ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2
"Дослідження якості регулювання та стійкості лінійних САУ"

Мета роботи – дослідити якість регулювання і стійкість лінійних САУ

Теоретичні відомості

Під *стійкістю* системи розуміють її властивість повертатися до стану усталеної рівноваги після зняття збурення, що порушило цю рівновагу. *Нестійка* система неперервно віддаляється від рівноважного стану або здійснює навколо нього коливання зі зростаючою амплітудою.

Стійкість лінійної системи визначається не характером збурення, а структурою самої системи (рис. 4.1).

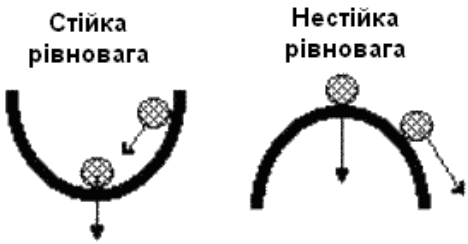

Рисунок 4.1 – Визначення стійкості лінійної системи за її структурою

Кажуть, що *система стійка "в малому"*, якщо визначений факт наявності стійкості, але не визначені її межі. *Система стійка "у великому",* коли визначені межі стійкості й те, що реальні відхилення не виходять за ці межі.

Згідно з класичним методом розв'язання диференціального рівняння має такий вигляд:

$$y(t) = y_{вим}(t) + y_{віл}(t),$$

де $y_{віл}(t)$ – *загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння,* а саме рівняння з нульовою правою частиною:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-1)} y' + a_{(n)} y = 0.$$

Фізично це вказує, що всі зовнішні дії зняті й система абсолютно вільна, її рух визначається лише власною структурою. Тому розв'язок даного рівняння називається вільною складовою загального розв'язку. $y_{вим}(t)$ – *розв'язок неоднорідного диференційного рівняння,* під яким розуміють рівняння з ненульової правої частини. Фізично це вказує, що до системи прикладена зовнішня дія $u(t)$. Тому друга складова загального розв'язку називається вимушеною. Вона визначає вимушений усталений режим роботи системи після закінчення перехідного процесу.

Кожна складова загального розв'язку рівняння динаміки знаходиться окремо. Вимушена складова знаходиться на основі розв'язку рівняння статики для даної системи для часу $t \to \infty$. Вільна складова становить суму з n окремих складових:

$$y_{віл}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i p^{-p_i \cdot t} ,$$

де p_i – корені характеристичного рівняння

$$D(p) = a_0 p_n + a_1 p_n\text{-}1 + a_2 p_n\text{-}2 + \ldots + a_n = 0.$$

Корені можуть бути або дійсними $p_i = a_i$, або комплексно-спряженими $p_i = a_i \pm j\omega i$. Постійні інтегрування A_i визначаються виходячи з початкових і кінцевих умов, підставляючи в загальний розв'язок u, y та їх похідні в моменти часу t=0 та $t \to \infty$.

Кожному від'ємному дійсному кореню відповідає експоненціальна загасальна в часі складова $y_{віл}(t)_i$, кожному

додатному – експоненціальна розбіжна, кожному нульовому кореню відповідає $y_{віл}(t)_i = const$ (рис. 4.2).

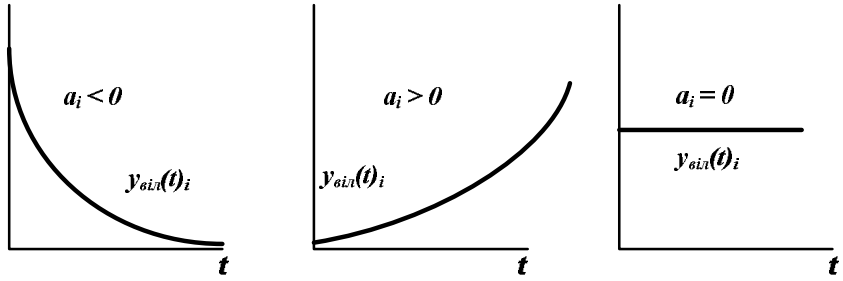

Рисунок 4.2 – Експоненціальна розбіжність

Пара комплексно-спряжених коренів з від'ємною дійсною частиною визначає загасальні коливання з частотою ω_i, при додатній дійсній частині – розбіжні коливання, при нульовій – незагасальні (рис. 4.3)

