Лабораторная работа № 4

ЭЛЕКТРОННЫЕ ТАБЛИЦЫ: РАБОТА С МАТРИЦАМИ

Время выполнения – 6 часов (аудиторная работа – 2 часа, самостоятельная работа – 4 часа).

Цель работы: научиться приемам работы с математическими матрицами.

Задачи работы

1. Изучить приемы работы с матрицами.
2. Научиться решать системы линейных алгебраических уравнений.
3. Научиться выполнять проверку решения.

Перечень обеспечивающих средств

Задания лабораторной работы выполняются в электронной таблице *MS Excel* 2013 и выше.

Общие теоретические сведения

Система *mn* чисел, расположенных в прямоугольной таблице из *m* строк и *n* столбцов, называется *матрицей*. Если $m = n$, то матрица называется квадратной, иначе – прямоугольной.

Над матрицами могут быть выполнены операции:

- сложение, вычитание, умножение матриц;
- умножение и деление матрицы на число;
- транспонирование матрицы;
- нахождение обратной матрицы;
- вычисление определителя.

Операции сложения и вычитания матриц выполняются только с матрицами одинаковой размерности.

При умножении матриц результирующая матрица имеет такое количество строк, как матрица слева, а количество столбцов – как матрица справа. Умножение матриц проводят только в том случае, если количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы.

При умножении матрицы на число получается матрица такой же размерности, что и исходная, при этом каждый элемент матрицы A умножается на число k.

Транспонирование матрицы – это операция над матрицей, при которой столбцы заменяются строками с соответствующими номерами.

Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая, будучи умноженной как справа, так и слева на данную матрицу, дает единичную матрицу. Обратную матрицу можно найти только для квадратной матрицы.

Рассмотрим несколько примеров работы с матрицами на разных рабочих листах.

Пример сложения и вычитания матриц.

Необходимо сложить матрицу $A_{2,3}$ на матрицу $B_{2,3}$, результат представить в виде матрицы $C_{2,3}$.

Необходимо произвести вычитание матрицы $B_{2,3}$ из матрицы $A_{2,3}$, результат представить в виде матрицы $D_{2,3}$.

Решение.

1. Задать значения элементам матриц $A_{2,3}$, $B_{2,3}$ на листе 1 (табл. 1).
2. Выделить место для результирующей матрицы $C_{2,3}$ (диапазон *B*8:*D*9).
3. Ввести знак равенства (=).
4. Выделить матрицу $A_{2,3}$ (диапазон *B*1:*D*2).
5. Ввести знак сложения (+).
6. Выделить матрицу $B_{2,3}$ (диапазон *B*4:*D*5).
7. Нажать одновременно 3 клавиши *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.
8. В выделенной области *B*8:*D*9 получим результат сложения матриц (рис. 1).
9. Выделить место для результирующей матрицы $D_{2,3}$ (диапазон *B*11:*D*12).
10. Ввести знак равенства (=).

11. Выделить матрицу $A_{2,3}$ (диапазон *B*1:*D*2).

12. Ввести знак вычитания (–).

13. Выделить матрицу $B_{2,3}$ (диапазон *B*4:*D*5).

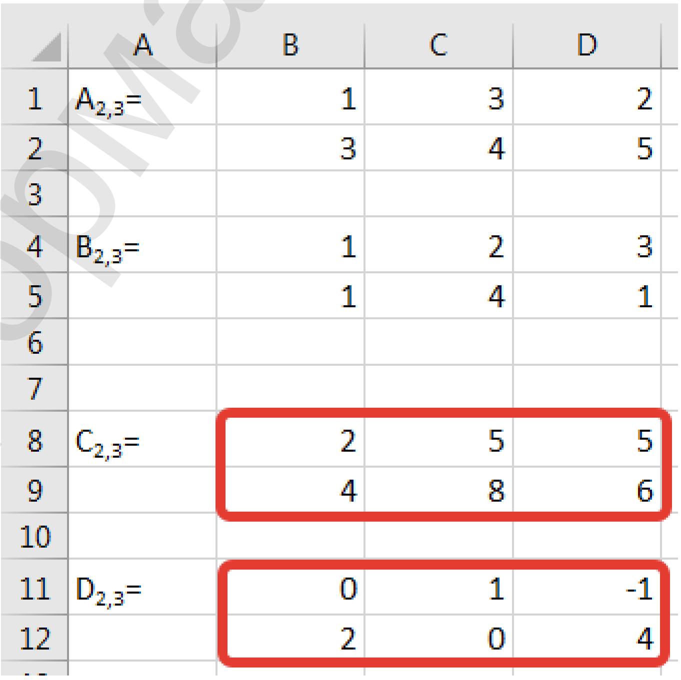
14. Нажать одновременно 3 клавиши *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.

