ДИНАМИКА

Задача Д1 («Динамика точки»)

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0-Д1.9, табл. Д1). На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\overline{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от скорости груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя значения своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу f=0,2) и переменная сила $\overline{F}$, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т.е. $x = x(t)$, где $x = BD$.

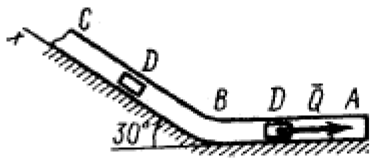


Рис. Д1.1

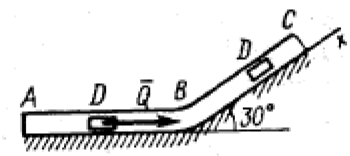


Рис. Д1.2

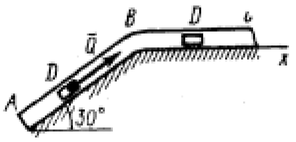


Рис. Д1.3

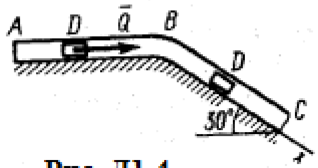


Рис. Д1.4

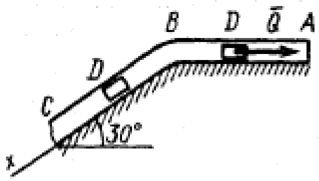


Рис. Д1.5

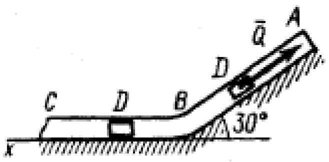


Рис. Д1.6

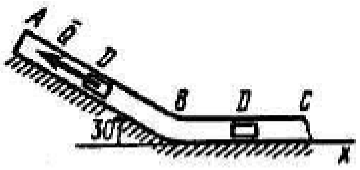


Рис. Д1.7

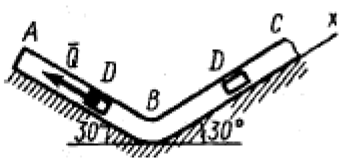


Рис. Д1.8

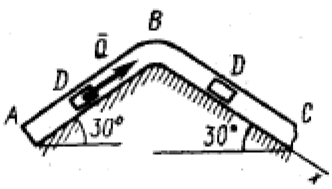


Рис. Д1.9

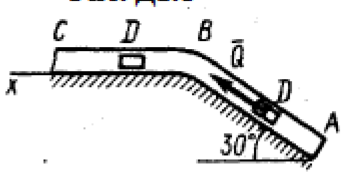


Рис. Д1.10

Таблица Д1

Номер условия	m, кг	V_0, м/с	Q, Н	R, H	l, м	t_1, с	F_x, H
1	2	20	6	$0,4V$	-	2,5	$2\sin(4t)$
2	2,4	12	6	$0,8V^2$	1,5	-	$6t$
3	4,5	24	9	$0,5V$	-	3	$3\sin(2t)$
4	6	14	22	$0,6V^2$	5	-	$-3\cos(2t)$
5	1,6	18	4	$0,4V$	-	2	$4\cos(4t)$
6	8	10	16	$0,5V^2$	4	-	$-6\sin(2t)$
7	1,8	24	5	$0,3V$	-	2	$9t^2$
8	4	12	12	$0,8V^2$	2,5	-	$-8\cos(4t)$
9	3	22	9	$0,5V$	-	3	$2\cos(2t)$
10	4,8	10	12	$0,2V^2$	4	-	$-6\sin(4t)$

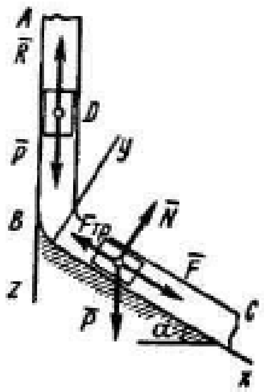


Рис. Д1

Пример Д1. На вертикальном участке AB трубы (рис. Д1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления $\overline{R}$; расстояние от точки A, где $V = V_0$, до точки B равно l. На наклонном участке BC на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

Дано: m=2 кг, $R = \mu V^2$, где $\mu = 0,4$ кг/м, $V_0 = 5$ м/с, $l = 2,5$ м, $F_x = 16\sin(4t)$.

Определить: $x = f(t)$ – закон движения груза на участке BC.

Решение. 1. Рассмотрим движение груза **на участке *AB*,** считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и приложенные к нему силы $\overline{P}$ и $\overline{R}$. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в векторной форме:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{P} + \overline{R}. \qquad (1)$$

Проводим ось Az в сторону движения точки и проектируем (1) на эту ось:

$$m\frac{dV_z}{dt} = mg - \mu V^2, \qquad (2)$$

где учтено, что $P = mg$, $R = \mu V^2$. Подчеркнем, что в уравнении (2) **все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят.** Учитывая, что $V_z = V$ и делая замену $dV/dt = V\,dV/dz$, получим уравнение

$$mV\frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2. \qquad (3)$$

Разделим обе части (3) на m и введем обозначение

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2\ \text{м}^{-1}.$$

Тогда уравнение (3) приобретает вид

$$V\frac{dV}{dz} = g - kV^2. \qquad (4)$$

Решим уравнение (4). Разделим переменные V и z, выполнив два действия: обе части (4) умножим на dz и разделим на $(g - kV^2)$; получим:

$$\frac{VdV}{g - kV^2} = dz.$$

Интегрируя это уравнение, найдем:

$$-\frac{1}{2k}\ln(g - kV^2) = z + C_1. \qquad (5)$$

Находим C_1. Подставим в (5) начальные условия: $t = 0$, $z = z_0 = 0$, $V = V_0$.