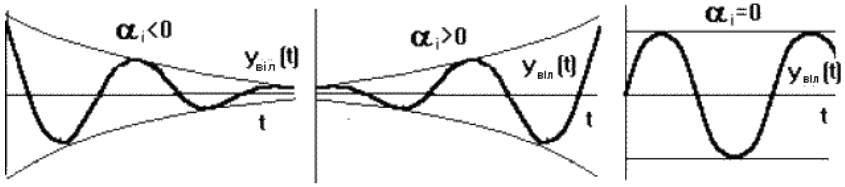

Рисунок 4.3 – Незагасальні коливання

Оскільки після зняття збурення $y_{вим}(t) = 0$, то стійкість системи визначається тільки характером вільної складової $y_{віл}(t)$. Тому *умова стійкості системи за Ляпуновим* формулюється так: у стійкій системі вільна складова розв'язку рівняння динаміки, записаному в відхиленнях, повинна прямувати до нуля, а саме згасати.

Виходячи з положення на комплексній площині, корені з від'ємними дійсними частинами називаються *лівими*, з додатними – *правими* (рис. 4.4).

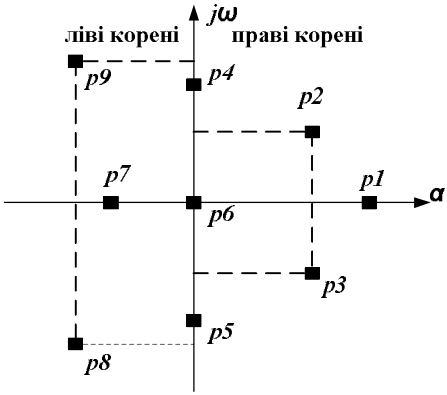

Рисунок 4.4 – Корені характеристичного рівняння на комплексній площині

Тому умову стійкості лінійної САУ можна сформулювати таким чином: для того щоб система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб усі корені її характеристичного рівняння були лівими. Якщо хоча б один корінь правий, то система нестійка. Якщо один із коренів дорівнює нулю (в системах, де $a_n = 0$), а останні ліві, то система знаходиться на *межі аперіодичної стійкості.* Якщо уявні частини однієї або декількох пар комплексно-спряжених коренів дорівнюють нулю, то система знаходиться на *межі коливальної стійкості.*

Правила, що дозволяють говорити про знаки коренів характеристичного рівняння без його розв'язання, називаються *критеріями стійкості.* Їх, можна поділити на *алгебраїчні,* що базуються на складанні по даному характеристичному рівнянню за визначеними правилами алгебраїчних виразів, за якими можливо твердити про стійкість САУ, і *частотні,* що базуються на дослідженні частотних характеристик.

Характеристичне рівняння системи з допомогою теореми Вієта може бути подане у вигляді:

$$D(p) = a_o p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + ... + a_n = a_o(p-p_1)(p-p_2)...(p-$$

$-p_n)=0,$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ – корені цього рівняння. Якщо система стійка, то всі корені ліві, а це означає, що дійсні частини всіх коренів від'ємні, що можна записати як $a_i = -|a_i| < 0$. Підставимо їх у рівняння

$$a_0 \cdot (p + |a_1|) \cdot (p + |a_2| - j\omega 2) \cdot (p + |a_2| + j\omega 2) \cdot ... = 0.$$

Перемножуючи комплексно-спряжені вирази, отримаємо

$$a_0 \cdot (p + |a_1|) \cdot ((p + |a_2|)2 + (\omega 2)2) \cdot ... = 0.$$

Після розкриття дужок отримаємо вираз

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + ... + a_n = 0.$$

Оскільки в дужках немає жодного від'ємного числа, то жоден із коефіцієнтів $a_0, a_1, ..., a_n$ не буде від'ємним. Тому *необхідною умовою стійкості* САУ є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння: $a_0 > 0, a_1 > 0, ... , a_n > >0$. У подальшому будемо розглядати тільки рівняння, де $a_0 > 0$. В іншому випадку рівняння домножуватимо на -1.

Розглянуті умови є необхідними, але недостатніми. Необхідні й достатні умови дають *алгебраїчні критерії Рауса і Гурвіца*.

Раус запропонував критерій стійкості САУ у вигляді алгоритму, за яким заповнюється спеціальна таблиця із застосуванням коефіцієнтів характеристичного рівняння:

1) у першому рядку записуються коефіцієнти рівняння з парними індексами в порядку їх зростання;

2) у другому рядку – з непарними;

3) інші елементи таблиці визначаються за формулою

$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - ri \cdot c_{k+1,i-1}$, *де* $ri = c_{1,i-2}/c_{1,i-1}$, $i \geq 3$ – номер рядка, k – номер стовпця;

4) число рядків таблиці Рауса на одиницю більше порядку характеристичного рівняння

Ri	*i\k*	*1*	*2*	*3*	*4*
-	*1*	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$	...
-	*2*	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$	...
$r_3 = c_{11}/cc_{12}$	*3*	$c_{13} = c_{21} - r_3c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3c_{42}$	...
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	*4*	$c_{14} = c_{22} - r_3c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_4c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - r_4c_{43}$	...
...	...	...	...	...	...

