МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЁЖНОСТИ»

1. Общие указания и порядок оформления контрольной работы

Надежность автомобилей является одним из важнейших условий, определяющих ритмичную и устойчивую работу транспортных систем.

Выполнение контрольной работы имеет своей целью помочь студенту усвоить исходные положения теории надёжности и получить первые навыки практических расчётов показателей надёжности применительно к автомобильному транспорту. В работе предложено выполнить расчёты для некоторого устройства (автомобилей и транспортных систем).

Приступая к выполнению контрольной работы, студент должен, прежде всего:

- усвоить основные понятия теории надёжности [работоспособное и исправное состояния, отказ и повреждение, внезапный и постепенный отказы, восстанавливаемое и невосстанавливаемое изделия, предельное состояние, наработка и продолжительность эксплуатации, ресурс, срок службы, безотказность, ремонтопригодность, долговечность, сохраняемость, надежность];
- восстановить в памяти основные положения теории вероятности [случайное событие, вероятность события, статистическую вероятность (частоту), сложение и умножение вероятностей, несовместные и независимые события, случайную величину, распределение случайной величины, среднее значение и математическое ожидание случайной величины, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, функцию распределения, плотность распределения, принцип практической уверенности, законы распределения, теоремы о числовых характеристиках случайных величин, случайную функцию];
- усвоить связь между вероятностью и статистической вероятностью (частотой) события, средним значением и математическим ожиданием случайной величины;
- получить основные представления о повышении надёжности путём резервирования, прежде всего, имеется в виду структурное резервирование;
- необходимо усвоить такие понятия как основной и резервный элемент, нагруженный резерв, кратность резерва, дублирование, общее резервирование и др.;

- изучить способы расчёта единичных и комплексных показателей надёжности.

Контрольная работа разбита на отдельные задания, отражающие рациональную последовательность освоения материала курса, и сопровождается методическими указаниями. Выполнение каждого задания завершается контрольным вопросом, который имеет цель помочь студенту лучше осмыслить выполняемую работу и подготовиться к экзамену по курсу. Заметим, что строгая последовательность выполнения заданий обязательна.

Рекомендуется придерживаться примерно следующей схемы написания работы.

Контрольная работа выполняется в виде пояснительной записки формата А4 в рамке с внутренней границей от линии сшива - 20 мм и внешними границами от края листа - по 5 мм. Все листы, начиная с титульного листа, последовательно нумеруются. Номер страницы ставится посередине внизу листа (на титульном листе номер не ставится).

На титульном листе должны быть четко прописаны: полное наименование учебного заведения, название факультета и кафедры, вид выполненной работы, название дисциплины, фамилия, имя, отчество студента, форма обучения, номер зачётной книжки.

При выполнении задания следует записать: условие задания и контрольный вопрос в приведенной формулировке; номер варианта и соответствующие ему числовые данные; решение задания и ответ на поставленный контрольный вопрос.

По каждому заданию приводится пошаговое объяснение всех принятых положений и решений, включая соответствующие формулы, их элементы, схемы, графики.

Выполняя расчёты, надо вначале привести формулу, указать значение и размерность входящих в формулу символов, а затем подставить численные значения символов и привести окончательный результат расчёта. Численные значения символов, неизвестные из условия задания, следует подставить в формулы после того, как они объяснены и даны ссылки на источник откуда взято то или иное значение. Окончательный результат приводится с указанием размерности. Формулы, рисунки, таблицы нумеруются арабскими цифрами отдельно по каждому заданию работы.

Графики и схемы, прилагаемые к заданиям контрольной работы, выполняются карандашом с соблюдением масштаба.

В списке используемой литературы названия ставятся в алфавитном порядке или в последовательности ссылки на неё.

2. Задания на контрольную работу и методика их выполнения

<u>Задание №1</u>

В таблице 1 приведены значения наработок до отказа в находившейся под контролем партии топливных форсунок двигателя автомобилей.

