0	480	1E+30	184
F9	оборудование левая часть	130	0.3333	130	54	84

Чувствительность решения к изменению коэффициентов целевой функции исходной задачи.

В первой части *Отчета* по устойчивости содержится информация о допустимом увеличении и уменьшении коэффициентов целевой функции, при которых не меняется оптимальный план исходной задачи.

Целевой коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое Уменьшение
3	7	1E+30
4	8	1
3	1	1.75
1	9.6667	1E+30

3 Порядок выполнения работы

1. В задании 1 построить пару двойственных задач и показать преподавателю.
2. В задании 2 построить пару двойственных задач. Решить исходную и двойственную задачи, используя надстройку Excel *Поиск решений*. Представить результаты поиска решений исходной задачи в форме отчетов. Провести анализ полученного оптимального решения исходной задачи

Контрольная работа №1

Исходя из общего правила, составить задачи, двойственные к данным:

$$f = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 (\max);$$

1. $$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1; \\ &2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 3; \end{aligned}\right\}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}).$$

2.
$$f = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3\,(\min);$$
$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 7; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 9; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \le 5; \end{array}\right\}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1{,}3).$$

3.
$$f = x_1 + x_2 + 2x_3 \quad (\max);$$
$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ 2x_1 \qquad + x_3 = 5; \end{array}\right\}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1{,}3).$$

4.
$$F = 2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2 \cdot x_5 \to \min$$
$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 8, \\ x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 + 3 \cdot x_4 - 2 \cdot x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 5, \\ 2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 + x_4 + 3 \cdot x_5 \ge 7, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_4 \ge 0.$$

5.
$$F = 2{,}5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 \ge 9, \\ 3 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \ge 11, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_2 - \textit{любого} \quad \textit{знака};$$

6.
$$F = x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 + x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 - 2 \cdot x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 - x_4 \ge 6, \\ x_1 - x_3 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3, x_4 - \textit{любого} \quad \textit{знака};$$

7.
$$F = 6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 3 \cdot x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_5 = 5, \\ 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + x_6 = 12, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 (j = \overline{1{,}6}).$$

$F = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 \to \min$

8. $\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 \ge 8, \\ -3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 10, \\ 5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + x_3 \ge 7, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0;$

$F = x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \to \max$

9. $\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 = 6, \\ 2 \cdot x_1 + x_3 = 5, \end{cases}$

$x_j \ge 0 (j = \overline{1,3});$

$F = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 + 5 \cdot x_4 \to \min$

10. $\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 = 3, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 + 3 \cdot x_4 = 8; \end{cases}$

$F = 7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - x_4 \to \min$

11. $\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 \ge 12, \\ -x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 + x_4 \le 10, \\ 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_4 = 7, \end{cases}$

$x_2 \ge 0, x_3 \ge 0;$

$F = -6 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - x_4 \to \max$

12. $\begin{cases} 2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - x_4 = 6, \\ -3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 12, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4});$

$F = 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \to \max$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 \ge 9, \\ 3 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 > 11, \end{cases}$

$x_j \ge 0 (j = \overline{1,3});$

$F = 2 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 \to \max$

14. $\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 \ge 1, \\ 2 \cdot x_1 - x_2 + 2 \cdot x_3 \le 3, \end{cases}$

$x_j \ge 0, (j = \overline{1,3});$

<u>Контрольная работа №2</u>

Необходимо выполнить следующие задания и письменно оформить результаты:

- Построить математическую модель.
- Определить и выписать оптимальный план.
- Определить, можно ли поднять цену на выпускаемую продукцию без изменения плана выпуска? Если можно, то на сколько?
- Выявить дефицитные ресурсы. На сколько можно увеличить запас дефицитных ресурсов для улучшения оптимального значения целевой функции?
- Выявить недефицитные ресурсы. На сколько можно уменьшить их запас при сохранении оптимального значения целевой функции?
- Выявить изменение общей стоимости выпускаемой продукции определяемой оптимальным планом ее производства при уменьшении количества первого ресурса на 7 ед. и увеличении второго и третьего ресурсов соответственно на 5 и 10 ед. Провести анализ возможного изменения общей стоимости продукции как при изменении объемов каждого из ресурсов по отдельности, так и при их одновременном изменении в указанных размерах.

Вариант 1

Компания производит мягкую мебель в обыкновенном исполнении и в исполнении люкс. Потребности в ресурсах приведены в таблице. 364 часов времени в неделю могут быть использованы на участке сборки, 280 часов в неделю на участке покраски и 60 часов в неделю на участке контроля. Древесина имеется в количестве 5000 кв.м., ткань в количестве 1001 м.кв. Спрос на мебель, по меньшей мере 150 единиц продукции в обыкновенном исполнении и 90 единиц в исполнении люкс. Компания заинтересована в оптимальном сочетании выпуска продукции в течение недели.

Продукт	**Вклад в прибыль**	**Расход древесины**	**Время сборки**	**Расход ткани**	**Время покраски**	**Время контроля**
Обыкновенный	$50	15	1.2	3	0.8	0.2
Люкс	$75	17	1.6	5	0.9	0.2

Вариант 2

Мебельный цех №2 производит плательные и книжные шкафы. В распоряжении цеха 4 вида ресурсов, запасы которых ограничены. Потребности в ресурсах и возможности по их использованию (запасы) в течение недели приведены в таблице. Максимальная потребность в плательных шкафах на плановый период - 100 шт. Каждый проданный плательный шкаф приносит прибыль в 90$, а проданный книжный шкаф в 57$.