Критерій Рауса : для того щоб САУ була стійка необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса c_{11}, c_{12}, c_{13},... були додатними. Якщо це не виконується, то система нестійка, а кількість правих коренів дорівнює числу змін знака в першому стовпці.

Гурвіц запропонував інший критерій стійкості. З коефіцієнтів характеристичного рівняння будується визначник Гурвіца Δ за алгоритмом:

1) по головній діагоналі зліва направо ставляться всі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_1 *до* a_n;
2) від кожного елемента діагоналі вгору і вниз добудовуються стовпці визначника так, щоб індекси зменшувалися зверху вниз;
3) на місце коефіцієнтів з індексами менше нуля або більше *n* ставлять нулі.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Критерій Гурвіца: для того щоб САУ була стійка, необхідно і достатньо, щоб усі n діагональних мінорів визначника Гурвіца були додатними. Ці мінори називають *визначниками Гурвіца.*

Частотні критерії стійкості – це графоаналітичні методи що, дозволяють за виглядом частотних характеристик САУ робити висновки про їх стійкість. Їх *загальною перевагою* у простій геометричній інтерпретації, наочності й відсутності обмежень на порядок диференціального рівняння.

Запишемо характеристичний поліном САУ у вигляді

$$D(p) = a_0 \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \ldots \cdot (p - p_n) = 0.$$

Його корені

$$p_i = \alpha_i + j\omega_i = | p_i | e^{j \arg(p_i)},$$

де $\arg(p_i) = arctg(\omega_i / a_i) + k\pi$,

$$|p_i| = \sqrt{\alpha_i^2 + \omega_i^2} .$$

Кожен із коренів зображують вектором на комплексній площині (рис. 4.5 а), тоді різниця $p-p_i$ зображується різницею векторів (рис. 4.5 б), де p – будь-яке число.

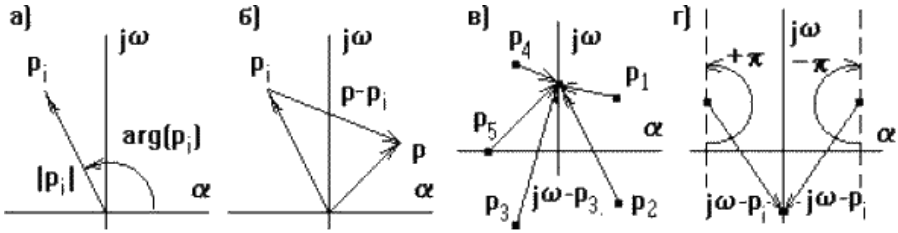

Рисунок 4.5 – Векторне зображення коренів на комплексній площині

Якщо змінювати значення p довільним чином, то кінець вектора $p-p_i$ буде переміщуватися по комплексній площині, а його початок залишатиметься непорушним, оскільки p_i – це певне незмінне значення.

В окремому випадку, якщо на вхід системи подати гармонічні коливання з різною частотою ω, то $p = j\omega$, а характеристичний поліном набере вигляду:

$$D(j\omega) = a_0 \cdot (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2) \cdot \ldots \cdot (j\omega - p_n).$$

При цьому кінці векторів $j\omega-p_i$ будуть знаходитися на уявній осі (рис. 4.5 в). Якщо змінювати ω від -∞ до +∞, то кожен вектор $j\omega-p_i$ буде повертатися відносно свого початку p_i на кут +p для лівих і –p для правих коренів (рис. 4.5 г).

Характеристичний поліном можна подати у вигляді:

$$D(j\omega) = |D(j\omega)| e^{j\arg(D(j\omega))},$$

де $|D(j\omega)| = a_0 \cdot |j\omega - p_1| \cdot |j\omega - p_2| \ldots |j\omega - p_n|$,
$arg(D(j\omega)) = arg(j\omega - p_1) + arg(j\omega - p_2) + .. + arg(j\omega - p_n)$.