Таблица 1. Значения наработки форсунок до отказа и заданные значения t_o и T_o

Последняя цифра номера зачётной книжки	Массив значений наработки до отказа, $T \times 10^3$ ч	Заданное значение, $t \times 10^3$ ч	Значение $T_o \times 10^3$ ч
0	12, 17, 9, 11, 8, 13, 15, 6, 17, 14, 14, 10, 7, 16, 10, 13, 15, 10, 12, 13, 17, 8, 9, 11, 12, 16, 9, 13, 15, 7, 11, 10, 11, 17, 12, 11, 14, 16, 12, 14, 13, 10, 12, 14, 13, 14, 12, 13, 9, 11	13,5	5,5
1	11, 9, 12, 16, 7, 8, 10, 11, 15, 8, 12, 14, 6, 10, 9, 10, 16, 11, 10, 13, 15, 11, 13, 12, 9, 11, 13, 12, 13, 11, 12, 8, 10, 15, 16, 8, 10, 7, 12, 14, 5, 16, 13, 13, 9, 6, 11, 9, 12, 14	12,5	4,5
2	10, 15, 7, 9, 6, 11, 13, 4, 15, 12, 12, 8, 5, 14, 8, 11, 13, 8, 10, 11, 15, 6, 7, 9, 10, 14, 7, 11, 13, 5, 9, 8, 9, 15, 10, 9, 12, 14, 10, 12, 11, 8, 10, 12, 11, 12, 10, 11, 7, 9	11,5	3,5
3	13, 12, 15, 17, 13, 15, 14, 11, 13, 15, 14, 15, 13, 14, 10, 12, 17, 18, 10, 12, 9, 14, 16, 7, 18, 15, 15, 11, 8, 13, 11, 14, 16, 11, 13, 14, 18, 9, 10, 12, 13, 17, 10, 14, 16, 8, 12, 11, 12, 18	14,5	6,5
4	6, 9, 7, 2, 5, 13, 10, 6, 6, 3, 8, 7, 11, 8, 5, 4, 12, 5, 7, 6, 8, 9, 4, 5, 7, 9, 8, 12, 7, 2, 6, 3, 8, 7, 10, 3, 6, 10, 5, 7, 9, 11, 6, 2, 8, 10, 4, 9, 2, 5	7,5	1,5
5	5, 10, 6, 7, 2, 5, 5, 9, 12, 4, 1, 6, 8, 7, 4, 3, 11, 4, 6, 5, 7, 8, 3, 4, 6, 8, 7, 11, 6, 1, 5, 2, 7, 6, 9, 2, 5, 9, 4, 6, 8, 10, 5, 1, 7, 9, 3, 8, 1, 4	6,5	0,5
6	14, 13, 16, 18, 14, 16, 15, 12, 14, 16, 15, 16, 14, 15, 11, 13, 18, 19, 11, 13, 10, 15, 17, 8, 19, 16, 16, 12, 9, 14, 12, 15, 17, 12, 14, 15, 19, 10, 11, 13, 14, 18, 11, 15, 17, 9, 13, 12, 13, 19	15,5	7,5

7	9, 11, 12, 7, 8, 10, 12, 14, 12, 11, 6, 9, 9, 13, 16, 8, 5, 10, 12, 9, 11, 8, 7, 15, 8, 10, 11, 15, 10, 5, 9, 6, 11, 10, 13, 6, 9, 13, 8, 10, 12, 14, 9, 5, 11, 13, 7, 10, 5, 8	10,5	4,5
8	8, 4, 10, 12, 6, 11, 4, 7, 9, 11, 13, 10, 14, 9, 4, 8, 5, 10, 9, 12, 5, 8, 12, 7, 13, 9, 10, 5, 8, 8, 12, 15, 7, 4, 9, 11, 8, 10, 7, 6, 14, 7, 9, 8, 10, 11, 6, 7, 9, 11	9,5	3,5
9	7, 7, 11, 14, 6, 3, 8, 10, 7, 12, 8, 9, 4, 9, 6, 5, 13, 6, 8, 7, 9, 10, 5, 6, 8, 10, 9, 13, 8, 3, 7, 4, 9, 8, 11, 4, 7, 11, 6, 8, 10, 12, 7, 3, 9, 11, 5, 10, 3, 6	8,5	2,5

Определить статистические вероятности безотказной работы $P(t)$ и отказа $Q(t)$ форсунок для заданного значения t, указанного в табл.1. Далее необходимо рассчитать значение вероятности безотказной работы $P^*(t)$ по первым *20* значениям наработки до отказа, указанным для соответствующего варианта в табл. 1. Затем для заданной наработки t требуется рассчитать математическое ожидание числа работоспособных устройств $-$ $\overline{N}_p(t)$ при общем числе находившихся в эксплуатации форсунок, указанном в таблице 2.

Таблица 2. Объем партии устройств и заданное значение k

Предпоследняя цифра номера зачётной книжки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Объём партии	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100
Значение k	2	6	3	5	4	2	6	3	5	4

Методические указания к заданию №1

Наработка исследуемых топливных форсунок до отказа есть непрерывная случайная величина T. По результатам испытания (наблюдения и эксплуатации) партии из N устройств получена дискретная совокупность из N значений $t_1, \dots, t_i, \dots, t_N$, указанных в табл. 1.

Статистически вероятность безотказной работы устройства для наработки t определяется как

$$P(t) = \frac{N_p(t)}{N}, \quad (1)$$

где $N_p(t)$- число объектов, работоспособных на момент времени t.

