Задание на практикум.

Задание №1

Согласно номеру варианта для 2-х звеньев с указанными в табл. № 1 параметрами, записать передаточные функции и построить:

- логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ);
- логарифмическую фазочастотную характеристику (ЛФЧХ);
- амплитудно-фазовую характеристику (АФХ);

Таблица 1

№ варианта	Тип звена	Коэффициент К	Постоянная времени Т1	Постоянная времени Т2	Декремент затухания ξ
1	а,г	1.0	5.0	2.0	-
2	а,д	2.0	3.0	-	0.5
3	в,г	3.0	2.0	5.0	-
4	б,д	4.0	5.0	-	0.6
5	б,в	5.0	2.0	4.0	-
6	б,г	6.0	3.0	1.0	-
7	в,д	7.0	1.0	3.5	0.25
8	г,д	8.0	6.0	2.0	0.15
9	б,е	9.0	1.5	-	-
10	е,д	10.0	3.5	-	0.55
11	а,б	5.0	3.0	-	-
12	а,в	7.5	2.0	10.0	-
13	а,е	4.0	2.5	-	-
14	в,е	5.0	1.0	5.0	-
15	г,е	2.5	5.0	2.0	-

Типы звеньев:

а) интегрирующего $W(p) = k/p$;

б) инерционного $W(p) = k/(l+T1p)$;

в) упругого дифференцирующего $W(p) = k(l+T2p)/(l+T1p)$, $T2 > T1$

г) упругого интегрирующего $W(p) = k(l+T2p)/(l+T1p)$, $T2 < T1$;

д) колебательного $W(p) = k/(1+2\xi T1p+T1^2p^2)$

е) реального дифференцирующего $W(p) = kp/(l+T1p)$.

Задание №2

Построить переходную характеристику по передаточной функции замкнутой системы (рис.1) в соответствии с заданным вариантом (табл.2). Определить устойчивость системы и прямые показатели качества: время регулирования, перерегулирование, время первого максимума, число колебаний и статическую ошибку системы.

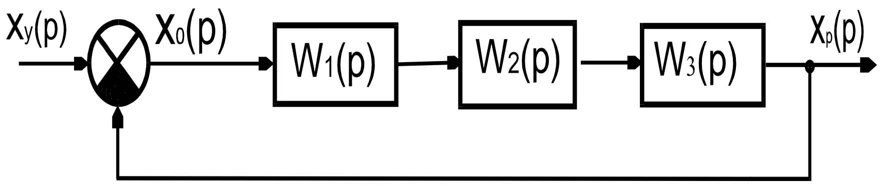

Рис.1. Структурная схема исследуемой САУ

$$W_1(p)=\frac{K_1}{1+pT_1};W_2(p)=\frac{K_2}{1+pT_2};W_3(p)=\frac{K_3}{p}.$$

. Таблица 2.

№ варианта	K_1	K_2	K_3	T_1[c]	T_2[c]
1	10	10	1	0.1	0.005
2	50	2.0	1	0.2	0.005
3	25	4.0	1	0.5	0.005
4	10	5.0	1	0.8	0.01
5	20	2.5	1	1.0	0.01
6	10	3.0	1	1.0	0.05
7	10	4.0	1	0.3	0.025
8	20	2.0	1	0.4	0.005
9	30	1.0	1	0.15	0.005
10	15	2.0	1	0.25	0.005
11	25	3.0	1	0.3	0.004
12	30	3.0	1	0.5	0.004
13	40	1.5	1	0.6	0.005
14	35	2.0	1	0.5	0.0025
15	45	1.5	1	0.4	0.0015

Задание №3

По передаточной функции разомкнутой системы (рис.1) в соответствии с заданным вариантом (табл.2), построить ЛАЧХ, ЛФЧХ и АФХ. По построенным характеристикам определить запасы устойчивости по фазе и амплитуде, предельный коэффициент усиления.

Теоретические положения

1. Для описания линейных непрерывных систем автоматического управления (САУ) широко используются временные и частотные характеристики, основным преимуществом которых является то, что они могут быть экспериментально получены при исследовании системы. В качестве временных характеристик наиболее часто используются переходные и весовые (импульсные переходные) функции, представляющие собой реакции САУ на единичную ступенчатую функцию и δ-функцию Дирака соответственно. Схема снятия частотных характеристик объекта представлена на рис. 2.

