**Вариант 1**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:

$Z = x^4 - 6xy^2 - 7y^3$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = Ln(x^2 + y^2)$

3. Исследовать функцию $Z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{3}{\sqrt{2x + y}}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

$2\sqrt{y} - y' = 0 \quad y(0) = 1$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{x+8y}{8x+y}$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

$y' + 2xy = 3x^2e^{-x^2} \qquad y(0) = 0$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:

$y'' - 7y' + 10y = 0 \qquad y(0) = 2; \quad y'(0) = -1$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_1^3 dx \int_2^{x^2+4} \frac{1}{x^2} dy$

**Вариант 2**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:

$Z = x^3 + 5xy^3 - 3x^2y$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = \arcsin \frac{x}{y}$

3. Исследовать функцию $Z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 4$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{3}{2x + 4}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

$y' sinx - ylny = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

$xy' - y = y^2 sinx \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:

$y'' + 2y' + 10y = 0 \qquad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_0^2 dx \int_x^{x^2} (x + 2y)dy$

**Вариант 3**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:

$Z = 3x + 3y^2 - 5x^2y^2$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = \sqrt{2xy + y^2}$

3. Исследовать функцию $Z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 3$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{x+3}{x^2+y^2-4}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$(1+y^2)+(1+x^2)y' = 0 \quad y(1) = 2$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{x+y}{x-y}$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' + 2xy = xlnx\, e^{-x^2} \qquad y(1) = 0$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_1^2 dx \int_0^3 (x^2 + y^2)dy$

**Вариант 4**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 2x^2y - 8xy^2 + x^3 + y^3$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = e^{x^2y+y^3}$

3. Исследовать функцию $Z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y + 2$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{3}{x^2+y}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$\sqrt{x}y' = 8y \quad y(0) = 2$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' - yctgx = \frac{1}{sinx} \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' + 8y' + 7y = 0 \qquad y(0) = 2; \quad y'(0) = 1$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_0^3 dx \int_0^2 (x^2 + 2xy)dy$

**Вариант 5**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 3x^2y^2 + 4xy^3 - 7x^3y$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = y^{5x}$

3. Исследовать функцию $Z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 17$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{2}{2x^2-y}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$(1+y)-(1-x)y' = 0 \quad y(1) = 2$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' - \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} = 0$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$xy' - y = x^2 sinx \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' + 9y \quad = 0 \qquad y(\pi) = 0; \quad y'(\pi) = 1$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_2^6 dx \int_1^4 (x + y)dy$

**Вариант 6**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:

$Z = 4x^5 - 3x^2y^3 - 6y^5$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = \frac{2}{\sqrt{2x+3y}}$

3. Исследовать функцию $Z = x^2 + xy + y^2 + 4x - y + 5$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{3}{\sqrt{2x+y}}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$\sqrt{1-x^2}y' + xy = 0 \quad y(0) = 2$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' + xtg\frac{y}{x} = y$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$cos^2xy' + y = tgx \qquad y(0) = -1$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 7y' + 12y = 0 \qquad y(0) = 2; \quad y'(0) = -2$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_2^3 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy$

**Вариант 7**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:

$Z = x^3y - 3xy^3 + y^5$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = tg(x^2 + y)$

3. Исследовать функцию $Z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y + 3$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{3}{\sqrt{2x^2+y}}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$xyy' = 1 - x^2 \quad y(2) = 1$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' + yln\frac{y}{x} = 0$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' + \frac{1}{x}y = xy^2 \qquad y(1) = 1$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' + 9y' = 0 \qquad y(0) = 1; \quad y'(0) = -3$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_0^1 dx \int_1^2 (x^2 + y^2)dy$

**Вариант 8**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:

$Z = 2xy^3 - 4x^3y - y^4$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = Sin\frac{x}{y}$

3. Исследовать функцию $Z = 1 - x + y - 5xy - 3x^2 - 3y^2$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}y' = 0 \quad y(0) = 0$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{x^2-y^2}{xy}$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$(1+x^2)y' + y = y^2 arctgx \qquad y(0) = 1$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad y(0) = 0; \;\; y'(0) = 1$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_{-2}^{2} dy \int_{0}^{y^2} (2x+y)dx$

**Вариант 9**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = xy^3 - 2x^3y + 2y^4$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = \frac{x-y}{x^2+y^2}$

