Практическое задание 12

Построить линейную разделяющую функцию для двух классов Класс 1 и Класс 2. Координаты точек для каждого класса заданы в таблице (по 3 точки в каждом классе). Предварительно представьте 6 точек на плоскости. Когда решение найдено – нарисуйте прямую, разделяющую

Вариант	Класс1			Класс 2			
1	< 3 , 2 >	< 4 , 1>	<5 , 1>	< 1 , 3>	< 2 , 5 >	< 2 , 6>	В строках представлены координаты точек на плоскости
2	< 1 , 2>	< 2 , 4>	< 3 , 2>	< 4 , 1 >	<6 , 2>	<8 , 2 >	
3	< 1 , 2>	< 2 , 3 >	< 3 , 3>	<6 , 1 >	<7 , 2>	< 9 , 1>	
4	<1 , 4>	< 2 , 5 >	<3 , 3>	<6 , 3>	< 7 , 2>	<8 , 3 >	
5	<3 , 6>	< 1 , 5>	< 2 , 5>	<3 , 1>	<5 , 2>	<6 , 1>	
6	<2 , 7>	<2 , 6>	<1 , 5 >	< 5 , 4>	<4 , 3>	<6 , 2 >	
7	<1 , 4>	<3 , 3>	<2 , 6>	<8 , 2 >	< 8 , 4>	<9 , 2>	
8	< 5 , 1>	< 6 , 4>	<6 , 5 >	<1 , 1>	<1 , 2>	<1 , 3 >	
9	<8 , 2>	< 9 , 1>	< 8 , 4 >	<1 , 4>	<3 , 3>	<2 , 6>	
10	<4 , 3>	<5 , 4>	<6 , 3>	< 2 , 6>	<1 , 6>	< 2 , 7>	
11	<2 , 5>	< 2 , 6>	<1 , 4>	<4 , 1 >	< 5 , 1>	<4 , 2>	
12	< 6 , 2>	< 5 , 1>	< 8 , 2 >	<2 , 4>	< 2 , 2>	<3 , 2>	
13	< 7 , 1>	<6 , 1>	<8 , 1>	< 2 , 3>	<3 , 3>	< 1 , 2>	
14	<8 , 4>	< 7 , 3>	<6 , 2>	<2 , 4>	<2 , 5>	<1 , 5>	
15	< 5 , 2>	< 6 , 1>	<3 , 1>	<1 , 5>	<2 , 5>	<3 , 6>	
16	< 1 , 1 >	<1 , 2>	< 5 , 7>	<6 , 4>	<6 , 5>	<5 , 1>	
17	< 5 , 2>	<6 , 2>	<4 , 1>	<1 , 2 >	< 1 , 3>	<3 , 3>	
18	< 3 , 3>	< 1 , 4>	<1 , 3>	< 5, 1>	< 4 , 1>	<6 , 3>	
19	<3 , 2>	< 2 , 5>	< 3 , 5>	<7 , 4>	<5 , 3>	<6 , 4>	
20	<1 , 5>	< 2 , 4 >	<2 , 5>	<6 , 2>	< 7 , 3>	<8 , 4 >	

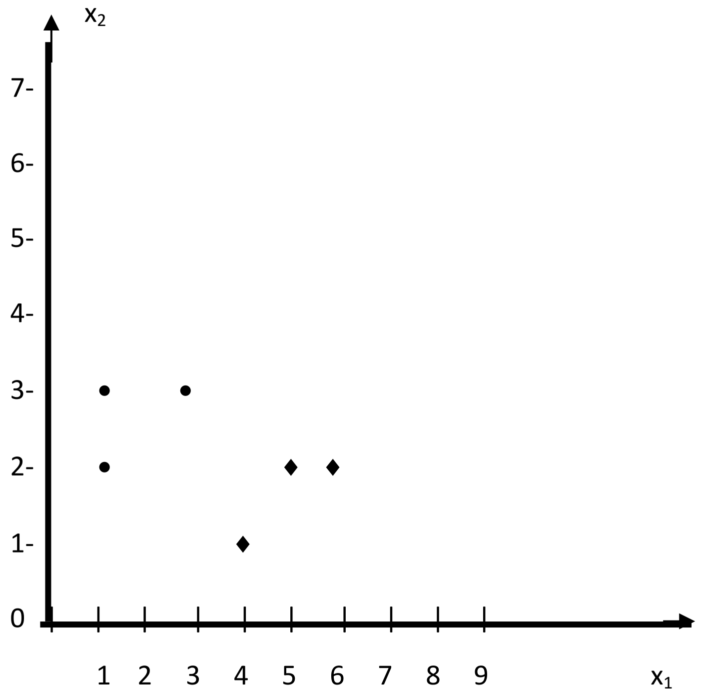
классы 1 и 2 в соответствии с полученным уравнением.