15. В выделенной области *B*11:*D*12 получим результат вычитания матриц (рис. 1).

Таблица 1

Элементы матриц $A_{2,3}$, $B_{2,3}$

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	$A_{2,3}$=	1	3	2		
2		3	4	5		
3						
4	$B_{2,3}$=	1	2	3		
5		1	4	1		
6						
7						
8	$C_{2,3}$=					
9						
10						
11	$D_{2,3}$=					
12						
13						



	A	B	C	D
1	$A_{2,3}$=	1	3	2
2		3	4	5
3				
4	$B_{2,3}$=	1	2	3
5		1	4	1
6				
7				
8	$C_{2,3}$=	2	5	5
9		4	8	6
10				
11	$D_{2,3}$=	0	1	-1
12		2	0	4

Рис. 1. Результат сложения и вычитания исходных матриц

Пример перемножения матриц.

Необходимо умножить матрицу $A_{2,3}$ на матрицу $B_{3,3}$, результат представить в виде матрицы $C_{2,3}$.

Решение.

1. Задать значения элементам матриц $A_{2,3}$, $B_{3,3}$ на листе 2 (табл. 2).
2. Выделить место для результирующей матрицы $C_{2,3}$.
3. Нажать на кнопку *Вставить функцию*, расположенную рядом со строкой формул или на вкладке *Формулы*.
4. В открывшемся диалоговом окне *Вставка функции* открыть категорию *Математические* и выбрать из списка функцию *МУМНОЖ*.
5. Задать аргументы функции: выбрать мышью массив 1 – $A_{2,3}$ и массив 2 – $B_{3,3}$ (рис. 2).
6. Нажать одновременно 3 клавиши *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.
7. В выделенной области *B*8:*D*9 получим результат перемножения матриц (рис. 3).

Таблица 2

Элементы матриц $A_{2,3}$, $B_{3,3}$

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	$A_{2,3}$=	1	3	2		
2		3	4	5		
3						
4		1	2	3		
5	$B_{3,3}$=	1	4	1		
6		2	3	3		
7						
8	$C_{2,3}$=					
9						
10						