3. Исследовать функцию $Z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y + 1$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{x+3}{\sqrt{\frac{1}{xy}}}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y'(1+y) = ysinx \quad y(0) = 1$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(x-y)y' = 2x + y$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' + 3x^2y = x^3e^{-x^2} \qquad y(0) = 0$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 5; \;\; y'(0) = 0$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_{0}^{1} dx \int_{x}^{4x} (x+2y)dy$

**Вариант 10**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 7x - 3y + 5x^3y^2$

2. Найти полный дифференциал функции $\boldsymbol{Z = ln(2x + y^3)}$

3. Исследовать функцию $Z = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x + 12y + 10$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \ln(x+3-y) + \sqrt{x^2 - y}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' = (1-2x)\,y \quad y(1) = 2$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{2y}{2x-y}$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$xy' - y = x^2 cosx \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 2y' + 5y = 0 \qquad y(0) = -1; \quad y'(0) = 0$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_1^4 dx \int_x^{2\sqrt{x}} \frac{y}{x} dy$

**Вариант 11**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = y^3 + 5x^3y - 3xy^2$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = \arcsin\frac{2y}{x}$

3. Исследовать функцию $\mathbf{Z = 3xy - x^2 - 3y^2 + x + 3}$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{x+3}{\sqrt{\frac{x^2}{2} + y^2 - 1}}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' - xy^2 = 0 \quad y(1) = -2$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(2x + y)y' = x + 2y$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' sin^2 x + y = ctgx \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' + 16y' = 0 \qquad y(\pi) = -1; \quad y'(\pi) = 0$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_1^2 dy \int_{2y}^{4y} xy dx$

**Вариант 12**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 3y + 3x^2 - 5x^3y^2$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = \sqrt{4xy + x^2}$

3. Исследовать функцию $\mathbf{Z = x^2 + xy - y^2 - 5x + 5y - 2}$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \sqrt{\frac{x+3}{y-4}}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$xy' + y^2 = 0 \quad y(1) = -1$

6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $(x - 2y)y' = x + y$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$\sqrt{1 - x^2} y' + y = y^2 arcsinx \qquad y(0) = -1$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' + 10y' + 25y = 0 \qquad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 y dy$

**Вариант 13**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 2xy^2 - 8x^2y + x^3 + y^2$
2. Найти полный дифференциал функции $Z = e^{xy^2 + x^3}$
3. Исследовать функцию $Z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y + 5$
4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \ln(y-2) + \sqrt{-x^2 + y}$
5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$x(y^2 - 4) + yy' = 0 \quad y(0) = 2$
6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{x+3y}{3x+y}$
7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = arctg^2 x \qquad y(0) = 0$
8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 6y' = 0 \qquad y(0) = 2; \quad y'(0) = -2$
9. Вычислить повторный интеграл $\int_1^2 dx \int_x^{4x} (x + 2y)dy$

**Вариант 14**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 3x^3y^2 + 4x^3y - 7xy^3$
2. Найти полный дифференциал функции $Z = y^{3x-1}$
3. Исследовать функцию $Z = 5 + 4x + 10y - 4xy - 2x^2 - 3y^2$
4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \ln(x+2) + \ln(y-x)$
5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' + 2y = 0 \quad y(0) = 4$
6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{y}{x} + sin^2\frac{y}{x}$
7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' + 3ytg3x = sin6x \qquad y(0) = \frac{1}{3}$
8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 4y' + 4y = 0 \qquad y(0) = 1; \quad y'(0) = 3$
9. Вычислить повторный интеграл $\int_0^3 dx \int_{x^2}^{9} (x^2 - y)dy$

**Вариант 15**

1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 6$
2. Найти полный дифференциал функции $Z = \frac{3}{\sqrt{3x + 2y}}$
3. Исследовать функцию $Z = 2x^2 + 3xy + 2y^2 - 4x - 10y + 12$
4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \sqrt{\frac{y+3}{x-4}}$
5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y^2y' - y(1+x) = 0 \quad y(1) = 1$
6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{xy+y^2}{2x^2+xy}$

7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$(1+x^2)y' + y = arctgx \qquad y(0) = 1$
8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 8y' + 15y = 0 \qquad y(0) = 1; \quad y'(0) = -2$
9. Вычислить повторный интеграл $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} (3x - 2y)dx$

**Вариант 16**
1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 2xy^3 - 3x^3y + x^5$
2. Найти полный дифференциал функции $Z = ctg(x + y^2)$
3. Исследовать функцию $Z = x^2 - xy + 2y^2 + 2x - 8y + 3$
4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \sqrt{\frac{x+y}{x+1}}$
5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y^2y' + 3x = 0 \quad y(1) = 1$
6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$
7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 4\frac{arctgx}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{y} \qquad y(0) = 1$
8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 4y' + 17y = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
9. Вычислить повторный интеграл $\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} x^2 y dy$