$$-\frac{1}{2k}\ln(g - kV_0^2) = C_1.$$

Найденное выражение для C_1 подставляем в (5):

$$-\frac{1}{2k}\ln(g - kV^2) = z - \frac{1}{2k}\ln(g - kV_0^2),$$

или

$$\ln\frac{g - kV^2}{g - kV_0^2} = -2kz \quad \text{и} \quad \frac{g - kV^2}{g - kV_0^2} = e^{-2kz}.$$

Отсюда

$$V^2 = \frac{g}{k} - \left(\frac{g}{k} - V_0^2\right)e^{-2kz}. \qquad (6)$$

Полагая в равенстве (6) $z = l = 2{,}5$ м, $V_0 = 5$ м/с, $g = 10\ \text{м/с}^2$, $e = 2{,}7$ и подставляя ранее найденное $k = 0{,}2$ м $^{-1}$, определим скорость V_B груза в точке B:

$$V_B = 6{,}4\ \text{м/с}. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим движение груза **на участке *BC*;** найденная скорость V_B будет для движения на этом участке начальной скоростью ($V_0 = V_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы (активные и реакции связей): $\overline{P}, \overline{N}, \overline{F}_{тр}, \overline{F}$. Запишем дифференциальное уравнение движения груза в векторной форме:

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{P} + \overline{N} + \overline{F}_{тр} + \overline{F}. \qquad (8)$$

Проведем из точки B оси Bx (в сторону движения точки) и By и проектируем (8) на ось Bx:

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg\sin\alpha - fN + 16\sin(4t), \qquad (9)$$

где учтено, что $P = mg$, $F_{тр} = fN$, $F_x = 16\sin(4t)$. Сила N неизвестна; следовательно, прежде чем интегрировать (9), найдем N, решив первую задачу динамики точки. Для этого спроектируем векторное уравнение (8) на ось By:

$$ma_y = N - mg\cos\alpha. \qquad (10)$$

Учтем, что движение точки происходит по прямой, $y \equiv const$ и, следовательно, $a_y = \ddot{y} \equiv 0$. Тогда из (10) получаем $N = mg\cos\alpha$. Подставим этот результат в (9):

$$m\frac{dV_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t).$$

Подставим в это уравнение заданные численные значения (чтобы избежать громоздкой записи). Тогда получим

$$\frac{dV_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t). \tag{11}$$

Решим уравнение (11). Разделим переменные V_x и t. Умножим обе части (11) на dt:

$$dV_x = 3{,}2\,dt + 8\sin(4t)\,dt;$$

интегрируя, найдем

$$V_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2. \tag{12}$$

Находим C_2. Подставим в (12) начальные условия: $t = 0$, $V_x = V_B$, где V_B дается равенством (7). Найденное значение $C_2 = 8{,}4$ подставляем в (12):

$$V_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4.$$

Так как $V_x = dx/dt$, то

$$\frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4. \tag{13}$$

Решим уравнение (13). Разделим переменные x и t. Умножим обе части (13) на dt:

$$dx = 3{,}2t\,dt - 2\cos(4t)\,dt + 8{,}4\,dt;$$

интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t + C_3 \tag{14}$$

Находим C_3. Подставим в (14) начальные условия: $t = 0$, $x = x_0 = 0$. Найденное значение $C_3 = 0$ подставляем в (14):

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t.$$

Ответ: $x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4\,t$, где x – в метрах, t – в секундах.

Задача Д2 («Теорема о движении центра масс»)

Механическая система состоит из грузов D_1 массой $m_1 = 2$ кг и D_2 массой $m_2 = 6$ кг и из прямоугольной вертикальной плиты массой $m_3 = 2$ кг, движущейся вдоль горизонтальных гладких направляющих. В момент времени $t_0 = 0$, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов $r = 0{,}4$ м и $R = 0{,}8$ м.

При движении грузов угол $\phi_1 = A_1C_3D_1$ изменяется по закону $\phi_1 = f_1(t)$, а угол $\phi_2 = A_2C_3D_2$ – по закону $\phi_2 = f_2(t)$. В таблице эти зависимости даны отдельно для рис. 1-5 и 6-10, где ϕ – выражено в радианах, t – в секундах.

Считая грузы материальными точками, определить закон движения со временем величины, указанной в таблице в столбце «Найти», т.е. $x_3 = f_3(t)$ и $N = f(t)$, где x_3 – координата центра C_3 плиты ($x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты), $\underline{N}$ – полная нормальная реакция направляющих.

