

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Сибирский государственный индустриальный университет»

Институт информационных технологий
и автоматизированных систем

Кафедра автоматизированного электропривода
и промышленной электроники

МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Методические указания по выполнению
расчётно-графической работы по дисциплинам
«Методы анализа и синтеза логических электронных устройств»
для профиля подготовки «Промышленная электроника»
направления 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,

г. Новокузнецк
2016

УДК 621. 374

Минимизация логических функций:
Метод. указ. / Составитель: Ю.А. Жаров: СибГИУ.-
Новокузнецк, 2016. - 12с.

Изложен порядок выполнения расчётно-графической работы.
Предназначено для студентов профиля подготовки
«Промышленная электроника» направления 11.03.04 «Электроника
и наноэлектроника».

1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Переменные в алгебре логики могут принимать только два значения: 0 или 1. В алгебре логики определены: отношение эквивалентности (обозначается $=$) и операции: сложения (дизъюнкции), обозначаемая знаком \cup , умножения (конъюнкции), обозначаемая знаком $\&$ или точкой, и отрицания (инверсии), обозначаемая надчёркиванием.

Алгебра логики определяется следующей системой аксиом:

$$\begin{cases} x = 0, \text{ если } x \neq 1, \\ x = 1, \text{ если } x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{0} = 1, \\ \bar{1} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \cup 1 = 1, \\ 0 \cup 0 = 0, \\ 0 \cup 1 = 1 \cup 0 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \cdot 0 = 0, \\ 1 \cdot 1 = 1, \\ 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Запись логических выражений как правило осуществляется в конъюнктивной нормальной форме КНФ или дизъюнктивной нормальной форме ДНФ. В ДНФ логические выражения записываются как логическая сумма логических произведений, в КНФ – как логическое произведение логических сумм. Логические выражения связывают значение логической функции со значениями логических переменных.

При преобразованиях логических выражений используются логические тождества:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}} &= x; x \cup 1 = 1; x \cup 0 = x; x \cdot 1 = x; x \cdot 0 = 0; x \cup x = x; \\ x \cdot x &= x; x \cup x \cdot y = x; x \cdot y \cup x \cdot \bar{y} = x; (x \cup y) \cdot (x \cup \bar{y}) = x; \\ x \cup \bar{x} \cdot y &= x \cup y; \overline{x \cdot y} = \bar{x} \cup \bar{y}; \overline{x \cup y} = \bar{x} \cdot \bar{y}. \end{aligned}$$

Любое логическое выражение, составленное из n переменных x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 с помощью конечного числа операций алгебры логики, можно рассматривать как некоторую функцию n переменных. Такую функцию называют логической. В соответствии с аксиомами алгебры логики функция может принимать в зависимости от значения переменных значение 0 или 1. Функция n логических переменных может быть определена для 2^n значений переменных, соответствующих всем возможным значениям n -разрядных двоичных чисел.

Представляют интерес следующие функции двух переменных x и y :

$f_1(x, y) = x \cdot y$ – логическое умножение (конъюнкция);

$f_2(x, y) = x \cup y$ – логическое сложение (дизъюнкция);

$f_3(x, y) = \overline{x \cdot y}$ – логическое умножение с инверсией;

$f_4(x, y) = \overline{x \cup y}$ – логическое сложение с инверсией;

$f_5(x, y) = x \oplus y = x \cdot \bar{y} \cup \bar{x} \cdot y$ – суммирование по модулю 2;

$f_6(x, y) = \overline{x \oplus y} = x \cdot y \cup \bar{x} \cdot \bar{y}$ – равнозначность.

Физическое устройство, реализующее одну из операций алгебры логики или простейшую логическую функцию, называется логическим элементом. Схема, составленная из конечного числа логических элементов по определённым правилам, называется логической схемой.

Логическая функция n переменных, принимающих 2^n значений, может быть задана в виде таблицы значений $f(v_i)$, которая она принимает в точках v_i , где $i=0, 1, \dots, 2^n-1$. Такие таблицы называются таблицами истинности. В таблице 1 представлены таблицы истинности, задающие указанные выше функции $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$.

Таблица 1 – Таблицы истинности логических функций

i	Значения переменных		Логические функции					
	x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0	0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0
2	1	0	0	1	1	0	1	0
3	1	1	1	1	0	0	0	1

Если число логических переменных не превышает $5 \div 6$, преобразования логических уравнений удобно производить с помощью карт Карно или диаграмм Вейча. Цель преобразований – получение компактного логического выражения, то есть его минимизация. Минимизацию производят объединением наборов (термов) на карте Карно. Объединяемые наборы должны иметь одинаковые значения функции (все 0 или все 1).

