Федеральное агентство связи

Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики

**Зачтены задачи 1,4,5,8. Остальные задачи следует доработать. Работу над ошибками выполняйте в том же файле, сохраняя замечания преподавателя.**

# Контрольная работа

# По дисциплине: Дискретная математика

 Выполнил: Свирин А.В.

 Вариант:08

 Группа: ПБВ-72

**Проверил Бах О.А.**

Москва, 2018 г

**Вариант №8**

**№1 Доказать равенства, используя свойства операций над множествами и определения операций. Проиллюстрировать при помощи диаграмм Эйлера-Венна. а)   б)  C D  A C  B D**

**Решение:**

А)

преобразуем левую часть:

получена правая часть, т.е. равенство доказано!

Что-то Вы перемудрили. И что вдруг в 9-й строчке со знаками произошло?

Проиллюстрируем при помощи диаграмм Эйлера-Венка:

1) ****

 

Таким образом:



2) ****

 

Таким образом:



**Вывод:** т.к. диаграммы Эйлера-Венна выражений ****и **** одинаковы, следовательно равенство

**=верно!**

Б)

Докажем справедливость равенства 

⇒

⇔но ∃ только ⇒следствие ⇒, то есть равенство будет справедливо, если  или .

Докажем на примере, что равенство  не верно.

Пусть даны множества С={1,2}, D={1,2,3,4}, где С⊆D

A={1,3,5,6}, B={3,7}, где A⊆B



Таким образом, из примера видно, что A×C⊆B×D при условии, что С⊆D.

**№2 Даны два конечных множества: А={a,b,c}, B={1,2,3,4}; бинарные отношения ; . Изобразить P1, P2 графически.**

**Найти P = (P2◦P1)-1. Выписать области определения и области значений всех трех отношений: P1, P2, Р. Построить матрицу [P2], проверить с ее помощью, является ли отношение P2 рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным. P1= {(a,1),(b,3),(c,1),(c,4),(c,3),(c,2)};**

**P2= {(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,4),(4,1)}**

**Решение:**

Изобразим бинарные отношения P1;P2 графически в прямоугольной системе координат:

 

Найдём 

Определим несколько отношений:



Таким образом

*P=*{(1,a),(1,c),(2,c),(3,b),(3,c),(4,a),(4,c),(4,b),(2,a),(2,b)}

Изобразим *P* графически:



Найдём области определения и области значений для всех отношений:

δ(P1)={a, b, c}

ρ(P1)={1, 2, 3, 4}

δ(P2)={1, 2, 3, 4}

ρ(P2)={1, 2, 3, 4}

δ(P)={1, 2, 3, 4}

ρ(P)={a, b, c}

Построить матрицу P2⊆B2



Проверим с помощью полученной матрицы, является ли отношение *P2* рефлексивным: отношение является рефлексивным, если на главной диагонали матрицы нет нулей, следовательно, *отношение P2 рефлексивно.*

Проверим с помощью полученной матрицы, является ли отношение *P2* симметричным.

Отношение симметрично, если исходящая и транспонированная матрицы совпадают.

, так как [P2]=[P2]T⇒*отношение P2* является *симметричным.*

Проверим с помощью полученной матрицы, является ли отношение *P2* транзитивным: отношение транзитивно, если выполняется условие: пусть $P\_{2}=\left(\begin{matrix}p\_{ij}\end{matrix}\right)$,тогда [P2P2]=$\left(\bigvee\_{i=1}^{4}p\_{ji}∧p\_{ik}\right)\_{jk}$;

[P2P2] = $\left(\begin{matrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}1&1&0&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\end{matrix}\right)$ = $\left(\begin{matrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{matrix}\right)$. Тогда $НЕ(\left[P\_{2}P\_{2}\right]⊂P\_{2})$ ⇒*отношение* *P2 нетранзитивно.*

Умножение должно быть матричное с логическим сложением – выполнено неверно.

Антисимметричность можно представить так: пусть $P\_{2}=\left(\begin{matrix}p\_{ij}\end{matrix}\right)$,тогда $P\_{2}'$- это матрица $P\_{2}$, в которой элементы главной диагонали равны нулю. Тогда $P\_{2}$ антисимметрично тогда и только тогда когда в матрице $\left[P\_{2}^{'} P\_{2}^{'}\right]$ элементы главной диагонали равны нулю (ибо $\left(\bigvee\_{i=1}^{4}p'\_{ji}∧p'\_{ij}\right)\_{jj}$- элементы главной диагонали, а в этом выражении элементы главной диагонали $p'\_{ii}$ являются нулевыми).

$\left[P\_{2}^{'} P\_{2}^{'}\right]= \left(\begin{matrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{matrix}\right)$. Тогда наша матрица *P2 не антисимметрична.*

Утверждение сомнительно. Слова нужно как-то переставить…

**№3 Задано бинарное отношение P; найти его область определения и область значений. Проверить по определению, является ли отношение Pрефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным. P⊆R2, P = {(x,y) | y < x – 1**}.