Таблица Д2

Номер Условия	Рис. 1-5		Рис. 6-10		Найти
	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	$\varphi_1 = f_1(t)$	$\varphi_2 = f_2(t)$	
1	$\frac{\pi}{3}(t^2+1)$	$\frac{\pi}{6}(t^2-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2+2)$	x_3
2	$\pi(2-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+3)$	$\frac{\pi}{4}(2t-1)$	$\frac{\pi t}{6}$	N
3	$\frac{\pi}{4}(t^2+2)$	$\frac{\pi}{6}(5-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	πt^2	x_3
4	$\frac{\pi t}{3}$	$\frac{\pi}{2}(t-2)$	$\frac{\pi}{6}(3t-2)$	$\frac{\pi}{2}(3-t)$	N
5	$\frac{\pi}{4}(1-3t^2)$	$\frac{\pi}{3}(t^2-4)$	$\frac{\pi t^2}{2}$	$\frac{\pi}{4}(2-t^2)$	x_3
6	$\frac{\pi}{6}(t+2)$	$\frac{\pi}{4}(1-t)$	$\pi(3-t)$	$\frac{\pi}{6}(t-1)$	N
7	πt^2	$\frac{\pi}{6}(1-2t^2)$	$\frac{\pi}{4}(2t^2-3)$	$\frac{\pi}{3}(2-t^2)$	x_3
8	$\frac{\pi}{3}(5-t)$	$\frac{\pi}{4}(t+4)$	$\frac{\pi t}{6}$	$\frac{\pi}{4}(4-t)$	N
9	$\frac{\pi}{6}(t^2+3)$	$\frac{\pi}{2}(2-t^2)$	$\frac{\pi}{3}(4-t^2)$	$\pi(t^2+2)$	x_3
10	$\frac{\pi}{2}(4-t)$	$\pi(t+5)$	$\frac{\pi}{6}(2t-1)$	$\frac{\pi}{2}(2-t)$	N