Например, пусть требуется найти логическое выражение для логической функции f_m трёх переменных x, y, z , которая описывается следующей таблицей истинности (таблица 2).

Таблица 2 – Таблица истинности логической функции f_m

i	x	y	z	f_m	m_i	M_i
0	0	0	0	0	-	$x \cup y \cup z$
1	0	0	1	0	-	$x \cup y \cup \bar{z}$
2	0	1	0	0	-	$x \cup \bar{y} \cup z$
3	0	1	1	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	-
4	1	0	0	0	-	$\bar{x} \cup y \cup z$
5	1	0	1	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	-
6	1	1	0	1	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	-
7	1	1	1	1	$x \cdot y \cdot z$	-

Логическое выражение заданной логической функции можно представить в виде ДНФ как логической суммы минтермов m_i или в виде КНФ как логического произведения макстермов M_i :

ДНФ: $f_m = \bar{x} \cdot y \cdot z \cup x \cdot \bar{y} \cdot z \cup x \cdot y \cdot \bar{z} \cup x \cdot y \cdot z$;

КНФ: $f_m = (\bar{x} \cup y \cup z) \cdot (x \cup \bar{y} \cup z) \cdot (x \cup y \cup \bar{z}) \cdot (x \cup y \cup z)$.

Логическая функция в ДНФ преимущественно реализуется на логических элементах И, И-НЕ. Логическая функция в КНФ преимущественно реализуется на элементах ИЛИ, ИЛИ-НЕ.

Карта Карно представляет собой таблицу, в которой представлены все минтермы. Каждый минтерм изображается на карте в виде клетки. Минтермы соседних клеток отличаются только значением одной переменной. Соседними также считаются крайние клетки каждого столбца или строки. Символ «1» обозначает прямое значение переменной, а «0» – инверсное значение переменной. Минтермы, входящие в функцию, отмечают единицами в соответствующих клетках карты. Для минтерма, не входящего в функцию, в клетках проставляется нуль или клетка остаётся пустой. Карта Карно логической функции f_m приведена на рисунке 1.

$\begin{matrix} x & y \\ z \end{matrix}$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Рисунок 1 – Карта Карно логической функции f_m

На карте Карно отмечаются группы, состоящие из 2^n ячеек, кратных 2 (2, 4, 8, ...), и содержащие 1. Каждая группа, выделенная сплошной линией, объединяет по две ячейки и соответствует логическим преобразованиям:

$$x \cdot y \cdot \bar{z} \cup x \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot (\bar{z} \cup z) = x \cdot y;$$

$$x \cdot \bar{y} \cdot z \cup x \cdot y \cdot z = x \cdot z \cdot (\bar{y} \cup y) = x \cdot z;$$

$$\bar{x} \cdot y \cdot z \cup x \cdot y \cdot z = y \cdot z \cdot (\bar{x} \cup x) = y \cdot z.$$

Минимизированное выражение, описывающее логическую функцию, представляет собой дизъюнкцию полученных при помощи карт Карно логических выражений. В результате получаем выражение в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ):

$$f_m = x \cdot y \cup x \cdot z \cup y \cdot z.$$

Для реализации логической функции на элементах 2И-НЕ преобразуем полученное выражение в базис элементов И-НЕ:

$$f_m = x \cdot y \cup x \cdot z \cup y \cdot z = \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{x \cdot z} \cdot \overline{y \cdot z}}.$$

Соответствующая схемная реализация приведена на рисунке 2. В схеме используются две интегральные микросхемы DD1 и DD2. Каждая интегральная микросхема содержит четыре логических элемента 2И-НЕ.

На рисунке 3 приведена релейно-контактная схема логического устройства, в котором логическим аргументам x , y , z соответствуют замыкающие контакты — , а инверсным значениям этих переменных соответствуют размыкающие контакты

Логической функции f соответствует исполнительное устройство (обмотка электромагнитного реле K).

