Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашская государственная сельскохозяйственная академия»

СБОРНИК
ЗАДАНИЙ И МЕТОДИЧЕСКОЕ РУКОВОДСТВО К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЕ
по курсу теоретической механики

Часть 2

Чебоксары-2013

УДК 531.8

ББК 22.21

Рецензент: канд.техн.наук доцент кафедры теоретической и прикладной механики Чебоксарского политехнического института (филиала) ГОУ ВПО «Московский государственный открытый университет» Андреев В.И.

Сборник заданий и методическое руководство к расчетно-графической работе по курсу теоретической механики: Учебно-методическое пособие. Часть 2/Сост. С.С.Алатырев, И.С.Кручинкина.- Чебоксары: ФГБОУ ВПО ЧГСХА, 2013. - 55с.

В пособии приведены задания к расчетно-графической работе по теоретической механике, показан пример ее выполнения. Кроме того, каждое задание сопровождается краткими теоретическими сведениями в виде методических рекомендаций к выполнению работы. В пособии представлены также вопросы для самопроверки при подготовке к публичной защите работы.

Оно предназначено для обеспечения самостоятельной работы студентов очного и заочного обучения при изучении курса теоретической механики по направлениям подготовки 110800 «Агроинженерия» и 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом ФГБОУ ВПО ЧГСХА.

Предисловие

Теоретическая механика как одна из важнейших физико-математических дисциплин играет существенную роль в подготовке инженеров. На ее базе основаны многие общеинженерные дисциплины, такие, как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин и др. На основе теорем и положений теоретической механики [3] решают инженерные задачи, проводят обоснование конструкций и параметров машин, механизмов и сооружений. В этой связи при изучении данного курса требуется не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении практических задач.

Практические навыки в решении инженерных задач студент приобретает в большей степени самостоятельно при выполнении расчетно-графических работ.

Ранее для выполнения расчетно-графических работ по теоретической механике использовалось на инженерном факультете академии учебное пособие под редакцией А.А.Яблонского [2]. Однако это пособие содержит узконаправленные задания, не способствующие, на наш взгляд, в полной мере приобретению студентами навыков комплексного использования основных положений механики в инженерных расчетах. К тому же названное учебное пособие в основном рассчитано для машиностроительных, строительных и других промышленных специальностей.

Настоящее учебно-методическое пособие учитывает отмеченные выше особенности. Оно тесно увязано тематически с учебными планами направления «Агроинженерия» и составлено в соответствии с государственным образовательным стандартом третьего поколения.

При выполнении расчетно-графической работы вариант индивидуальных заданий студент определяет по шифру, установленному преподавателем.

1. Содержание первого задания

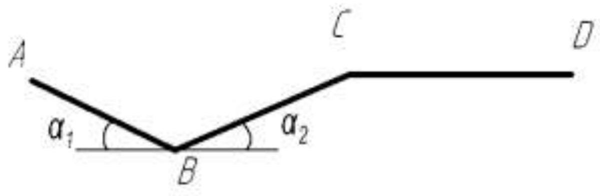
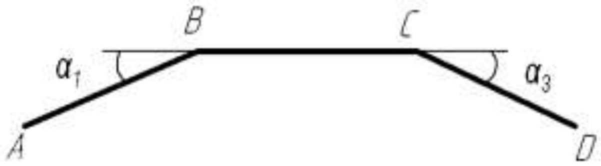
Автомобиль, имея в точке A начальную скорость v_0, преодолевает препятствие $ABCD$ и останавливается, профиль которого изображен на расчетной схеме.

Необходимо составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения автомобиля на каждом из участков пути, определить скорость автомобиля в точке B и C, время движения по участку CD и его длину l_3, если заданы масса автомобиля, силы тяги и сопротивления движению, действующие на него на каждом из участков, уклоны продольного профиля препятствия, длина l_1 участка AB и время движения t_2 автомобиля по второму участку BC.

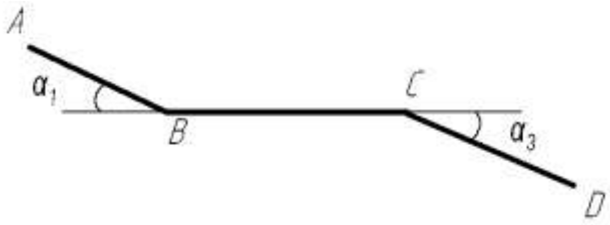
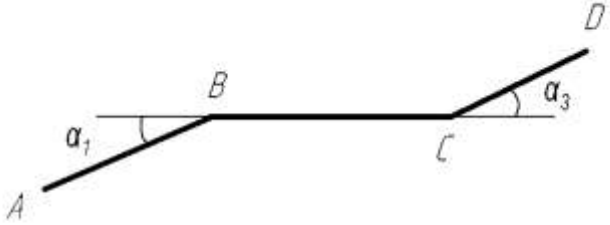
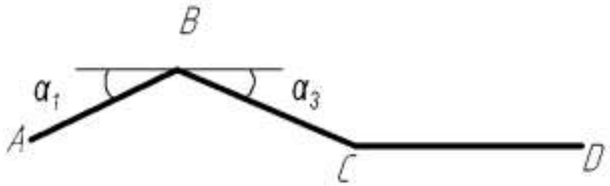
Исходные данные приведены в таблице 1.1.

Пользуясь результатами расчетов, построить в соответствующих масштабах графики движения, скорости и ускорения автомобиля для каждого участка дороги.

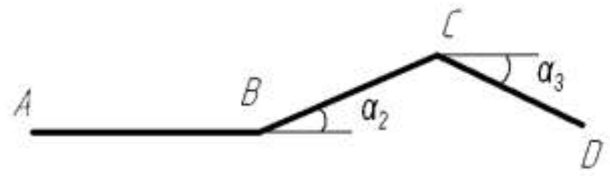
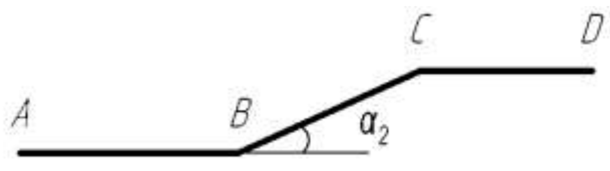
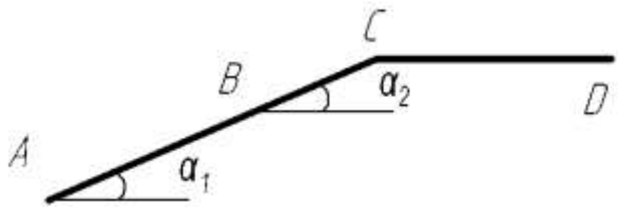
Таблица 1.1 – Исходные данные к первому заданию

Ва-ри-ант	Расчетная схема	№ стро-ки	m, тыс. кг	Сила тяги, кН			Сила сопро-тивления, кН			Угол, град			v_0, м/с	l_1, м	t_2, с
				F_1	F_2	F_3	R_1	R_2	R_3	α_1	α_2	α_3			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		1	8	0	16	0	20	8	8	20	5	0	1,0	10	10
		2	8	0	18	0	16	6	8	18	7	0	1,2	12	8
		3	8	0	24	0	8	2	4	20	15	0	1,6	15	12
		4	10	0	20	0	12	2	6	22	8	0	1,4	10	8
		5	10	0	22	0	4	3	4	17	10	0	2,0	20	10
		6	10	0	24	0	20	8	4	18	6	0	1,8	8	12
		7	10	0	24	0	10	2	4	18	10	0	1,6	15	10
		8	12	0	24	0	12	2	5	20	10	0	2,0	12	8
2		1	8	0	10	0	16	2	2	20	0	5	1,0	10	10
		2	8	0	12	0	12	4	1	22	0	6	1,2	8	8
		3	8	0	14	4	20	8	2	18	0	7	0,8	9	6
		4	12	0	18	6	30	6	3	22	0	6	1,4	7	8
		5	12	0	20	4	25	8	4	25	0	8	1,1	8	7
		6	12	0	16	6	12	4	2	20	0	8	1,2	9	10
		7	10	0	12	4	8	2	1	18	0	6	1,4	10	11
		8	10	0	20	0	6	12	2	17	0	5	1,8	11	12
3		1	10	34	7	0	6	5	40	8	0	5	10,0	30	10
		2	10	34	5	0	5	4	60	10	0	6	8,0	20	8
		3	10	34	4	0	3	2	60	12	0	7	10,0	25	12
		4	8	30	5	0	4	3	50	15	0	8	7,5	28	6
		5	8	30	4	0	6	2	505	10	0	10	9,0	22	14
		6	8	40	5	0	8	4	0	12	0	10	6,0	16	10
		7	12	40	5	0	6	3	605	7	0	8	4,0	10	12
		8	12	35	6	0	3	5	0	5	0	6	10,0	25	14

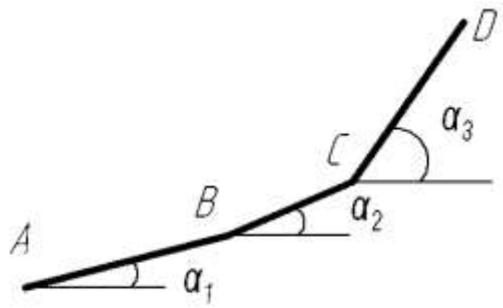
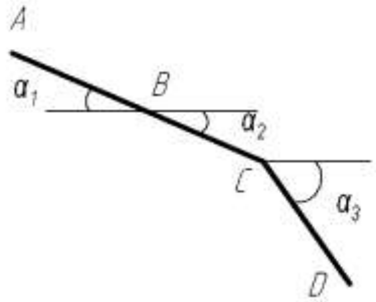
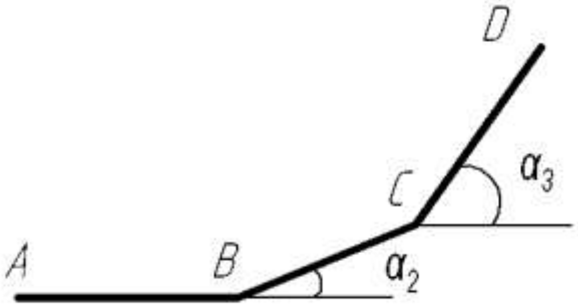
Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4		1	12	0	20	0	6	7	60	15	0	6	0,8	5	6
		2	12	0	15	0	9	10	70	17	0	8	0,4	10	12
		3	12	0	25	0	10	15	50	18	0	7	0,6	12	10
		4	10	0	20	0	20	10	50	20	0	8	6,0	20	15
		5	10	0	30	0	24	20	60	22	0	10	4,5	10	12
		6	10	0	15	0	30	5	50	12	0	7	1,2	25	8
		7	108	0	22	0	25	6	50	10	0	12	1,0	18	10
		8	8	0	20	0	20	10	40	8	0	6	0,9	22	8
5		1	8	40	30	0	15	20	14	5	0	6	1,8	20	10
		2	8	45	40	0	8	25	14	6	0	7	1,0	25	8
		3	8	45	30	0	12	14	18	7	0	6	0,8	22	6
		4	10	50	25	0	10	15	20	8	0	5	1,2	30	10
		5	10	50	30	0	15	20	17	10	0	6	0,9	28	7
		6	10	45	20	0	15	25	15	12	0	5	6,0	20	5
		7	12	45	25	10	6	20	16	8	0	7	1,4	18	6
		8	12	50	25	0	12	20	16	6	0	7	2,0	25	10
6		1	12	45	0	0	6	20	65	5	15	0	1,2	30	4
		2	12	50	0	0	6	15	30	6	10	0	1,0	28	8
		3	12	45	0	0	12	15	40	7	8	0	1,4	25	10
		4	10	50	0	0	10	201	30	8	12	0	1,2	20	8
		5	10	50	0	0	10	5	25	10	7	0	1,3	26	6
		6	10	50	0	0	5	20	60	12	18	0	1,8	36	7
		7	10	50	0	0	10	15	35	15	8	0	5,0	12	4
		8	8	30	0	0	8	10	30	18	7	0	8,0	20	6

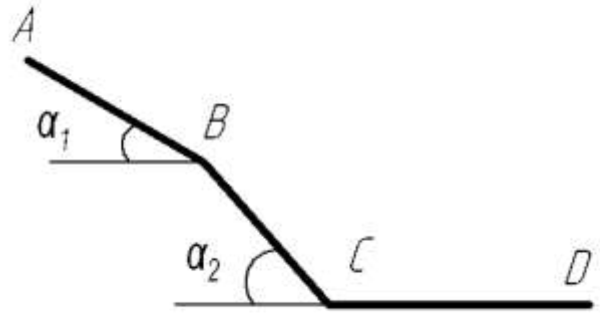
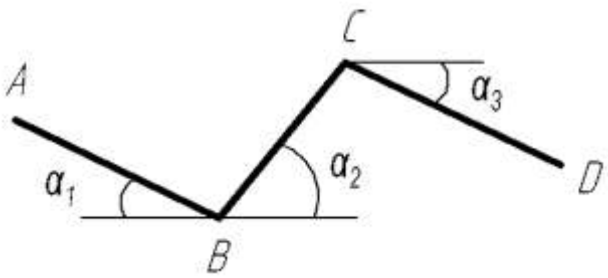
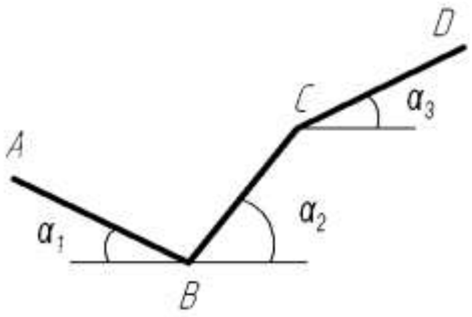
Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7		1	10	35	40	0	6	6	45	0	5	6	2,0	20	5
		2	12	30	40	0	9	6	50	0	6	5	1,8	22	8
		3	12	25	35	0	12	9	40	0	7	5	1,6	18	4
		4	10	25	35	0	12	6	50	0	8	6	1,4	25	6
		5	10	30	45	0	5	10	40	0	10	5	1,2	28	4
		6	10	25	45	0	10	5	50	0	12	6	1,0	22	4
		7	10	30	35	0	7,5	5	45	0	8	5	0,8	16	6
		8	10	20	30	0	7,5	10	40	0	7	6	1,2	20	8
8		1	8	25	35	0	8	4	40	0	20	0	3,0	20	4
		2	8	28	35	0	4	8	44	0	18	0	3,2	25	6
		3	8	20	35	0	6	12	48	0	18	0	2,4	30	5
		4	10	30	40	0	10	5	40	0	15	0	2,6	28	4
		5	10	25	40	0	7,5	10	45	0	12	0	2,8	26	5
		6	10	25	40	0	5	15	45	0	10	0	2,0	24	10
		7	12	30	45	0	12	6	50	0	8	0	2,2	22	8
		8	12	30	45	0	6	12	45	0	7	0	2,4	25	6
9		1	12	45	40	0	6	10	35	5	8	0	7,2	10	8
		2	12	50	40	0	9	10	30	6	7	0	7,4	12	6
		3	12	50	45	0	12	10	35	7	6	0	7,6	20	10
		4	12	55	45	0	6	9	25	8	5	0	7,8	25	12
		5	10	45	40	0	10	10	30	10	8	0	8,0	20	5
		6	10	40	45	0	7	12	30	12	10	0	7,7	14	6
		7	10	45	40	0	5	15	25	15	8	0	7,5	12	8
		8	8	35	30	0	4	10	30	18	7	0	7,8	8	6

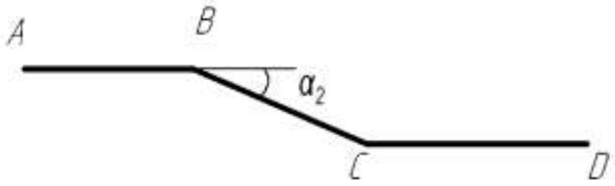
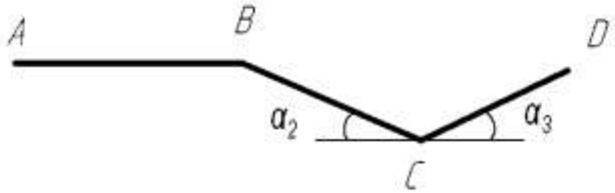
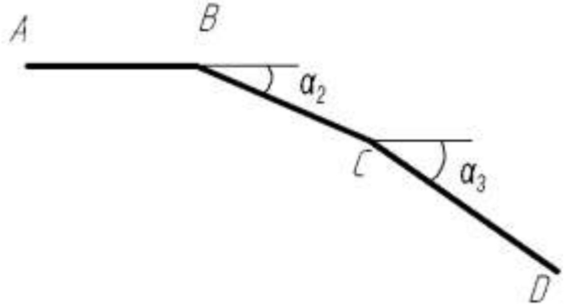
Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10		1	10	40	45	0	12	6	6	5	15	6	8,0	20	4
		2	10	45	45	10	9	6	9	6	12	7	7,8	25	5
		3	10	40	45	10	6	9	6	7	10	8	7,8	22	6
		4	8	40	40	15	4	4	8	8	18	10	7,7	30	4
		5	10	45	40	15	10	10	5	10	12	15	7,6	28	8
		6	10	35	40	10	10	5	5	12	15	12	7,5	32	7
		7	10	40	40	15	5	10	5	15	12	15	7,4	36	10
		8	8	40	35	10	8	4	4	12	15	15	7,3	34	6
11		1	12	0	0	0	9	20	45	15	16	7	1,0	12	6
		2	12	0	0	0	10	20	40	16	17	8	1,1	10	5
		3	12	0	0	0	15	25	45	17	18	10	1,2	8	4
		4	12	0	0	0	15	20	35	17	16	5	1,3	10	10
		5	8	0	0	0	20	15	40	18	17	6	1,4	11	10
		6	8	0	0	0	18	15	40	15	17	7	1,5	12	6
		7	8	0	0	0	14	18	35	15	17	6	1,6	15	7
		8	10	0	0	0	12	25	30	16	18	7	1,4	10	8
12		1	8	28	40	14	8	4	24	0	15	7	2,0	20	5
		2	8	20	35	10	4	8	28	0	12	6	1,8	22	4
		3	8	20	35	0	4	8	20	0	10	5	1,6	25	4
		4	8	25	30	10	6	4	20	0	8	8	1,7	30	6
		5	10	30	45	15	5	10	25	0	7	10	1,5	28	5
		6	10	25	45	10	10	20	25	0	6	8	1,4	26	4
		7	10	25	35	10	5	20	20	0	5	7	1,6	24	6
		8	12	30	40	0	6	13	22	0	7	6	1,8	28	8