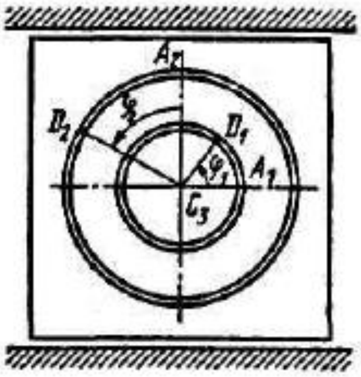


Рис. Д2.1

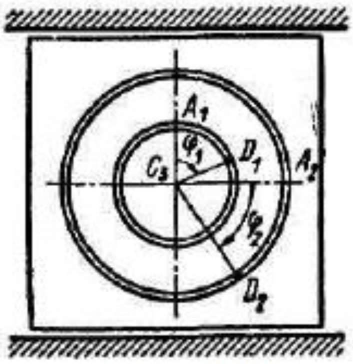


Рис. Д2.2

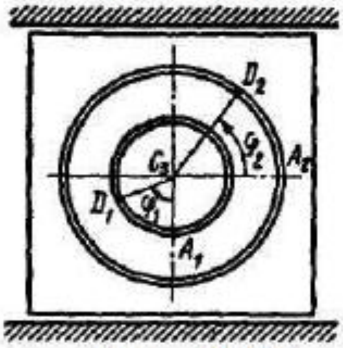


Рис. Д2.3

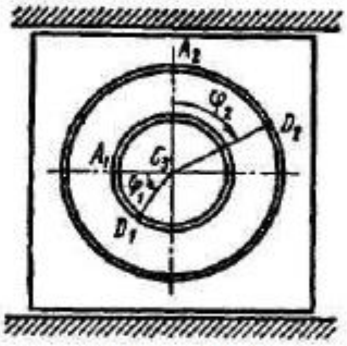


Рис. Д2.4

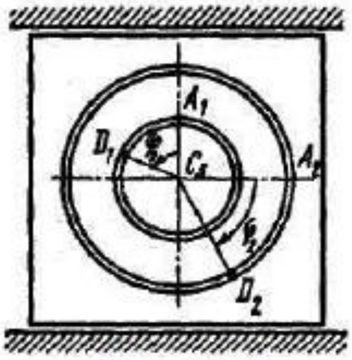


Рис. Д2.5

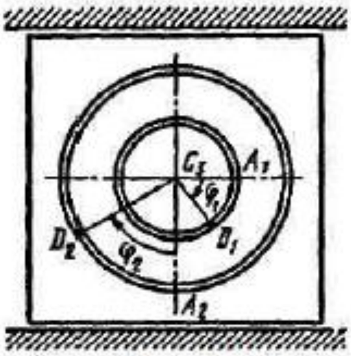


Рис. Д2.6

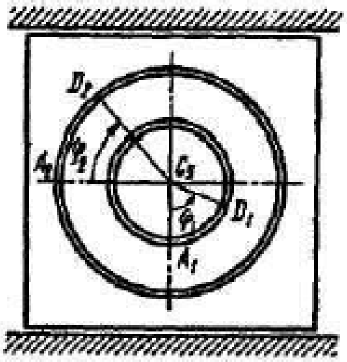


Рис. Д2.7

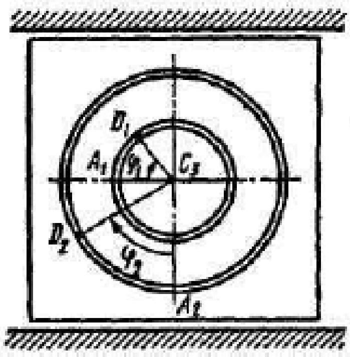


Рис. Д2.8

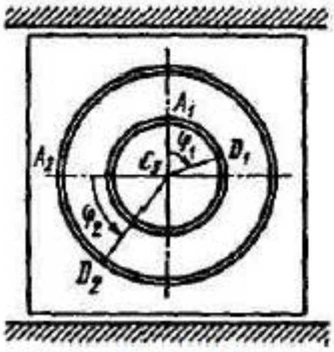


Рис. Д2.9

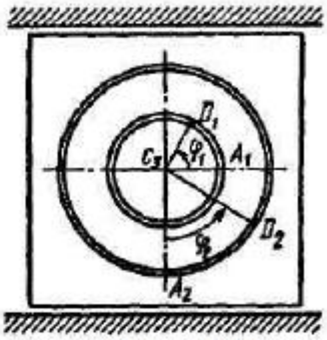


Рис. Д2.10

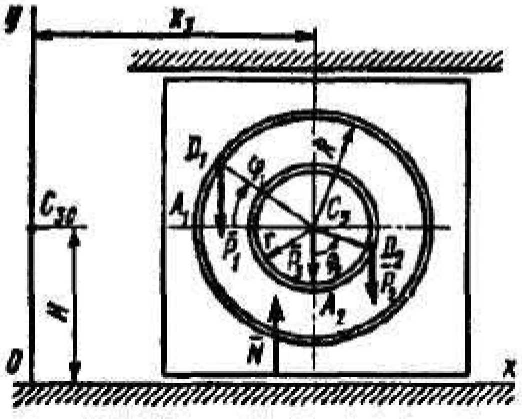


Рис. Д2

Пример Д2. Механическая система состоит из грузов D_1 массой m_1 и D_2 массой m_2 и из прямоугольной вертикальной плиты массой m_3, движущейся вдоль горизонтальных направляющих (рис. Д2). В момент времени t_0=0, когда система находилась в покое, под действием внутренних сил грузы начинают двигаться по желобам, представляющим собой окружности радиусов r и R, по законам $\varphi_1 = f_1(t)$ и $\varphi_2 = f_2(t)$.

Дано: m_1 = 6 кг, m_2 = 8 кг, m_3 = 12 кг, r = 0,6 м, R = 1,2 м, $\varphi_1 = \pi t$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}(1-t)$ (t – в секундах).

Определить: $x_3 = f_3(t)$ – закон движения плиты, $N = f(t)$ – закон изменения со временем полной нормальной реакции направляющих.

Решение. Рассмотрим механическую систему, состоящую из плиты и грузов D_1 и D_2 в произвольном положении (рис. Д2). Изобразим на рисунке действующие на систему внешние силы: силы тяжести $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ и реакцию направляющих $\overline{N}$. Запишем уравнение движения центра масс системы в векторной форме:

$$M\,\overline{a}_C = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \overline{P}_3 + \overline{N}. \qquad (1)$$

Проведем координатные оси Oxy так, чтобы ось y проходила через точку C_{30}, где находился центр масс плиты в момент времени t_0=0.

а) **Определение перемещения** $x_3(t)$ (вторая задача динамики). Для определения $x_3 = f_3(t)$ спроектируем уравнение (1) на ось x. Получим

$$M\,\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e \quad \text{или} \quad M\,\ddot{x}_C = 0, \qquad (2)$$

так как все внешние силы перпендикулярны оси x и поэтому $\sum F_{kx}^e = 0$.

Отметим также, что $V_{Cx} = 0$ при $t = 0$. Поэтому, интегрируя дважды уравнение (2), получим:

$$M\,x_C = const \qquad (3)$$

(закон сохранения координаты центра масс системы). Из (3) следует, что

$$M\,x_C(t) = M\,x_C(0). \qquad (4)$$

Определим значение $M\,x_C(t)$. Координата x_C центра масс системы определяется по формуле

$$M\,x_C = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3. \qquad (5)$$

Из рис. Д2 видно, что в произвольный момент времени абсциссы грузов равны соответственно $x_1 = x_3 - R\cos\varphi_1$, $x_2 = x_3 + r\sin\varphi_2$. Подставляя эти выражения в формулу (5) и учитывая заданные зависимости φ_1 и φ_2 от t, получим

$$M\,x_C(t) = (m_1 + m_2 + m_3)x_3(t) - m_1R\cos(\pi t) + m_2r\sin(\pi/2 - \pi t/2). \qquad (6)$$

Определим значение $M\,x_C(0)$. Подставляя в (6) t=0, $x_3(0)$=0, получим

$$M\,x_C(0) = -m_1R + m_2r. \qquad (7)$$

В соответствии с уравнением (4), приравниваем правые части (6) и (7):

$$-m_1R + m_2r = (m_1 + m_2 + m_3)x_3 - m_1R\cos(\pi t) + m_2r\cos(\pi t/2).$$

Отсюда получаем зависимость от времени координаты x_3.

Ответ: $x_3 = 0{,}09[3\cos(\pi t) - 2\cos(\pi t/2) - 1]$ м, где t – в секундах.

б) **Определение реакции** N (первая задача динамики). Для определения $N = f(t)$ спроектируем векторное уравнение (1) на вертикальную ось y (см. рис. Д2):

$$M\,\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e \quad \text{или} \quad M\ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3. \qquad (8)$$

Отсюда получим, учитывая, что P_1=m_1g, и т.д.:

$$N = M\,\ddot{y}_C + (m_1 + m_2 + m_3)g, \qquad (9)$$

где $\ddot{y}_C$ пока неизвестно. Для нахождения $\ddot{y}_C$ определим сначала $y_C(t)$. Координата y_C центра масс системы определяется по формуле

$$M\,y_C = m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3. \qquad (10)$$

Из рис. Д2 видно, что в произвольный момент времени ординаты грузов равны соответственно $y_1 = H + R\sin\varphi_1$, $y_2 = H - r\cos\varphi_2$, а $y_3 = H = OC_{30} = const$.

Подставляя эти выражения в формулу (10) и учитывая заданные зависимости φ_1 и φ_2 от t, получим

$$M\,y_C(t) = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1R\sin(\pi t) - m_2r\cos(\pi/2 - \pi t/2)$$

или $M\,y_C(t) = (m_1 + m_2 + m_3)H + m_1R\sin(\pi t) - m_2r\sin(\pi t/2)$.