**Вариант 17**
1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 2x^3y - 4xy^3 - x^4$
2. Найти полный дифференциал функции $Z = \cos\frac{y}{x}$
3. Исследовать функцию $Z = xy - 2x^2 - y^2 + 7x - 7y - 10$
4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \frac{x+3}{\sqrt{\frac{x^2}{9} + y^2 - 1}}$
5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$(1+y^2) - 3xyy' = 0 \quad y(1) = 2$
6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{x+y}{x-y}$
7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' + \frac{1}{sin^2x}y = y^2\frac{ctgx}{sin^2x} \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y(1) = 0; \quad y'(1) = 2$
9. Вычислить повторный интеграл $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} xydy$

**Вариант 18**
1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = x^2y - 2xy^3 + 2x^4$

2. Найти полный дифференциал функции $Z = \frac{y-x}{2x+y}$

3. Исследовать функцию $Z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 7$

4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \sqrt{\frac{x+y}{2-x^2-y}}$

5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$xy' + y = 3 \quad y(1) = 2$
6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' = y + ln\frac{y}{x}$
7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$y' + \frac{2}{x}y = x^2y^2 \qquad y(1) = 1$
8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' + y = 0 \qquad y(\pi) = -1; \quad y'(\pi) = -4$
9. Вычислить повторный интеграл $\int_0^2 dx \int_x^{2x} xydy$

**Вариант 19**
1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 5x - 4y + 2x^2y^3$
2. Найти полный дифференциал функции $Z = \sqrt{5x^3 + y^2}$
3. Исследовать функцию $Z = x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x + 3y + 1$
4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \sqrt{\frac{-x^2+y}{2-x^2-y}}$
5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$yy' - 2x = 0 \quad y(-1) = 2$
6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $xy' = y + xsin\frac{y}{x}$
7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$cos^2xy' + y = y^2tgx \qquad y(0) = -1$
8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' + 2y' + 10y = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:
$y'' - 7y' + 6y = 0 \qquad y(0) = 2; \quad y'(0) = 0$
9. Вычислить повторный интеграл $\int_1^2 dx \int_x^{x^2} (x-y)dy$

**Вариант 20**
1. Найти частные производные первого и второго порядка для функции:
$Z = 2xy - 4y^2 + 2xy^3$
2. Найти полный дифференциал функции $Z = e^{yx^2+y^2}$
3. Исследовать функцию $Z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 6$
4. Найти и изобразить область определения для функции $Z = \sqrt{\frac{-x^2+y}{2-x^2-y}}$
5. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$(2x+1)y' + y = 0 \quad y(4) = 1$
6. Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения: $x^2y' = y^2 + xy + x^2$
7. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:

$y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y(0) = -1$

8. Найти общее и частное решение дифференциального уравнения второго порядка:

$y'' + 8y' + 16y = 0 \qquad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$

9. Вычислить повторный интеграл $\int_0^2 dx \int_0^{12x} xydy$

## <u>РАЗБОР ТИПОВОГО ЗДАНИЯ:</u>

<u>Задание 1.</u>

$Z=5yx^2–3xy^3–2x–y+5$

$Z'_x\,(y=const)=(5y\underline{x}^2–3\underline{x}y^3–2\underline{x}–y+5)'_x=5y(x^2)'-3y^3(x)'-2(x)'-(y)'+(5)'=10xy-3y^3-2-0+0$

$Z'_y(x=const)= (5\underline{y}x^2–3x\underline{y}^3–2x–\underline{y}+5)'_y=5x^2(y)'–3x(y^3)'-0-(y)'+0=5x^2–9xy^2–1$

$Z''_{xx} = (Z'_x)'_x = (y=const)=(10\underline{x}y-3y^3-2)'_x=10y$

$Z''_{yy} = (Z'_y)'_y =(x=const)= (5x^2–9x\underline{y}^2–1)'_y= -18xy$

$Z''_{xy} = (Z'_x)'_y=(x=const)= (10x\underline{y}-3\underline{y}^3-2)'_y= 10x-9y^2$

$Z''_{yx} = (Z'_y)'_x=(y=const)= (5\underline{x}^2–9\underline{x}y^2–1)'_x= 10x-9y^2$