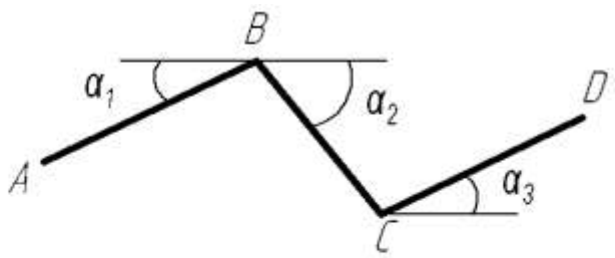
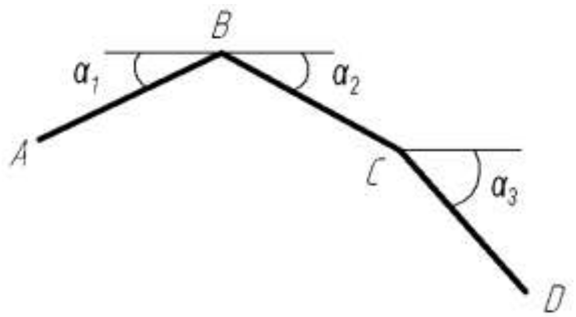
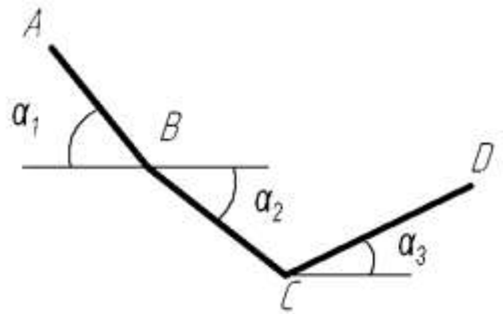
Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
13		1	12	0	0	0	18	14	40	15	18	0	1,0	20	8
		2	12	0	0	0	9	20	40	16	17	0	1,2	16	10
		3	12	0	0	0	12	15	30	17	16	0	1,4	15	7
		4	12	0	0	0	20	20	35	20	20	0	1,6	18	9
		5	10	0	0	0	20	15	40	20	18	0	1,8	12	12
		6	10	0	0	0	20	20	40	17	20	0	2,0	14	15
		7	10	0	0	0	25	20	35	20	20	0	1,9	15	10
		8	8	0	0	0	15	25	40	18	17	0	1,7	20	14
14		1	10	0	45	0	5	10	30	15	10	6	1,0	25	6
		2	10	0	45	0	10	5	40	16	8	12	1,3	20	5
		3	10	0	50	0	15	20	30	17	6	10	1,5	18	4
		4	8	0	35	0	20	10	35	18	7	8	1,7	16	6
		5	8	0	45	0	25	10	30	20	12	7	1,9	22	5
		6	8	0	35	0	28	15	32	22	10	8	1,8	17	10
		7	8	0	30	0	15	17	30	20	8	7	1,5	19	8
		8	12	0	40	0	12	15	40	15	7	8	1,4	16	6
15		1	12	0	40	0	20	18	16	18	12	5	2,4	20	5
		2	12	0	40	0	18	12	16	17	10	6	2,2	24	6
		3	12	0	45	14	20	16	12	16	8	7	2,3	22	4
		4	10	0	35	10	20	10	10	15	7	6	2,6	18	7
		5	10	0	45	10	25	10	15	20	12	7	1,8	15	8
		6	10	0	40	10	10	5	10	18	10	8	1,5	25	6
		7	8	0	30	15	10	4	10	20	8	12	1,4	17	9
		8	8	0	45	10	20	3	15	18	7	6	1,7	19	5

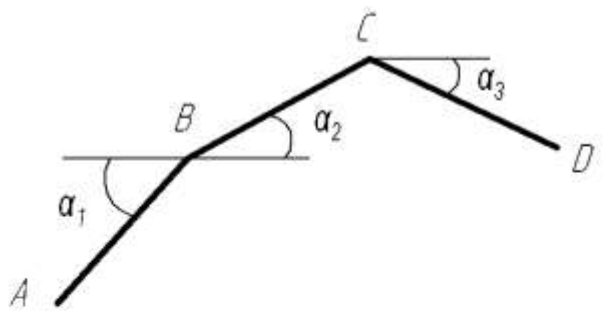
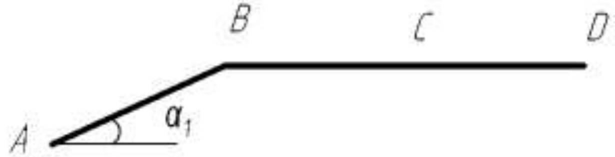
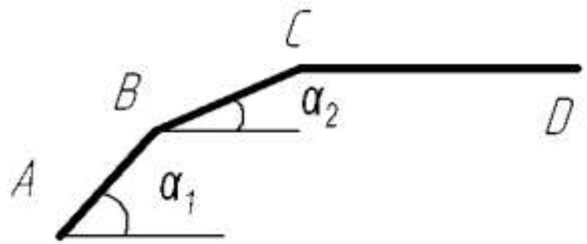
Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
16		1	10	30	0	0	25	20	30	0	20	0	1,0	10	5
		2	10	35	0	0	20	20	20	0	18	0	1,2	12	4
		3	10	40	0	0	15	20	20	0	15	0	1,4	8	10
		4	12	45	0	0	20	15	30	0	18	0	1,3	9	8
		5	12	45	0	0	12	15	28	0	20	0	1,5	12	12
		6	12	40	0	0	24	20	40	0	18	0	2,0	7	10
		7	12	45	0	0	20	10	35	0	17	0	1,8	8	9
		8	8	35	0	0	14	20	40	0	22	0	1,7	10	6
17		1	12	25	0	0	14	20	16	0	20	5	1,2	9	5
		2	12	20	0	0	12	15	19	0	20	6	1,0	12	4
		3	12	20	0	10	12	20	16	0	16	7	1,4	10	8
		4	10	25	0	15	15	15	15	0	17	8	1,6	14	9
		5	10	30	0	20	10	10	15	0	15	10	1,8	12	7
		6	9	30	0	20	10	8	15	0	15	12	2,0	11	3
		7	7,5	35	0	15	8	16	20	0	17	10	1,9	8	6
		8	8	25	0	18	12	10	14	0	16	8	1,7	10	4
18		1	8	30	0	0	18	15	30	0	16	5	1,0	4	5
		2	8	35	0	0	8	15	20	0	17	6	1,2	5	6
		3	8	20	0	0	4	15	30	0	18	7	1,4	10	7
		4	10	45	0	0	5	18	40	0	20	8	1,3	5	4
		5	10	45	0	0	10	15	30	0	15	10	1,8	8	8
		6	10	30	0	0	9	15	45	0	17	10	1,6	10	10
		7	12	40	0	0	6	20	40	0	16	8	1,3	9	8
		8	10	35	0	0	5	15	45	0	15	7	1,3	11	12

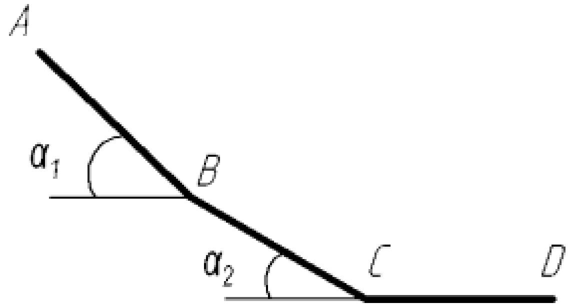
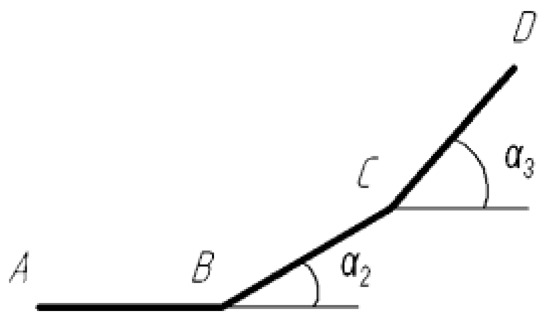
Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
19		1	10	40	0	0	10	20	6	5	20	6	2,0	12	5
		2	10	45	0	10	10	18	12	6	18	7	2,2	10	6
		3	10	40	0	15	6	12	12	7	16	8	2,4	11	5
		4	8	35	0	15	5	15	10	8	17	6	2,6	9	6
		5	8	35	0	10	10	10	5	10	15	7	2,8	16	4
		6	10	45	0	20	5	10	20	12	15	6	3,0	18	7
		7	10	45	0	10	10	7,5	20	10	16	8	2,9	12	6
		8	8	40	0	20	4	6	14	15	15	12	3,2	10	5
20		1	8	35	0	0	4	8	40	15	15	7	2,0	16	5
		2	8	35	0	0	8	6	35	12	16	5	1,8	12	6
		3	10	40	0	0	5	15	40	10	17	6	1,9	14	8
		4	10	45	0	0	10	25	50	8	20	7	1,7	10	7
		5	10	40	0	0	5	20	35	7	18	6	1,6	15	10
		6	10	40	0	0	10	20	35	6	20	5	1,4	8	9
		7	12	45	0	0	6	20	45	5	18	6	1,2	7	8
		8	12	50	0	0	10	30	40	6	20	5	1,3	9	4
21		1	10	10	0	0	6	15	30	16	20	5	1,0	10	6
		2	10	12	0	0	3	15	35	15	18	6	1,2	8	7
		3	12	15	0	0	8	9	20	17	18	10	1,4	9	8
		4	10	10	0	10	9	8	25	20	16	5	1,1	7	8
		5	8	8	0	0	7	6	20	15	14	5	1,2	6	7
		6	10	0	0	10	16	10	20	18	15	6	1,3	8	6
		7	8	0	0	5	16	10	20	18	16	5	1,2	9	7
		8	8	0	0	6	20	14	30	18	16	7	0,9	12	10

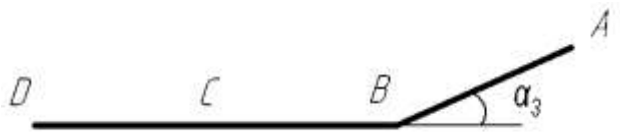
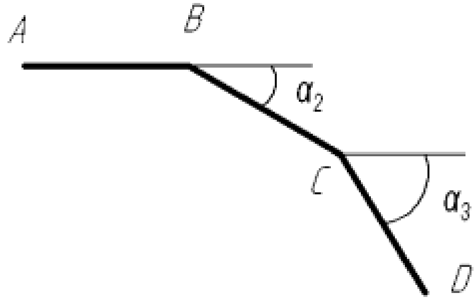
Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22		1	10	45	40	0	10	5	50	7	7	5	1,2	22	10
		2	10	45	40	0	10	7,5	40	8	5	6	1,4	24	11
		3	10	40	50	0	5	10	50	8	6	7	1,5	20	7
		4	10	45	45	0	10	10	50	7	8	10	1,6	18	12
		5	8	35	40	0	4	8	40	10	6	7	1,8	16	6
		6	8	35	30	0	8	6	40	10	6	0	6,0	12	6
		7	8	35	30	0	8	4	35	12	5	0	8,4	10	7
		8	12	40	40	0	6	6	50	8	6	0	1,1	25	6
23		1	12	50	30	0	6	12	50	5	0	0	2,0	20	5
		2	12	50	20	0	12	6	55	6	0	0	2,2	22	6
		3	12	45	20	0	6	9	50	7	0	0	2,4	16	7
		4	12	50	30	0	6	12	50	8	0	0	2,6	18	8
		5	10	45	10	0	5	10	55	10	0	0	2,8	20	10
		6	12	50	30	0	5	7,5	55	12	0	0	3,0	14	4
		7	8	30	20	0	4	8	50	10	0	0	3,2	8	7
		8	8	30	20	0	8	4	40	10	0	0	7,0	15	6
24		1	10	45	40	0	10	5	30	15	9	0	4,0	20	4
		2	10	45	40	0	5	5	35	10	9	0	5,0	30	3
		3	10	45	40	0	5	10	33	10	10	0	8,0	15	4
		4	12	50	45	0	12	6	30	5	5	0	1,0	40	9
		5	12	50	45	0	9	9	25	6	6	0	2,0	35	8
		6	12	45	50	0	6	9	34	7	7	0	2,5	22	7
		7	12	50	45	0	6	9	35	8	8	0	3,0	40	8
		8	8	40	40	0	4	4	40	10	10	0	10,0	20	4

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
25		1	12	0	30	0	20	6	50	18	0	0	1,0	20	6
		2	12	0	20	0	20	6	55	20	0	0	1,2	22	5
		3	12	0	18	0	18	12	50	20	0	0	1,4	24	8
		4	10	0	30	0	12	5	45	20	0	0	1,8	26	7
		5	10	0	35	0	9	10	40	18	0	0	2,0	28	4
		6	10	0	25	0	8	5	40	17	0	0	2,2	30	9
		7	12	0	24	0	10	4	30	16	0	0	2,4	28	6
		8	8	0	24	0	24	8	24	20	0	0	1,7	24	7,5
26		1	8	0	0	0	20	20	48	20	20	0	1,0	22	4
		2	8	0	0	0	20	20	44	20	20	0	1,1	24	3
		3	8	0	0	5	20	20	40	18	18	0	1,2	26	8
		4	8	0	0	10	16	20	36	15	15	0	1,3	28	6
		5	10	0	0	5	16	20	40	20	20	0	1,4	30	4
		6	10	0	0	10	12	20	50	10	10	0	1,5	32	12
		7	10	0	0	10	10	18	45	18	18	0	1,6	34	10
		8	12	0	0	10	9	8	30	17	17	0	1,7	36	6
27		1	12	50	36	0	12	6	19	0	5	5	6,0	12	5
		2	12	50	35	0	9	6	16	0	6	6	6,5	10	6
		3	12	45	40	15	6	7,2	20	0	7	7	7,0	8	5
		4	12	45	42	10	6	6	19	0	8	8	7,5	10	6
		5	10	40	35	15	10	5	20	0	10	10	8,0	9	8
		6	10	45	40	0	5	7,5	10	0	12	12	7,0	16	7
		7	8	35	35	10	4	6	18	0	10	10	6,0	14	4
		8	8	35	40	10	8	6	20	0	8	8	6,5	20	8

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
28		1	10	35	35	0	15	10	15	0	0	15	1,0	20	4
		2	10	30	40	0	10	15	15	0	0	16	1,2	22	5
		3	10	35	30	0	7,5	5	25	0	0	17	1,4	24	6
		4	10	30	32	10	5	7,5	25	0	0	10	1,6	28	7
		5	8	30	28	18	4	8	24	0	0	15	2,0	32	8
		6	8	28	24	10	8	4	16	0	0	12	1,8	30	6
		7	12	33	39	10	6	9	12	0	0	18	1,9	29	5
		8	12	39	40	18	9	12	16	0	0	17	1,7	28	4
29		1	12	32	48	0	12	18	50	0	0	5	1,0	10	8
		2	12	39	42	0	9	12	55	0	0	6	1,1	12	7
		3	10	36	39	0	6	9	55	0	0	7	1,2	14	6
		4	12	35	40	0	7,5	10	50	0	0	8	1,3	16	6
		5	10	30	37	0	10	12,5	55	0	0	8	1,6	18	5
		6	10	37	34	0	7,5	9,5	50	0	0	6	1,8	20	5
		7	10	35	37	0	6,5	12	45	0	0	6	2,0	22	4
		8	10	40	35	0	5	10	50	0	0	8	2,2	25	4
30		1	8	35	0	0	4	30	40	0	15	15	1,4	14	8
		2	8	35	0	0	6	30	45	0	12	12	1,2	16	7
		3	8	40	0	0	8	25	40	0	10	10	1,0	18	6
		4	10	45	0	0	5	30	40	0	8	8	1,6	20	5
		5	10	45	0	0	7,5	30	45	0	7	7	1,8	22	4
		6	10	40	0	0	10	30	40	0	6	6	2,0	24	6
		7	12	45	0	0	6	25	40	0	5	5	2,2	25	4
		8	12	45	0	0	9	30	45	0	7	7	1,8	17	7

1.1. Теоретические сведения к первому заданию

Задание охватывает вопросы кинематики и динамики движения материальной точки, предусматривает определение характеристик движения путем интегрирования [3] дифференциальных уравнений ее движения и использования теоремы об изменении количества движения [1].