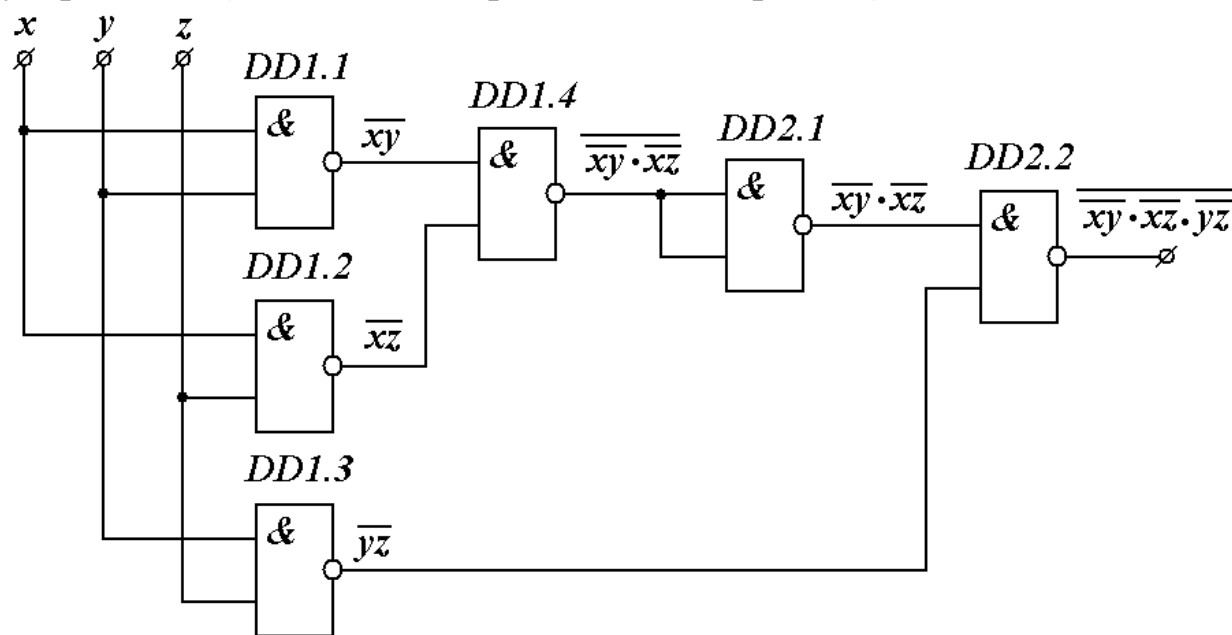


Рисунок 2 – Принципиальная схема на элементах 2И-НЕ

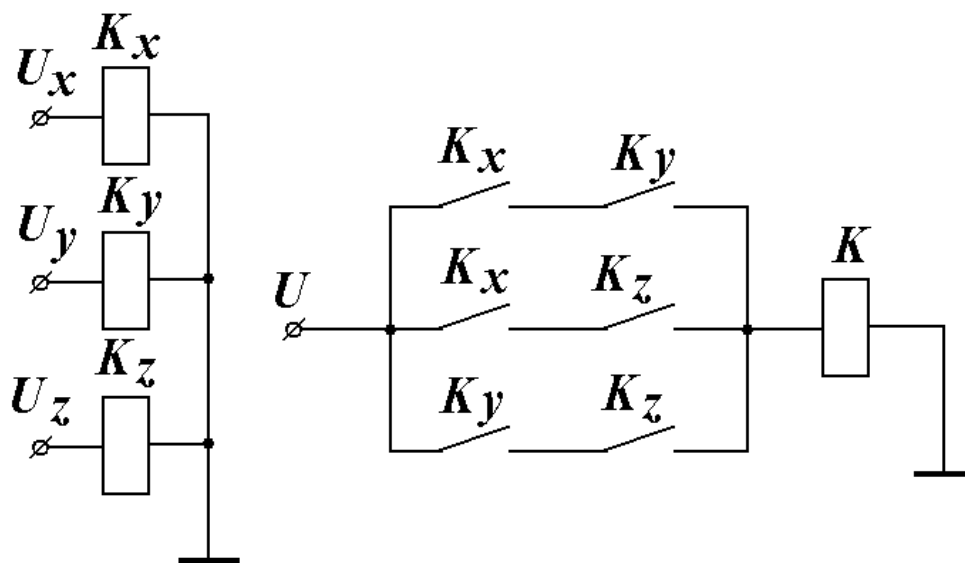


Рисунок 3 – Релейно-контактная схема логического устройства

Каждая группа, выделенная пунктирной линией на карте Карно, объединяет по две ячейки и соответствует логическим преобразованиям:

$$\begin{aligned} (x \cup y \cup z) \cdot (x \cup \bar{y} \cup z) &= x \cup z; \\ (x \cup y \cup z) \cdot (x \cup y \cup \bar{z}) &= x \cup y; \\ (x \cup y \cup z) \cdot (\bar{x} \cup y \cup z) &= y \cup z. \end{aligned}$$

В результате получаем выражение в конъюнктивной нормальной форме (КНФ):

$$f_m = (x \cup y) \cdot (x \cup z) \cdot (y \cup z).$$

Для реализации логической функции на элементах 2ИЛИ-НЕ преобразуем полученное выражение в базис элементов ИЛИ-НЕ:

$$f_m = (x \cup y) \cdot (x \cup z) \cdot (y \cup z) = \overline{\overline{(x \cup y)} \cup \overline{(x \cup z)} \cup \overline{(y \cup z)}}.$$

Соответствующая схемная реализация приведена на рисунке 4. В схеме используются две интегральные микросхемы DD3 и DD4. Каждая интегральная микросхема содержит четыре логических элемента 2ИЛИ-НЕ.