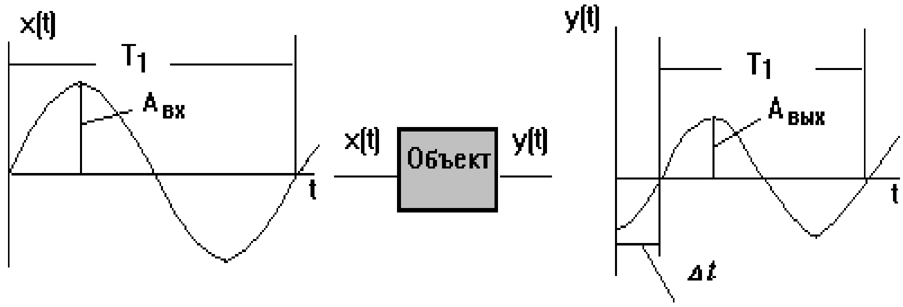

Рис.2. Схема снятия частотных характеристик объекта

Период колебаний равен T1 =2π/ω , а сдвиг по времени Δt = ϕ/ω

Используя формулу Эйлера: $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\cdot\sin\omega t$, входной и выходной сигналы объекта можно представить в виде:

$$x(t) = A_{вх}\sin\omega t = \mathrm{Im}\{A_{вх} e^{j\omega t}\} = \mathrm{Im}\{\dot{X}(j\omega)\}$$

$$y(t) = A_{вых}\sin(\omega t + \varphi) = \mathrm{Im}\{A_{вых} e^{j(\omega t+\varphi)}\} = \mathrm{Im}\{\dot{Y}(j\omega)\}.,$$

где Im – выделение мнимой части комплексного числа,

$\dot{X}(j\omega)$ - входной сигнал в комплексной форме,

$\dot{Y}(j\omega)$ - выходной сигнал, представленный в комплексной форме

Основой всех частотных характеристик является комплексный коэффициент усиления, определяемый выражением

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}(j\omega)}{\dot{X}(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

На основании выражения для $W(j\omega)$ можно найти амплитудно-фазовую АФХ **W(jω),** амплитудную A(ω) и фазовую ϕ(ω) частотные характеристики, а также логарифмические амплитудную **L(ω)=20LgA(ω)** (ЛАЧХ) и фазовую ϕ(ω) (ЛФЧХ) частотные характеристики (при изменении частоты ω от 0 до ∞).

2. Основное условие работоспособности систем автоматического управления заключается в ее устойчивости. Однако устойчивость -недостаточное условие ее практического применения. Наряду с этим выдвигаются определенные требования к качеству процессов регулирования. Комплекс требований, определяющих поведение системы в установившемся и переходном режимах отработки заданного воздействия определяется показателями качества работы САУ: прямыми показателями качества (быстродействием и характером переходного процесса), определяемыми по переходной характеристике САУ, косвенными (запасами устойчивости по амплитуде и фазе), точностью.

Показатели качества процесса отработки входного воздействия будем рассматривать для системы, структурная схема которой изображена на рис.3.

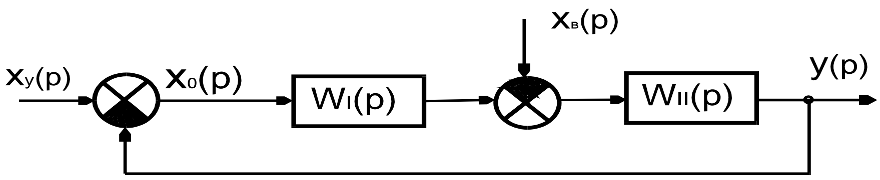

Рис.3. Структурная схема САУ

Запасы устойчивости по амплитуде и фазе

Линейная система устойчива, если с течением времени переходная составляющая процесса стремится к нулю:

$\lim\limits_{t\to\infty}$ $x_{пер.}(t) = 0$, $x_{пер.}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \cdot e^{p_i t}$, где c_i – постоянные интегрирования,

p_i – корни характеристического уравнения исследуемой САУ.

Уравнение динамики системы (рис.3.) в изображении по Лапласу имеет вид

$$[1+W_p(p)]\cdot Y(p) = W_p(p)\cdot X_y(p) \pm W_{II}(p)\cdot X_в(p),$$

где $W_p(p) = W_I(p)\cdot W_{II}(p) = K(p)/D(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы. Уравнение свободного режима $[1+W_p(p)]\cdot Y(p) = 0$.

Характеристическое уравнение замкнутой САУ:

$A(p) = K(p)+D(p) = 0$.

