

Рассчитаем стальную балку, изображенную на рис. 1, а.

1. Определим реакции опор  $R_A$  и  $R_B$ , составив уравнения равновесия (сумм моментов относительно точек  $A$  и  $B$ ). Эти реакции будем считать направленными вверх.

$$\sum M_A = 0;$$

$$\sum M_B = 0.$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$R_B = \frac{1}{6,3} (12 \cdot 1,8 - 42 \cdot 2,1 + 9 \cdot 2,1 - 14 + 30) = -5 \text{ кН.}$$

$$R_A = \frac{1}{6,3} (-12 \cdot (1,8 + 6,3) - 42(6,3 - 2,1) + 9(6,3 - 2,1) + 14 - 30) = -40 \text{ кН.}$$

Знаки «минус» показывают, что реакции опор  $R_A$  и  $R_B$  направлены вниз, а не вверх, как предположили при составлении уравнений равновесия. На расчетной схеме покажем действительные направления найденных реакций опор.

Проверим правильность определения реакций опор, составив другое уравнение равновесия (сумма проекций на ось  $y$ ):

$$\sum Y = 0; \quad 12 - 40 + 42 - 9 - 5 = 0 \\ 54 - 54 = 0 \\ 0 = 0,$$

что подтверждает правильность найденных значений реакций опор.

2. Разбиваем балку на участки, число участков – четыре, номера участков проставлены на расчетной схеме балки (рис. 1, а).

3. Методом сечений находим на каждом участке поперечную силу  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_z$ .

Участок 1:  $0 \leq x_1 \leq 1,8 \text{ м}$

Для левой отсеченной части балки получим:

$$Q_{y1} = 12 \text{ кН}; \quad M_{z1} = 12x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \Rightarrow Q_{y1} = 12 \text{ кН}; \quad M_{z1} = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 1,8 \text{ м} \Rightarrow Q_{y1} = 12 \text{ кН}; \quad M_{z1} = 12 \cdot 1,8 = 21,6; \text{ кНм.}$$

Участок 2:  $0 \leq x_2 \leq 2,1 \text{ м}$

Для левой отсеченной части балки получим:

$$Q_{y2} = 12 - 40 + 10x_2 = -28 + 10x_2; \quad M_{z2} = 12(1,8 + x_2) - 40x_2 + \frac{10x_2^2}{2};$$

$$\text{при } x_2 = 0 \Rightarrow Q_{y2} = -28 \text{ кН}; \quad M_{z2} = 12 \cdot 1,8 = 21,6 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_2 = 2,1 \text{ м} \Rightarrow Q_{y2} = -28 + 10 \cdot 2,1 = -7 \text{ кН};$$

$$M_{z2} = 12(1,8 + 2,1) - 40 \cdot 2,1 + \frac{10 \cdot 2,1^2}{2} = -15 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_2 = 1,05 \text{ м} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{z2} = 12(1,8 + 1,05) - 40 \cdot 1,05 + \frac{10 \cdot 1,05^2}{2} = -2,29 \approx -2,3 \text{ кНм.}$$

Участок 4:  $0 \leq x_4 \leq 2,1 \text{ м}$ .

Для правой отсеченной части балки получим:

$$Q_{y4} = R_B = 5 \text{ кН}; \quad M_{z4} = 30 - 5x_4;$$

$$\text{при } x_4 = 0 \text{ (в сечении B)} \Rightarrow Q_{y4} = 5 \text{ кН}; \quad M_{z4} = -30 \text{ кНм};$$

$$\text{при } x_4 = 2,1 \text{ (в сечении E)} \Rightarrow Q_{y4} = 5 \text{ кН}; \\ M_{z4} = -30 - 5 \cdot 2,1 = -40,5 \text{ кНм.}$$

Участок 3:  $0 \leq x_3 \leq 2,1 \text{ м}$

Для правой отсеченной части балки получим:

$$Q_{y3} = 5 - 10x_3;$$

$$M_{z3} = 30 - 5(2,1 + x_3) + 14 + \frac{10x_3^2}{2};$$

при  $x_3 = 0$  (в сечении  $E$ )  $\Rightarrow Q_{y3} = 5$  кН;

$$M_{z3} = -16 - 5 \cdot 2,1 = -26,5 \text{ кНм};$$

при  $x_3 = 2,1$  м (в сечении  $D$ )  $\Rightarrow Q_{y3} = 5 - 10 \cdot 2,1 = -16$  кН;

$$M_{z3} = -16 - 5(2,1 + 2,1) + \frac{10 \cdot 2,1^2}{2} = -15 \text{ кНм};$$

при  $x_3 = \frac{l_3}{2} = 1,05$  м  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M_{z3} = -16 - 5(2,1 + 1,05) + \frac{10 \cdot 1,05^2}{2} = -26,24 \text{ кНм}.$$

4. Построим эпюры поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_z$ , используя результаты п. 4 (см. рис. 1, б, в).