Нехай з n коренів m – праві, а n-m – ліві, тоді кут повороту вектора $D(j\omega)$ при зміні ω від -∞ до +∞ дорівнює

$$\Delta \arg(D(j\omega))\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \sum_{i=1}^{n} \arg(D(j\omega - p_i))\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = (n-m)\pi - m\pi,$$

або при зміні ω від 0 до +∞ отримаємо

$$\Delta \arg(D(j\omega))\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = (n-2m)(\pi/2).$$

Звідси випливає правило: зміна аргументу вектора b при зміні частоти ω від -ω до +∞ дорівнює різниці між числами лівих і правих коренів рівняння $D(p) = 0$, помноженому на π, а при зміні частоти від 0 до +∞ ця різниця помножена на π/2.

Це є *принципом аргументу*. Він є основою всіх частотних критеріїв стійкості. Ми розглянемо два найбільш поширені критерії: критерій Михайлова і критерій Найквіста.

Хід роботи

1 Зібрати модель замкненої системи, структурна схема якої наведена на рис. 4.6. Коефіцієнт K_y встановити довільно від 0 до 10. Коефіцієнти K_1, K_2, K_3 встановити відповідно до вашого варіанта (табл. А.3).

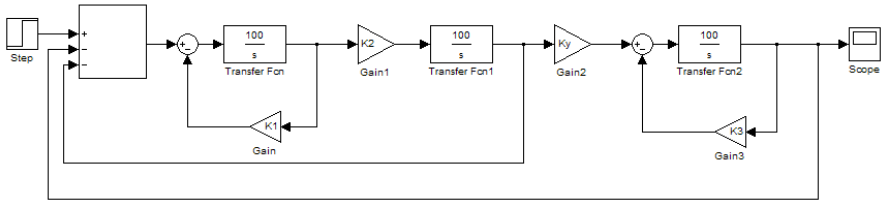

Рисунок 4.6 – Структурна схема замкненої системи

2 Змінюючи коефіцієнт K_y, спостерігайте перехідний процес. Зробіть висновки про вплив коефіцієнта підсилення K_y на стійкість замкненої системи. У звіті наведіть відповідні графіки для стійкого і нестійкого станів.

3 Визначте експериментально критичне значення коєфіцієнта підсилення $K_y = K_{кр}$, зафіксуйте момент, коли коливання на виході практично припиняють загасати. При цьому для більш точних вимірів використовуйте вхідний сигнал генератора з мінімальною частотою. У звіті з роботи наведіть відповідні графіки, коли система знаходиться на межі стійкості.

Встановіть значення $K_y = 0{,}8K_{кр}$, відповідне стійкій замкненій системі.

4 Визначити експериментально частоту зрізу системи для встановленого $K_y = 0{,}8K_{кр}$ за такою методикою:

- розімкніть головний зворотний зв'язок;
- подайте на вхід системи синусоїдальний сигнал при нульових початкових умовах;
- отримайте одночасно на екрані зображення вхідного і вихідного сигналів з допомогою мультиплексора (Mux);
- змінюючи частоту f генератора сигналів, досягніть рівності амплітуд вхідного і вихідного сигналів. Це значення частоти $f = f_{ср}$ визначає колову частоту зрізу системи $\omega_{ср}$.

5 Визначити запас стійкості за амплітудою ΔA за такою методикою:

- розімкніть головний зворотний зв'язок;
- подайте на вхід системи синусоїдальний сигнал при нульових початкових умовах;
- отримайте одночасно на екрані зображення вхідного і вихідного сигналів з допомогою мультиплексора (Mux);
- змінюючи частоту f генератора сигналів, досягніть того, щоб вхідний і вихідний сигнали знаходилися в протифазі.

Визначте різницю амплітуд вхідного і вихідного сигналу ΔA(запас стійкості по амплітуді).

6 Визначити запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$ за такою методикою:

- розімкніть головний зворотний зв'язок;

- подайте на вхід системи синусоїдальний сигнал при нульових початкових умовах;

- отримайте одночасно на екрані зображення вхідного і вихідного сигналів з допомогою мультиплексора (Mux);

- змінюючи частоту f генератора сигналів, достигніть того, щоб вхідний і вихідний сигнали мали однакову амплітуду.

Визначте запас стійкості за фазою $\Delta\varphi$.

7 Дослідіть, як впливає коефіцієнт підсилення на перерегулювання δ, y_{max}, $t_{п.п.}$. Зробіть висновки про вплив коефіцієнта підсилення на показники якості. Необхідно виміряти δ, y_{max}, $t_{п.п.}$ для трьох значень K_y і результати подати у вигляді таблиці.

Розрахункова частина

Обчислити передаточну функцію замкненої системи.

На основі алгебраїчних критеріїв стійкості визначити значення $K_y = K_{кр}$, при якому система (рис. 4.6) знаходиться на межі стійкості.