Продифференцировав обе части этого равенства два раза по времени, найдем $M\,\ddot{y}_C = -m_1R\pi^2\sin(\pi t) + m_2r(\pi^2/4)\sin(\pi t/2)$.

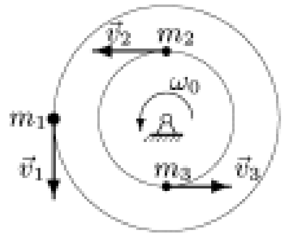
Подставив это значение $M\,\ddot{y}_C$ в уравнение (9), определим искомую зависимость N от t.

Ответ: $N = 254{,}8 - 1{,}2\pi^2[6\sin(\pi t) - \sin(\pi t/2)]$, где t – в секундах, N – в ньютонах.

Задача Д3 («Теорема об изменении кинетического момента»)

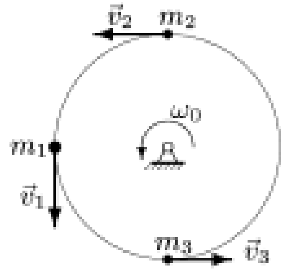
Однородная горизонтальная платформа радиусом $R = 1$ м и массой $m_0 = 20$ кг, на которой расположены три материальные точки, свободно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega_{z0} = 2$ рад/с. Найти угловую скорость платформы после того, как точки начнут перемещаться по платформе со скоростями v_i, $i = 1\ldots3$ по окружностям вокруг оси вращения. Массы даны в кг, относительные скорости – в м/с. Радиус меньшей окружности $r = 0.7$ м, радиус большей совпадает с радиусом платформы. Трением пренебречь.

1.



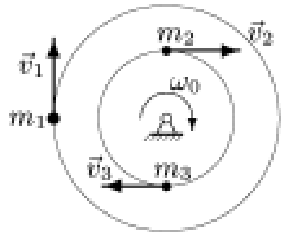
$m_1 = 19$, $m_2 = 18$, $m_3 = 17$,
$v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$.

2.



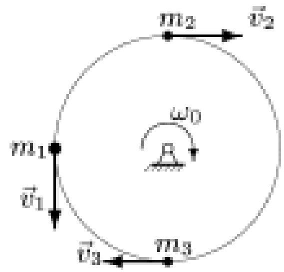
$m_1 = 18$, $m_2 = 16$, $m_3 = 14$,
$v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$.

3.



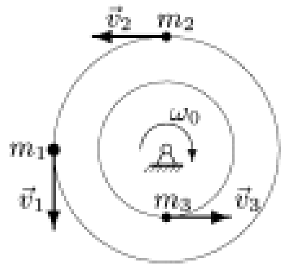
$m_1 = 17$, $m_2 = 14$, $m_3 = 11$,
$v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 6$.

4.



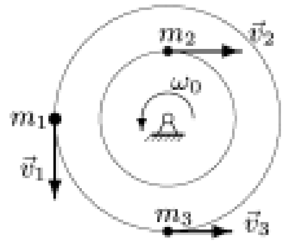
$m_1 = 19$, $m_2 = 15$, $m_3 = 11$,
$v_1 = 4$, $v_2 = 6$, $v_3 = 7$.

5.



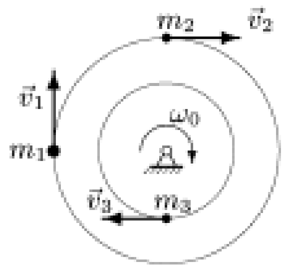
$m_1 = 19$, $m_2 = 17$, $m_3 = 16$,
$v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 5$.

6.



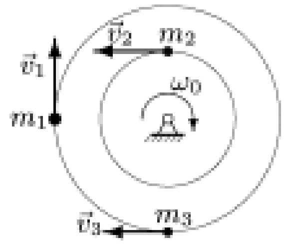
$m_1 = 18$, $m_2 = 15$, $m_3 = 13$,
$v_1 = 3$, $v_2 = 4$, $v_3 = 5$.

7.



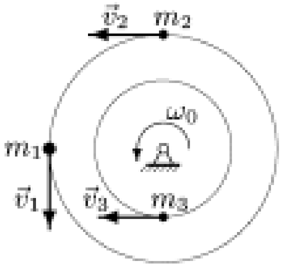
$m_1 = 17$, $m_2 = 13$, $m_3 = 10$,
$v_1 = 4$, $v_2 = 6$, $v_3 = 7$.

8.



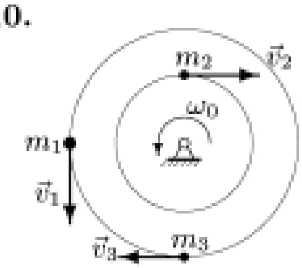
$m_1 = 16$, $m_2 = 15$, $m_3 = 11$,
$v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$.

9.



$m_1 = 19$, $m_2 = 17$, $m_3 = 14$,
$v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$.

10.



$m_1 = 18$, $m_2 = 15$, $m_3 = 11$,
$v_1 = 3$, $v_2 = 4$, $v_3 = 5$.

Пример Д3. Круглая горизонтальная платформа вращается без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс с постоянной угловой скоростью ω_0; при этом на платформе стоят четыре человека: два — на краю платформы, а два на расстояниях от оси вращения, равных половине радиуса платформы (рис. 1).