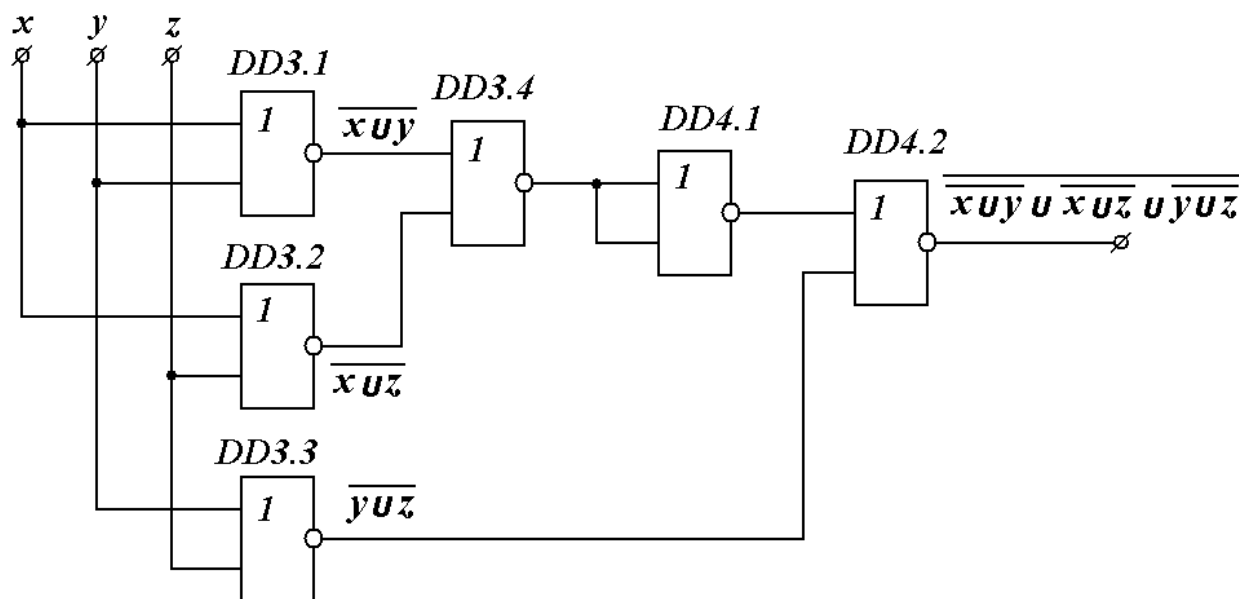


Рисунок 4 – Принципиальная схема на элементах 2ИЛИ-НЕ

На рисунке 5 приведена релейно-контактная схема логического устройства, в котором логическим аргументам x , y , z соответствуют замыкающие контакты, а инверсным значениям этих переменных соответствуют размыкающие контакты. Логической функции f соответствует исполнительное устройство (обмотка электромагнитного реле К).