Для определения $N_p(t)$ из табл. 1 следует выбрать значения T, превышающие t. При выполнении расчётов необходимо быть очень внимательным, поскольку полученные результаты используются в последующем, и ошибка на первом шаге приводит к неверным результатам всех последующих вычислений. Вероятность отказа устройства за наработку t статистически определяется как

$$Q(t) = \frac{N_{нр}(t)}{N}, \qquad (2)$$

где $N_{нр}(t)$ - число объектов, неработоспособных к наработке t.

Для определения $N_{нр}(t)$ из табл. 1 следует выбрать значения T, меньшие t.

Поскольку

$$N_p(t) + N_{нр}(t) = N,$$

нетрудно видеть, чему равна сумма вероятностей:

$$P(t) + Q(t).$$

Подсчет этой суммы используйте для проверки правильности своих вычислений.

Оценку вероятности безотказной работы устройства по первым *20-ти* значениям наработки до отказа обозначим как $P^*(t)$. Её значение определяется также по формуле (1), но при этом $N = 20$, и число работоспособных объектов $N_p(t)$ выбирается из этой совокупности. Будем считать, что условия опыта, включающего 50 наблюдений, позволили однозначно определить вероятность безотказной работы форсунки, т.е.

$$P(t) = 1 - F(t).$$

Здесь $F(t)$ - функция распределения случайной величины «наработка до отказа», определяющая вероятность события $T \leq t$ при $N \to \infty$.

Тогда с учетом формулы (1) математическое ожидание числа объектов $\bar{N}_p(t)$, работоспособных к наработке t, определяется как

$$\bar{N}_p(t) = P(t) \times N$$

где N - объём партии форсунок, определяемый по табл. 2.

Контрольный вопрос. Чем объясняется возможное различие значений $P(t)$ и $P^*(t)$?

Задание №2

Требуется рассчитать среднюю наработку до отказа $\bar{T}$ рассматриваемых форсунок. Первоначально вычисления произвести непосредственно по выборочным значениям T, указанным в табл. 1, а затем с использованием статистического ряда.

Методические указания к заданию №2

Для вычислений среднего значения случайной величины $\bar{T}$ непосредственно по её выборочным значениям $t_1, \dots, t_i, \dots, t_N$ используют формулу

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^{N} t_i \qquad (3)$$

Уточним, что здесь N равно числу значений T в табл. 1 для заданного варианта.

Определить среднее значение случайной величины $\bar{T}$можно также путём использования преобразования результатов наблюдений (совокупности значений t_i) в статистический ряд. С этой целью весь диапазон наблюдаемых значений T делят на m интервалов или «разрядов» и подсчитывают число значений n_i, приходящихся на каждый -й разряд. Результаты такого подсчета удобно записывать в форме, соответствующей таблице 3.

Таблица 3. Преобразование значений наработки до отказа в статистический ряд

Интервал		Число попаданий на интервал	n_i	Статистическая вероятность
№ п/п	нижняя и верхняя границы, 10^3 ч			
1	8,5 ÷ 11,5	~~///// ///// /////~~	n_1=15	q_1=0,15
2	11,5 ÷ 14,5	~~///// ///// ///// ///// /////~~ ~~///// /////~~	n_2=35	q_2=0,35
3	14,5 ÷ 17,5	~~///// ///// ///// ///// /////~~ ~~/////~~	n_3=30	q_3=0,3
4	17,5 ÷ 20,5	~~///// ///// ///// /////~~	n_4=20	q_4=0,2

Длины Δt всех разрядов чаще всего принимают одинаковыми, а число разрядов m обычно устанавливают порядка 10. Для выполнения данного задания примите $\Delta t = 3 \times 10^3$ ч, а $m = 4$. Для примера в табл. 3 указаны результаты систематизации в виде статистического ряда 100 значений случайной величины, распределенной на интервале [$8{,}5 \times 10^3$ ч; $20{,}5 \times 10^3$ ч] для тех же условий, т.е. $\Delta t = 3 \times 10^3$ ч, $m = 4$.

Заполнять таблицу несложно. Последовательно просматривая массив значений $\{t_i\}$, оценивают, к какому разряду относится каждое число. Факт принадлежности числа к определенному разряду отмечают чертой в соответствующей строке таблицы. Затем подсчитывают n_1, …, n_i,…, n_m - число попаданий значений случайной величины (число чёрточек) соответственно в *1*-й, …, i-й,…, m-й разряд. Правильность подсчетов определяют, используя следующие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = N.$$

Нижнюю границу интервала T_o установите, пользуясь табл. 1.

Статистическая вероятность q_i попадания случайной величины на i- ый интервал рассчитывается как

$$q_i = \frac{n_i}{N}.$$

Подсчитайте значения q_i для всех разрядов и проверьте правильность расчётов, используя выражение

$$\sum_{i=1}^{m} q_i = 1.$$

Статистический ряд можно отразить графически, как показано на рис. 1.