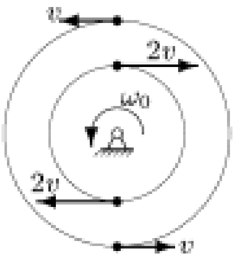


Рис. 1

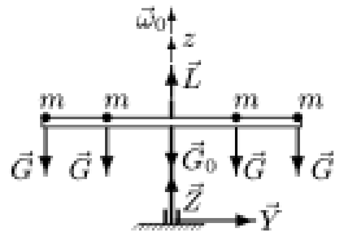


Рис. 2

Как изменится угловая скорость платформы, если люди, стоящие на краю, будут двигаться по окружности в сторону вращения с относительной скоростью v, а люди, стоящие на расстоянии половины радиуса от оси вращения, будут двигаться по окружности в противоположную сторону с относительной скоростью $2v$? Людей считать материальными точками одинаковой массы, а платформу — однородным диском.

Решение

На систему, состоящую из платформы и четырех человек, действуют внешние силы. Ось z направим по оси вращения. Моменты сил тяжести людей $\vec{G}$, платформы $\vec{G}_0$ и реакций подшипника (реакция $\vec{X}$ перпендикулярна плоскости чертежа и на рис. 2 не обозначена) относительно оси z равны нулю (рис.2) Используем уравнение *сохранения* момента количества движения

1. Вычисляем момент количества движения системы, когда люди стоят неподвижно на платформе:

$$L_{z0} = (J_z + 2mR^2 + 2m(R/2)^2)\omega_{z0} = (J_z + 2.5mR^2)\omega_{z0},$$

где J_z — момент инерции платформы, m — масса каждого человека, R — радиус платформы.

2. Вычисляем момент количества движения системы после того, как люди начали двигаться относительно платформы. У двух человек на внешнем ободе относительные скорости v и переносные скорости $\omega_{z1}R$ суммируются, $v+\omega_{z1}R$, и момент количества движения вычисляется в виде произведения величины количества движения $m(v+\omega_{z1}R)$ на плечо R. У людей на внутреннем ободе переносная скорость меньше в два раза, $\omega_{z1}R/2$, направлена в сторону вращения диска. Относительная же скорость $2v$ направлена в противоположную сторону, поэтому она берется с минусом. В итоге,

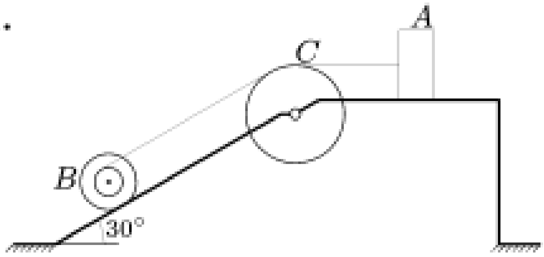
$$L_{z1}=J_z\omega_{z1}+2mR(v+\omega_{z1}R)+2mR/2(\omega_{z1}R/2-2v)=(J_z+2.5mR^2)\omega_{z1}.$$

3. Из равенства $L_{z0}=L_{z1}$ следует, что $\omega_{z1}=\omega_{z0}$, т.е. угловая скорость вращения платформы не изменилась.

Задача Д4 («Теорема об изменении кинетической энергии»)

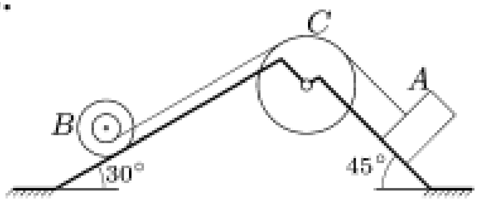
Механизм, состоящий из груза A, блока B (больший радиус R, меньший r) и цилиндра C радиусом R_C, установлен на призме D, закрепленной на плоскости. Под действием сил тяжести из состояния покоя механизм пришел в движение. Между грузом A и призмой имеется трение (кроме тех вариантов, где груз висит), качение цилиндра (блока) происходит без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения груза о плоскость f, коэффициент трения качения блока (цилиндра) δ. Трения на неподвижной оси вращающегося блока (цилиндра) нет. Нити, соединяющие тела, параллельны плоскостям. Какую скорость развил груз A, переместившись на расстояния S = 1 м?

1.



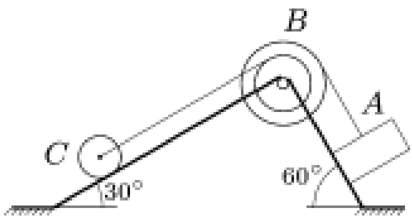
$R = 16$ см, $r = 8$ см,
$R_c = 28$ см, $f = 0.01$,
$i = 13$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.1$ мм, $m_A = 6$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 11$ кг.

2.



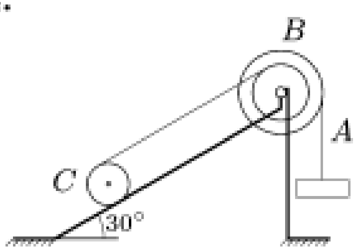
$R = 24$ см, $r = 12$ см,
$R_c = 42$ см, $f = 0.02$,
$i = 19$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.2$ мм, $m_A = 9$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 14$ кг.

3.



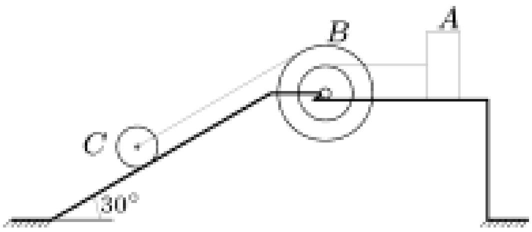
$R = 48$ см, $r = 32$ см,
$R_c = 24$ см, $f = 0.03$,
$i = 41$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.3$ мм, $m_A = 6$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 16$ кг.