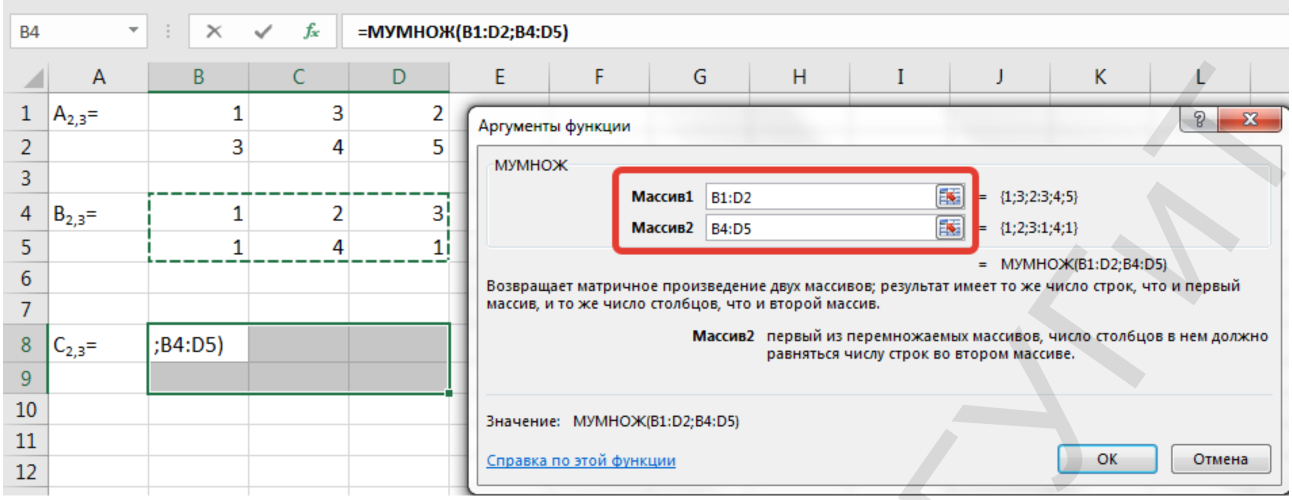


Рис. 2. Заполнение аргументов функции

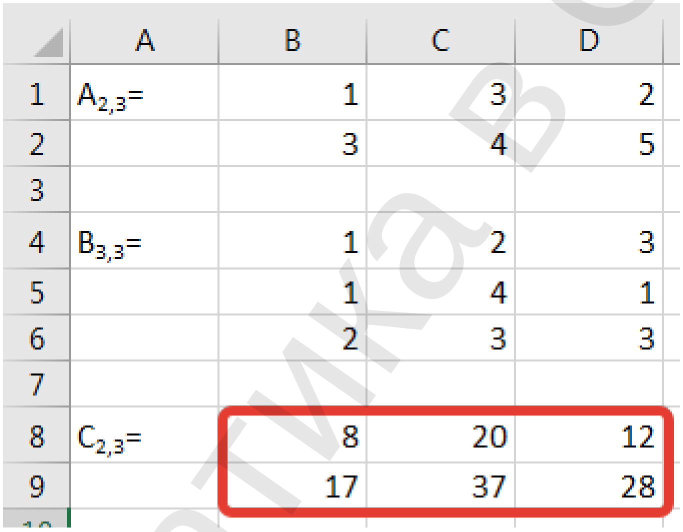


Рис. 3. Результат перемножения исходных матриц

Пример умножения и деления матрицы на число.

Необходимо умножить матрицу $A_{2,3}$ на число K, результат представить в виде матрицы $B_{2,3}$.

Необходимо разделить матрицу $A_{2,3}$ на число K, результат представить в виде матрицы $C_{2,3}$.

Решение.

1. Задать значения элементам матрицы $A_{2,3}$ и значение числа K на листе 3 (табл. 3).
2. Выделить место для результирующей матрицы $B_{2,3}$ (диапазон $B8{:}D9$).

3. Ввести знак равенства (=).

4. Выделить матрицу $A_{2,3}$ (диапазон $B1{:}D2$).

5. Ввести знак умножения (*).

6. Выделить значение числа K (ячейку $B4$).

7. Нажать одновременно 3 клавиши *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.

8. В выделенной области $B8{:}D9$ получим результат умножения матрицы на число (рис. 4).

9. Выделить место для результирующей матрицы $C_{2,3}$ (диапазон $B11{:}D12$).

10. Ввести знак равенства (=).

11. Выделить матрицу $A_{2,3}$ (диапазон $B1{:}D2$).

12. Ввести знак деления (/).

13. Выделить значение числа K (ячейку $B4$).

14. Нажать одновременно 3 клавиши *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.

15. В выделенной области $B11{:}D12$ получим результат деления матрицы на число (рис. 4).

Таблица 3

Элементы матрицы $A_{2,3}$ и число K

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	$A_{2,3}$=	1	3	2		
2		3	4	5		
3						
4	K=	3				
5						
6						
7						
8	$B_{2,3}$=					
9						
10						
11	$C_{2,3}$=					
12						
13						

	A	B	C	D
1	$A_{2,3}$=	1	3	2
2		3	4	5
3				
4	$B_{2,3}$=	3		
5				
6				
7				
8	$C_{2,3}$=	3	9	6
9		9	12	15
10				
11	$D_{2,3}$=	0,33333	1	0,66667
12		1	1,33333	1,66667

Рис. 4. Результат сложения и вычитания исходных матриц

Пример транспонирования матрицы.

Необходимо транспонировать матрицу $A_{2,3}$, результат представить в виде матрицы $B_{3,2}$.

Решение.

1. Задать значения элементам матрицы $A_{2,3}$ на листе 4 (табл. 4).

2. Выделить место для результирующей матрицы $B_{3,2}$ (диапазон *B*4:*C*6).

3. Нажать на кнопку *Вставить функцию*, расположенную рядом со строкой формул или на вкладке *Формулы*.

4. В открывшемся диалоговом окне *Вставка функции* открыть категорию *Ссылки и массивы* и выбрать из списка функцию *ТРАНСП*.

5. Задать аргумент функции: выбрать мышью массив – $A_{2,3}$ (рис. 5).

6. Нажать одновременно 3 клавиши *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.

7. В выделенной области *B*4:*C*6 получим результат транспонирования матрицы $A_{2,3}$ (рис. 6).