**Решение:**

Из замкнутости по сложению множества действительных чисел:

$D\left(P\right)=\left\{x\in R | ∃y:(x,y)\in P\right\}, \left(∀x ∃y=x-2\in R:y<x-1\right)\rightarrow D\left(P\right)=R$;

$R\left(P\right)=\left\{y\in R \right| ∃x:(x,y)\in P\}, \left(∀y ∃x=y+2\in R:y<x-1\right)\rightarrow R\left(P\right)=R$;

А конкретнее? Просто возможные значения х, без указания у, и т.д. Какие значения может принимать х? И так же – у?

Проверим какими свойствами обладает отношение *P*:

1. *Рефлексивность*

Проверим выполняется ли условие *xPx⇔ x<x-1* неравенство ложное. Таким образом, *отношение* *P* не является рефлексивным.

1. *Симметричность*

*Проверим выполняется ли условие xPy⇔yPx*

*Рассмотрим такие* $\left(x,y\right)\in R^{2}:x=10, y=0.$ *Так как* $\left(0<10-1\right) и НЕ(10<0-1)$*, значит* $∃\left(x,y\right)\in R^{2}:xPy И НЕ(yPx)$*. Значит, отношение не симметрично.*

*3)* *Антисимметричность*

$∀\left(x,y\right)\in R^{2} xPy \leftrightarrow \left(y<x-1\right)\rightarrow \left(y-1<x-2\right)\rightarrow НЕ\left(y-1>x\right)\rightarrow НЕ (yPx).$ *В таком случае, наше отношение антисимметрично.*

1. *Транзитивность*

$∀\left(x,y,z\right)\in R^{3}:xPy\leftrightarrow \left(x-1>y\right)\rightarrow (x-1>y-1)$*. Тогда если одновременно выполняется* $yPz$*, то* $\left(x-1>y-1>z\right)\rightarrow xPz.$ *Отношение транзитивно.*

Нужно показать, что оно выполнимо **всегда**, а не для каких-то конкретных значений.

**№4 Доказать утверждение методом математической индукции: 12+ 22+ 32+ … + n2 = n·(n+1)(2·n+1)/6.**

**Решение:**

Докажем, что

12+ 22+ 32+ … + n2 = n·(n+1)(2·n+1)/6

1. База индукции:

Проверим левую часть равенства при *n=1* подставляем в левую часть равенства: 12=1; подставляем *n* в правую часть равенства: 

Таким образом значение левой части равенства равно значению правой части равенства, т.е. равенство справедливо.

1. Индукционный переход:

Предположим, что , и докажем, что .

Преобразуем левую часть ⇒ получена правая часть равенства, т.е. равенство доказано.

Таким образом, в соответствии с принципом математической индукции равенство  справедливо при любом натуральном *n.*

**№5 Семеро сотрудников фирмы направляются на изучение иностранного языка, причем нужно распределить их для изучения английского, немецкого и французского языков (каждый изучает только один язык). Сколько существует различных способов такого распределения? Сколькими способами они могут устроиться заниматься в двух совершенно одинаковых комнатах библиотеки (не менее одного в комнате)?**

**Решение:**

Следует определить число разбиений множества на заданное количество подмножеств.

Множество *X={*1,2,3,4,5,6,7*}*; *k=*3

1. так как группы, на которые следует разбить исходное множество различны, следовательно, речь идёт об упорядоченных разбиениях.

Разбиения на 3 подмножества возможны на 1, 1, 5 элемента в разном порядке, на 1, 2, 4 элемента в разном порядке, на 1, 3, 3 элемента в разном порядке, на 2, 2, 3 элемента тоже в разном порядке.

Их количество вычислим согласно формулам:

**

**

R(7,3)=R(7;1,1,5)+R(7;1,5,1)+R(7;5,1,1)+R(7;1,2,4)+R(7;2,1,4)+R(7;4,1,2)+ +R(7;1,4,2)+R(7;2,4,1)+R(7;4,2,1)+R(7;1,3,3)+R(7;3,1,3)+R(7;3,3,1)+R(7;2,2,3)+ +R(7;2,3,2)+R(7;3,2,2)=

б) так как комнаты одинаковы, значит, порядок значения не имеет, и речь идёт о разбиениях неупорядоченных.

Так как есть ограничивающие условия, то для вычисления будем использовать упорядоченные разбиения, устранив их из формулы порядка.

Разбиения на два подмножества возможны на 1;6 элементов, на 2;5 элементов, на 3;4 элемента.

Их количество вычислим по формуле: **



**Ответ:** а) существует 1806 способов распределить 7 сотрудников фирмы для изучения английского, немецкого и французского языков

б) 63 способами могут устроить 7 сотрудников фирмы для занятий в двух одинаковых комнатах библиотеки.