В задании поступательное движение автомобиля рассматривается как движение материальной точки. Ускорение $\bar{a}$ материальной точки массы m, движущейся под действием приложенных к ней сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,… $\overline{F}_n$ определяется с помощью основного закона динамики в сочетании с законом о независимости действия сил:

$$m\bar{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots + \overline{F}_n.$$

При этом дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на оси декартовых координат имеют вид:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_k, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}, \tag{1.1}$$

где $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ - вторые производные по времени координат материальной точки (проекции ускорения $\bar{a}$); F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} – проекции действующих сил на соответствующие оси декартовых координат.

Для определения закона движения этой точки следует проинтегрировать данную систему уравнений. При интегрировании дифференциальных уравнений в общем случае появляются шесть произвольных постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6, которые определяются по начальным условиям. Под начальными условиями движения точки понимают значения координат и проекций скоростей точки в начальный момент движения, т.е. при t=0:

$$x = x_0, \ \dot{x} = v_{x_0} = \dot{x}_0,$$

$$y = y_0, \ \dot{y} = v_{y_0} = \dot{y}_0,$$

$$z = z_0, \ \dot{z} = v_{z_0} = \dot{z}_0.$$

В результате подстановки начальных условий движения в первые и вторые интегралы системы уравнений (1.1) образуется система шести уравнений для определения неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и C_6.

В задании предусматривается движение тела (материальной точки) по прямолинейным участкам трассы, поэтому на каждом участке будет лишь одно дифференциальное уравнение движения и два начальных условия.

При выполнении задания используется также теорема об изменении количества движения материальной точки.

Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно векторной сумме импульсов $\bar{S}_k$ сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени:

$$\overline{q}_1 - \overline{q}_0 = \sum \overline{S}_k \ ,$$

где $\overline{q}_0$ – количество движения материальной точки, соответствующее начальному моменту времени t_0; $\overline{q}_1$ – количество движения материальной точки, соответствующее конечному моменту времени t_1.

Та же теорема в проекциях на оси декартовых координат имеет вид:

$$mv_{x_1} - mv_{x_0} = \sum S_{kx},$$

$$mv_{y_1} - mv_{y_0} = \sum S_{ky},$$

$$mv_{z_1} - mv_{z_0} = \sum S_{kz}$$

(здесь v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0}- проекции скорости точки при $t = t_0$; v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1} – проекции скорости точки при $t = t_1$; S_{kx}, S_{ky}, S_{kz} – проекции импульса силы на координатные оси).

Импульс силы за тот же промежуток времени выражается формулой:

$$\bar{S}_{к} = \int_{t_0}^{t_1} \overline{F}_k \, dt \, .$$

В задании действующие силы постоянны, поэтому

$$\bar{S}_{к} = \overline{F}_k \ (t_1 - t_0) = \overline{F}_k \Delta t.$$

Или в проекциях на оси декартовых координат:

$$S_{kx} = F_{kx} \Delta t,$$

$$S_{ky} = F_{ky} \Delta t,$$

$$S_{kz} = F_{kz} \Delta t.$$

Рекомендуется выполнять задание в следующем порядке:

1. Составить дифференциальное уравнение движения автомобиля (материальной точки) на участке *AB*. Для этого необходимо выбрать координатные оси, поместив их начало в начальном положении материальной точки (одну из координатных осей следует проводить вдоль линии движения точки). Необходимо изобразить движущийся автомобиль в произвольный момент времени t и показать на рисунке все действующие на него силы, в том числе и реакции связей. Далее найти суммы проекций всех сил на выбранные оси координат и подставить эти суммы в правые части соответствующих уравнений (1.1).

2. Проинтегрировать полученные дифференциальные уравнения.

3. Установить начальные условия движения автомобиля и по ним определить постоянные интегрирования.

4. Из полученных в результате интегрирования уравнений определить искомые величины, используя условия их сопряженности.

5. Рассмотреть движение автомобиля на участке *BC*, используя теорему об изменении количества движения материальной точки. Для этого поместить начало координатных осей в точке *B* и направить одну из осей вдоль линии движения. Изобразить движущийся автомобиль в произвольный момент времени t и показать на рисунке все действующие на него силы. Далее написать уравнение теоремы об изменении количества движения материальной точки и определить скорость точки *C* при известном значении времени движения по участку BC.

6. Сказанные в п.1, 2 и 3 повторить на участке *CD*. Далее определить время движения автомобиля на участке *CD*, пользуясь условием, что в точке *D* скорость v_D=0. Наконец, определить длину участка *CD* при найденном значении времени движения автомобиля на нем.

7. Пользуясь результатами расчетов, построить в соответствующих масштабах графики движения, скорости и ускорения автомобиля для каждого участка дороги.

1.2. Пример выполнения первого задания

Пример. Автомобиль – вездеход массой m=4000 кг, имея в точке A начальную скорость v_0=2 м/с, преодолевает препятствие $ABCD$ в пересеченной местности, профиль которого характеризуется уклонами α_1=15°, α_2=10°, α_3=5° (рисунок 1.1). Длина участка AB составляет 20м, время движения по участку BC t_2=10с. Силы тяги по участкам составляют F_1 =12кН, F_2 = 0, F_3 = 0, силы сопротивления движению R_1=4 кН, R_2=4,8 кН, R_3=6 кН. Определить скорости автомобиля в точках B и C, время движения t_3 по участку CD до остановки в точке D и его длину l_3. Считая, что в точках перелома профиля B и C ударов не происходит, а скорость плавно изменяет свое направление, сохраняя модуль, автомобиль за время преодолевания препятствия $ABCD$ не отрывается от поверхности последнего.

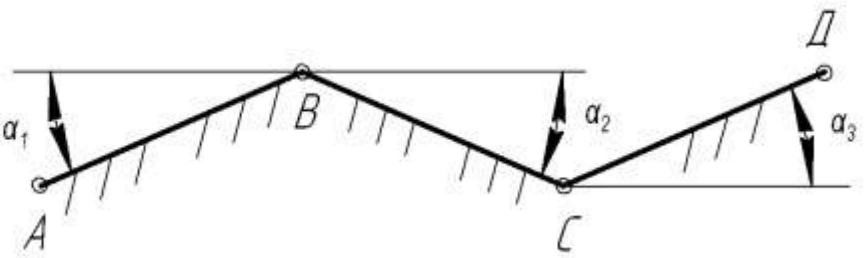


Рисунок 1.1 – Профиль препятствия

Решение

Рассмотрим движение автомобиля по участку AB (рисунок 1.2).

На автомобиль действуют следующие внешние силы: сила тяжести $\overline{G}$, нормальная реакция грунта $\overline{N}_1$, сила внешнего сопротивления (сопротивление воздуха, сопротивление движению вследствие образования колеи и др.причин) $\overline{R}_1$, сила тяги $\overline{F}_1$, являющаяся движущей силой.

Составим дифференциальное уравнение движения центра масс автомобиля в проекции на ось X:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}\ , \tag{1.2}$$

где m – масса автомобиля; x – координата его центра масс; F_{kx} - проекции внешних сил на ось x, действующих на автомобиль.

Оно в развернутом виде:

$$m\ddot{x} = F_1 - R_1 - G\sin\alpha_1.$$

Откуда

$$\ddot{x} = \frac{F_1 - R_1 - G\sin\alpha_1}{m} = \frac{F_1 - R_1}{m} - \frac{mg\cdot\sin\alpha_1}{m} = \frac{F_1 - R_1}{m} - G\cdot\sin\alpha_1\ . \qquad (1.3)$$

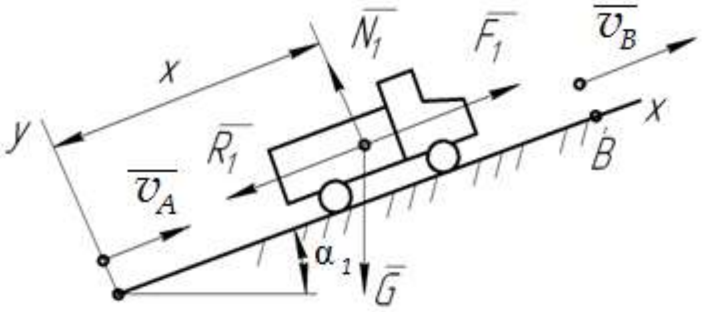


Рисунок 1.2 – Расчетная схема для участка *AB*

По исходным данным задачи на участке *AB*:

$$\ddot{x} = \frac{12\cdot 10^3 - 1\cdot 10^3}{4\cdot 10^3} - 9{,}81\cdot 0{,}259 = 0{,}21\ \text{м/с}^2\ . \qquad (1.4)$$

Откуда, продифференцировав дважды по времени, получим:

$$\dot{x} = 0{,}21t + c_1, \qquad (1.5)$$

$$x = 0{,}105\,t^2 + c_1 t + c_2\,. \qquad (1.6)$$

По начальным условиям движения на участке *AB* при t=0: $\dot{x}_0 = v_0 = 2$ м/с, x_0=0. Следовательно, подставляя в (1.5) и (1.6) эти данные, получим:

$$c_1 = \dot{x}_0 = 2\ \text{м/ с},\ c_2 = 0.$$

Таким образом,

$$\dot{x} = 0{,}21t + 2, \qquad (1.7)$$

$$x = 0{,}105t^2 + 2t\,. \qquad (1.8)$$

Уравнение (1.8) является уравнением движения автомобиля на участке *AB*.

Определим время t_1 движения автомобиля по этому участку, использовав условие, что при $t = t_1$, $x = l_1 = 20$ м.

Следовательно, получим:

$$20 = 0{,}105t_1^2 + 2t_1.$$

Или

$$0{,}105t_1^2 + 2t_1 - 20 = 0\,.$$

Откуда

$$t_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 20 \cdot 0{,}105}}{2 \cdot 0{,}105} = \frac{-2 \pm 3{,}52}{0{,}21}\,.$$

Следовательно

$$t_1^{(1)}=7{,}24 \text{ с}, \quad t_1^{(2)}= -\,26{,}28 \text{ с}.$$

Из физических соображений $t_1>0$, поэтому принимаем t_1=7,24 с.

Подставив значение t_1 в уравнение (1.7), определим скорость автомобиля в точке B:

$$v_B= 0{,}21t + 2 = 0{,}21 \cdot 7{,}24+2 = 3{,}52 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение автомобиля по участку BC (рисунок 1.3).

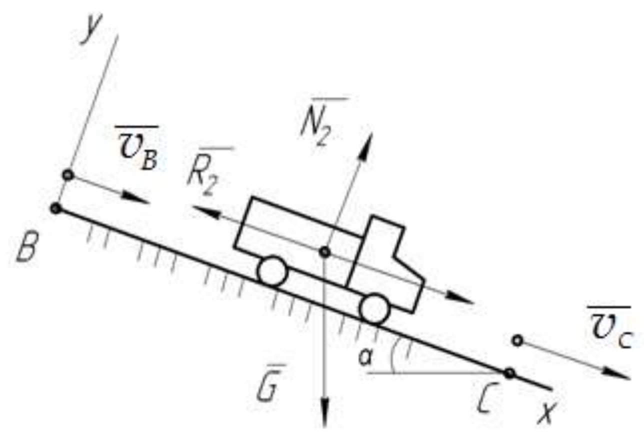


Рисунок 1.3 - Расчетная схема для участка BC

На данном участке на автомобиль действуют внешние силы: сила тяжести $\overline{G}$, нормальная реакция $\overline{N}_2$, сила внешнего сопротивления $\overline{R}_2$ (по условию задачи сила тяги F_2=0).

Применим на участке BC теорему об изменении количества движения материальной точки в проекциях на ось X:

$$m(v_{Cx} - v_{Bx}) = \sum S_{kx}^e \ , \tag{1.9}$$

где $v_{Cx}=v_C$, $v_{Bx}=v_B$ (см. рисунок 1.3), а сумма проекций импульсов внешних сил на ось x определяется следующим образом:

$$\sum S_{kx}^{e} = (G\sin\alpha_2 - R_2)\Delta t = (G\sin\alpha_2 - R_2)t_2, \qquad (1.10)$$

так как $\Delta t = t_2 - 0 = t_2$.

Подставляя эти значения в (1.9), получим:

$$m(v_C - v_B) = (\,G\sin\alpha_2 - R_2)t_2\ . \qquad (1.11)$$

Откуда с учетом $G = mg$ получим:

$$v_C = v_B + (g\cdot\sin\alpha_2 - \frac{R_2}{m})t_2. \qquad (1.12)$$

Подставляя в (1.12) численные значения, находим:

$$v_C = 3{,}52 + (9{,}81\cdot 0{,}174 - \frac{4{,}8\cdot 10^3}{4\cdot 10^3})\cdot 10 = 8{,}59 \text{ м/с}.$$

Наконец, рассмотрим движение автомобиля по участку CD (рис.1.4).

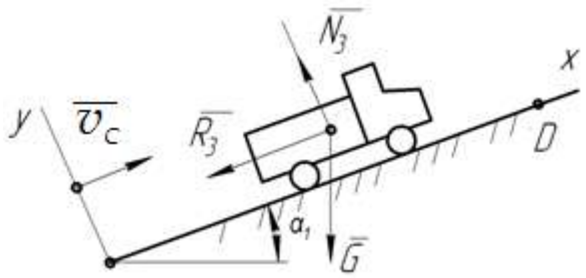


Рисунок 1.4 – Расчетная схема для участка CD

На автомобиль действуют внешние силы: сила тяжести $\overline{G}$, реакция грунта $\overline{N}_3$, сила внешнего сопротивления $\overline{R}_3$ (по условию задачи сила тяги $F_3=0$).

Дифференциальное уравнение движения центра масс автомобиля на участке CD:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}^{e} = -R_3 - G\sin\alpha_3.$$

Откуда с учетом $G=mg$

$$\ddot{x} = -\frac{R_3}{m} - g\sin\alpha_3\,. \qquad (1.13)$$

По данным примера R_3=6кН, $\alpha_3=5°$.

Следовательно

$$\ddot{x} = -\frac{6\cdot 10^3}{4\cdot 10^3} = -\ 9{,}81\cdot 0{,}087 = -2{,}35\ \text{м/с}^2\ . \tag{1.14}$$

Интегрируя данное выражение дважды по времени, получим:

$$\dot{x} = -2{,}35t + c_5\ , \tag{1.15}$$

$$x = -1{,}17t^2 + c_5 + c_6\ . \tag{1.16}$$

Постоянные интегрирования определяем по начальным условиям при t=0, $\dot{x}_0 = v_C$ = 8,59 м/с, x_0=0.

Подставив эти значения в (1.15) и (1.16), получим:

$$c_5 = 8{,}59\ \text{м/с},\ c_6 = 0.$$

Следовательно, на этом участке

$$\dot{x} = -2{,}35t + 8{,}59\ , \tag{1.17}$$

$$x = -1{,}17t^2 + 8{,}59\ . \tag{1.18}$$

Время движения автомобиля на участке CD $t = t_3$ определяем из уравнения (1.17), пользуясь условием, что в точке D скорость v_D = 0, т.к. автомобиль останавливается. Из (1.17) получаем:

$$0 = -\ 2{,}35t_3 + 8{,}59.$$

Откуда $t_з = \frac{8{,}59}{2{,}35} = 3{,}65$ с.

Длину участка CD пути находим из уравнения (1.18), подставив в него время t=t_3:

$$l = -\ 1{,}17t^2 + 8{,}59t\ = -1{,}17\cdot 3{,}65 + 8{,}59\cdot 3{,}65 = 15{,}77\ \text{м}.$$

Пользуясь результатами расчетов, построим в соответствующих масштабах графики движения, скорости и ускорения автомобиля для каждого участка дороги.

Для построения названных графиков на участке AB используем соответственно выражения (1.8), (1.7) и (1.4). При этом учтем, что время t нахождения автомобиля на этом участке изменяется от 0 до 7,24 с.

Для участка *CD* графики движения, скорости и ускорения определяются соответственно выражениями (1.18), (1.17) и (1.14). Заметим, при построении графиков отсчет времени *t* ведется с момента времени, соответствующего началу участка, то есть в точке *C* принимается *t*=0.