Для устойчивости линейной замкнутой САУ $\lim\limits_{t\to\infty}(x_{пер.} = 0)$ необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней характеристического уравнения были отрицательными, т.е. лежали в левой части комплексной плоскости.

Замкнутая система должна быть не просто устойчивой, а обладать определенными запасами устойчивости по амплитуде и по фазе. Запас устойчивости по амплитуде определяется либо величиной

$\Delta A = 1 - A_\pi$, либо величиной $1/A_\pi$

(в логарифмических единицах $L_\pi = 20\cdot\lg(1/A_\pi)$[дБ]), где A_π - значение модуля вектора $W_p(j\omega)$, аргумент которого равен $\phi = -\pi$ (рис.4.).

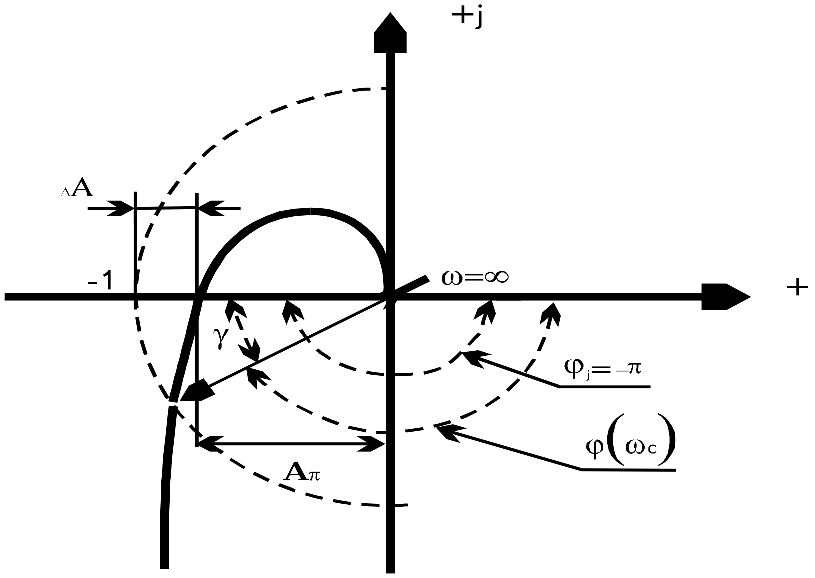

Рис.4. Определение запаса устойчивости по фазе γ и модулю ΔА ($1/A_\pi$)

Запас устойчивости по фазе обозначается γ и определяется на частоте среза ω_c, при которой амплитуда $A(\omega_c) = 1$,

$$\gamma = 180^0+\phi(\omega_c), \qquad (2.1)$$

где $\phi(\omega_c)$ - значение аргумента вектора $W_p(j\omega)$ при $\omega = \omega_c$.

Изображенные на рис.4 и 5 годограф $W_p(j\omega)$ и логарифмические характеристики разомкнутой системы показывают, что система в замкнутом состоянии устойчива и обладает запасом устойчивости по фазе $\gamma > 0$ и по амплитуде

$L_\pi = 20\cdot lg(1/A_\pi) > 0$ ($1/A_\pi > 1$).