Таблица 4

Элементы матрицы $A_{2,3}$

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	$A_{2,3}$=	1	3	2		
2		3	4	5		
3						
4	$B_{3,2}$=					
5						
6						
7						
8	$C_{2,3}$=					
9						
10						

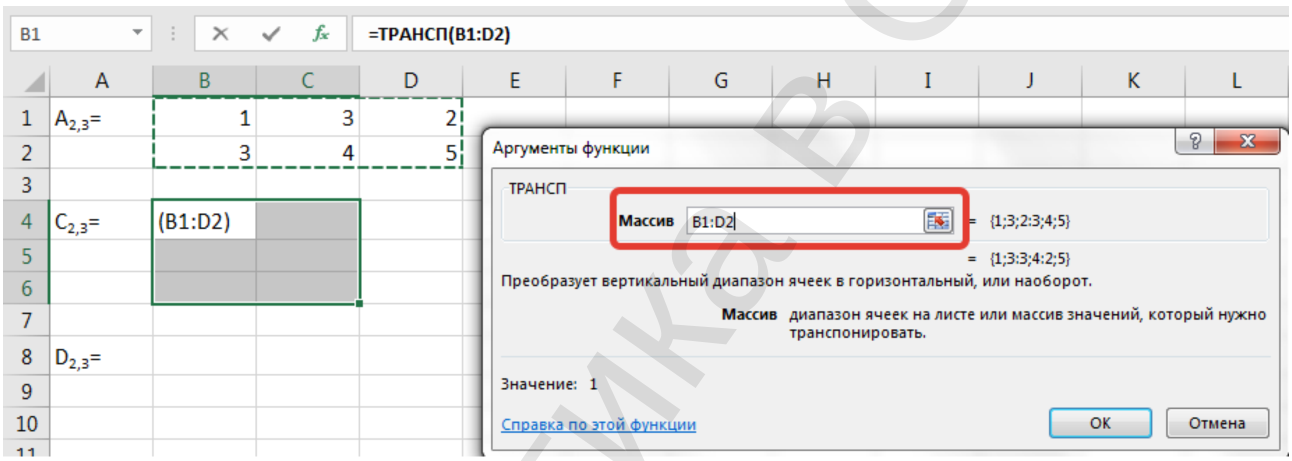


Рис. 5. Заполнение аргументов функции

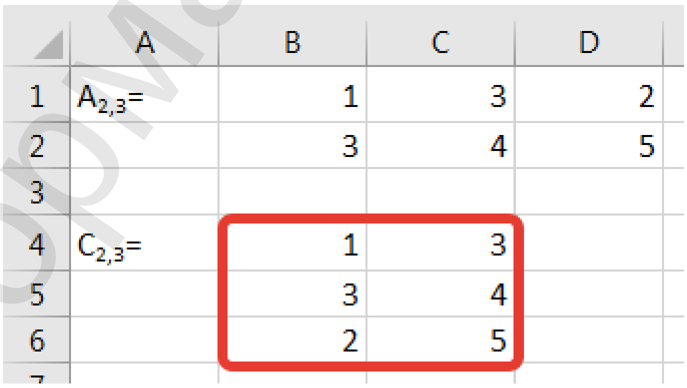


Рис. 6. Результат транспонирования матрицы

Пример нахождения обратной матрицы.

Необходимо вычислить матрицу, обратную матрице $A_{3,3}$, результат представить в виде матрицы $B_{3,3}$.

Решение.

1. Задать значения элементам матрицы $A_{3,3}$ на листе 5 (табл. 5).
2. Выделить место для результирующей матрицы $B_{3,3}$ (диапазон *B*5:*D*7).
3. Нажать на кнопку *Вставить функцию*, расположенную рядом со строкой формул или на вкладке *Формулы*.
4. В открывшемся диалоговом окне *Вставка функции* открыть категорию *Математические* и выбрать из списка функцию *МОБР*.
5. Задать аргумент функции: выбрать мышью массив – $A_{3,3}$ (рис. 7).
6. Нажать одновременно 3 клавиши *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.
7. В выделенной области *B*8:*D*9 получим результат перемножения матриц (рис. 8).

Таблица 5

Элементы матрицы $A_{3,3}$

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	$A_{3,3}$=	1	3	2		
2		3	4	5		
3		4	2	1		
4						
5	$B_{3,3}$=					
6						
7						
8						