На участке *BC* автомобиль движется равноускоренно с ускорением

$$a = \frac{v_C - v_B}{t_2} = \frac{8{,}59 - 3{,}52}{10} = 0{,}507 \text{ м/с}^2 . \qquad (1.19)$$

Следовательно, уравнениями движения и скорости на данном участке соответственно являются:

$$x_2 = 3{,}52t + 0{,}507t^2/2, \qquad (1.20)$$

$$v_2 = 3{,}52 + 0{,}507t . \qquad (1.21)$$

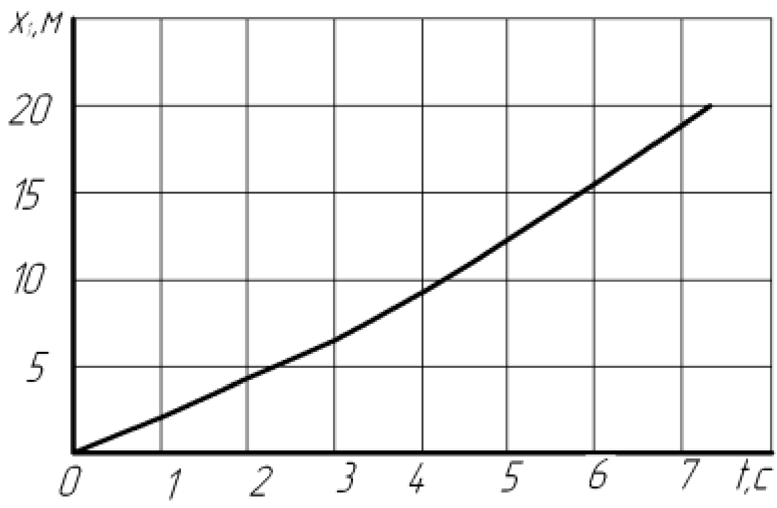
При этом время *t* изменяется от 0 до 10с.

В соответствии с зависимостями (1.4), (1.7), (1.8), (1.14), (1.17), (1.18), (1.19), (1.20) и (1.21) формируем массивы данных для построения графиков движения, скорости и ускорения автомобиля (таблица.1.2).

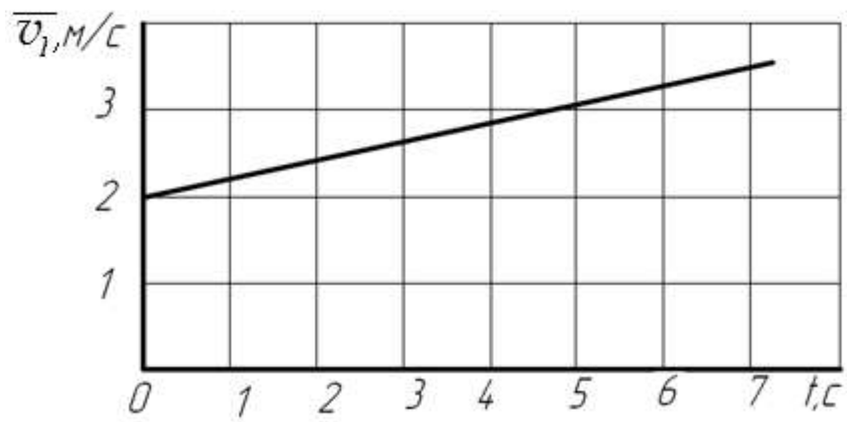
Таблица 1.2 – Массив данных для построения графиков движения, скорости и ускорения автомобиля

Участок AB	t, с	0	1	2	3	4	5	6	7	7,24		
	x_1, м	0	2,1	4,4	6,9	9,7	12,6	15,8	19,1	20		
	v_1, м/с	2	2,21	2,42	2,63	2,84	3,05	3,26	3,47	3,52		
	a_1 м/с^2	0,21										
Участок BC	t, с	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	x_2, м	0	3,77	8,05	12,84	18,14	23,94	30,25	37,06	44,38	52,21	60,55
	v_2, м/с	3,52	4,03	4,53	5,04	5,55	6,05	6,56	7,07	7,58	8,08	8,59
	a_2, м/с^2	0,507										
Участок CD	t, с	0	1	2	3	3,65						
	x_3, м	0	7,42	12,5	15,24	15,77						
	v_3, м/с	8,59	6,24	3,89	1,54	0						
	a_3 м/с^2	-2,35										

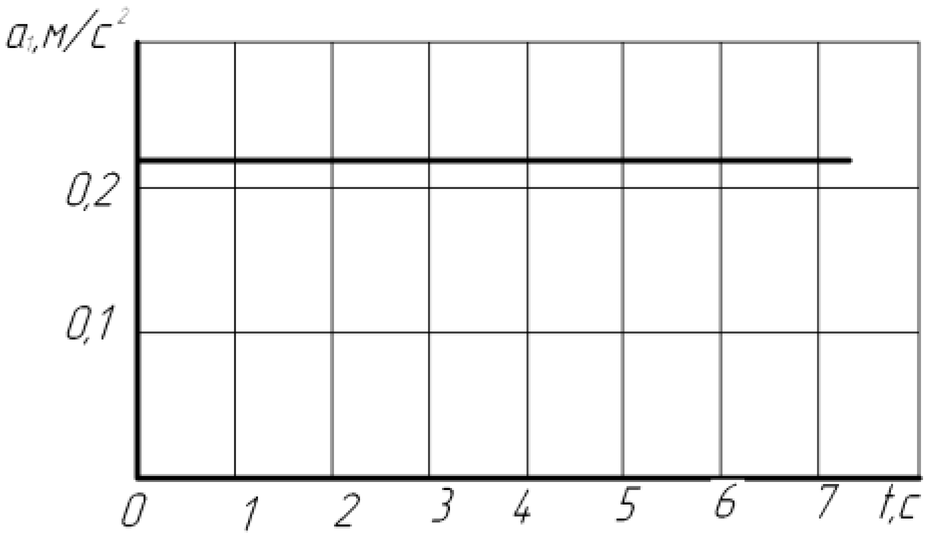
На рисунках 1.5, 1.6 и 1.7 сверху показаны графики движений автомобиля соответственно на участках *AB*, *BC*, и *CD*. Ниже на тех же рисунках изображены для этих движений графики скоростей и ускорений.



а)

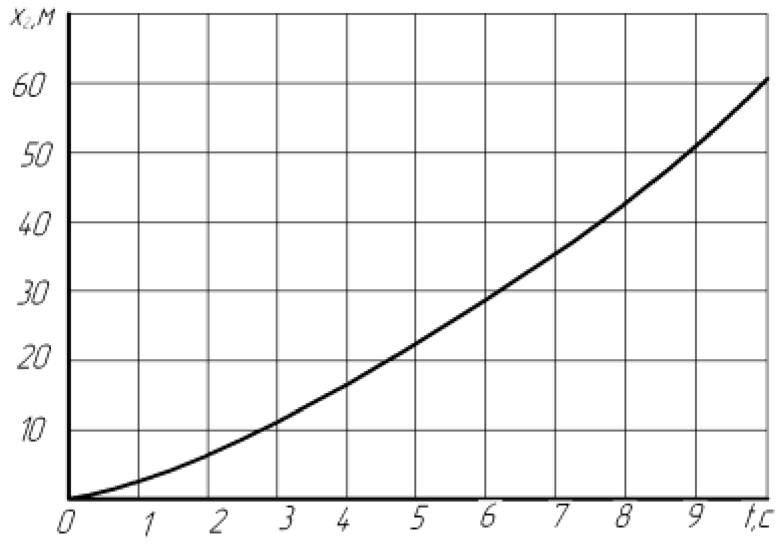


б)

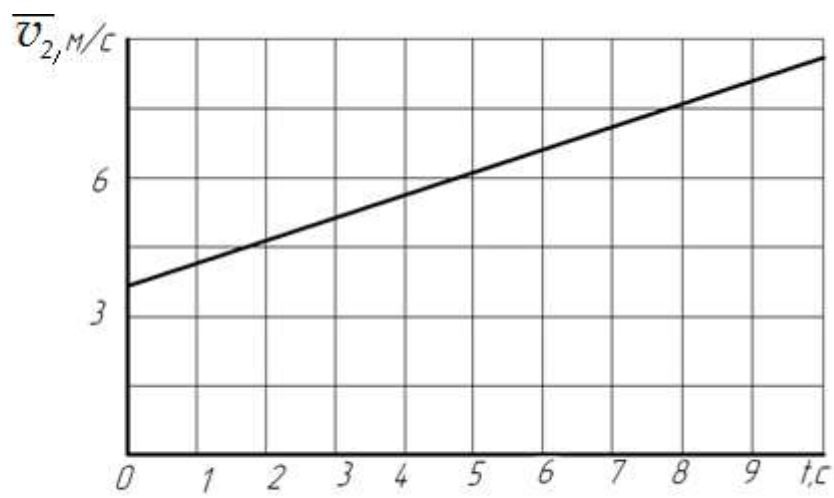


в)

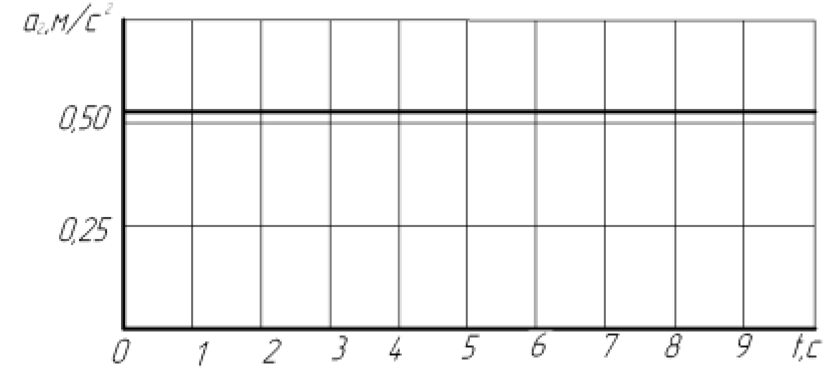
Рисунок 1.5 – Графики движения *(а)*, скорости *(б)* и ускорения *(в)* автомобиля на участке *АВ* пути



а)

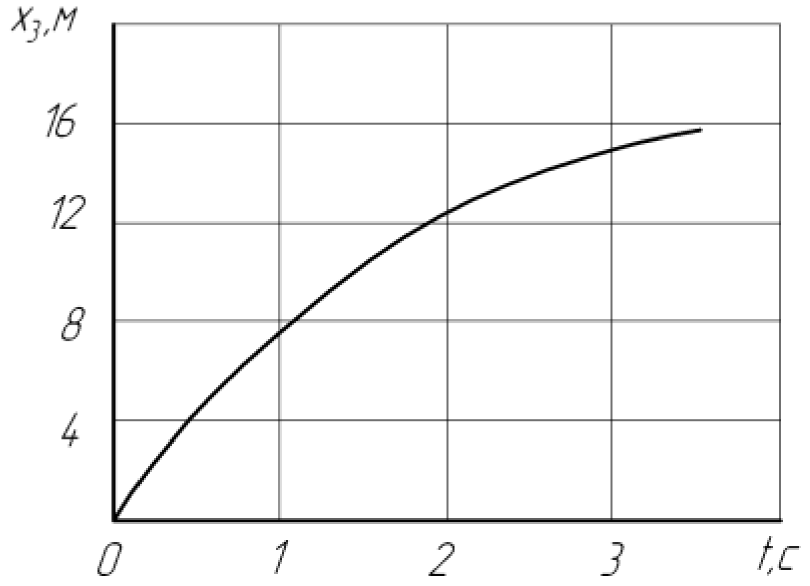


б)

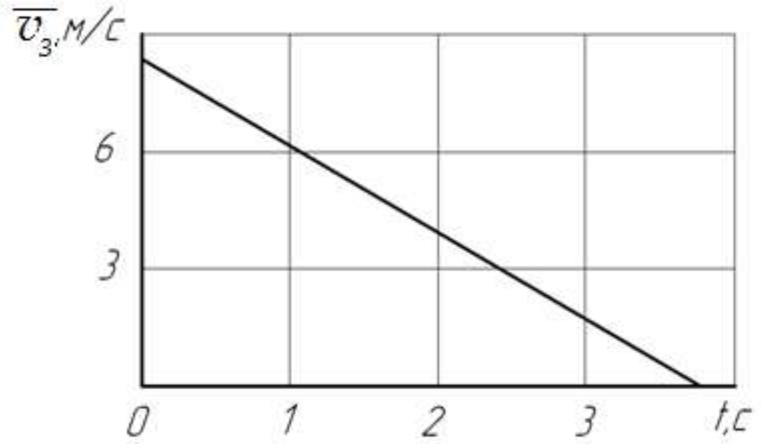


в)

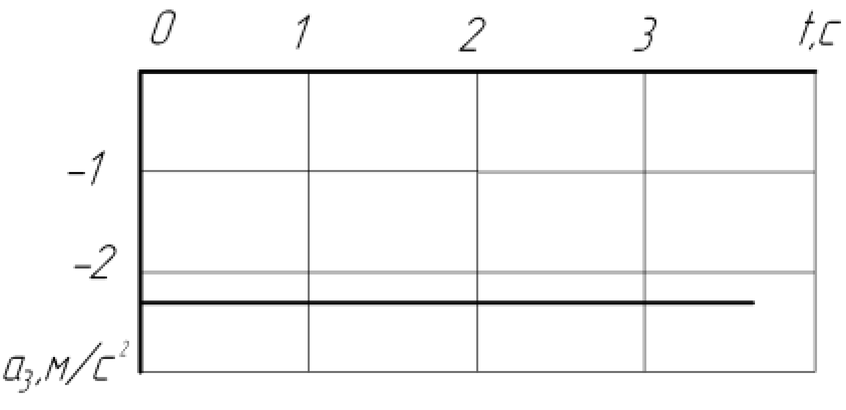
Рисунок 1.6 – Графики движения *(а)*, скорости *(б)* и ускорения *(в)* автомобиля на участке *BC* пути



а)



б)



в)

Рисунок 1.7 – Графики движения *(а)*, скорости *(б)* и ускорения *(в)* автомобиля на участке *CD* пути

Автомобиль преодолевает участок *AB* препятствия длины 20 м за 7,24с.

Совершает движение равноускоренно с ускорением a_1=0,21 м/с^2. При этом скорость его возрастает от 2 до 3,52 м/с.

На участке *BC* движение также равнопеременное, ускорение равно 0,507 м/с^2. На этом участке скорость автомобиля изменяется от 3,52 м/с до 8,59 м/с. Автомобиль преодолевает данный участок длины 60,55 м за 10 с.

На участке *CD* сила тяги равна 0, автомобиль движется по инерции равнозамедленно до полной остановки в течение 3,65 с. При этом длина участка пути составляет 15,77м.

2. Содержание второго задания

Механическая система, состоящая из трех или четырех тел, приходит в движение под действием сил тяжести из состояния покоя. Начальное положение системы показано на рисунках 2.1-2.5. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1, 3-6, 8-10, 16, 18, 21, 24, 26, 27, 29, 30) и тела 4 (варианты 7,12,13,22,23,25), а также трение качения тела 3 (варианты 2, 4, 6-8, 10, 12, 13, 17, 18, 22, 23, 25) и тела 4 (варианты 11, 14-16, 19, 20, 27-29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить:

1. Скорость тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь станет равным S_1.

2. Ускорения тел, движущихся поступательно и ускорения центров масс тел, совершающих плоскопараллельное движение; угловые ускорения тел, совершающих вращательное и плоскопараллельное движения.

3. Реакции внешних и внутренних связей системы.

4. Выбрав в качестве обобщенной координаты пройденный телом 1 путь S и составив уравнение Лагранжа второго рода, найти зависимости $\ddot{S} = f_1(t)$, $\dot{S} = f_2(t)$ и $S = f_3(t)$. Полученные зависимости изобразить графически в пределах движения $0<S<S_1$ заданной системы.

Необходимые для расчета данные приведены в таблицах 2.1 и 2.2. Блоки и катки, радиус инерции которых в таблицах не указаны, считать однородными сплошными цилиндрами.

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел 1, 2, 3, 4; i_{2x}, i_{3x} – радиусы инерции тел 2 и 3 относительно осей, проходящих через их центры масс перпендикулярно к плоскости движения; f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения тела.