Пример решения задачи.

Ваше задание представлено в строке:

Вариант	Класс1			Класс 2		
N	< 1 , 2 >	< 1 , 3>	<3 , 3>	< 4 , 1>	< 5 , 2 >	< 6 , 2>

Изобразим точки на плоскости:



Классы 1 и 2 линейно разделимы. Найдём разделяющую линейную функцию и нарисуем её график. Алгоритм пересчета коэффициентов описан подробно в лекционном материале.

Цель – получить линейную разделяющую функцию, которая дает положительные значения для точек 1, 2 и 3 и принимает отрицательные значения для точек 4, 5, 6. Функция должна иметь вид $F(X) = w_0 + w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2$.

Выполняем итерацию 0. Коэффициенты $w_0 = w_1 = w_2 = 0$.

Выполняем итерацию 1. Выбираем первый объект класса C_1 – вектор X_1=<1, 2>. Значение функции $F(X_1) = 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$, (ошибка классификации произошла в первой же точке из шести, так как точка <1, 2> принадлежит классу 1 и функция F(<1, 2>) должна дать значение больше нуля, а не нулевое). Таким образом, по правилу П8 алгоритма необходима коррекция коэффициентов при значении множителя c=1. Вычисляем новые коэффициенты функции: $w_0^1 = w_0 + c = 0 + 1 = 1$; $w_1^1 = w_1 + c \cdot x_1 = 0 + 1 \cdot 1 = 1$; $w_2^1 = w_2 + c \cdot x_2 = 0 + 1 \cdot 2 = 2$. Получаем $F^1(X) = 1 + x_1 + 2 \cdot x_2$. Обратите внимание: величины 1 и 2, которые мы используем при расчёте новых коэффициентов функции F, это координаты той точки, где произошла ошибка классификации, в нашем случае это точка <1, 2>.

Выполняем итерацию 2. Вычислим последовательно значения $F^1(X)$для элементов выборки:

$F^1(<1, 2>) = 1+1\cdot1+2\cdot2 = 6 > 0;\quad F^1(<1, 3>) = 1+1\cdot1+2\cdot3 = 7 > 0;\quad F^1(<3, 3>) = 13 > 0$.

Все элементы класса C_1 распознаны правильно. Выбираем текущим класс C_2.

$F^1(<4, 1>) = 1+1\cdot4+2\cdot1 = 7 > 0$ - объект распознан неправильно. Необходима коррекция коэффициентов при значении множителя c=-1.

$w_0^2 = w_0^1 + c = 1-1 = 0;\quad w_1^2 = w_1^1 + c\cdot x_1 = 1-1\cdot4 = -3;\quad w_2^2 = w_2^1 + c\cdot x_2 = 2-1\cdot1 = 1$. Новая функция $F^2(X) = x_2 - 3\cdot x_1$.

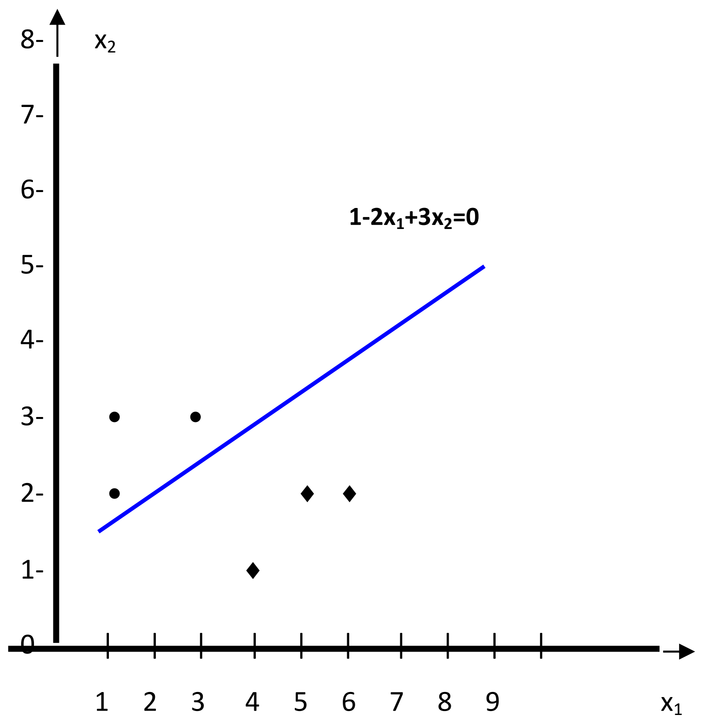
Выполняем итерацию 3. Вычисляем значения функции для элементов выборки

$F^2(<1, 2>) = 2-3\cdot1 = -1 < 0$. Необходима коррекция коэффициентов с поправкой c=1:

$w_0^3 = w_0^2 + c = 0+1 = 1;\quad w_1^3 = w_1^2 + c\cdot x_1 = -3+1\cdot1 = -2;\quad w_2^3 = w_2^2 + c\cdot x_2 = 1+1\cdot2 = 3$. Новая функция $F^3(X) = 1-2x_1+3x_2$.