4.



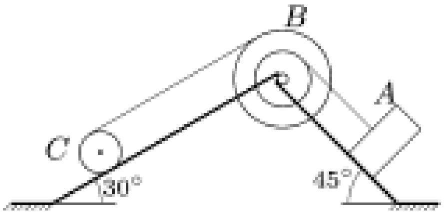
$R = 60$ см, $r = 40$ см,
$R_c = 30$ см, $f = 0.04$,
$i = 51$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.4$ мм, $m_A = 9$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 19$ кг.

5.



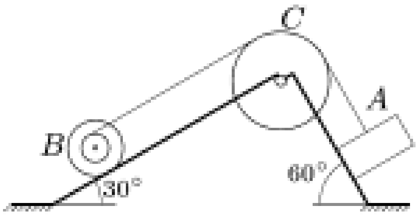
$R = 28$ см, $r = 16$ см,
$R_c = 12$ см, $f = 0.05$,
$i = 23$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.1$ мм, $m_A = 6$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 21$ кг.

6.



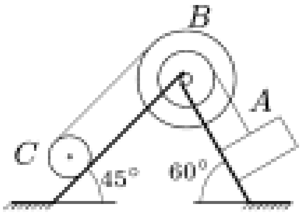
$R = 42$ см, $r = 24$ см,
$R_c = 18$ см, $f = 0.01$,
$i = 34$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.2$ мм, $m_A = 9$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 24$ кг.

7.



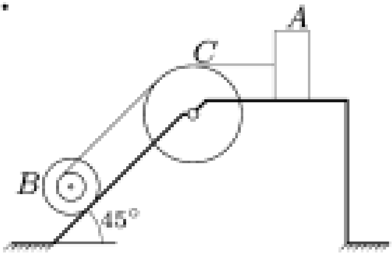
$R = 32$ см, $r = 16$ см,
$R_c = 56$ см, $f = 0.02$,
$i = 25$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.3$ мм, $m_A = 6$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 11$ кг.

8.



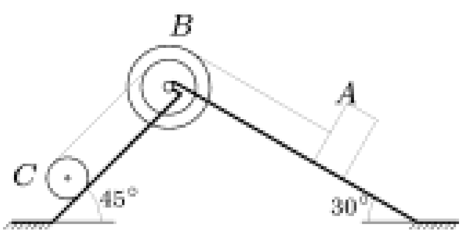
$R = 70$ см, $r = 40$ см,
$R_c = 30$ см, $f = 0.03$,
$i = 57$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.4$ мм, $m_A = 12$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 27$ кг.

9.



$R = 16$ см, $r = 8$ см,
$R_c = 28$ см, $f = 0.04$,
$i = 14$ см, $S_A = 1$ м,
$\delta = 0.1$ мм, $m_A = 9$ кг,
$m_B = 3$ кг, $m_C = 14$ кг.

10.



$R = 36$ см, $r = 24$ см,
$R_c = 18$ см, $f = 0.05$,
$i = 32$ см, $S_A = 2$ м,
$\delta = 0.2$ мм, $m_A = 12$ кг,
$m_B = 6$ кг, $m_C = 22$ кг.

Пример Д4. Механизм, состоящий из груза A, блока B и цилиндра C радиусом R_C, установлен на неподвижной призме (рис. 1). Под действием сил тяжести из состояния покоя механизм пришел в движение. Даны массы $m_A = 50$ кг, $m_B = 80$ кг, $m_C = 120$ кг, радиусы $R = 30$ см, $r = 10$ см, $R_C = r/2$, угол $\alpha = 75°$, радиус инерции блока $i = 15$ см, коэффициент трения качения цилиндра о наклонную плоскость $\delta = 2$ мм, коэффициент трения скольжения груза о горизонтальную поверхность $f = 0.1$. Трения на оси блока B нет. Нити, соединяющие блок с грузом и цилиндром, параллельны плоскостям, по которым перемещаются эти тела. Какую скорость развил груз A, переместившись на расстояние $S_A = 1.2$ м?

Решение

Применяем теорему об изменении кинетической энергии системы

$$T_1 - T_0 = \sum_j A_j^e + \sum_j A_j^i, \tag{1}$$

где $\sum_j A_j^e$, $\sum_j A_j^i$ — работа внешних и внутренних сил, определяем скорость v_*.

Для рассматриваемой системы, состоящей из твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, работа внутренних сил равна нулю: $\sum_j A_j^i = 0$. В начальном положении все элементы механизма находились в покое, скорости всех тел были равны нулю, поэтому $T_0 = 0$. Кинетическая энергия T_1, которую получила система после того, как груз переместился вдоль горизонтальной поверхности на расстояние S_A, зависит от искомой скорости v_A.