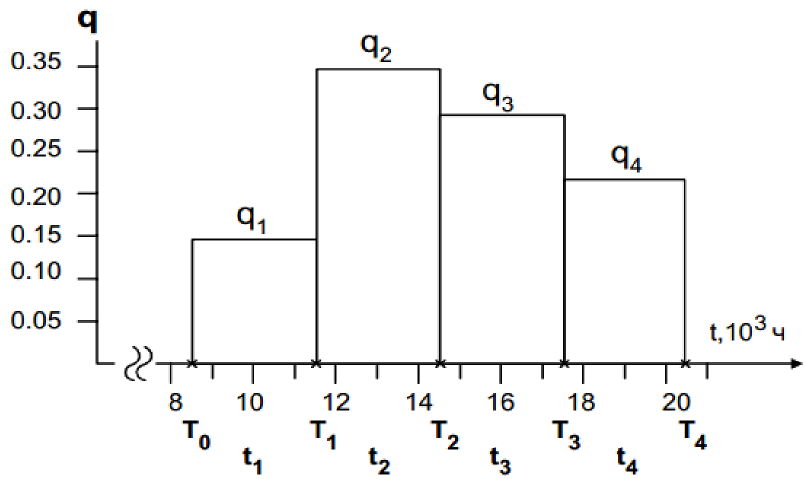

Рисунок 1 - Статистический ряд.

С этой целью по оси абсцисс отложите разряды и на каждом разряде постройте прямоугольник, высота которого равна статистической вероятности попадания случайной величины на данный интервал. Здесь T_1, …, T_i, …, T_m соответственно верхние границы *1*-го, …, i-го, …, m-го интервалов, определяемые принятыми значениями T_o и Δt.

Для расчёта среднего значения случайной величины в качестве «представителя» всех её значений, принадлежащих i-му интервалу, принимают его середину $\tilde{t_i}$. Тогда средняя наработка до отказа определяется как

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{t_i} \times q_i \qquad (4)$$

Расчёт с использованием формулы (4) вносит некоторую методическую ошибку. Однако её значение обычно пренебрежимо мало. Эту ошибку в ваших расчётах оцените по формуле

$$\delta = \frac{\bar{T}(II) - \bar{T}(I)}{\bar{T}(I)} \times 100\%,$$

где $\bar{T}(I)$ и $\bar{T}(II)$ - средние значения, вычисленные соответственно с использованием формул (3) и (4).

Контрольный вопрос. Каким образом можно уменьшить ошибки в расчётах с использованием второго метода?

Задание №3

Требуется рассчитать интенсивность отказов $\lambda(t)$ для заданных значений t и Δt.

Затем в предположении, что безотказность некоторого блока в электронной системе управления автомобиля характеризуется интенсивностью отказов, численно равной рассчитанной, причем эта интенсивность не меняется в течение всего срока его службы, необходимо определить среднюю наработку до отказа $T_Б$ такого блока.

Подсистема управления включает в себя k последовательно соединенных электронных блоков (рисунок 2).

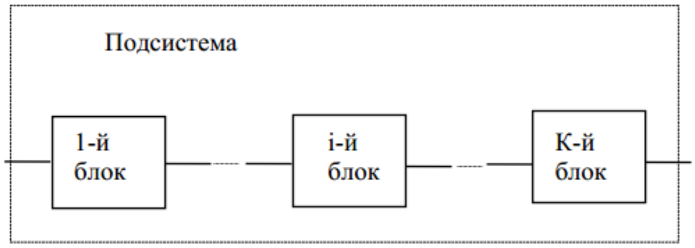

Рисунок 2 - Схема последовательного включения блоков.

Эти блоки имеют одинаковую интенсивность отказов, численно равную рассчитанной. Требуется определить интенсивность отказов подсистемы $\lambda_П$ и её среднюю наработку до отказа $- \overline{T_П}$, построить зависимости вероятности безотказной работы одного блока $P_Б(t)$ и подсистемы $P_П(t)$ от наработки и определить вероятности безотказной работы блока $P_Б(t)$ и подсистемы $P_П(t)$ к наработке $t = T_П$. Значение k указано в табл. 2.

Методические указания к заданию 3.

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ рассчитывается по формуле

$$\lambda(t) = \frac{q(t,\Delta t)}{P(t) \times \Delta t}, \qquad (5)$$

где $q(t, \Delta t)$ – статистическая вероятность отказа устройства на интервале [*t*, *t*+Δ*t*] или иначе - статистическая вероятность попадания на указанный интервал случайной величины *T*;

P(t) – рассчитанная на шаге 1-вероятность безотказной работы устройства.

Напомним, что значение t определяется из табл. 1, а принятое в работе значение $\Delta t = 3 \times 10^3$ ч.