Обчислити передаточну функцію розімкненої системи при значенні $K_y = 0{,}8K_{кр}$, підставляючи значення K_1, K_2, K_3 відповідно до вашого варіанта.

Обчислити передаточні функції і побудувати ЛАЧХ і ЛФЧХ аперіодичної (рис. 4.7) і коливальної ланок (рис. 4.8).

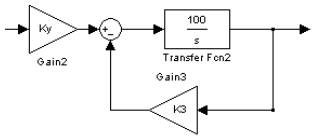

Рисунок 4.7 – Структурна схема аперіодичної ланки

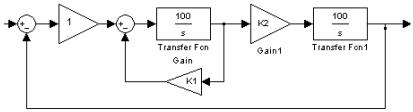

Рисунок 4.8 – Структурна схема коливальної ланки

Побудувати ЛАЧХ і ЛФЧХ розімкненої системи як суму характеристик окремих ланок.

Визначте запас стійкості за фазою і амплітудою, а також частоту зрізу розімкненої системи.

Питання для перевірки та контролю

1 Поняття, види і загальна умова стійкості динамічної системи.

2 Алгебраїчні критерії стійкості.

3 Поняття про межу стійкості.

4 Формулювання критерію стійкості Михайлова. Для аналізу яких систем можна використовувати критерій Михайлова?

5 Сформулювати критерій стійкості Найквіста. У чому переваги і недоліки критерію Найквіста?

6 Які типові ланки погіршують структурну стійкість одноконтурних систем і які покращують?

7 Поняття якості систем управління, показники якості управління.

8 Прямі показники якості управління. Які з них характеризують коливальність системи, а які її швидкодію?

9 Які із частотних показників характеризують коливальність системи, а які – її швидкодію?

10 Як впливає загальний передаточний коефіцієнт розімкненого контура системи на її стійкість у замкненому стані?

11 Яка залежність перерегулювання δ, першого максимального відхилення y_m і тривалості $t_{п.п.}$ перехідного процесу від передаточного коефіцієнта розімкненого контура?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лукас В. А. Теория автоматического управления. – М. : Недра, 1990.
2. Теорія автоматичного керування. М. Г. Попович, О. В. Ковальчук.– К. : Либідь, 2007.
3. Классические методы автоматического управления / Б. Я. Лурье, П. Дж. Энрайт; под ред. А. А. Ланнэ. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 640 с.
4. Никулин Е. А. Основы теории автоматического управления. Частотные методы анализа и синтеза систем: учеб. пособие для вузов.– СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 640 с.

Таблиця А.3 – Значення коефіцієнтів відповідно до варіанта для л. р. № 2

№ вар-та	К1	К2	К3	№ вар-та	К1	К2	К3	№ вар-та	К1	К2	К3
1	0,3	0,25	1,8	18	1,2	1,44	0,2	35	1,0	4	1
2	0,32	0,16	1,8	19	0,9	2,25	0,2	36	1,28	2,56	0,4
3	0,4	0,16	1,6	20	0,96	1,44	0,2	37	1,5	6,25	0,8
4	1,2	4	0,4	21	1,4	1,96	0,5	38	18	3,24	0,1
5	0,32	0,16	1,2	22	1,32	4,84	0,4	39	1,5	6,25	0,4
6	0,4	0,16	1,8	23	0,4	0,25	2	40	1,68	7,84	0,5
7	1,74	8,41	0,2	24	1,4	1,96	0,2	41	1,74	8,41	1,2
8	0,4	0,25	1,6	25	1,44	5,76	0,8	42	1,6	4	0,4
9	0,5	0,25	1,8	26	0,64	0,64	1,6	43	1,8	9,0	1,4
10	0,48	0,64	1,6	27	0,88	1,21	0,4	44	1,68	7,84	0,2
11	0,4	0,25	2	28	1,44	5,76	0,4	45	1,8	9,0	0,8
12	0,5	0,25	2	29	1,8	3,24	0,2	46	1,8	9,0	0,2
13	0,72	1,44	0,4	30	0,88	1,21	0,2	47	0,48	0,64	1,8
14	0,64	0,64	2	31	1,12	1,96	0,5	48	1,76	4,84	0,5
15	1,2	1,44	0,4	32	1,5	6,25	0,8	49	1,8	3,24	0,3
16	0,78	1,69	2	33	1,28	2,56	0,8	50	1,8	3,24	0,4
17	0,96	1,44	0,4	34	1,8	3,24	0,5	51	1,8	9,0	0,4