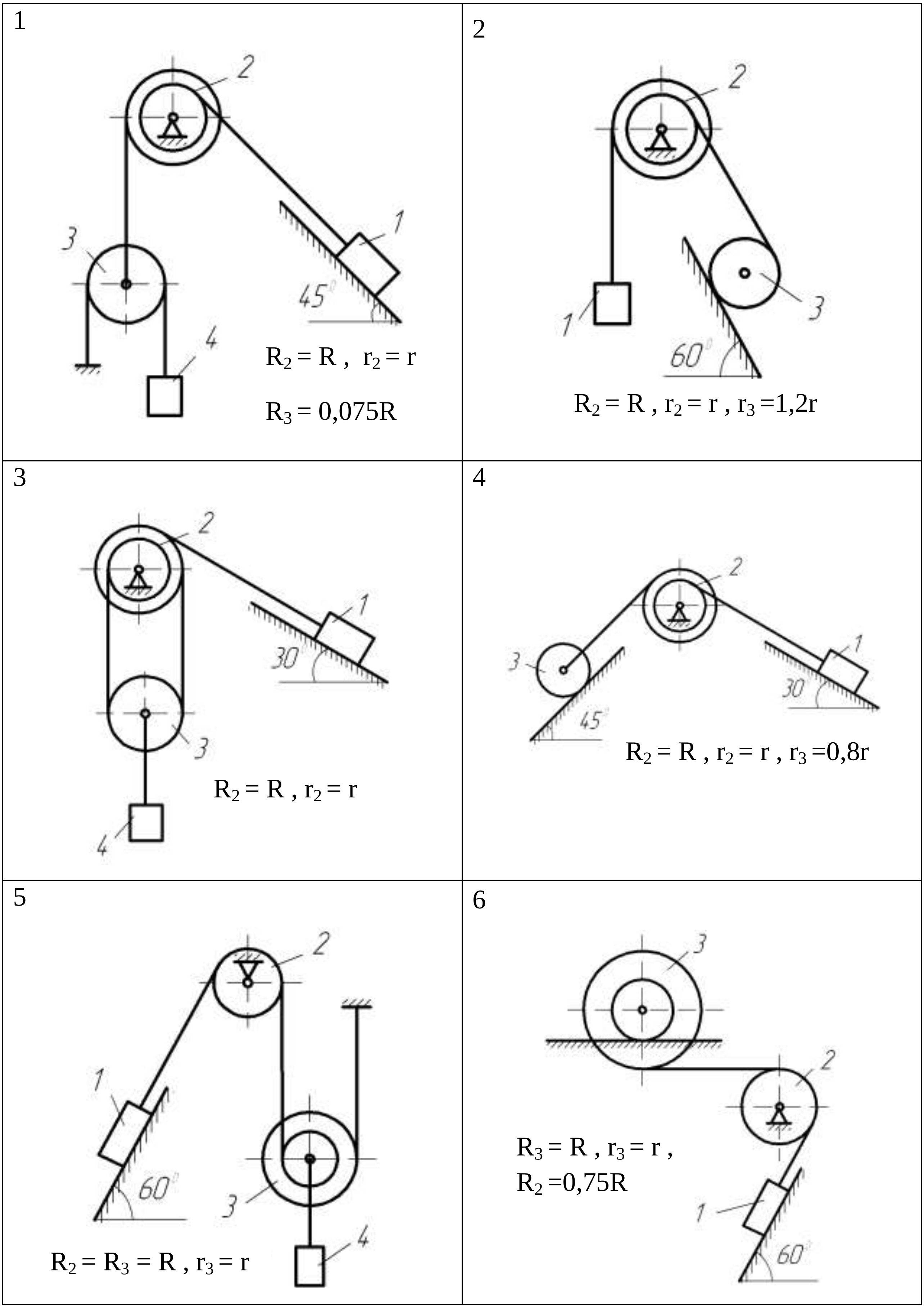
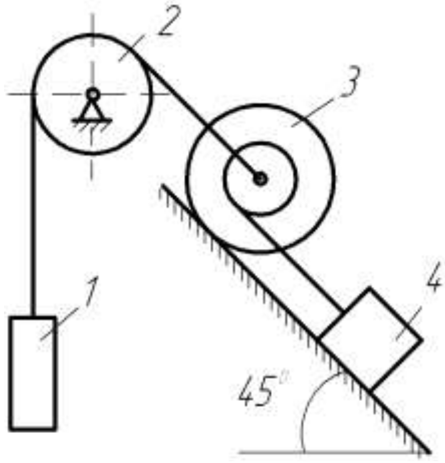

1
2
3
1
45°
4
$R_2 = R$, $r_2 = r$
$R_3 = 0{,}075R$
2
2
1
3
60°
$R_2 = R$, $r_2 = r$, $r_3 = 1{,}2r$
3
2
1
30
3
4
$R_2 = R$, $r_2 = r$
4
2
3
1
30
45
$R_2 = R$, $r_2 = r$, $r_3 = 0{,}8r$
5
2
1
60°
3
4
$R_2 = R_3 = R$, $r_3 = r$
6
3
2
$R_3 = R$, $r_3 = r$,
$R_2 = 0{,}75R$
1
60°

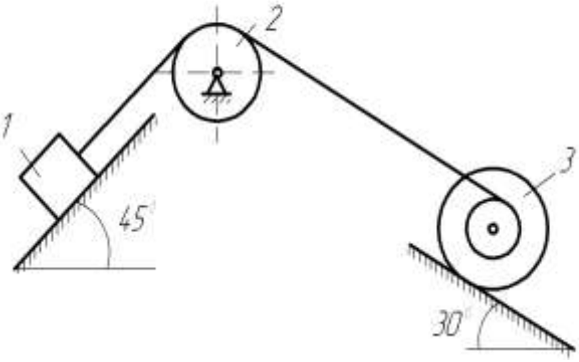
Рисунок 2.1

7



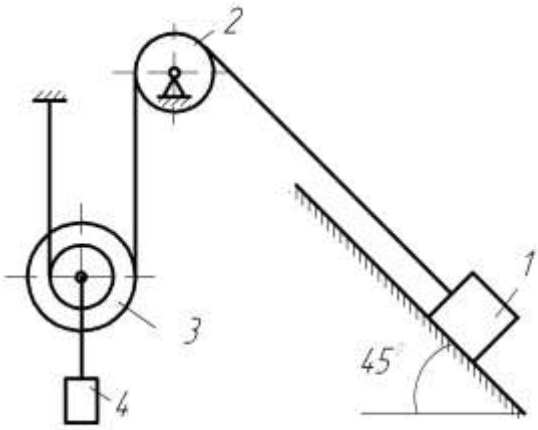
$R_2 = 0{,}8R$, $R_3 = R$, $r_3 = r$

8



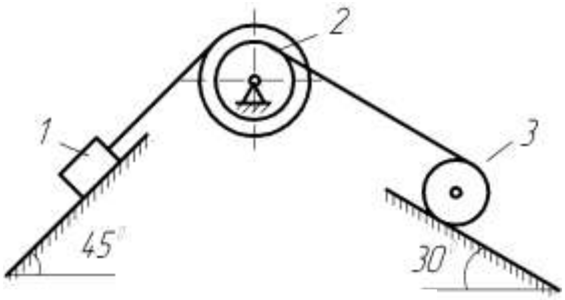
$R_2 = 0{,}75R$, $R_3 = R$, $r_3 = r$

9



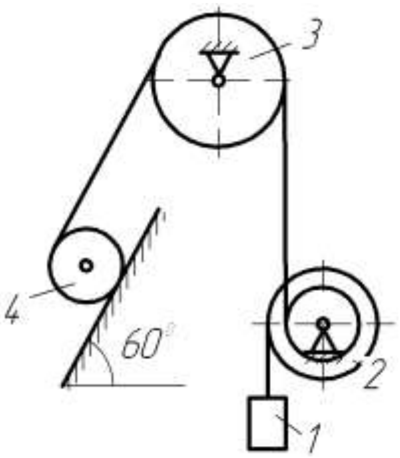
$R_2 = R$, $R_3 = 1{,}2R$, $r_3 = r$

10



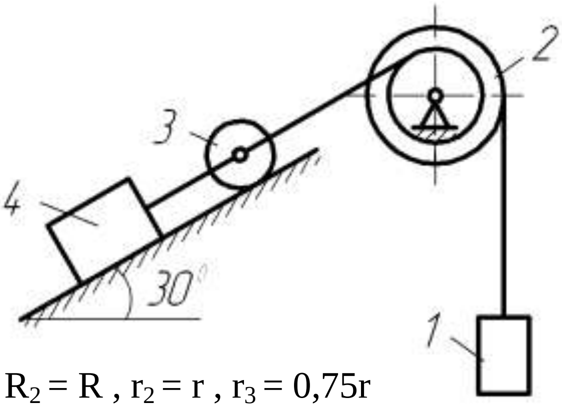
$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 0{,}5R$

11



$R_2 = R_3 = R$, $r_2 = r$, $R_4 = 0{,}75R$

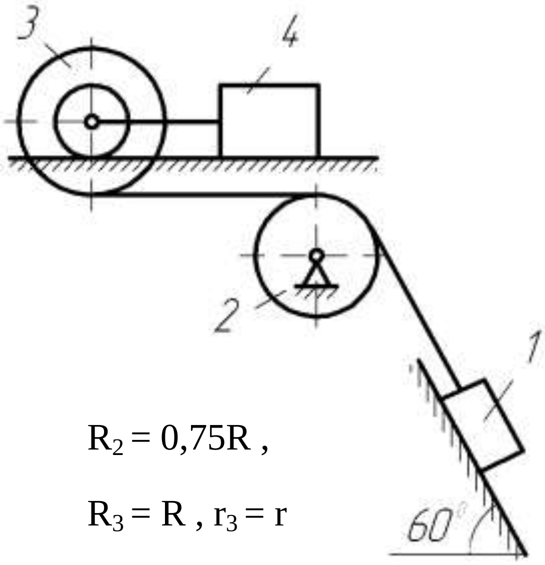
12



$R_2 = R$, $r_2 = r$, $r_3 = 0{,}75r$

Рисунок 2.2

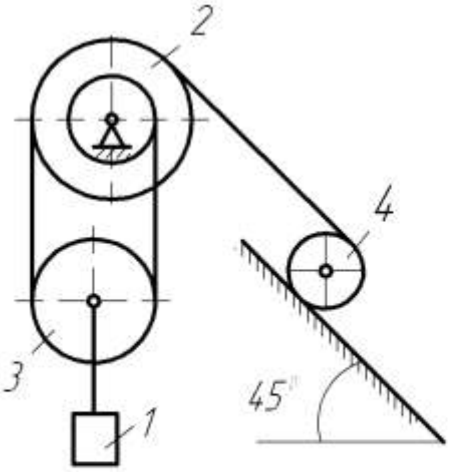
13



$R_2 = 0{,}75R$,

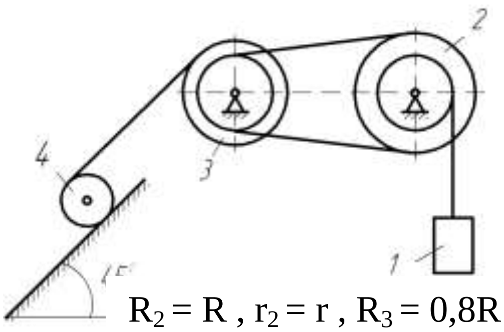
$R_3 = R$, $r_3 = r$

14



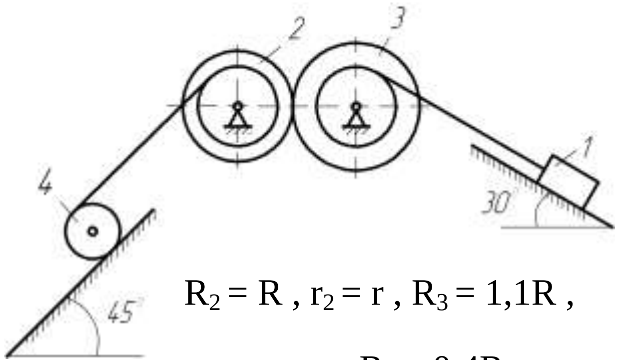
$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_4 = 0{,}8R$

15



$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 0{,}8R$,
$r_3 = 0{,}9r$, $R_4 = r$

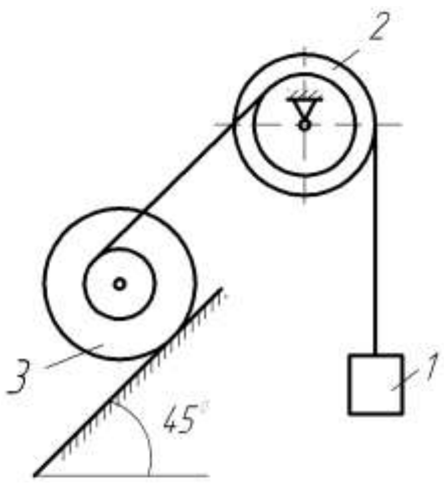
16



$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 1{,}1R$,

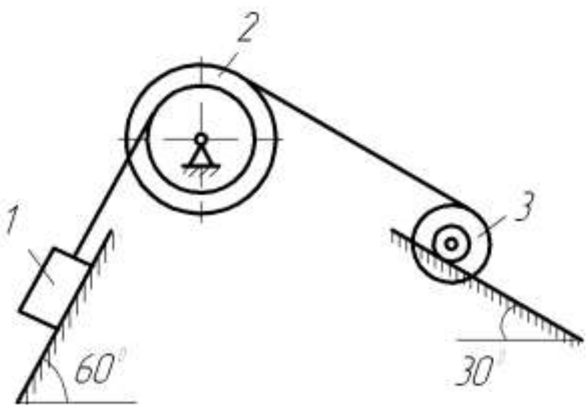
$r_3 = r$, $R_4 = 0{,}4R$

17



$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 1{,}1R$, $r_3 = 1{,}25r$

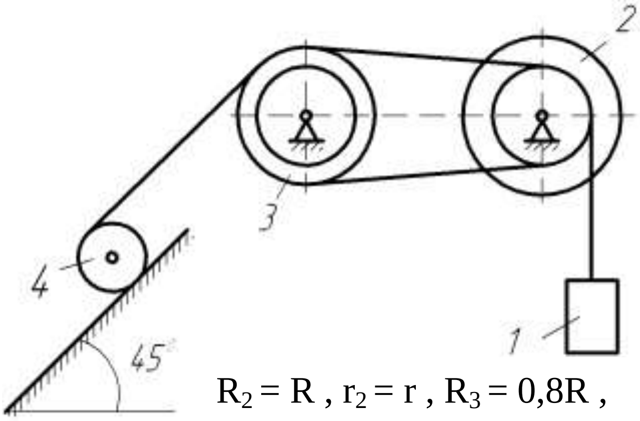
18



$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 0{,}7R$, $r_3 = 0{,}75r$

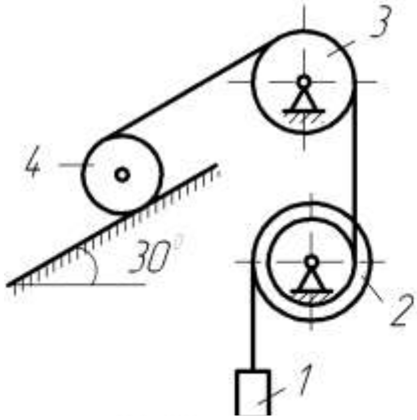
Рисунок 2.3

19



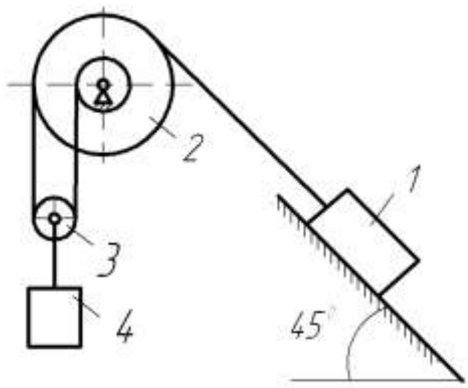
$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 0{,}8R$,
$r_3 = 0{,}9r$, $R_4 = 0{,}7R$

20



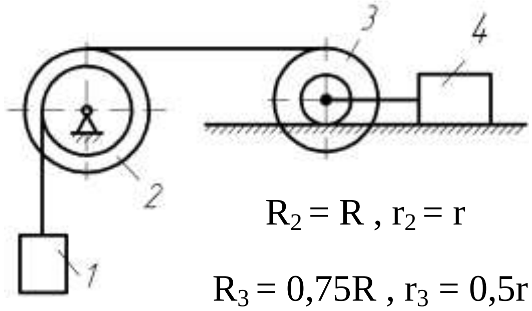
$R_2 = R$, $r_2 = r$,
$R_3 = 0{,}8R$, $R_4 = 0{,}7R$