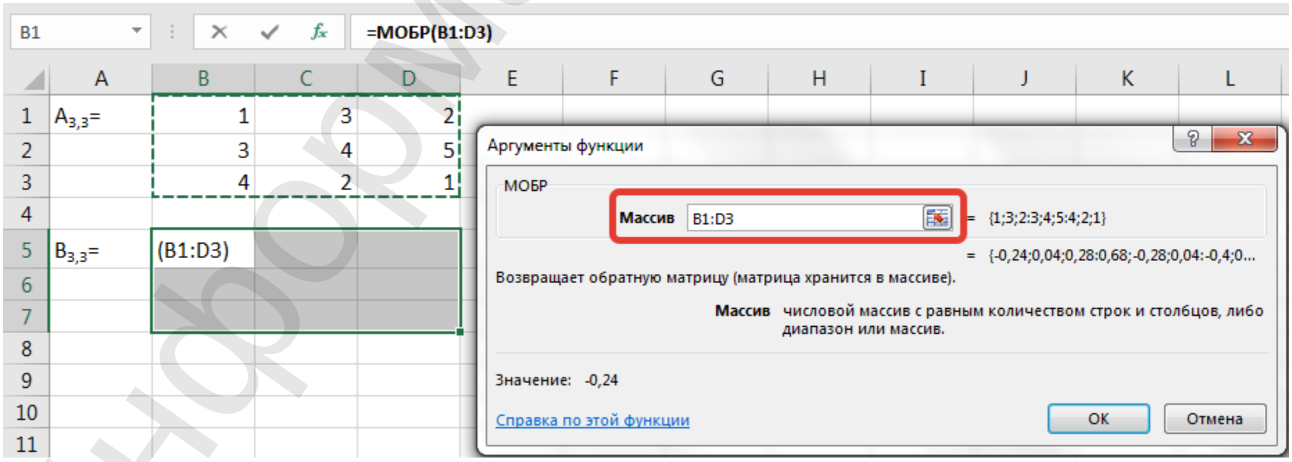


Рис. 7. Заполнение аргументов функции

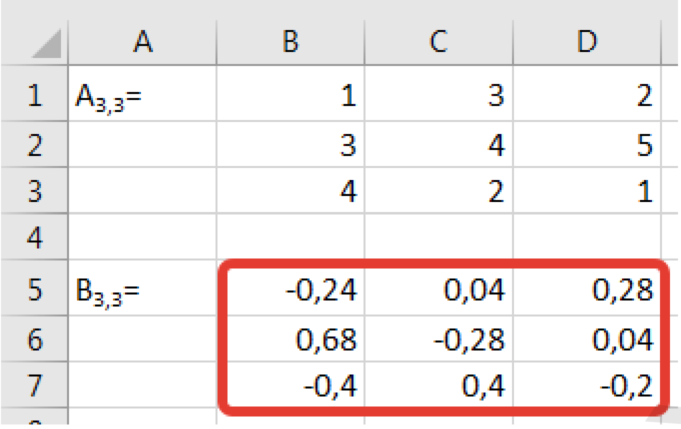


Рис. 8. Результат транспонирования матрицы

Пример нахождения определителя матрицы.

Необходимо вычислить определитель матрицы $A_{3,3}$, результат представить в виде числа K.

Решение.

1. Задать значения элементам матрицы $A_{3,3}$ на листе 6 (табл. 6).
2. Выделить ячейку для вычисления определителя (ячейка $B5$).
3. Нажать на кнопку *Вставить функцию*, расположенную рядом со строкой формул или на вкладке *Формулы*.
4. В открывшемся диалоговом окне *Вставка функции* открыть категорию *Математические* и выбрать из списка функцию *МОПРЕД*.
5. Задать аргумент функции: выбрать мышью массив – $A_{3,3}$ (рис. 9).
6. Нажать клавишу *Enter*.
7. В выделенной ячейке $B5$ получим определитель матрицы $A_{3,3}$ (рис. 10).

Таблица 6

Элементы матрицы $A_{3,3}$

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	$A_{3,3}$=	1	3	2		
2		3	4	5		
3		4	2	1		
4						
5	K=					
6						