Если интенсивность отказов не меняется в течение всего срока службы объекта, т.е. $\lambda(t) = \lambda = const$, то наработка до отказа распределена по экспоненциальному (показательному) закону. В этом случае вероятность безотказной работы блока

$$P_Б(t) = e^{-\lambda t} = exp(-\lambda t), \quad (6)$$

а средняя наработка блока до отказа находится как

$$\overline{T_Б} = \frac{1}{\lambda}. \quad (7)$$

При последовательном соединении k блоков интенсивность отказов образуемой ими подсистемы

$$\lambda_П = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i. \quad (8)$$

Если интенсивности отказов всех блоков одинаковы, то интенсивность отказов подсистемы

$$\lambda_П = k \times \lambda, \quad (9)$$

а вероятность безотказной работы подсистемы

$$P_П(t) = exp(-\lambda_П t) = exp\ (-k\lambda t). \quad (10)$$

С учетом (7) и (8) средняя наработка подсистемы до отказа находится как

$$\overline{T_П} = \frac{1}{\lambda_П} = \frac{1}{k\lambda}. \quad (11)$$

Для построения зависимостей $P_Б(t)$ и $P_П(t)$ можно воспользоваться данными таблицы 4.

Таблица 4. Значения функции *exp*(-*x*)

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.	-	9900	9802	9704	9608	9512	9418	9324	9231	9139
0.1	0.	9048	8958	8869	8781	8694	8607	8521	8437	8353	8270
0.2	0.	8187	8106	8025	7945	7866	7788	7711	7634	7558	7483
0.3	0.	7408	7334	7261	7189	7118	7047	6977	6907	6839	6771
0.4	0.	6703	6637	6570	6505	6440	6376	6313	6250	6188	6126
0.5	0.	6065	6005	5945	5886	5827	5769	5712	5655	5599	5543
0.6	0.	5488	5434	5379	5326	5273	5220	5169	5117	5066	5016
0.7	0.	4966	4916	4868	4819	4771	4724	4677	4630	4584	4538
0.8	0.	4493	4449	4404	4360	4317	4274	4232	4190	4148	4107
0.9	0.	4066	4025	3985	3946	3906	3867	3829	3791	3753	3716
1.0	0.	3679	3642	3606	3570	3535	3499	3465	3430	3396	3362
1.1	0.	3329	3296	3263	3230	3198	3166	3135	3104	3073	3042
1.2	0.	3012	2982	2952	2923	2894	2865	2837	2808	2780	2753
1.3	0.	2725	2698	2671	2645	2618	2592	2567	2541	2516	2491
1.4	0.	2466	2441	2417	2393	2369	2346	2322	2299	2276	2254

1.5	0.	2231	2209	2187	2165	2144	2122	2101	2080	2060	2039
1.6	0.	2019	1999	1979	1959	1940	1920	1901	1882	1864	1845
1.7	0.	1827	1809	1791	1773	1755	1738	1720	1703	1686	1670
1.8	0.	1653	1637	1620	1604	1588	1572	1557	1541	1526	1511
1.9	0.	1496	1481	1466	1451	1437	1423	1409	1395	1381	1367
2.0	0.	1353	1340	1327	1313	1300	1287	1275	1262	1249	1237
2.1	0.	1225	1212	1200	1188	1177	1165	1153	1142	1130	1119
2.2	0.	1108	1097	1086	1075	1065	1054	1044	1033	1023	1013
2.3	0.	1003	0993	0983	0973	0963	0954	0944	0935	0926	0916
2.4	0.0	9072	8982	8892	8804	8716	8629	8543	8458	8374	8291
2.5	0.0	8208	8127	8046	7966	7887	7808	7730	7654	7577	7502
2.6	0.0	7427	7353	7280	7208	7136	7065	6995	6925	6856	6788
2.7	0.0	6721	6654	6587	6522	6457	6393	6329	6266	6204	6142
2.8	0.0	6081	6020	5961	5901	5843	5784	5727	5670	5613	5558
2.9	0.0	5502	5448	5393	5340	5287	5234	5182	5130	5079	5029
3.0	0.0	4979	4929	4880	4832	4783	4736	4689	4642	4596	4550

Для расчёта значений $P_Б(t)$ и $P_П(t)$ интервал наработки t примите равным *400* ч. График постройте на миллиметровой бумаге, установив максимальное значение *t=5200* ч, но при этом при вычислении $P_П(t)$ расчёты можно прекратить, достигнув значения 0,05.

В табл. 4 приведены значения функции *exp*(-*x*) от *0,00* до *3,09* через *0,01*.

С целью сокращения объёма таблицы приведены только цифры дробной части после ноль целых или ноль целых и ноль десятых.