21



$R_2 = R$, $r_2 = r$

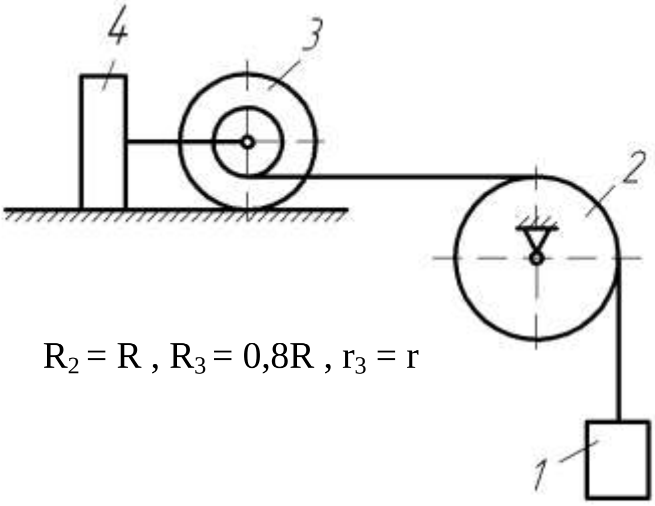
22



$R_2 = R$, $r_2 = r$

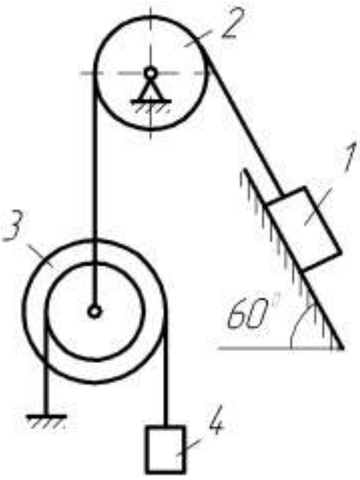
$R_3 = 0{,}75R$, $r_3 = 0{,}5r$

23



$R_2 = R$, $R_3 = 0{,}8R$, $r_3 = r$

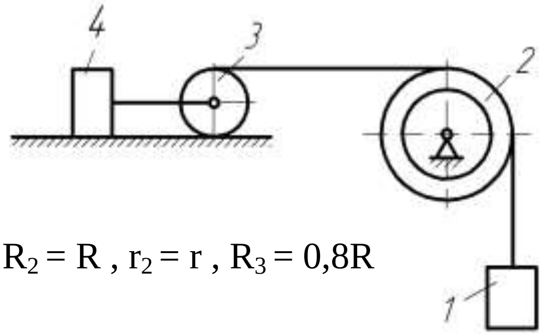
24



$R_2 = R$, $R_3 = 1{,}2R$, $r_3 = r$

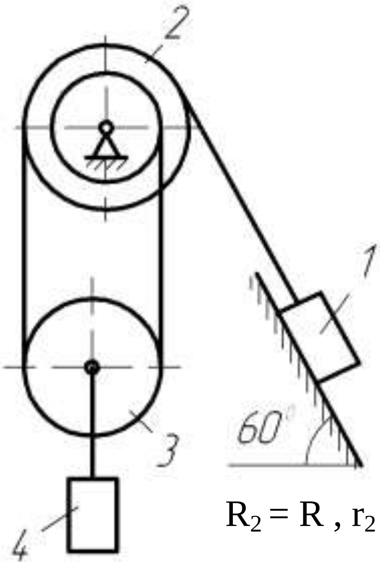
Рисунок 2.4

25



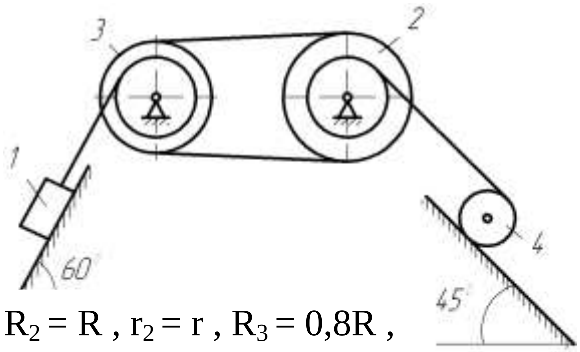
$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 0{,}8R$

26



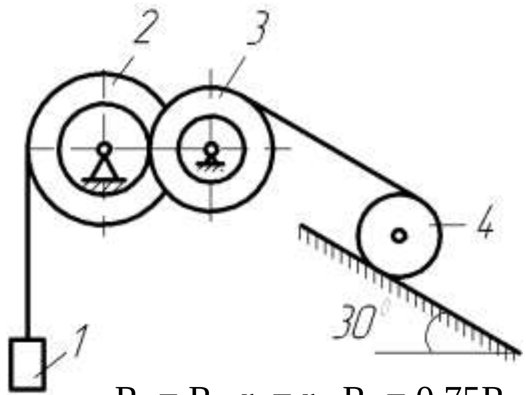
$R_2 = R$, $r_2 = r$

27



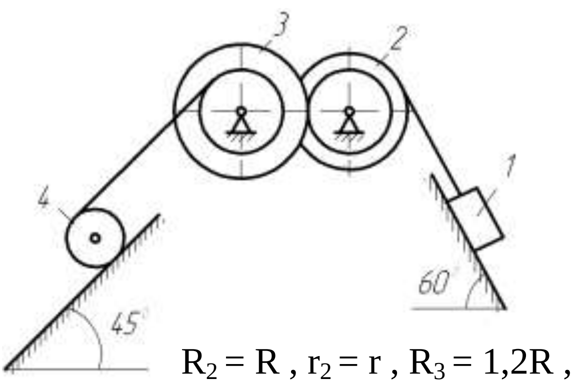
$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 0{,}8R$,
$r_3 = 0{,}75r$, $R_4 = 0{,}7R$

28



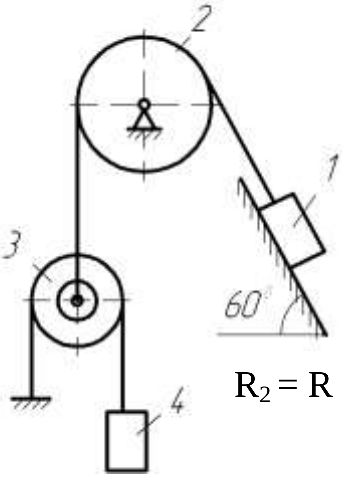
$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 0{,}75R$,
$r_3 = 0{,}7r$, $R_4 = 0{,}6R$

29



$R_2 = R$, $r_2 = r$, $R_3 = 1{,}2R$,
$r_3 = 1{,}2r$, $R_4 = 0{,}8R$

30



$R_2 = R$, $R_3 = 0{,}75R$,
$r_3 = r$

Рисунок 2.5

Таблица 2.1 – Исходные данные ко второму заданию

Вар. №	m_1	m_2	m_3	m_4	i_{2x}	i_{3x}	f	δ,м
1	$8m$	$3m$	m	m	$r\sqrt{2}$	-	0,2	-
2	$5m$	m	m	-	$r\sqrt{2}$	-	-	0,001
3	m	$5m$	m	m	$r\sqrt{2}$	-	0,2	-
4	$6m$	$2m$	m	-	$r\sqrt{2}$	-	0,1	0,001
5	$4m$	m	m	m	-	$1{,}5r$	0,15	-
6	$3m$	m	$2m$	-	-	$1{,}2r$	0,2	0,001
7	$4m$	$2m$	m	m	-	$r\sqrt{2}$	0,15	0,001
8	$4m$	m	$2m$	-	-	$1{,}5r$	0,1	0,0015
9	$8m$	$2m$	m	$2m$	-	$r\sqrt{2}$	0,1	-
10	$5m$	m	m	-	$1{,}5r$	-	0,1	0,001
11	$6m$	$2m$	m	m	$r\sqrt{2}$	-	-	0,0015
12	$4m$	$2m$	m	m	$r\sqrt{2}$	-	0,2	0,0015
13	$6m$	m	$2m$	$4m$	-	$1{,}5r$	0,1	0,001
14	$2m$	m	$2m$	m	$r\sqrt{2}$	-	-	0,001
15	$6m$	$3m$	$2m$	m	$r\sqrt{2}$	$1{,}5r$	-	0,0015
16	$8m$	$2m$	$3m$	m	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{3}$	0,15	0,001
17	$5m$	m	m	-	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{3}$	-	0,002
18	$4m$	$2m$	m	-	$r\sqrt{3}$	$r\sqrt{2}$	0,1	0,001
19	$6m$	$3m$	$2m$	m	$1{,}3r$	$1{,}2r$	-	0,001
20	m	$2m$	m	m	$1{,}4r$	-	-	0,0015
21	$4m$	$2m$	m	m	$r\sqrt{2}$	-	0,1	-
22	$3m$	$2m$	$2m$	m	$r\sqrt{2}$	$r\sqrt{2}$	0,1	0,001
23	$4m$	m	m	$4m$	-	$r\sqrt{2}$	0,1	0,0005
24	$8m$	m	$2m$	m	-	$r\sqrt{3}$	0,15	-
25	$8m$	$2m$	m	$3m$	$r\sqrt{2}$	-	0,15	0,001
26	$8m$	m	$2m$	$2m$	$1{,}2r$	-	0,1	-
27	$4m$	m	m	m	$r\sqrt{3}$	$r\sqrt{2}$	0,15	0,001
28	m	$3m$	$2m$	m	$r\sqrt{3}$	$r\sqrt{2}$	-	0,001
29	m	$3m$	$4m$	m	$r\sqrt{2}$	$1{,}4r$	0,1	0,0005
30	$8m$	m	m	m	-	$1{,}2r$	0,1	-

Таблица 2.2 – Дополнительные сведения ко второму заданию

№ группы	$\frac{R}{r}$	m, кг	r, м	s_1,м
1	3	10	0,30	1,0
2	2,25	6	0,22	0,8
3	2	15	0,25	0,5
4	1,75	5	0,35	0,3
5	2,5	12	0,20	0,6
6	2,75	8	0,27	0,4

2.1. Теоретические сведения ко второму заданию

Задание рассчитано на исследование движения механической системы путем использования общих теорем динамики.

Первый пункт задания заключается в определении скорости тела 1 после прихода системы в заданное положение из состояния покоя путем использования теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T\text{-}T_0 = \Sigma A_k^e + \Sigma A_k^i, \tag{2.1}$$

где T – кинетическая энергия механической системы в конечном положении (в конечный момент времени); T_0 – кинетическая энергия механической системы в начальном положении (в начальный момент времени); $\Sigma A_k^e -$ сумма работ внешних сил, приложенных к системе, на перемещении ее из начального положения в конечное; ΣA_k^i $-$сумма работ внутренних сил системы на том же перемещении (при выбранных условиях во всех вариантах задания она равна нулю).

Кинетическую энергию T механической системы в любой момент времени следует представить как сумму кинетических энергий входящих в нее твердых тел. При этом для поступательно движущихся тел

$$T_n = \frac{1}{2} m v^2, \tag{2.2}$$

для вращающихся тел вокруг неподвижных осей

(2.3)

$$T_B = \frac{1}{2}J_x\omega^2,$$

для совершающих плоскопараллельное движение тел

$$T_{пп} = \frac{1}{2}\,mv_c^2 + \frac{1}{2}J_{cx}\,\omega^2, \qquad (2.4)$$

где m-масса тела; v – скорость любой точки поступательно движущегося тела в рассматриваемый момент времени; J_x – момент инерции тела относительно оси вращения; ω – мгновенная угловая скорость вращения тела; $v_с$ – скорость центра масс тела в рассматриваемый момент времени; J_{cx} – момент инерции тела относительно оси X, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения.

В заданиях сумма работ внешних сил на перемещении системы из начального положения в конечное будет складываться:

а) из работ сил тяжести тел

$$A_G = \pm mgh\ , \qquad (2.5)$$

где g – ускорение свободного падения; h- высота, на которую опускается или поднимается центр масс тела в поле силы тяжести (знак «+» выбирается, если тело опускается вниз, знак «-» - в противном случае);

б) из работ сил трения скольжения

$$A_F = -\,F_{тр}S = -fN_1S, \qquad (2.6)$$

где f –коэффициент трения скольжения тела; N_1 –модуль реакции трущихся тел; S – путь, пройденный телом при скольжении;

в) из работ сил сопротивления качению катков

$$A_M = -\,M_c\varphi, \qquad (2.7)$$

где M_c=δN – момент сил сопротивления качению катка; δ – коэффициент трения качения катка; N – модуль нормальной реакции поверхности качения; φ – угол поворота катка при качении.

Подставляя найденные выражения кинетической энергии системы и суммы работ внешних сил в выражение (2.1), можно получить уравнение для определения скорости тела 1 в системе.

Выполнение второго пункта задания основано на применении общего уравнения динамики:

$$\Sigma\delta A_k^a + \Sigma\delta A_k^u = 0, \tag{2.8}$$

где $\Sigma\delta A_k^a$ – сумма элементарных работ всех действующих активных сил на любом возможном перемещении системы; $\Sigma\delta A_k^u$ – сумма элементарных работ всех сил инерции на любом возможном перемещении системы.

При этом действующие активные силы тяжести и силы реакции внешних связей определяются исходя из масс тел, представленных в задании.

Силы инерции тела, движущегося поступательно с ускорением $\bar{a}$, приводятся к равнодействующей

$$\bar{F}^{\text{u}} = -m\bar{a}, \tag{2.9}$$

приложенной к центру масс его и направленной противоположно направлению движения.

Силы инерции тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\mathcal{E}$, приводятся к паре сил, момент которой

$$M^u = -J_x\mathcal{E}, \tag{2.10}$$

где J_x – момент инерции относительно оси вращения.

Силы инерции тела, совершающего плоскопараллельное движение, приводятся к вектору

$$\bar{F}^{\text{u}} = -m\bar{a}_{\text{c}} \tag{2.11}$$

и к паре сил, момент которой

$$M^u = -J_c\mathcal{E}, \tag{2.12}$$

где $\bar{a}_{\text{c}}$ – ускорение центра масс тела; $\mathcal{E}$ – угловое ускорение тела; J_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости его движения.

Рассматриваемые в заданиях механические системы представляют собой совокупность твердых тел, поэтому для составления уравнения (2.8) нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить силы инерции и моменты пар сил инерции, а затем применить принцип возможных перемещений.

При этом элементарные работы активных сил F_k^a и сил инерции F_k^uна возможном перемещении δS_k соответственно равны:

$$\delta A_k^a = F_k^a \delta S_k \cos\alpha, \qquad (2.14)$$

$$\delta A_k^u = - F_k^u \delta S_k$$

(здесь α- угол между направлениями сил и перемещения).

Элементарные работы активных моментов M_k^a и моментов пар сил инерции M_k^u соответственно можно подсчитать по выражениям:

$$\delta A_k^a = M_k^a \cdot \delta\varphi_k, \qquad (2.15)$$

$$\delta A_k^u = -M_k^u \cdot \delta\varphi_k,$$

где $\delta\varphi_k$ – возможный угол поворота тела.

Далее, с учетом выражений (2.14) и (2.15) представляется общее уравнение динамики (2.8) в развернутом виде:

$$\Sigma F_k^a \delta S_k \cos\alpha_k + \Sigma M_k^a \delta\varphi_k - \Sigma F_k^u \delta S_k - M_k^u \delta\varphi_k = 0. \qquad (2.16)$$

Установив зависимости между δS_k и $\delta\varphi_k$ и выразив эти величины через какую-нибудь одну, можно существенно упростить выражение (2.16) и подготовить его к выполнению второго пункта задания.

Для выполнения третьего пункта задания следует воспользоваться принципом Даламбера, заключающимся в том, что при движении механической системы геометрическая сумма внешних, внутренних сил и сил инерции равна нулю для каждой точки механической системы.

При этом желательно придерживаться следующего порядка:

- изобразить на рисунке каждое тело системы в отдельности, приложить к ним силы тяжести, реакции внешних и внутренних связей и силы инерции;

- используя найденные в предыдущем пункте ускорения, вычислить модули сил инерции и величины моментов сил инерции каждого из нарисованных тел;

- составить уравнения кинетостатики для каждого тела.

В результате получается замкнутая система уравнений, решение которой позволяет определить составляющие реакций внешних и внутренних связей.

Заметим, в вариантах 15,16,19,27-29 для того, чтобы система уравнений стала замкнутой, необходимо дополнительно задать горизонтальную составляющую реакции оси вращения третьего тела N_{3x}. Будем предполагать, что $N_{3x}=3mg$.

Четвертый пункт задания выполняется с помощью уравнений Лагранжа второго рода.

Так как система имеет одну степень свободы, то для нее выбирается только одна обобщенная координата, в качестве которой рекомендуется принять перемещение первого тела, то есть $S=q$. Тогда уравнение Лагранжа второго рода будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \qquad (2.17)$$

где T- кинетическая энергия механической системы; Q – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q.

Выражение кинетической энергии было найдено в первом пункте данного задания, поэтому достаточно ее переписать, заменив v_1 на $\dot{q}$.

Обобщенную силу Q следует определять как величину, равную коэффициенту при приращении обобщенной координаты в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.

Для этого необходимо:

- изобразить на рисунке активные силы $\bar{F}_k^a$;

- обобщенной координате q дать возможное перемещение δ_q;

- найти сумму работ нарисованных сил на данном возможном перемещении системы;

- выделить в выражении полной элементарной работы коэффициент при приращении обобщенной координаты.

Далее заметим, что задания составлены таким образом, что частная производная от кинетической энергии по обобщенной координате $\partial T/\partial q$ во всех вариантах равна нулю.

Вычислив частную производную $\partial T/\partial \dot{q}$, затем – полную $d(\partial T/\partial \dot{q})/dt$ производную по времени и подставив найденный результат вместе с обобщенной силой в уравнение (2.17), следует получить зависимость $\ddot{q} = \ddot{S} = f_1(t)$, а после интегрирования - $\dot{S} = f_2(t)$ и $S = f_3(t)$. Полученные зависимости необходимо изобразить графически в пределах $0<S< S_1$.

2.2. Пример выполнения второго задания

Пример. Механическая система, состоящая из четырех тел (рис.2.6): грузов 1 и 4, блока 2 и катка 3, кинематически связанных между собой нерастяжимыми нитями, приходит в движение под действием сил тяжести из состояния покоя. Учитывая трение скольжения тела 4, трение качения тела 3, пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, определить:

1. Скорость тела 1 в тот момент времени, когда пройденный им путь станет равным S_1.

2. Ускорения тел, движущихся поступательно, и ускорения центров масс тел, совершающих плоскопараллельное движение, угловые ускорения тел, совершающих вращательное и плоскопараллельное движения.

3. Реакции внешних и внутренних связей системы.

4. Выбрав в качестве обобщенной координаты пройденный телом 1 путь S и составив уравнение Лагранжа второго рода, найти зависимости $\ddot{S} = f_1(t)$, $\dot{S} = f_2(t)$ и $S = f_3(t)$. Полученные зависимости изобразить графически в пределах движения заданной системы $0<S<1{,}2$.