Уточним эпюру  $M_z$  на участке 3.  $Q_{y3} = 0$  при  $x_3 = \frac{5}{10} = 0,5$  м. В этом сечении  $M_{z3}$  принимает экстремальное значение:

$$M_{z3\text{экстр}} = -30 - 5(2,1 + 0,5) + 14 + \frac{10 \cdot 0,5^2}{2} = -27,75 \text{ кНм}.$$

Покажем это значение на эпюре  $M_z$  (рис. 1, в).

5. По эпюре  $M_z$  находим опасное сечение, в котором модуль изгибающего момента достигает наибольшего значения. Для нашей балки это сечение  $E$ , в котором  $|M_z|_{\max} = 40,5$  кНм.

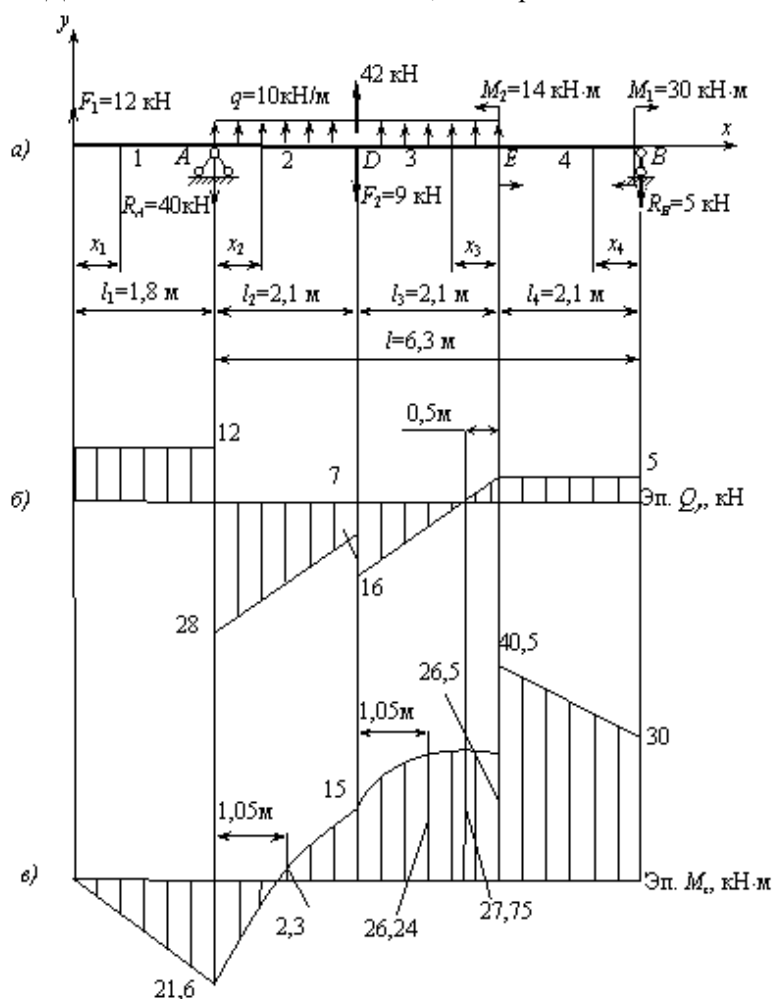


Рис. 1

Из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq R$$

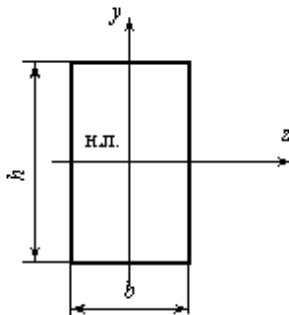
находим момент сопротивления поперечного сечения:

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{\max}}{R} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 192,86 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 192,86 \text{ см}^3$$

Принимаем  $W_z = 193 \text{ см}^3$ . По этой величине момента сопротивления находим размеры заданных поперечных сечений.

6. Определим размеры поперечного сечения балки заданной формы, а также найдем нормальные и касательные напряжения в опасных сечениях балки.

а) Прямоугольное сечение.



Примем  $h = 2,2b$ , тогда

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2,2b)^2}{6} = 0,807b^3,$$

отсюда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_z}{0,807}} = \sqrt[3]{\frac{193}{0,807}} = 6,21 \text{ см},$$

тогда

$$h = 2,2b = 2,2 \cdot 6,21 = 13,66 \text{ см}.$$

Примем  $b = 6,2 \text{ см}$ ,  $h = 13,7 \text{ см}$ .