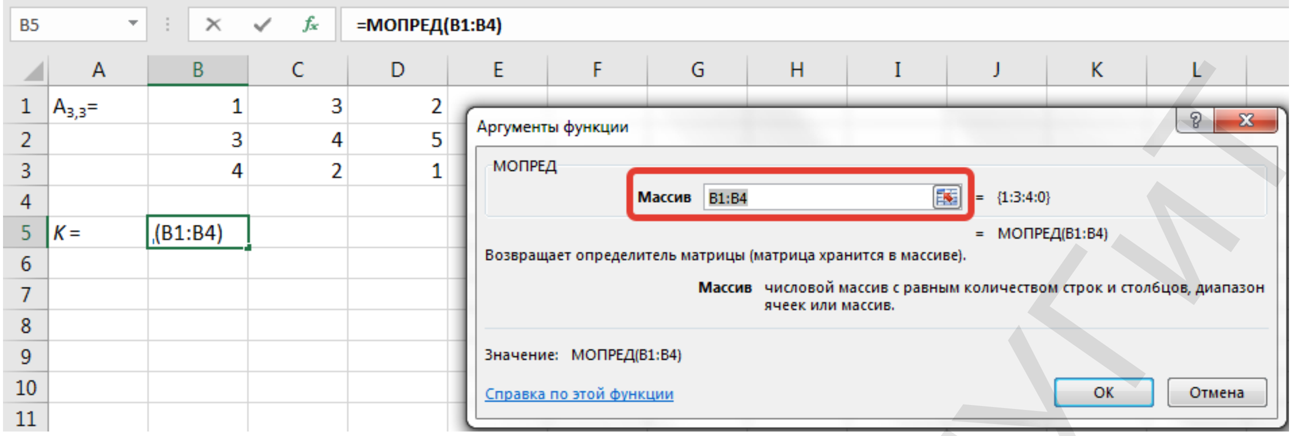


Рис. 9. Заполнение аргументов функции

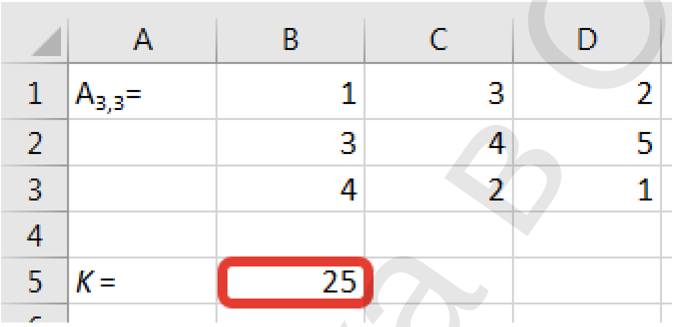


Рис. 10. Результат вычисления определителя матрицы

В следующем примере рассмотрим *решение системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.*

Задана система линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$
\begin{aligned}
&x1 + 2\cdot x2 + 3\cdot x3 = 4;\\
&4\cdot x1 + 3\cdot x2 + 2\cdot x3 = 1;\\
&x1 + 3\cdot x2 + 2\cdot x3 = 4.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В матричной форме система (1) имеет вид:

$$A_{3,3} \cdot X_{3,1} = B_{3,1}, \tag{2}$$

где $A_{3,3}$ – матрица коэффициентов при неизвестных

$$A_{3,3} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \tag{3}$$

$B_{3,1}$ – вектор правых частей

$$B_{3,1} := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Вектор неизвестных $X_{3,1}$ может быть найден по формуле:

$$X_{3,1} = A_{3,3}^{-1} \cdot B_{3,1}, \tag{5}$$

где $A_{3,3}^{-1}$ – обратная матрица/

Решение.

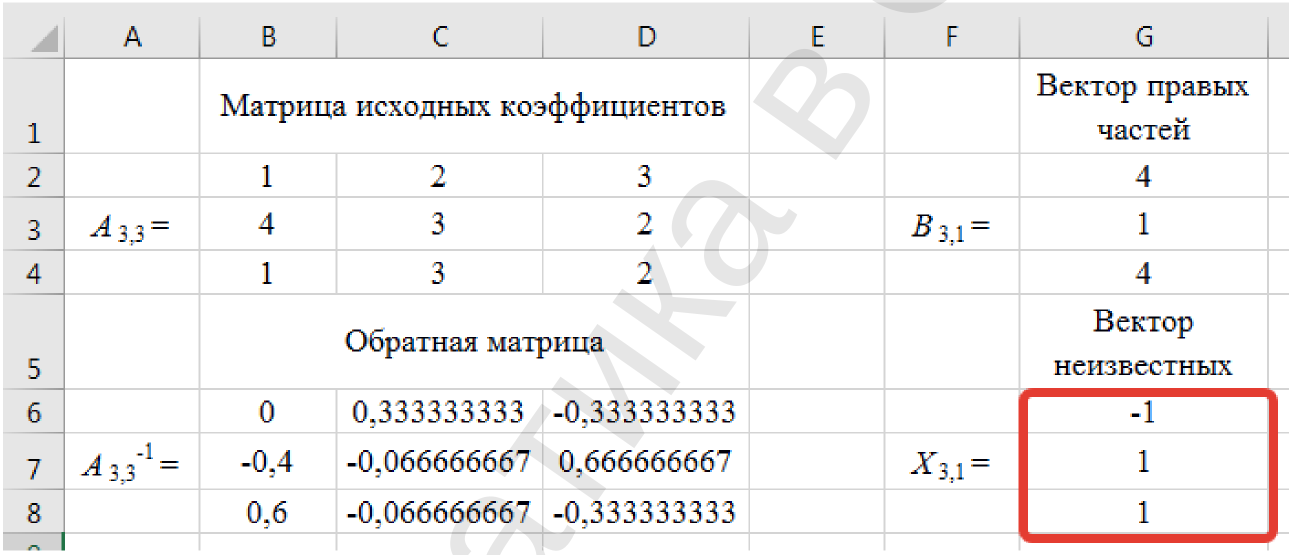
1. Заполнить лист 7 электронной таблицы исходными данными. Задать значения элементам матрицы исходных коэффициентов $A_{3,3}$, вектора правых частей $B_{3,1}$ (табл. 7).
2. Использовать функцию *МОБР* для вычисления обратной матрицы $A_{3,3}^{-1}$ (диапазон *B*6:*D*8).
3. Использовать функцию *МУМНОЖ* для вычисления вектор неизвестных $X_{3,1}$. В качестве аргументов выбрать обратную матрицу $A_{3,3}^{-1}$ (массив1) и вектор правых частей $B_{3,1}$ (массив2).