Необходимые для расчета данные следующие: $R_2 = R_3 = R$; $r_3 = r$, $m_1 = 3m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m_4 = m$; $i_{3x} = r\sqrt{2}$; $f = 0{,}1$; $\delta = 0{,}001$м; $R/r = 1{,}5$; $m = 5$ кг, $r = 0{,}25$ м; $S_1 = 1{,}2$ м (здесь m_1, m_2, m_3, m_4 - массы соответственно тел 1,2,3 и 4; i_3 – радиус инерции тела 3 относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения; f – коэффициент трения скольжения; δ – коэффициент трения качения тела 3).

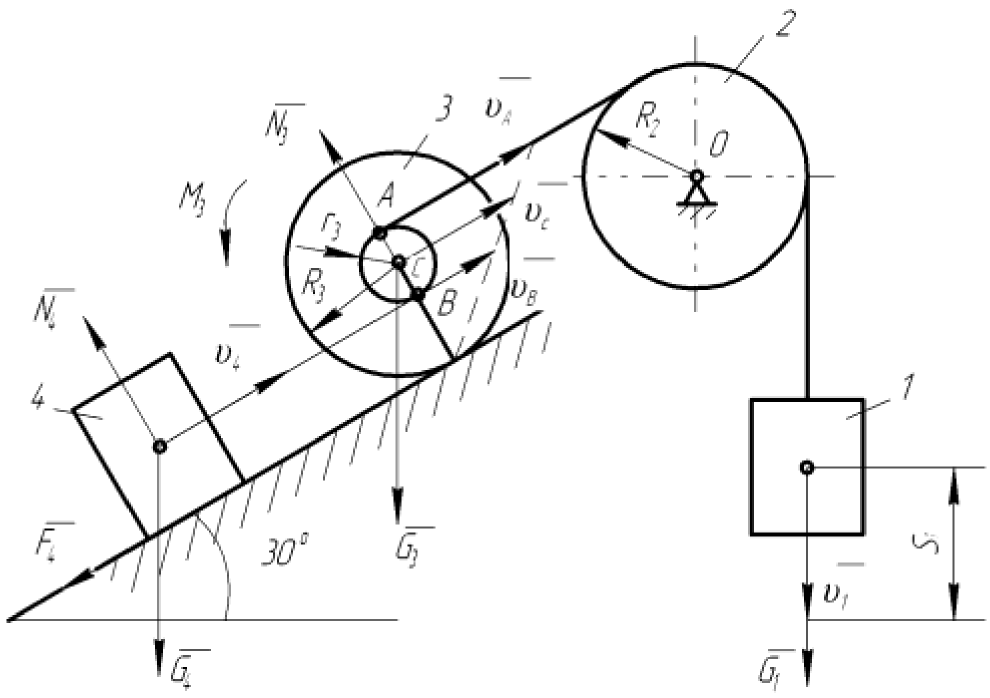


Рисунок 2.6 – Схема механической системы к выполнению второго задания

Решение

При определении скорости тела 1 в момент времени, когда пройденный им путь S_1 будет равным 1,2 м, воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии (2.1). Так как в начальный момент времени механическая система находилась в покое, то T_0=0. По условию задания соединяющие тела системы нити предполагаются нерастяжимыми, проскальзывание между телами отсутствует, поэтому $\Sigma A_k^i = 0$. Тогда выражение (2.1) примет упрощенный вид:

$$T = \Sigma A_k^e \cdot \tag{2.18}$$

Вычислим кинетическую энергию T системы, когда груз 1 пройдет путь, равный 1,2 м. Груз 1 совершает поступательное движение, значит

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{3}{2} m v_1^2. \tag{2.19}$$

Блок 2 вращается вокруг неподвижной оси, поэтому

$$T_2 = \frac{1}{2}\, J_2 \omega_2^2.$$

Момент инерции J_2 блока 2 не задан, поэтому определяем его как для сплошного цилиндра по формуле:

$$J_2 = \frac{1}{2}\, m_2 R_2^2 = 2{,}25\; mr^2, \tag{2.20}$$

а угловую скорость находим из равенства:

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{v_1}{1{,}5\, r}\ . \tag{2.21}$$

Таким образом, кинетическая энергия блока 2 примет вид:

$$T_2 = \frac{1}{2}\, m v_1^2. \tag{2.22}$$

Так как каток 3 совершает плоскопараллельное движение, то

$$T_3 = \frac{1}{2}\, m_3 v_c^2 + \frac{1}{2}\, J_2\, \omega_3^2. \tag{2.23}$$

Поскольку соединительные нити предполагаются нерастяжимыми, скорость точки A катка 3 $v_A = v_1$. Точка p является мгновенным центром скоростей третьего тела, значит

$$\omega_3 = \frac{v_A}{R_3 + r_3} = \frac{v_C}{R_3} = \frac{v_B}{R_3 - r_3}. \tag{2.24}$$

Из выражения (2.24) следует, что

$$\omega_3 = \frac{2v_A}{5r} = \frac{2v_1}{5r}, \quad v_c = \frac{v_A \cdot R_3}{R_3 + r_3} = \frac{3v_1}{5}. \tag{2.25}$$

Момент инерции катка 3 определится по заданному радиусу инерции i_3 по формуле:

$$J_c = m_3 i_3^2 = 2mr^2. \tag{2.26}$$

Тогда, подставляя (2.25) и (2.26) в (2.23), получим:

$$T_3 = 0{,}34 m v_1^2. \tag{2.27}$$

Кинетическая энергия груза 4

$$T_4 = \frac{1}{2}\, m_4 v_4^2. \tag{2.28}$$

Из выражения (2.24) вытекает, что

$$v_4 = v_B = v_1\, \frac{R_3 - r_3}{R_3 + r_3} = 0{,}2 v_1.\ . \tag{2.29}$$

Тогда из (2.28) с учетом (2.29) следует, что

(2.30)

$$T_4 = 0{,}02mv_1^2.$$

Теперь, складывая равенства (2.19), (2.22), (2.27) и (2.30), найдем кинетическую энергию всей системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 2{,}36mv_1^2. \qquad (2.31)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил, приложенных к системе, на заданном ее перемещении. Для этого покажем на схеме все приложенные к системе внешние силы (см. рисунок 2.6). Работу силы тяжести G_1 груза 1 найдем по формуле (2.5):

$$A_{G_1} = G_1S_1 = m_1gS_1 = 3mgS_1. \qquad (2.32)$$

Аналогично определяется работа силы тяжести катка 3:

$$A_{G_3} = -m_3gh_c = -mgS_c\sin30° \qquad (2.33)$$

(здесь h_c- смещение центра масс C катка по вертикали в заданном перемещении системы, S_c – путь, пройденный точкой C при этом смещении).

Путь, пройденный точкой C, можно определить из выражения (2.25), представив $v_C=3v_1/5$ в виде $\dot{S}_c=0{,}6\dot{S}_1$. Интегрируя это равенство, получим:

$$S_c = 0{,}6S_1.$$

Тогда окончательно получим:

$$A_{G_3} = -0{,}3mgS_1. \qquad (2.34)$$

Аналогичным образом из выражения (2.25) несложно получить, что

$$\varphi_3 = \frac{2\,S_1}{5r}. \qquad (2.35)$$

Работа сил сопротивления качению катка 3 определяется по формуле (2.7). В данном примере

$$M_c = \delta N_3 = \delta m_3g\cos30° = 0{,}5\sqrt{3}\delta mg. \qquad (2.36)$$

Тогда с учетом выражений (2.35) и (2.36) получим:

$$A_{M3} = -0{,}2\sqrt{3}\,\frac{\delta}{r}mgS_1. \qquad (2.37)$$

Работа силы тяжести груза 4

$$A_{G4} = -m_4gS_4\cdot\sin30° = -\,0{,}1\,mgS_1. \qquad (2.38)$$

где $S_4=0{,}2S_1$ (путь, пройденный телом 4, найдено из выражения (2.29) путем интегрирования).

Работу силы трения скольжения груза 4 определяем по формуле (2.6):

$$A_{F4} = -fN_4S_4 = -fm_4g\cos30° \cdot 0{,}2S_1 = -0{,}1\sqrt{3}fmgS_1. \qquad (2.39)$$

Наконец, складывая равенства (2.32), (2.34), (2.37), (2.38) и (2.39), получим:

$$\sum A_k^e = (2{,}6-0{,}1\sqrt{3}\,f - 0{,}2\sqrt{3}\,\frac{\delta}{r})mgS_1. \qquad (2.40)$$

Подставляя выражения (2.31) и (2.40) в (2.18), после преобразований имеем:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2{,}6-0{,}1\sqrt{3}\cdot f - 0{,}2\sqrt{3}\cdot\delta/r}{2{,}36}gS_1} = \sqrt{\frac{2{,}6-0{,}1\sqrt{3}\cdot 0{,}1-0{,}2\sqrt{3}\cdot 0{,}01/0{,}25}{2{,}36}\cdot 9{,}81\cdot 1{,}2} = 3{,}6\,м/с$$

Далее, применяя общее уравнение динамики (2.8), найдем ускорения тел, движущихся поступательно и ускорения центров масс тел, совершающих плоскопараллельное движение, угловые ускорения тел, совершающих вращательное и плоскопараллельное движения.

В соответствии с этим уравнением изобразим на схеме системы активные силы и силы инерции (рисунок 2.7).

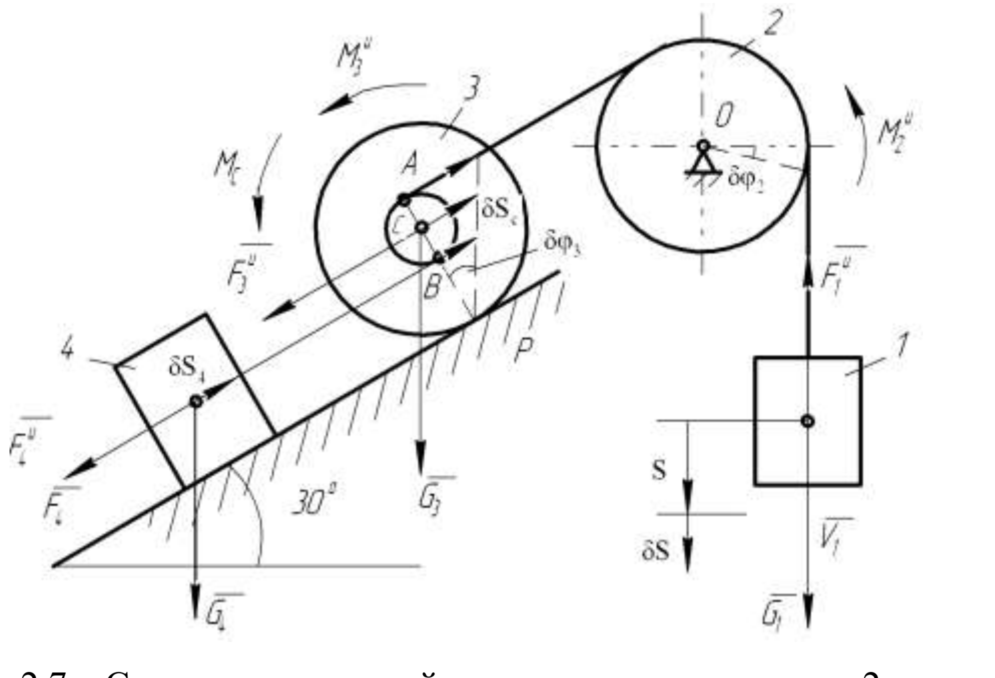


Рисунок 2.7 – Схема механической системы к выполнению п.2 задания 2

Так как тело 1 совершает поступательное движение, элементарные силы инерции всех точек его приводятся в соответствии с выражением (2.9) к равнодействующей, равной по модулю

$$F_1^u = m_1 a_1 = 3ma_1, \qquad (2.41)$$

линия действия которой проходит через центр масс этого тела.

Блок 2 вращается вокруг неподвижной оси, поэтому силы инерции точек этого тела приводятся согласно выражению (2.10) к паре сил с моментом, абсолютная величина которого $M_2^u = J_2\mathcal{E}_2$. Здесь момент инерции J_x определяется равенством (2.20), а угловое ускорение $\mathcal{E}_2$ находится из (2.21) дифференцированием по времени:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{a_1}{1{,}5r}.$$

Тогда

$$M_2^u = 1{,}5ma_1\text{r}. \qquad (2.42)$$

Согласно выражений (2.11) и (2.12) элементарные силы инерции катка 3 приводятся в его центре масс к силе $F_3^u = m_3 a_c$ и паре сил с моментом, равным по абсолютной величине $M_3^u = J_c\mathcal{E}_3$. Момент инерции J_c найден раньше в выражении (2.26), а ускорение a_c и угловое ускорение $\mathcal{E}_3$ определяются из (2.25) дифференцированием по времени:

$$\mathcal{E}_3 = \frac{2a_1}{5r}, \qquad a_c = \frac{3a_1}{5}.$$

Отсюда

$$F_3^u = 0{,}6ma_1, \qquad M_3^u = 0{,}8ma_1 r. \qquad (2.43)$$

Тело 4 движется поступательно, значит

$$F_4^u = m_4 a_4 = 0{,}2ma_1, \qquad (2.44)$$

где $a_4 = 0{,}2a_1$(находится из (2.29) дифференцированием по времени).

Теперь дадим системе возможное перемещение и составим общее уравнение динамики согласно выражению (2.16):

$$G_1\delta S_1 - G_3\delta S_c \sin 30° - G_4\delta S_4 \sin 30° - F_4\delta S_4 - M_c\delta\varphi_3 - F_1^u\delta S_1 - F_3^u\delta S_c - F_4^u\delta S_4 - M_2^u\delta\varphi_2 -$$
$$-M_3^u\delta\varphi_3 = 0. \qquad (2.45)$$

Так как наложенные на механическую систему связи являются стационарными, удерживающими и голономными, все возможные перемещения системы выражаются через возможное перемещение δS_1 соответственно:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta S_1}{R_2} = \frac{\delta S_1}{1{,}5\,r},\quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{R_3+r_3} = 0{,}4\,\frac{\delta S_1}{r},\qquad \delta S_c = \delta S_1\frac{R_3}{R_3+r_3} = 0{,}6\delta S_1,$$

$$\delta S_4 = \delta S_1 = \frac{R_3-r_3}{R_3+r_3} = 0{,}2\delta S_1. \tag{2.46}$$

Подставляя в выражение (2.45) найденные ранее момент силы трения качения (2.36), силу трения скольжения $F_4=fm_4q\cos 30°=0{,}5\sqrt{3}fmg$, а также выражения возможных перемещений (2.46), получим:

$$(2{,}6-0{,}1\sqrt{3}f-0{,}2\sqrt{3}\,\frac{\delta}{r})g-4{,}72a_1 = 0\,. \tag{2.47}$$

Откуда

$$a_1 = \frac{(2{,}6-0{,}1\sqrt{3}f-0{,}2\sqrt{3}\frac{\delta}{r})g}{4{,}72} = \frac{\left(2{,}6-0{,}1\sqrt{3}\cdot 0{,}1-0{,}2\sqrt{3}\frac{0{,}001}{0{,}25}\right)9{,}81}{4{,}72} = 5{,}365 \text{ м/с}^2.$$

Теперь, используя полученные выше зависимости, находим:

$$a_c = 0{,}6a_1 = 0{,}6\cdot 5{,}365 = 3{,}219 \text{ м/с}^2,$$

$$a_4 = 0{,}2a_1 = 0{,}2\cdot 5{,}365 = 1{,}073 \text{ м/с}^2,$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{a_1}{1{,}5r} = \frac{5{,}365}{1{,}5\cdot 0{,}25} = 14{,}307 \text{ 1/с}^2,$$

$$\mathcal{E}_3 = 0{,}4\frac{a_1}{r} = 0{,}4\frac{5{,}365}{0{,}25} = 8{,}584 \text{ 1/с}^2.$$

Для выполнения пункта 3 задания изобразим по отдельности тела механической системы (рисунок 2.8), приложив к ним силы тяжести, реакции внешних и внутренних связей и силы инерции.