Например: *exp*(-*0,05*) = *0,9512*; *exp*(-*2,53*)= *0,07966*.

Соотношения (8) и (9) справедливы для экспоненциального распределения. Для любого распределения наработки до отказа вероятность безотказной работы подсистемы, состоящей из k последовательно соединенных блоков, связана с вероятностями безотказной работы этих блоков следующим соотношением:

$$P_П(t) = \prod_{i=1}^{k} P_i(t). \qquad (12)$$

Если блоки равнонадежны, как принято в задании, то

$$P_П(t) = P_Б(t)^k. \qquad (13)$$

Рассчитав значение $P_П(t)$ по формуле (13) для $t = \overline{T_П}$, сравните его со значением, рассчитанным по формуле (10).

Контрольный вопрос. В какой период эксплуатации – начальный или по мере приближения к предельному состоянию – интенсивность отказов объектов обычно резко и неуклонно возрастает и почему?

Задание №4

Для наработки $t = \overline{T_П}$ требуется рассчитать вероятность безотказной работы $P_C(\overline{T_П})$ системы (рисунок 3), состоящей из двух подсистем, одна из которых является резервной

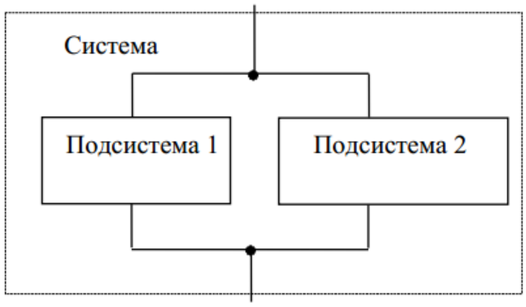

Рисунок 3 - Схема системы с резервированием.

Методические указания к заданию 4.

Расчёт ведётся в предположении, что отказы каждой из двух подсистем независимы, т.е. отказ первой системы не нарушает работоспособность второй, и наоборот. Вероятности безотказной работы каждой системы одинаковы и равны $P_П(\overline{T_П})$. Тогда вероятность отказа одной подсистемы

$$Q_П(\overline{T_П}) = 1 - P_П(\overline{T_П}).$$

Вероятность отказа всей системы $Q_C(\overline{T_П})$ определяется из условия, что отказала и первая, и вторая подсистемы, т.е.

$$Q_C(\overline{T_П}) = Q_П(\overline{T_П}) \times Q_П(\overline{T_П}) = Q_П^2(\overline{T_П}).$$

Отсюда вероятность безотказной работы системы

$$P_C(\overline{T_П}) = 1 - Q_C(\overline{T_П})$$

или иначе

$$P_C(\overline{T_П}) = 1 - \left(1 - P_П(\overline{T_П})\right)^2.$$

Контрольный вопрос. Какие недостатки Вы видите в принятой схеме резервирования?

Задание №5

По данным таблицы 6 требуется определить зависимости от наработки (пробега автомобиля) математического ожидания (среднего значения) износа шатунных шеек коленчатого вала ДВС $-\ \bar{y}(t)$ и дисперсии износа $Д\big(y(t)\big)$, полученные уравнения необходимо записать. Параметры искомых зависимостей следует рассчитать с использованием правила определения уравнения прямой, проходящей через две точки с известными координатами.

Методические указания к заданию 5.

Данное задание выполняется в предположении, что математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия износа шатунных шеек коленчатого вала представляют собой линейные функции пробега автомобиля. Это подтверждается исследованиями, проведенными в различных автохозяйствах и обработкой статистических данных.

Обозначим износ шеек как некоторую переменную величину *Y*. Зависимость Y от наработки (пробега автомобиля) представляет собой случайную функцию, реализации которой являются монотонными неубывающими функциями. Для описания такой случайной функции часто вполне достаточно знать, как меняются в зависимости от наработки её математическое ожидание (среднее значение) и дисперсия: $-\bar{y}(t)$ и $Д\big(y(t)\big)$.

Исследования, проведенные в различных автохозяйствах, показывают, что для описания зависимости износа от пробега автомобиля могут быть использованы линейные функции

$$\bar{y}(t) = \overline{y_0} + at \ (мм) \tag{14}$$

и

$$Д\big(y(t)\big) = Д(y_0) + bt \ (мм), \tag{15}$$

где $\overline{y_0}$ и $Д(y_0)$ – соответственно, среднее значение и дисперсия износа шеек при *t=0*, при этом началом отсчёта является последняя обточка коленвалов;

a - средняя скорость увеличения износа, мм/тыс.км;

b- скорость увеличения дисперсии износа, мм^2 /тыс.км;

t - пробег автомобиля, тыс.км.