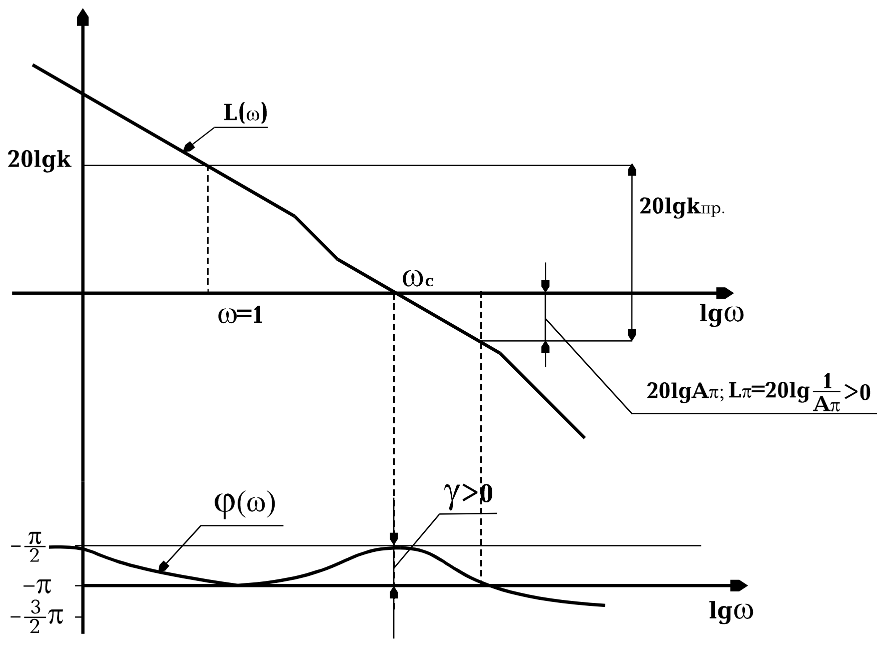

Рис.5. Определение запаса устойчивости по ЛАЧХ и ЛФЧХ

Коэффициент усиления, при котором замкнутая САУ находится на границе колебательной устойчивости называется предельным $\mathbf{К_{пред}}$.

На основании критерия устойчивости Найквиста предельный коэффициент усиления может быть определен соотношением

$$\mathbf{К_{пред} = К\cdot(1/A_{\pi})}.$$

Предельный коэффициент усиления САУ можно определить по логарифмическим частотным характеристикам (рис.5.)

$$\mathbf{20\cdot lgК_{пред} = 20\cdot lgК - 20\cdot lg\,A_{\pi}}.$$

Если коэффициент усиления разомкнутой системы меньше предельного коэффициента $\mathbf{К_{пред}}$, то система устойчива и обладает запасом устойчивости (по фазе, модулю). В противном случае - система неустойчива.

Точность работы САУ

Точность работы САУ определяется ошибкой, которая равна разности между задающим значением и значением выходного сигнала при t→∞, т.е.

$$x_{0уст.} = \lim_{t\to\infty} x_0(t) = \lim_{t\to\infty}(x_y(t) - y(t)).$$

В соответствии со структурной схемой САУ (рис.3) ошибка в изображении по Лапласу

$$X_0(p) = \frac{1}{1+W_p(p)}\cdot X_y(p) + \frac{W_{II}(p)}{1+W_p(p)}\cdot X_B(p). \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.2.) дает возможность получить ошибку и в переходном и в установившемся режимах по управляющему $X_у(p)$ и возмущающему $X_в(p)$ воздействиям. Для определения ошибки в установившемся режиме можно воспользоваться теоремой о предельном значении преобразования Лапласа:

$$x_{0уст.} = \lim_{t\to\infty} x_0(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot X_0(p). \quad (2.3)$$

В зависимости от вида входного сигнала получаем различные виды ошибок. Так, при подаче на вход ступенчатого воздействия в установившемся режиме возникает статическая ошибка:

$$x_{cT} = x_{0уст.} = \lim_{p\to 0}\left(\frac{1}{1+W_p(p)}\cdot x_{y0} + \frac{W_{II}(p)}{1+W_p(p)}\cdot x_{B0}\right) = \qquad (2.4)$$

$$x_{cT.y} + x_{cT.B}$$

Кинетическая ошибка $\mathbf{x_{кин.}}$ или скоростная возникает в установившемся режиме после отработки линейно возрастающего входного воздействия $x_у(t) = V\cdot t$ или $X_у(p) = V/p^2$, где $x_{кин.} = x_{0 усТ.у} = \lim\limits_{p\to 0} p\cdot[\frac{1}{1+W_p(p)}\cdot\frac{V}{p^2}].$ (2.5)

При отработке входного воздействия, изменяющегося по квадратичному закону $(x_y(t)=\frac{a\cdot t^2}{2}, X_y(p)=\frac{a}{p^3})$, в установившемся режиме возникает ошибка по ускорению:

$$x_a = x_{0 усТ.у} = \lim\limits_{p\to 0} p\cdot[\frac{1}{1+W_p(p)}\cdot\frac{a}{p^3}], \quad (2.6)$$

Как видно из формул (2.4 - 2.7), ошибки зависят от уровня входного сигнала, от порядка астатизма системы, равного разности числа интегрирующих и дифференцирующих звеньев, лежащих в цепи обратной связи по отношению к заданному входному сигналу и сигналу ошибки.