	Плательный шкаф	**Книжный шкаф**	**Недельный запас ресурса**
Участок сборки (время)	4	3	638
Участок покраски (время)	2	1	300
Участок контроля (время)	0.5	0.6	90
Древесина (м. кв.)	32	20	4781

Вариант 3

Кооператив, используя три типа ресурсов, реализует продукцию четырех видов. Общий объем ресурсов, их затраты на продажу одной партии изделий, а также прибыль от ее реализации приведены в таблице.

Тип ресурсов	Затраты на реализацию одной партии изделий, усл.ед.				Общий объем ресурсов
	1-го вида	2-го вида	3-го вида	4-го вида	
Древесина	3	4	2	6	64
Ткань	4	7	3	5	83
Сборка	2	3	6	1	58
Прибыль от реализации одной партии изделий, $	14	15	12	17	

Вариант 4

Мебельная фабрика производит недорогие столы и стулья. В распоряжении фабрики 4 вида ресурсов, запасы которых ограничены. Потребности в ресурсах и возможности по их использованию (запасы) в течение недели приведены в таблице. Максимальная потребность в столах на плановый период - 40 шт. Каждый проданный стол приносит прибыль в $5, а проданный стул в $7.

Ресурс	Потребность в ресурсе		Недельный запас ресурса
	Столы	Стулья	
Участок сборки (время)	4	3	220
Участок покраски (время)	2	1	100
Участок контроля (время)	0,5	0,6	32
Ткань		0,7	20
Древесина (м. кв.)	32	10	1480

Вариант 5

Леспромхоз имеет древесину трех видов в количествах: 1 - 1000 м3, 2 - 500 м3, 3 - 700 м3 , для изготовления изделий A, B, C и D. Нормы расхода древесины в м3 на изготовление единицы каждого изделия и прибыль от реализации единицы изделия даны в таблице. Определить, сколько изделий каждого вида должно произвести предприятие, чтобы общая прибыль от реализации всех изделий была максимальной?

Сырье	Нормы расхода сырья на единицу изделия			
	A	B	C	D
1	0,1	0,15	0,2	0,25
2	0,2	0,4	0,3	0,1
3	0,4	0,5	0,1	0,2
Прибыль, руб	10	20	30	10

Вариант 6

Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь -100 ед., труд - 120 ед., тяга - 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции: П1 , П2 , П3 и П4 . Организация производства характеризуется следующей таблицей:

продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от ед. продукции
	площадь	труд	тяга	
П1	2	2	2	1
П2	3	1	3	4
П3	4	2	1	3
П4	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Вариант 7

Из трех продуктов — I, II, III составляется смесь. В состав смеси должно входить не менее 6 ед. химического вещества А, 8 ед. — вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Структура химических веществ приведена в следующей таблице:

продукция	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость от ед. продукции
	А	В	С	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Составьте математическую модель приготовления наиболее дешевой смеси.

Вариант 8

На заводе выпускают изделия четырех типов. От реализации 1 ед. каждого изделия завод получает прибыль соответственно 2 , 1 , 3 , 5 д.е. На изготовление изделий расходуются ресурсы трех видов: энергия, материалы, труд. Данные о технологическом процессе приведены в следующей таблице:

Тип ресурсов	Затраты ресурсов на единицу изделия, усл.ед.				Общий объем ресурсов
	1-го вида	**2-го вида**	**3-го вида**	**4-го вида**	
Энергия	2	3	1	2	30
Материалы	4	2	1	2	40
Труд	1	2	3	1	25

Спланируйте производство изделий так, чтобы прибыль от их реализации была наибольшей.

Вариант 9

При изготовлении изделий П1 и П2 используются сталь и цветные металлы, а также токарные и фрезерные станки. По технологическим нормам на производство единицы изделия П1 требуется 300 и 200 станко-часов соответственно токарного и фрезерного оборудования, а также 10 и 20 кг соответственно стали и цветных металлов. Для производства единицы изделия П2 требуется 400 , 100 , 70 и 50 соответствующих единиц тех же ресурсов.

Цех располагает 12400 и 6800 станко-часами соответственно токарного и фрезерного оборудования и 640 и 840 кг соответственно стали и цветных металлов. Прибыль от реализации единицы изделия П1 составляет 6 у.е. и от единицы изделия П2 — 16 у.е.

Постройте математическую модель задачи, используя в качестве показателя эффективности прибыль и учитывая, что время работы фрезерных станков должно быть использовано полностью.

Вариант 10

Мебельный цех №2 производит плательные и книжные шкафы. В распоряжении цеха 4 вида ресурсов, запасы которых ограничены. Потребности в ресурсах и возможности по их использованию (запасы) в течение недели приведены в таблице. Максимальная потребность в плательных шкафах на плановый период - 100 шт. Каждый проданный плательный шкаф приносит прибыль в 90$, а проданный книжный шкаф в 57$.

	Плательный шкаф	**Книжный шкаф**	**Недельный запас ресурса**
Участок сборки (время)	4	3	638
Участок покраски (время)	2	1	300
Участок контроля (время)	0.5	0.6	90
Древесина (м. кв.)	32	20	4781