(*- подчёркнуты переменные, не подчеркнуты это постоянные величины)

<u>Задание 2:</u>

$Z = \sqrt{xy + y^3}$

Так как функция сложная то производная равна

$$Z'_x = \frac{1}{2\sqrt{xy+y^3}}\left(xy+y^3\right)'_x = \frac{1}{2\sqrt{xy+y^3}}\left(y(x)'_x + 0\right) = \frac{y}{2\sqrt{xy+y^3}}$$

$$Z'_y = \frac{1}{2\sqrt{xy+y^3}}\left(xy+y^3\right)'_y = \frac{1}{2\sqrt{xy+y^3}}\left(x(y)'_y + (y^3)'_y\right) = \frac{x+3y^2}{2\sqrt{xy+y^3}}$$

$$dZ = Z'_x dx + Z'_y dy \Rightarrow dZ = \frac{y}{2\sqrt{xy+y^3}}dx + \frac{x+3y^2}{2\sqrt{xy+y^3}}dy$$

<u>Задание 3:</u> Исследовать на экстремум функцию $Z=3x^2+3xy+y^2–6x–2y+7$

1. $Z'_x = 6x+3y–6 \qquad Z'_y= 2y+3x–2$
2. Решим систему:

$\begin{cases} 6x+3y-6=0 \\ 3x+2y-2=0 \end{cases} \quad y=2–2x$

$3x+2(2–2x)–2=0 \qquad x=2$

$y=2-2(2)=–2 \qquad (2;–2)$– критическая точка

3. $Z''_{xx}=6=A \quad Z''_{xy}=3=B \quad Z''_{yy}=2=C$
4. $AC–B^2=3 >0$ – экстремум есть и т.к. $A=6>0$ следовательно (2;–2) – точка минимума.
5. $z(2;–2) = 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2\cdot(-2) + (-2)^2 - 6\cdot 2 - 2\cdot(-2) + 7 = 12 - 12 + 4 - 12 + 4 + 7 = 3$

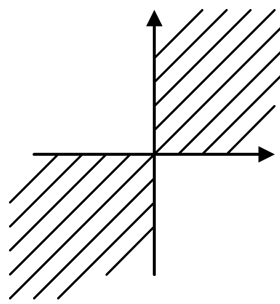
(2;–2;3) – точка минимума.

<u>Задание 4:</u>

Найти область определения для функции $Z=\sqrt{xy}$

Корень существует, если $xy\geq 0$, это возможно когда

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$



область определения функции двух переменных обычно изображается штриховкой в системе ПДСК координат на плоскости.

<u>Задание 5.</u>

Найти общее и частное решение дифференциального уравнения:
$(3x^2-2)y'+xy=0 \quad y(1)=3$
Заменим $y'=\frac{dy}{dx}$
$(3x^2-2)\frac{dy}{dx}+xy=0$ умножим обе части на $dx$
$(3x^2-2)dy+xydx=0$
$(3x^2-2)dy=-xydx$
$$\frac{dy}{y}=\frac{-x}{3x^2-2}dx$$
Проинтегрируем обе части
$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{-x}{3x^2-2}dx$$
Решим интеграл справа применив метод замены переменной
$$\int\frac{-x}{3x^2-2}dx=\begin{bmatrix} 3x^2-2=t \\ d(3x^2-2)=d(t)\Rightarrow \\ 6xdx=dt\Rightarrow\ -xdx=-\frac{dt}{6}\end{bmatrix}=\int\frac{-dt}{6t}=-\frac{1}{6}ln|t|=-\frac{1}{6}ln|3x^2-2|$$
Вернемся к уравнению
$$ln|y|=-\frac{1}{6}ln|3x^2-2|+c$$
Для того чтобы выразить y пропотенцируем обе части (возьмем функцию e от обеих частей уравнения)
$$\mathrm{e}^{ln|y|}=\mathrm{e}^{\mathrm{c}-\frac{1}{6}ln|3x^2-2|}$$
$$y=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{c}}}{e^{ln|3x^2-2|^{1/6}}}$$
$$y=\frac{c}{|3x^2-2|^{1/6}}$$
$y=\frac{c}{\sqrt[6]{3x-2}}$ общее решение
Найдем частное решение. Из условия задачи $y(1)=3$ подставим в найденное решение x=1 y=3.
$3=\frac{c}{\sqrt[6]{3\cdot1-2}}$ $\quad 3=\frac{c}{1}$ $\quad$ c = 3
Подставим в общее решение найденное c, получим частное решение
$$y=\frac{3}{|3x^2-2|^{1/6}}$$
Задание 6.
Проверить, является ли уравнение однородным. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$x^3y'=xy^2-yx^2$
Выразим $\quad y'=\frac{xy^2-yx^2}{x^3}$
Проверим является ли правая часть однородной функцией
$$f(tx,ty)=\frac{tx(ty)^2-ty(tx)^2}{(tx)^3}=\frac{t^3xy^2-t^3yx^2}{t^3x^3}=\frac{t^3(xy^2-yx^{2)}}{t^3x^3}=\frac{xy^2-yx^2}{x^3}=f(x,y)$$
Следовательно, уравнение однородное.
$y'=\frac{xy^2-yx^2}{x^3}$. Разделим правую часть почленно на $x^3$ и сократим.
$$y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$$
Подставим $[\,y=u\cdot x\,,\ y'=u'x+u\,]$
$$u'x+u=\frac{u^2x^2}{x^2}-\frac{u}{x}$$
$$u'x+u=u^2-u$$