Таблица 6. Результаты обработки измерения износа шатунных шеек коленчатых валов двигателя автомобилей

Расчетная величина	Предпоследняя цифра шифра									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Первое измерение									
Пробег t_1, тыс.км	25	20	40	50	30	45	70	35	55	18
Средний износ $\bar{y}_1$,мм	0,050	0,045	0,087	0,090	0,060	0,085	0,105	0,072	0,089	0,045
Дисперсия износа Д(y_1), мм^2	0,098	0,050	0,147	0,157	0,079	0,118	0,176	0,060	0,128	0,040
	Второе измерение									
Пробег t_2, тыс.км	75	100	95	115	105	135	145	150	120	130
Средний износ $\bar{y}_2$,мм	0,135	0,182	0,165	0,174	0,183	0,192	0,198	0,210	0,186	0,190
Дисперсия износа Д(y_2), мм^2	0,192	0,144	0,241	0,251	0,173	0,212	0,270	0,154	0,222	0,134

Искомыми параметрами функций (14) и (15) являются $-\overline{y_0}$, a, $Д(y_0)$ и b. На практике для их нахождения необходимо область возможных значений наработки (нижняя граница которой *t=0*, а верхняя находится из условия достижения предельного значения износа) разбить на несколько (обычно *10-20*) интервалов.

При каждом из разделяемых этими интервалами пробегов автомобиля t_1, t_2, ..., t_i, ... производят измерения износа большого количества коленчатых валов и вычисляют соответствующие пробегам средние значения $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, ..., $\overline{y_i}$, ..., а затем дисперсии $Д(y_1)$, $Д(y_2)$, ..., $Д(y_i)$, ... Располагая такими наборами значений t_i и $\overline{y_i}$, или t_i и $Д(y_i)$, можно, используя метод наименьших квадратов, определить искомые зависимости $-\overline{y(t)}$ и $Д\big(y(t)\big)$.

В контрольной работе задача существенно упрощена. Предполагается, что массивы данных об износе шеек для каждого t_i уже обработаны. Считается также возможным определить искомые линейные зависимости, располагая координатами только двух точек. В таком случае параметры a и b зависимостей (14) и (15) могут быть определены соответственно

$$a = \frac{\overline{y_2}-\overline{y_1}}{t_2-t_1} \qquad (16)$$

и

$$b = \frac{Д(y_2)-Д(y_1)}{t_2-t_1}. \qquad (17)$$

После этого, используя координаты любой из известных двух точек, например второй $(t_2,\ \overline{y_2})$ или $\big(t_2,\ Д(y_2)\big)$, можно найти два других параметра:

$$\overline{y_0} = \overline{y_2} - \frac{\overline{y_2}-\overline{y_1}}{t_2-t_1} \times t_2; \qquad (18)$$

$$Д(y_0) = Д(y_2) - \frac{Д(y_2)-Д(y_1)}{t_2-t_1} \times t_2. \qquad (19)$$

Подставив значения (16), (17), (18) и (19) в уравнения (14) и (15), получите выражения, определяющие зависимости от пробега среднего износа шатунных шеек ДВС и дисперсии износа

$$\bar{y}(t) = \overline{y_2} - \frac{\overline{y_2}-\overline{y_1}}{t_2-t_1} \times t_2 + \frac{\overline{y_2}-\overline{y_1}}{t_2-t_1} \times t \qquad (20)$$

и

$$Д\big(y(t)\big) = Д(y_2) - \frac{Д(y_2)-Д(y_1)}{t_2-t_1} \times t_2 + \frac{Д(y_2)-Д(y_1)}{t_2-t_1} \times t. \qquad (21)$$

Произведите необходимые вычисления и запишите полученные выражения (14) и (15) с числовыми значениями параметров.

Контрольный вопрос. Могут ли исходные значения среднего износа шеек $-\ \overline{y_0}$ и дисперсии износа $Д(y_0)$, соответствующие *t=0*, быть равными *0*? Отрицательными числами?

Задание №6

Требуется рассчитать средние значения $\{y(t_i)\}$, дисперсии $\{Д(y(t_i))\}$ и средние квадратические отклонения $\{\sigma(y(t_i))\}$ износа при нескольких значениях пробега, пользуясь зависимостями, полученными на предыдущем шаге – *см. задание 5*. Затем требуется для тех же значений пробега определить нижнюю $y(t_i)_{min}$ и верхнюю $y(t_i)_{max}$ границы практически возможных значений износа. Результаты расчетов следует занести в таблицу 7, и построить по ним линии, представляющие собой зависимость среднего износа шеек от пробега, нижнюю и верхнюю границы практически возможных значений износа.