Найдем геометрические характеристики сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{6,2 \cdot 13,7^2}{6} = 194 \text{ см}^3;$$

$$J_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{6,2 \cdot 13,7^3}{12} = 1328 \text{ см}^4 \quad \text{- осевой момент инерции;}$$

$$A = bh = 6,2 \cdot 13,7 = 85 \text{ см}^2 \quad \text{- площадь сечения.}$$

Определим наибольшие нормальное и касательное напряжения в опасных сечения балки при  $|M_z|_{\max} = 40,5$

$$\text{кНм, } |Q_y|_{\max} = 28 \text{ кН.}$$

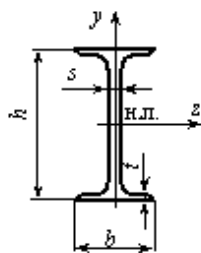
Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{194 \cdot 10^{-6}} = 209 \cdot 10^6 \text{ Па} = 209 \text{ МПа} \approx 210 \text{ МПа}$$

Недонапряжение составляет  $\Delta\sigma = \frac{210 - 209}{210} \cdot 100\% = 0,6\%$ , что допустимо (допускается  $|\Delta\sigma| \leq 5\%$ ).

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{|Q_y|_{\max}}{A} = \frac{3 \cdot 28 \cdot 10^3}{2 \cdot 85 \cdot 10^{-4}} = 4,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 4,9 \text{ МПа}$$

б) Двутавровое сечение.



Из таблицы сортамента, ГОСТ 8239-89, подбираем номер двутавра по численному значению  $W_z = W_x = 193 \text{ см}^3$ :

Номер двутавра	Размеры, мм				A, см <sup>2</sup>	J <sub>z</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>	S <sub>z</sub> , см <sup>3</sup>
	h	b	s	t				
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	104
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	131

Определим наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении этих балок при  $|M_z|_{\max} = 40,5 \text{ кНм}$ :

№ 20: 

Перенапряжение составляет:  $\Delta\sigma = \frac{220 - 210}{210} \cdot 100\% = 4,76\%$

№ 22:  $\sigma_{\max} = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} = \frac{40,5 \cdot 10^3}{232 \cdot 10^{-6}} = 174,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 174,6 \text{ МПа}$

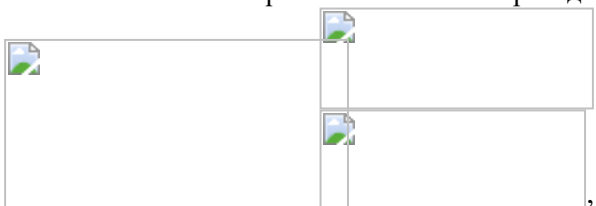
Недонапряжение составляет  $\Delta\sigma = \frac{210 - 174,6}{210} \cdot 100\% = 16,86\%$



В расчетах допускают  $|\Delta\sigma| \leq 5\%$ . Следовательно, выбираем балку двутавровую № 20.

Определим наибольшее касательное напряжение в опасном сечении этой балки в точках, лежащих на нулевой линии (на оси z), при  $|Q_y|_{\max} = 28 \text{ кН}$ .

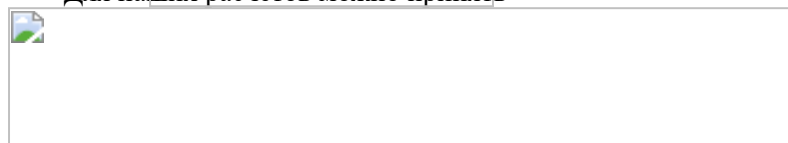
$$\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{|Q_y|_{\max} S_z}{s J_z} = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 30,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 30,4 \text{ МПа}$$

Определим касательные напряжения в точках перехода от стенки к полке двутавра:



где ,  - статические моменты отсеченной части площади сечения выше точек 2 и 3.


Для наших расчетов можно принять



Тогда






Касательное напряжение в точках 6, 7, наиболее удаленных от нулевой линии (оси  $z$ ): .

7. Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям при значениях


, 

 для рассмотренных поперечных сечений выполняются.

8. Определим наиболее рациональное сечение по расходу материала. Для этого сравним площади сечений:



Итак, более экономичной по расходу материала является двутавровая балка, то есть двутавр – более рациональная форма поперечного сечения балки.

 Размеры в см      Эп.  $\sigma$ , МПа      Эп.  $\tau$ , МПа



**ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ  
(ГОСТ 8239-89)**

$h$  - высота двутавра  
 $b$  - ширина полки  
 $s$  - толщина стенки  
 $t$  - средняя толщина полки  
 $A$  - площадь поперечного сечения  
 $I$  - момент инерции



$W$  - момент сопротивления  
 $S$  - статический момент полусечения  
 $i$  - радиус инерции

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4 ,0	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54