Результат решения системы линейных уравнений представлен на рис. 11.

Таблица 7

Решение системы линейных алгебраических уравнений

	A	B	C	D	E	F	H
1		Матрица исходных коэффициентов					Вектор правых частей
2		1	2	3			4
3	$A_{3,3}$ =	4	3	2		$B_{3,1}$ =	1
4		1	3	2			4
5		Обратная матрица					Вектор неизвестных
6							
7	$A_{3,3}^{-1}$ =					$X_{3,1}$ =	
8							



	A	B	C	D	E	F	G
1		Матрица исходных коэффициентов					Вектор правых частей
2		1	2	3			4
3	$A_{3,3}$ =	4	3	2		$B_{3,1}$ =	1
4		1	3	2			4
5		Обратная матрица					Вектор неизвестных
6		0	0,333333333	-0,333333333			-1
7	$A_{3,3}^{-1}$ =	-0,4	-0,066666667	0,666666667		$X_{3,1}$ =	1
8		0,6	-0,066666667	-0,333333333			1

Рис. 11. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы

Рассмотрим пример *решения системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера* (через определители).

Метод Крамера применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), в которых число неизвестных переменных равно числу уравнений и определитель основной матрицы отличен от нуля.

1. На листе 8 следует разместить исходную матрицу исходных коэффициентов $A_{3,3}$ и вектор правых частей $B_{3,1}$ (табл. 7).

2. Далее на листе размещаются 3 матрицы ($C_{3,3}$, $D_{3,3}$, $E_{3,3}$), полученные из матрицы $A_{3,3}$ заменой соответственно 1, 2 и 3 столбцов на вектор правых частей $B_{3,1}$ (рис. 12).

3. Для матрицы исходных коэффициентов $A_{3,3}$ и полученных выше трех матриц $C_{3,3}$, $D_{3,3}$, $E_{3,3}$ вычисляются определители (рис. 13).

4. Значения неизвестных переменных вычисляются путем деления определителей Опред. 1, Опред. 2, Опред. 3 на определитель матрицы $A_{3,3}$ – Гл. опред. (рис. 13).

	A	B	C	D	E	F	G
1		Матрица исходных коэффициентов					Вектор правых частей
2		1	2	3			4
3	$A_{3,3}$ =	4	3	2		$B_{3,1}$ =	1
4		1	3	2			4
5							
6		4	2	3			
7	$C_{3,3}$ =	1	3	2			
8		4	3	2			
9							
10		1	4	3			
11	$D_{3,3}$ =	4	1	2			
12		1	4	2			
13							
14		1	2	4			
15	$E_{3,3}$ =	4	3	1			
16		1	3	4			

Рис. 12. Составление матриц $C_{3,3}$, $D_{3,3}$, $E_{3,3}$ на основе матрицы $A_{3,3}$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Матрица исходных коэффициентов					Вектор правых частей						
2		1	2	3			4						
3	$A_{3,3}$ =	4	3	2		$B_{3,1}$ =	1		Гл. опред.	15			
4		1	3	2			4						
5													
6		4	2	3									
7	$C_{3,3}$ =	1	3	2					Опред. 1	-15		X1	-1
8		4	3	2									
9													
10		1	4	3									
11	$D_{3,3}$ =	4	1	2					Опред. 2	15		X2	1
12		1	4	2									
13													
14		1	2	4									
15	$E_{3,3}$ =	4	3	1					Опред. 3	15		X3	1
16		1	3	4									

Рис. 13. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Задания

Задание 1. Вычислить значение выражения (элементов матрицы) по формуле: $E_{2,4} = A_{2,4} * C + B_{2,4} / D$.