В соответствии с принципом Даламбера, система сил, приложенных к телу 1 (рисунок 2.8, а), находится в равновесии, подтверждаемом уравнением:

$$\Sigma F_{ky} = T_{12} + F_1^u - G_1 = 0. \tag{2.48}$$

Отсюда с учетом $G_1=m_1g=3\,mg$ и равенства (2.41)

$$T_{12} = G_1 - F_1^u = 3m(g-a_1) = 3\cdot 5(9{,}81-5{,}365) = 66{,}675 \text{ Н}.$$

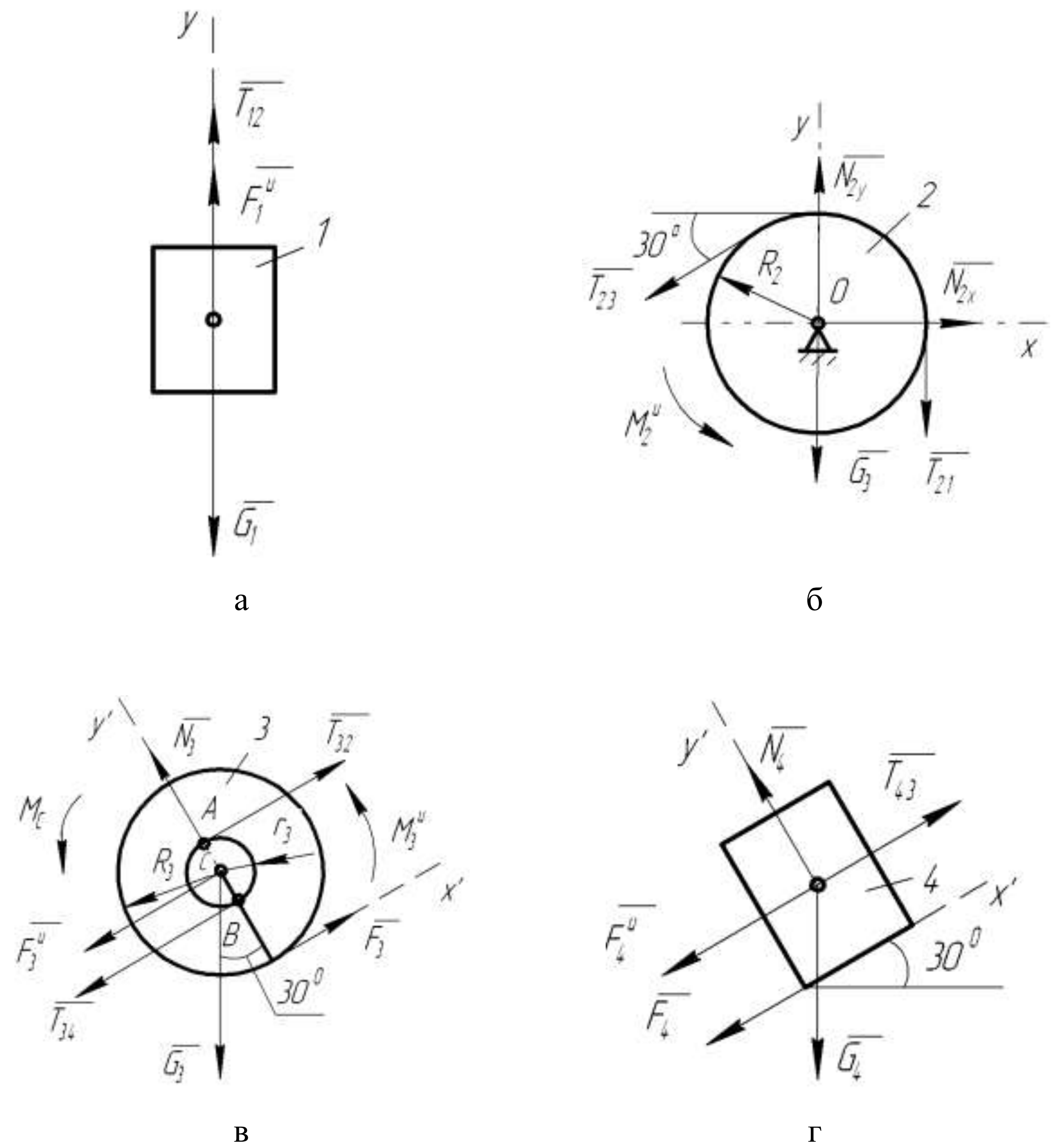


Рисунок 2.8 – Схема сил в механической системе к выполнению п.3 задания 2

Составим уравнения равновесия системы сил, приложенных к блоку 2(рис.2.8, б) в виде:

$$\Sigma F_{kx} = N_{2x} - T_{23}\cos 30° = 0, \qquad (2.49)$$

$$\Sigma F_{ky} = \Sigma N_{2y} - T_{23}\sin 30° - G_2 - T_{21} = 0, \qquad (2.50)$$

$$\Sigma m_0(\overline{F}_k) = T_{23}R_2 - T_{21}R_2 + M_2^{и} = 0. \qquad (2.51)$$

Из (2.51), учитывая, что $T_{21}=T_{12}$, а момент M_2^u найден в (2.42), следует

$$T_{23} = T_{32} = T_{12} - \frac{M_2^u}{R_2} = T_{12} - ma_1 = 66{,}675 - 5 \cdot 5{,}365 = 39{,}852 \text{ Н}.$$

Тогда из (2.49) и (2.50) следует:

$$N_{2x} = T_{23}\cos 30° = 39{,}852 \cdot \cos 30° = 34{,}128 \text{ Н},$$

$$N_{2y} = T_{23}\sin 30° + G_2 + T_{12} = 39{,}852 \cdot 0{,}5 + 98{,}1 + 66{,}675 = 184{,}701 \text{ Н}.$$

Следовательно

$$N_2 = \sqrt{N_{2x}^2 + N_{2y}^2} = \sqrt{34{,}128^2 + 184{,}701^2} = 187{,}827 \text{ Н}.$$

Составим уравнения равновесия для системы сил, приложенных к катку 3 (рисунок 2.8, в):

$$\Sigma F_{kx'} = F_3 + T_{32} - F_3^u - T_{34} - G_3 \sin 30° = 0, \qquad (2.52)$$

$$\Sigma F_{ky'} = N_3 - G_3 \cos 30° = 0, \qquad (2.53)$$

$$\Sigma m_p(\overline{F}_k) = M_3^u + M_c + T_{34}(R_3 - r_3) + F_3^u R_3 + G_3 R_3 + \sin 30° - T_{32}(R_3 + r_3) = 0. \qquad (2.54)$$

Из (2.54) с учетом полученных ранее результатов следует:

$$T_{34} = \frac{T_{23}(R_3 + r_3) - M_3^u - Mc - F_3^u R_3 - G_3 R_3 \sin 30°}{R_3 - r_3} =$$

$$= \frac{39{,}852(0{,}375+0{,}25) - 5{,}365 - 0{,}042 - 16{,}095 \cdot 0{,}375 - 49{,}05 \cdot 0{,}375 \cdot 0{,}5}{0{,}375 - 0{,}25} = 34{,}129 \text{ Н},$$

где $R_3 = R = 1{,}5r = 1{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}375$м;

$M_3^u = 0{,}8ma_1r = 0{,}8 \cdot 5 \cdot 5{,}365 \cdot 0{,}25 = 5{,}365$ Нм;

$M_c = 0{,}5\sqrt{3} \cdot \delta mg = 0{,}5\sqrt{3} \cdot 0{,}001 \cdot 5 \cdot 9{,}81 = 0{,}042$ Нм;

$F_3^u = 0{,}6ma_1 = 0{,}6 \cdot 5 \cdot 5{,}365 = 16{,}095$ Н;

$G_3 = m_3g = mg = 5 \cdot 9{,}81 = 49{,}05$ Н.

Теперь из (2.52) можно определить силу трения скольжения:

$F_3 = F_3^u + T_{34} + G_3 \sin 30° - T_{23} = 16{,}095 + 34{,}129 + 49{,}06 \cdot 0{,}5 - 39{,}852 = 60{,}014$ Н, а из (2.53)

$$N_3 = G_3 \cos 30° = 49{,}05 \cdot 0{,}866 = 42{,}5 \text{ Н}.$$

Заметим, соотношение (2.52) было использовано ранее при определении момента сил трения качения M_3.

Уравнения равновесия системы сил, приложенных к грузу 4:

$$\Sigma F_{kx'} = T_{43} - F_4^u - F_4 - G_4 \sin 30° = 0, \tag{2.55}$$

$$\Sigma F_{ky'} = N_4 - G_4 \cos 30° = 0. \tag{2.56}$$

В уравнении (2.55) все величины уже известны, поэтому оно может служить для проверки проведенных расчетов. Подставляя в него найденные ранее величины, получим:

$$34{,}129-5{,}4-4{,}2-5\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5\approx 0.$$

Заметим, равенство (2.56) уже было использовано ранее при определении работы сил трения скольжения A_{F4}.

Наконец, приступим к выполнению пункта 4 задания. Выберем в качестве обобщенной координаты пройденный телом 1 путь S (рисунок 2.7), то есть $S=q$. Тогда уравнение Лагранжа второго рода будет иметь вид (2.17).

Кинетическая энергия системы была определена в п.1 выражением (2.31). Выразив в нем v_1 через $\dot{q}$,получим:

$$T=2{,}36m^2\dot{q}^{\,2}. \tag{2.57}$$

Для определения обобщенной силы сообщаем системе возможное перемещение и вычислим на этом перемещении сумму работ всех действующих внешних сил в виде:

$$\Sigma\delta A_к=G_1\cdot\delta S_1 - G_3\delta S_c\sin 30°-M_c\cdot\delta\varphi_3-G_4\delta S_1\cdot\sin 30°- F_4\delta S_4. \tag{2.58}$$

Заметим, здесь силы инерции и моменты сил инерции не отражены, так как обобщенные силы инерции уже выражены через кинетическую энергию системы в уравнении Лагранжа второго рода.

С учетом выражений (2.46), выделив в выражении (2.58) коэффициент при δS_1, получим:

$$Q= G_1-0{,}6G_3 \sin 30°-0{,}4\, M_3/r-0{,}2G_4 \sin 30°-0{,}2F.$$

Откуда с учетом полученных выше результатов и исходных данных имеем:

$$Q=2{,}6mg. \tag{2.59}$$

Теперь, подставив (2.57) и (2.59) в выражение (2.17) получим:

$$4{,}72m\ddot{q}=2{,}6mg. \tag{2.60}$$

Далее, интегрируя выражение (2.60) по времени t с учетом начальных условий $\dot{S}_0=0$, $S_0=0$, получим:

$$\dot{S}=0{,}55gt, \tag{2.61}$$

$$S=0{,}275gt^2. \tag{2.62}$$

Приняв в выражении (2.62) $S=S_1=1{,}2$ м, находим время движения системы $t=0{,}67$ с.

В соответствии с зависимостями (2.60), (2.61) и (2.62) формируем массивы данных для построения графиков $\ddot{S}=f_1(t)$, $\dot{S}=f_2(t)$ и $S=f_3(t)$ (таблица 2.3).

Таблица 2.3 – Массив данных для построения графиков движения системы

Время t,с	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,67
Ускорение $\ddot{S}$, м/с^2	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39	5,39
Скорость $\dot{S}$, м/с	0	0,539	1,078	1,617	2,156	2,695	3,234	3,611
Перемещение S, м	0	0,027	0,108	0,242	0,431	0,674	0,970	1,200

На рисунке 2.9 показаны построенные по этому массиву графики $\ddot{S}=$ $=f_1(t)$, $\dot{S}=f_2(t)$ и $S=f_3(t)$.

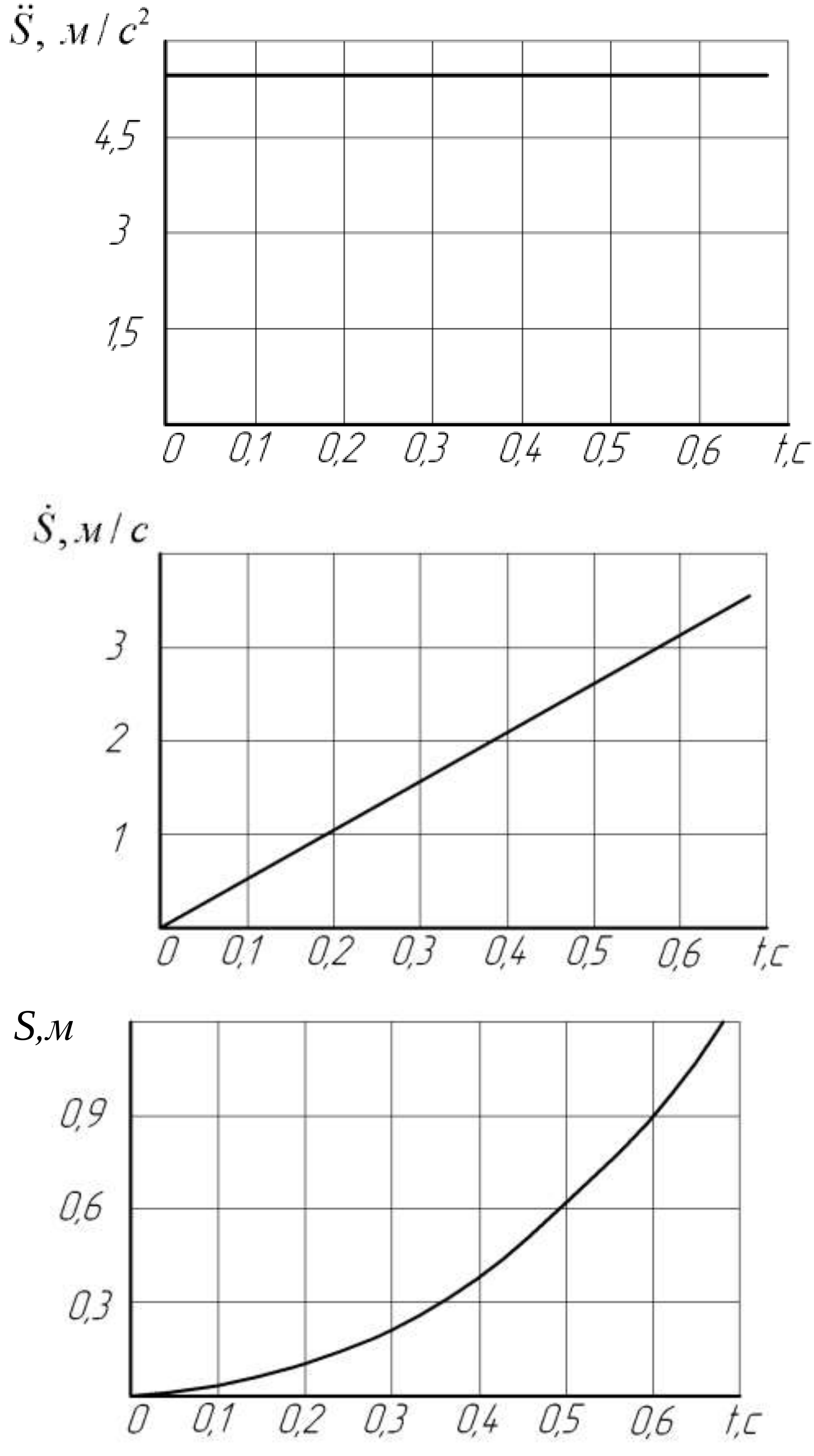


Рисунок 2.9 – Графики движения $\ddot{S}=f_1(t)$, $\dot{S}=f_2(t)$ и $S=f_3(t)$ исследуемой механической системы

3. Контрольные вопросы для самопроверки при подготовке к защите расчетно-графической работы

Вопросы к первому заданию

1. Что называется материальной точкой?

2. О чем гласит второй закон динамики?

3. Каковы дифференциальные уравнения движения точки в декартовых координатах?

4. Каковы уравнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника?

5. В чем заключается первая задача динамики?

6. В чем заключается вторая задача динамики?

7. Как определяются значения произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?

8. Что называется количеством движения материальной точки?

9. Что называется элементарным импульсом силы?

10. Как направлены вектора количества движения и импульса силы?

11. Каковы размерности скорости и ускорения в системе СИ?

12. Каковы размерности количества движения и импульса силы в системе СИ?

13. В чем заключается теорема об изменении количества движения материальной точки?

14. При каком условии материальная точка при действии на нее нескольких сил будет двигаться прямолинейно равномерно?

15. При каком условии материальная точка будет двигаться ускоренно (замедленно)?

Вопросы ко второму заданию

1. Как определяется кинетическая энергия твердого тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях?

2. Как определяется кинетическая энергия механической системы?

3. Как определить элементарную работу силы?

4. Как выражается работа силы на конечном перемещении?

5. В чем заключается теорема об изменении кинетической энергии системы?

6. Как определяется сила инерции?

7. Как приводятся силы инерции к заданному центру при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движениях твердого тела?

8. В чем заключается принцип Даламбера для механической системы?

9. В чем заключается принцип возможных перемещений?

10. Каким образом гласит общее уравнение динамики?

11. Что подразумевается под обобщенными координатами системы?

12. Как вычисляются обобщенные силы системы?

13. Каковы уравнения Лагранжа второго рода?

Список рекомендуемой литературы

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики [Текст]: Учеб. для вузов. – 10-е изд., перераб. и доп. /Тарг С.М. – М.: Высш. шк., 1986.- 416 с.: ил.

2. Лачуга, Ю.Ф. Теоретическая механика [Текст]: Учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений /Лачуга Ю.Ф., Ксендзов В.А. – 3-е изд., перераб. и доп.- М.: Колос, 2010.- 576 с.: ил.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст]: Учеб. пособие для технических вузов /Яблонский А.А. [и др.]: под ред. А.А.Яблонского.- М.: Интеграл-Пресс, 2005.- 384с.

4. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст]: в 2 т. /Бать М.И. [и др.]. Том 1: Статика и кинематика. Том 2: Динамика. – 9-е изд., стер.- Санкт-Петербург: Из-во «Лань», 2009.-1312 с.

Оглавление

Сборник заданий
и методическое руководство к расчетно-графической работе по курсу теоретической механики. Часть 2 (Сост. С.С.Алатырев, И.С.Кручинкина)

Учебно-методическое пособие

Формат 60 x 84/16. Бумага писчая. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 3,4. Тираж 100 экз. Заказ №

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Чувашская государственная сельскохозяйственная академия»

Отпечатано в полиграфическом отделе ФГБОУ ВПО ЧГСХА ,
428003, г.Чебоксары, ул.К.Маркса, 29.