$u'x = u^2 - 2u$
$\frac{du}{dx}x = u^2 - 2u$
$xdu = (u^2 - 2u)dx$
$\frac{du}{u^2 - 2u} = \frac{dx}{x}$
$\int \frac{du}{u \ \ (u-2)} = \int \frac{dx}{x}$
$\int \left(\frac{-{}^1/_2}{u} \cdot \frac{{}^1/_2}{(u-2)}\right) du = \int \frac{dx}{x}$
$\frac{1}{2} ln \left|\frac{u-2}{u}\right| = \ln|x| + c$
$ln \left|\frac{u-2}{u}\right| = 2\ln|x| + c$
$e^{ln\left|\frac{u-2}{u}\right|} = e^{2\ln|x|+c}$
$\frac{u-2}{u} = x^2c$
Подставим $u = \frac{y}{x}$
$\frac{\frac{y}{x} - 2}{\frac{y}{x}} = x^2c$
$\frac{y-2x}{y} = x^2c$

Задание 7.
$y' - y = e^x$: $y(0) = 1$

Подставляем $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$
$u'v + uv' - uv = e^x$
$u'v + u(v' - v) = e^x$ (*)
Выражение в скобках приравниваем к нулю
$v' - v = 0$
$\frac{dv}{dx} = v$
$\int \frac{dv}{v} = \int dx$
$\ln|v| = x$
$v = e^x$
Вернемся к уравнению (*), т.к. выражение в скобках равно нулю, то уравнение $u'v + u \cdot 0 = e^x$ примет вид $u'v = e^x$
Подставим в него найденное V $u' \cdot e^x = e^x$
$u' = 1$
$\frac{du}{dx} = 1$
$u = \int dx = x + C$
$y = uv = (x + C) \cdot e^x$, где $C = const$
Найдем частное решение, т.к. $y(0) = 1$, то подставим y=1 x=0 в решение

$1 = (0 + c)e^0$ получим c=1
Частное решение примет вид: $y = (x + 1)e^x$

Задание 8.

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 1;\quad y'(0) = 2$

**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$
$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \, , \quad \lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Получены два различных действительных корня .
Ответ запишем, руководствуясь формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x, \ где \ C_1, C_2 - const$
$y(0) = 1;\quad y'(0) = 2$
Т.к.
$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$; следовательно $y' = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$

$$\begin{cases} c_1 e^{-2\cdot 0} + c_2 e^0 = 1 \\ -2c_1 e^{-2\cdot 0} + c_2 e^0 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{3} \\ c_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Частное решение примет вид
$$y = -\frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{4}{3}e^x$$

**Задание 9.**
Вычислить $\int_1^2 dx \int_1^x \ (x^2 - xy)dy =$
Вычислим сначала внутренний интеграл
$$\int_1^x (x^2 - xy)dy = x^2 \int_1^x dy - x\int_1^x ydy = x^2 y|_1^x \ - x\frac{y^2}{2}\bigg|_1^x =$$
$$x^2(x-1) - \frac{x}{2}(x^2 - 1) = x^3 - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}$$
В результате получится функция переменной x, эта функция берется в качестве подынтегральной для внешнего интеграла
Теперь вычислим внешний интеграл
$$\int_1^2 \left(\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right)dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right)\bigg|_1^2 = \left(\frac{16}{8} - \frac{8}{3} + \frac{4}{4}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 3 - \frac{8}{3} - \frac{1}{24} = 0.29$$