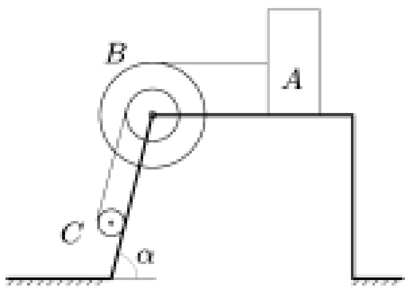


Рис. 1

1. Кинетическую энергию системы, состоящую из трех слагаемых

$$T_1 = T_A + T_B + T_C,$$

выражаем через скорость $v = v_A$. Груз A движется поступательно, следовательно, его кинетическая энергия равна $T_A = m_A v^2/2$. Тело B (блок) вращается относительно неподвижной оси: $T_B = J_B\omega_B^2/2$. Момент инерции блока относительно оси вращения вычисляем через заданный радиус инерции $J_B = i^2 m_B$. Угловую скорость ω_B необходимо выразить через искомую скорость v. Линейная скорость внешнего обода блока совпадает со скоростью груза v, так как обод связан нерастяжимой нитью с грузом. Для угловой скорости блока записываем формулу $\omega_B = v/R$. Выражаем T_B через скорость v:

$$T_B = \frac{m_B i^2 v^2}{2R^2}.$$

Тело C (цилиндр) совершает плоское движение, поэтому

$$T_C = \frac{m_C v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega_C^2}{2},$$

v_C — скорость центра масс цилиндра, J_C — момент инерции цилиндра относительно центральной оси:

$$J_C = \frac{m_C R_C^2}{2} = \frac{m_C (r/2)^2}{2} = \frac{m_C r^2}{8}.$$

Выражаем v_C и ω_C через v. Точки внутреннего обода блока имеют скорость $r\omega_B$ или, выражая ω_B через скорость груза, vr/R (рис.2)

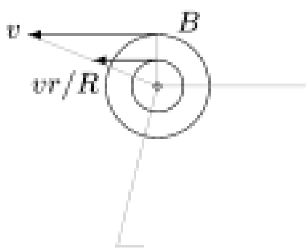


Рис. 2

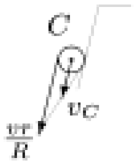


Рис. 3

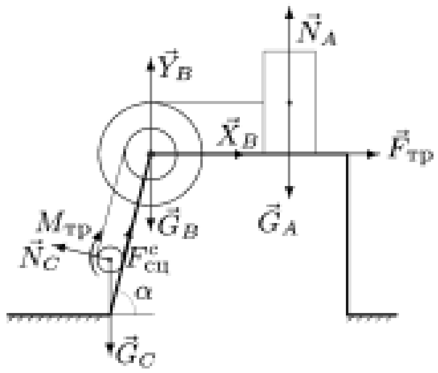


Рис. 4

Цилиндр катится без проскальзывания, поэтому точка его соприкосновения с призмой является мгновенным центром скоростей тела (рис. 3), отсюда

$$\omega_C = \frac{vr}{2R_C R} = \frac{v}{R}, \tag{2}$$

$$v_C = \omega_C R_C = \frac{v}{R}\frac{r}{2}. \tag{3}$$

В результате находим кинетическую энергию цилиндра C:

$$T_C = \frac{m_C r^2 v^2}{8R^2} + \frac{m_C r^2}{8}\frac{v^2}{2R^2} = \frac{3}{16} m_C v^2 \frac{r^2}{R^2}.$$

Кинетическую энергию системы трех тел представляем в виде

$$T_1 = T_A + T_B + T_C = \frac{v^2}{2}\mu_{\text{прив}}, \tag{4}$$

где $\mu_{\text{прив}} = m_A + m_B i^2/R^2 + 3/8\, m_C\, r^2/R^2$ — приведенная масса системы.

2. Находим сумму работ внешних сил. Изображаем действующие на систему силы (рис. 3). Реакции опор $\vec{N}_A, \vec{N}_C$ и вес $\vec{G}_A$ работы не совершают, так как они перпендикулярны перемещениям точек их приложения. Реакции оси $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ и вес $\vec{G}_B$ приложены к неподвиж-

ным точкам, поэтому их работа также равна нулю. Аналогично, работа силы сцепления, приложенной к цилиндру C в точке касания, равна нулю. Находим сумму работ остальных сил:

$$\sum_{j=1}^{3} A_j = -F_{\text{тр}} S_A + G_C S_C \sin\alpha - M_{\text{тр}} \varphi_C,$$

где S_C и φ_C — соответственно, смещение центра тяжести и угол поворота цилиндра C. Находим силу трения скольжения груза A и момент трения качения цилиндра C. Имеем $F_{\text{тр}} = N_A f$, $M_{\text{тр}} = N_C \delta$, где N_A и N_C соответствующие нормальные реакции. Проекция всех сил, действующих на тело A, на нормаль к поверхности равна нулю. Отсюда, $N_A = G_A$. Аналогично, из равенства нулю суммы проекций на нормаль к боковой поверхности призмы всех сил, действующих на цилиндр, получаем $N_C = G_C \cos\alpha$. В результате

$$F_{\text{тр}} = G_A f = m_A g f, \quad M_{\text{тр}} = N_C \delta = m_C g \delta \cos\alpha.$$

Так как $v_C = \dot{S}_C$, $v = \dot{S}_A$, $\omega_C = \dot{\varphi}_C$, то интегрируя (2) и (3) при нулевых начальных условиях, получаем $S_C = S_A r/(2R)$, $\varphi_C = S_A/R$. Суммарную работу выражаем через S_A:

$$\sum_{j=1}^{3} A_j = -m_A g f S_A + m_C g \sin\alpha \frac{S_A r}{2R} - m_C g \delta \cos\alpha \frac{S_A}{R}. \qquad (5)$$

3. Кинетическую энергию (4) приравниваем сумме работ (5):

$$\frac{v^2}{2} \mu_{\text{прив}} = g S_A \left(-m_A f + m_C \sin\alpha \frac{r}{2R} - m_C \cos\alpha \frac{\delta}{R} \right).$$

Отсюда получаем: $v = 2.10$ м/с.