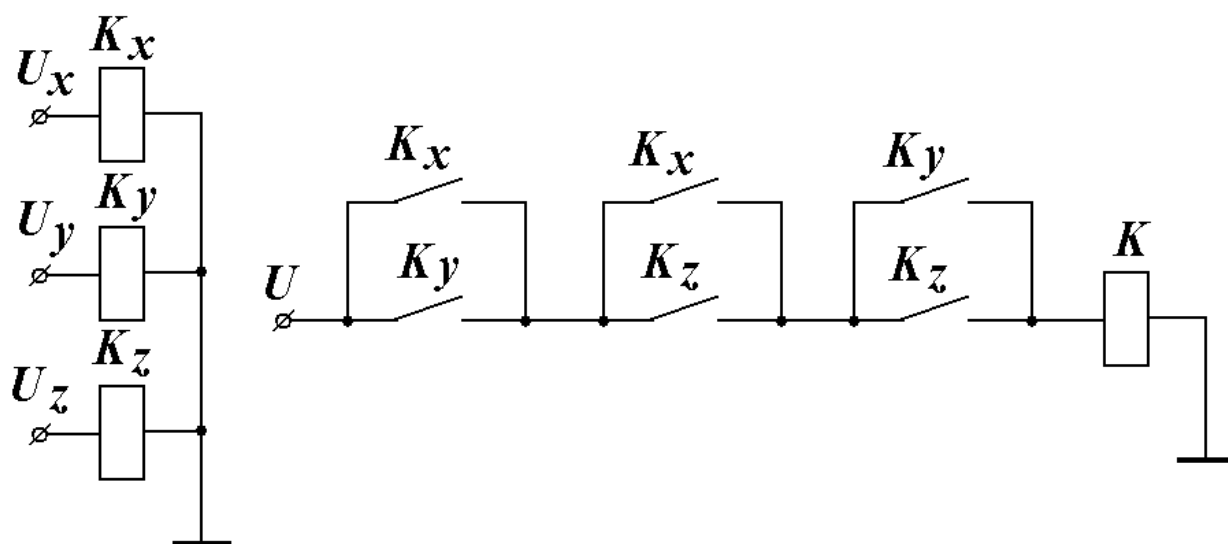


Рисунок 5 – Релейно-контактная схема логического устройства

2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Разработать схемы на логических и релейно-контакторных элементах для реализации логических функций f четырёх аргументов, заданных по вариантам в таблице 3.

Таблица 3 – Индивидуальные задания по вариантам

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
v	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
f_1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
f_2	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
f_3	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
f_4	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
f_5	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
f_6	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
f_7	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
f_8	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
f_9	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
f_{10}	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
f_{11}	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
f_{12}	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0

f_{13}	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
f_{14}	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
f_{15}	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
f_{16}	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
f_{17}	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
f_{18}	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
f_{19}	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
f_{20}	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
f_{21}	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
f_{22}	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
f_{23}	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1
f_{24}	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
f_{25}	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
f_{26}	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
f_{27}	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1
f_{28}	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0
f_{29}	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
f_{30}	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
f_{31}	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
f_{32}	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1
f_{33}	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
f_{34}	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
f_{35}	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
f_{36}	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
f_{37}	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
f_{38}	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
f_{39}	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
f_{40}	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1

Логическую функцию представить в виде ДНФ и в виде КНФ. Минимизацию логической функции проводить с помощью карт Карно и при помощи логических преобразований. Разработку провести на базе следующих типов элементов:

- 1) 2И, 2ИЛИ, НЕ.
- 2) 2И-НЕ.
- 3) 2ИЛИ-НЕ.

3. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЁТА

Отчёт должен содержать:

- 1) исходное задание;
- 2) таблицу истинности логической функции;
- 3) логическую функцию в виде логического выражения в форме ДНФ и КНФ, составленного на основании таблицы истинности;
- 4) карту Карно, составленную на основе таблицы истинности;
- 5) выражение логической функции, минимизированное с помощью карты Карно и логических преобразований.
- 6) Принципиальные схемы логического устройства, реализующего заданную логическую функцию в базисе логических элементов 2И-НЕ, 2ИЛИ-НЕ. При необходимости возможно использование логических элементов 2И, 2ИЛИ, НЕ.
- 7) Релейно-контакторные схемы логического устройства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мышляева И.М. Цифровая схемотехника: Учебное пособие. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 400 с.
2. Бабич Н.П., Жуков И.А. Основы цифровой схемотехники: Учебное пособие. – М.: Издательский дом «Додэка-XXI», К.: «МК-Пресс», 2007. – 480с.
3. Новиков Ю.В. Введение в цифровую схемотехнику: Учебное пособие. – М.: Интернет-Университет Информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 343 с.
4. Бойко В.И., Гуржий А.Н. и др. Схемотехника электронных систем. Цифровые устройства: Учебное пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 512 с.
5. Лехин С.Н. Схемотехника ЭВМ: Учебное пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 672 с.
6. Бойт К. Цифровая электроника. – М.: Техносфера, 2007. – 472 с.

7. Медведев Б.Л., Пирогов Л.Г. Практическое пособие по цифровой схемотехнике: Учебное пособие. – М.: Мир, 2004. – 408 с.

8. Микушин А.В., Сажнев А.М., Сединин В.И. Цифровые устройства и микропроцессоры: Учебное пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 832 с.

9. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника: Учебное пособие. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 800 с.

10. Браммер Ю.А., Пащук И.Н. Импульсные и цифровые устройства: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2002. – 351 с.