Матрица $A_{2,4}$ формируется на основании текущей даты. В первой строке число (две цифры) и месяц (две цифры).

Матрица $B_{2,4}$ формируется аналогичным образом на основе даты рождения любимого писателя студента.

Значение C – номер варианта.

Значение D – порядковый номер первой буквы фамилии студента.

Пример выполнения задания представлен на рис. 14.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	$A_{2,4}=$	0	6	1	0		текущий день и месяц				
2		2	0	1	9		текущий год				
3											
4	$B_{2,4}=$	0	1	0	1		день и месяц из даты рождения любимого писателя				
5		2	0	0	1		год рождения любимого писателя				
6											
7	C =	6					номер варианта				
8											
9	D =	1					порядковый номер первой буквы фамилии студента				
10											
11	$E_{2,4}=$	0	37	6	1		результат				
12		14	0	6	55						

Рис. 14. Пример выполнения задания 1

Задание 2. Произвести транспонирование матрицы $B_{2,4}$ из задания 1.

Задание 3. Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом обратной матрицы и методом Крамера по заданному варианту.

1 вариант	2 вариант
$x_1 + 12 \cdot x_2 - 11 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 35$ $3 \cdot x_1 - 11 \cdot x_2 - 12 \cdot x_3 - 9 \cdot x_4 = 31$ $-10 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 - 13 \cdot x_4 = 25$ $-10 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 = 29$	$2 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 = 50$ $-5 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4 = 40$ $9 \cdot x_2 - 12 \cdot x_3 + 11 \cdot x_4 = 39$ $3 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - x_4 = 7$
3 вариант	4 вариант
$3 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 + 11 \cdot x_4 = 44$ $-14 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 12 \cdot x_4 = 35$ $-10 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 - 11 \cdot x_3 - 13 \cdot x_4 = 37$ $x_1 - 7 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 11 \cdot x_4 = 4$	$4 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 - 12 \cdot x_3 = 4$ $6 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 + 7 \cdot x_4 = 33$ $-6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 11 \cdot x_4 = 18$ $7 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 3$
5 вариант	6 вариант
$5 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = 35$ $-10 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 = 44$ $-4 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 - 9 \cdot x_4 = 17$ $10 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 42$	$6 \cdot x_1 - 2 \cdot x_3 - 7 \cdot x_4 = 32$ $-14 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 - 4 \cdot x_4 = 6$ $-11 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 - 15 \cdot x_4 = 1$ $-3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 13 \cdot x_3 - 4 \cdot x_4 = 4$
7 вариант	8 вариант
$7 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 22$ $-14 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 15$ $12 \cdot x_1 + x_2 - 13 \cdot x_3 - 14 \cdot x_4 = 50$ $-9 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = 24$	$8 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 - 9 \cdot x_4 = 17$ $x_1 + 5 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 = 18$ $2 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 = 8$ $-6 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = 16$

9 вариант	10 вариант
$9\cdot x_1 + 12\cdot x_2 + 9\cdot x_3 + 2\cdot x_4 = 33$	$10\cdot x_1 - 7\cdot x_2 + 15\cdot x_3 + 13\cdot x_4 = 37$
$-12\cdot x_1 + 6\cdot x_2 - 10\cdot x_3 = 47$	$-2\cdot x_1 + 15\cdot x_2 - 9\cdot x_3 - 8\cdot x_4 = 50$
$-4\cdot x_1 - 12\cdot x_2 - 5\cdot x_3 - 2\cdot x_4 = 12$	$-x_1 - 10\cdot x_2 - x_3 - 8\cdot x_4 = 48$
$10\cdot x_1 + 14\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 35$	$4\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 13\cdot x_3 - 11\cdot x_4 = 31$

Сравнить результаты решений системы уравнений методом обратной матрицы и методом Крамера.

Решение системы уравнений проверить, умножив матрицу исходных коэффициентов на вектор неизвестных, в результате должен получиться вектор правых частей.

Контрольные вопросы

1. Перечислить названия всех функций, представленных в работе, и их краткое описание.
2. Кратко опишите алгоритм решения системы линейных уравнений методом обратной матрицы и методом Крамера.
3. Какие три клавиши нужно нажать, чтобы получить результат при работе с матрицами?
4. Как можно выполнить проверку решения СЛАУ?

Содержание отчета

1. Титульный лист
2. Цель работы.
3. Формулировка задания.
4. Описание хода выполнения заданий, включая скриншоты рабочих листов электронной таблицы с выполненными заданиями.
5. Ответы на контрольные вопросы.
6. Общий вывод о проделанной работе.