Характер переходного процесса и быстродействие САУ

Время регулирования $t_р$ служит основной характеристикой быстродействия системы и определяется из условия малости переходной составляющей. Быстродействие вычисляется от момента подачи входного воздействия, до момента, когда отклонение функции h(t) не выходит за пределы некоторой заданной зоны ±Δ (рис.6): $h(t)-h_{усТ.}\leq\Delta$, где Δ – значение, определяемое заданной точностью системы. Обычно Δ задается в пределах (3-5)% от установившегося значения $h_{усТ.} = h(\infty)$ (рис.6).

$$h_{усТ.} = \lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \lim\limits_{p\to 0} p\cdot W_3(p)\cdot\frac{1}{p}, \quad (2.7)$$

где $W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1+W_p(p)}$ - передаточная функция замкнутой системы.

Установившееся значение переходной функции для статической системы *(ν* = 0):

$h_{усТ.} = \frac{W_p(0)}{1+W_p(0)} = \frac{k}{1+k} \approx 1,$ где k -коэффициент усиления разомкнутой системы, k » 1.

Для астатической системы *ν* = 1: $h_{усТ.}$ = 1, так как $\lim\limits_{p\to 0} W_3(p)\to\infty$.

Как видно из рис.6, характер переходного процесса может быть колебательным и апериодическим. Колебательный процесс характеризуется:

1. Максимальным перерегулированием **σ**:

$$\sigma = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cong h_m - 1; h_\infty = h_{усТ.}.$$

2. Временем достижения первого максимума - $\mathbf{t_m}$;

3. Числом колебаний **N** за время регулирования t_p.

Таким образом, прямыми показателями качества переходного процесса являются: время регулирования t_p, перерегулирование $\sigma(h_m)$, время достижения первого максимума t_m, число колебаний N, которые определяются непосредственно по переходной характеристике h(t).

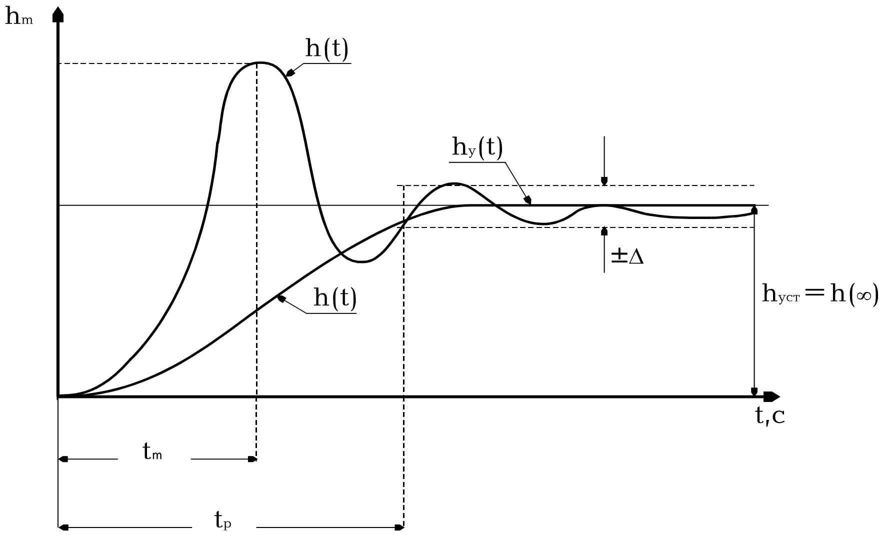

Рис.6. Переходная функция h(t) и ее параметры

Переходная функция системы *h(f)* может быть получена классическим методом по передаточной функции САУ:

$h(t) = L^{-1}[\frac{W_3(p)}{p}]$. (2.9), где $\frac{1}{p}$ - изображение по Лапласу единичной ступенчатой функции.

С помощью разложения передаточной функции замкнутой системы $W_3(p)$ на простые дроби (при условии некратных корней и правильности дробно-рациональной функции $W_3(p)/p$):

$$\frac{W(p)}{p} = \frac{K(p)}{pA(p)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{K(p_j)}{A^{'}(p_i)\cdot(p-p_i)} =$$
$$= \frac{K(0)}{A(0)p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{K(p_i)}{p_i \cdot A^{'}(p_i)\cdot(p-p_i)} \qquad (2.10)$$

и переходя от изображений к оригиналам, получим:

$$h(t) = [\frac{K(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{K(p_i)}{p_i \cdot A^{'}(p_i)} e^{p_i t}]\cdot 1(t), \qquad (2.11)$$

где p_i - полюса передаточной функции замкнутой системы $W_3(p)$. Переходную функцию можно получить экспериментально для реальной исследуемой системы или для ее модели. При этом на вход системы (модели) подается единичный скачок. Реакция на выходе и будет являться переходной функцией *y(t) = h(t).*