Начинаем новую итерацию с проверки значений $F^3(X)$ на элементах выборки:

$F^3(<1, 2>) = 5 > 0;\quad F^3(<1, 3>) = 8 > 0;\quad F^3(<3, 3>) = 4 > 0$. Переходим к проверке объектов класса C_2: $F^3(<4, 1>) = -4 < 0;\quad F^3(<5, 2>) = -3 < 0;\quad F^3(<6, 2>) = -5 < 0$. Все объекты обучающей выборки разделены правильно, таким образом получена искомая решающая функция $F(X) = 1-2x_1+3x_2$. На рисунке дана геометрическая интерпретация решения.



Для особенно ленивых привожу алгоритм.

Рассмотрим алгоритм построения линейных решающих функций. Линейная функция имеет следующий вид: $D(X) = w_0 + \sum_{j=1}^{n} w_j \cdot x_j$. Цель алгоритма – найти коэффициенты w_j решающей функции $D(X)$ методом последовательного уточнения. Рассмотрим случай двух классов (выше было показано, какими приемами можно свести к этому случаю вариант нескольких классов). Основой для вычисления коэффициентов w_j является анализ обучающей выборки $\tilde{X}$, где известна заранее принадлежность объектов $\tilde{X}$ классу 1 или классу 2. Далее эти два класса обозначим C_1 и C_2.

Решающая функция считается построенной, если все объекты обучающей выборки $\tilde{X}$ распознаются этой функцией правильно, то есть $D(X) > 0$, если $X \in C_1$, и, соответственно, $D(X) < 0$, если $X \in C_2$. Коррекция коэффициентов решающей функции выполняется по следующему правилу: коэффициенты решающей функции увеличиваются при неправильном распознавании объекта из класса C1, уменьшаются при неправильном распознавании объекта из класса C2 и остаются без изменения, если распознавание идет правильно. Если на некотором шаге произойдет корректировка коэффициентов решающей функции, счетчик правильно распознанных объектов, обозначаемый далее как сч, сбрасывается в ноль, поскольку мы перешли к новой функции и теперь ее надо проверить на всех элементах обучающей выборки.

Алгоритм завершается, когда окажется, что построенная решающая функция D(X) правильно распознает все объекты обучающего множества.

Алгоритм

1. Получить обучающую выборку $\tilde{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_M)$, элементы которой принадлежат непересекающимся классам C_1 или C_2.

2. Установить в ноль счетчик правильно распознанных объектов: сч=0.

3. Установить номер итерации равным нулю: к=0.

4. Задать начальные значения коэффициентов w_j в решающей функции (например, $w_j = 0 \quad для \quad j = 1, 2, \ldots, n$). Получим решающую функцию $D_0(X)$.

5. Выбираем класс C_1 в качестве текущего класса.

6. Переход к новой итерации: к=к+1.

7. Выбрать очередной объект X_k текущего класса (класса C_1). Если класс C_1 исчерпан, объявить текущим классом класс C_2 выбрать первый объект этого класса.

8. Вычислить новые значения коэффициентов решающей функции на итерации к:

$w_j^k = w_j^{k-1} + c \cdot x_{kj}$, где c – множитель, определяемый из условия

$$c = \begin{cases} 1, & \sum_{j=0}^{n} w_j^{k-1} \cdot x_{kj} \le 0, \quad и\ X_k \in C_1; \\ -1, & \sum_{j=0}^{n} w_j^{k-1} \cdot x_{kj} > 0, \quad и\ X_k \in C_2; \\ 0 & при\ правильном \quad распознавании. \end{cases}$$

9. Если с=0, сч=сч+1 (увеличиваем на 1 число правильно распознанных объектов), иначе сч=0.

10. Если сч=M – общему числу объектов обучающей выборки $\tilde{X}$, то КОНЕЦ, иначе перейти к шагу 6.

Приведенный алгоритм обеспечивает построение решающей функции во всех случаях, когда классы являются линейно разделимыми.