Таблица 7. Результаты расчета средних значений, дисперсий и средних квадратических отклонений износа шеек коленчатых валов

	Величина	Пробег, тыс. км					
		0	50	100	...	300	350
1	Средний износ $\bar{y}(t)$, мм						
2	Дисперсия износа $Д(y(t))$, мм^2						
3	Среднее квадратическое отклонение износа $\sigma(y(t))$, мм						
4	Утроенное значение $3\sigma(y(t))$, мм						
5	Нижняя граница $y(t)_{min}$						
6	Верхняя граница $y(t)_{max}$						

Предельное значение $y_{пр.}$ износа шеек коленчатых валов ДВС при выполнении контрольной работы примите равным 1,5мм.

Заданный пробег указан в таблице 8.

Таблица 8

Значение пробега $T_{зад.}$

Последняя цифра шифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Заданный пробег $\boldsymbol{T}_{\mathbf{зад}}$, тыс. км	150	240	170	230	190	280	180	260	160	250

Методические указания к заданию 6.

Заполните таблицу 7, последовательно производя вычисления по формулам, полученным при выполнении задания 5, для различных значений пробега автомобиля.

Расчёт среднеквадратических отклонений произведите по формуле

$$\sigma(y_i) = \sqrt{Д(y_i)},$$

где i- номер интервала в таблице 7.

Принятой модели процесса износа шейки, определяемой выражениями (14) и (15), соответствует такое постепенное увеличение износа, при котором среднее значение и дисперсия приращения износа за некоторый интервал пробега Δt пропорциональны длине этого интервала и не зависят от достигнутого значения y. В таком случае вполне допустимо, основываясь на основных теоремах теории вероятностей, считать, что для любого t_i (пока $y < y_{np.}$) значения износа распределены по нормальному закону с плотностью распределения

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma(y_i) \times \sqrt{2\pi}} \times e^{\left(-\frac{(y - \overline{y_i})^2}{2(\sigma(y_i))^2}\right)}.$$

Сужение области определения функции $f(y_i)$ до интервала $[0,\ y_{np.}]$ практически не оказывает влияния на результаты расчётов.

Для нахождения области практически возможных значений случайной величины Yi, распределенной по нормальному закону, пользуются «правилом трех сигм». В соответствии с этим правилом для каждого пробега автомобиля t_i верхняя и нижняя границы практически возможных значений износа шеек находятся как

$$y(t_i)_{max\,,min} = \bar{y}_i \pm 3\sigma(y_i). \qquad (22)$$

Кривые, показывающие верхнюю и нижнюю границы практически возможных значений износа, определяются выражениями

$$y(t)_{max} = \overline{y_0} + at + 3\sqrt{Д(y_0) + bt}, \qquad (23)$$

$$y(t)_{min} = \overline{y_0} + at - 3\sqrt{Д(y_0) + bt}. \qquad (24)$$

Полученные зависимости иллюстрирует рисунок 4.

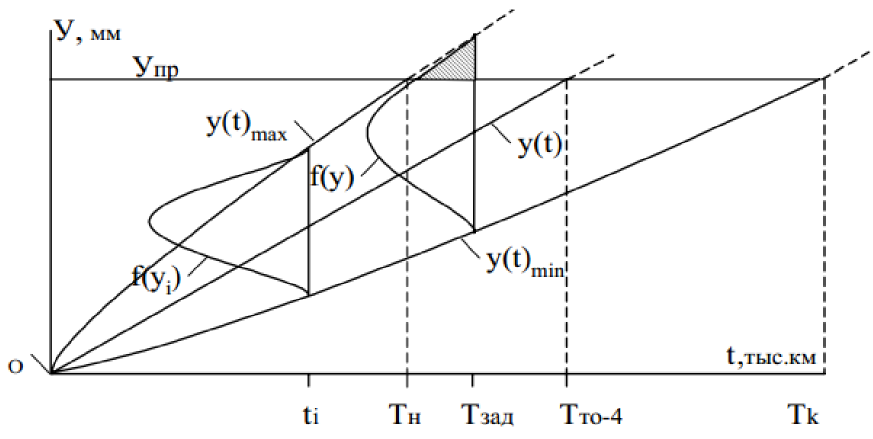

Рисунок 4 – Зависимость среднего износа шеек коленчатых валов от пробега.

По результатам расчётов, сведённым в таблице 7, постройте график зависимости среднего износа шеек от пробега (рисунок 4). Проведите на графике прямую $y = y_{пр.}$.

Пользуясь данными таблицы 7, постройте на этом же графике кривые, показывающие верхнюю и нижнюю границы практически 33 возможных значений износа шеек. Покажите на графике обе исходные точки – (t_1, y_1) и (t_2, y_2), отметьте их координаты. При построении графика рекомендуется использовать следующий масштаб: пробег - 1мм↔1 тыс. км, износ - 1мм↔ 0,01мм износа.

Контрольный вопрос. Имеет ли смысл при заданных условиях вычислять значения среднего износа и дисперсии износа для наработки t = 360 тыс.км и более?