

### **. Пример выполнения ]**

Дана выборка курса биржевой стоимости акции некоторого предприятия за 12 месяцев.

1. Найти коэффициенты автокорреляции со смещением на 1, 2, 3 и 4 месяца.

2. Проверить найденные коэффициенты автокорреляции на значимость с доверительной вероятностью  $p = 0,95$ .

3. Построить коррелограмму.
4. Построить аддитивную (или мультипликативную) модель временного ряда.

Таблица 8.

Вариант	Стоимость акции по месяцам (руб.)											
0.	13,1	11,9	11,8	17,3	15,9	16,1	20,5	19,2	19,9	23,9	22,8	23,8

### Решение

Коэффициенты автокорреляции со смещением (лагом) на  $k$  периодов находятся по формуле:

$$r(k) = \frac{(n-k) \sum_{t=1}^{n-k} y_t y_{t+k} - \sum_{t=1}^{n-k} y_t \cdot \sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}}{\sqrt{(n-k) \sum_{t=1}^{n-k} y_t^2 - \left( \sum_{t=1}^{n-k} y_t \right)^2} \cdot \sqrt{(n-k) \sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}^2 - \left( \sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k} \right)^2}}$$

Функция  $r(k)$  называется автокорреляционной функцией, а ее график - коррелограммой.

1.1. Рассчитаем коэффициент автокорреляции со смещением на 1 месяц. Для этого составим расчетную таблицу 9.

Таблица 9.

Месяц	$y_t$	$y_{t+1}$	$y_t^2$	$y_{t+1}^2$	$y_t y_{t+1}$
1	13.1	11.9	171.61	141.61	155.89
2	11.9	11.8	141.61	139.24	140.42
3	11.8	17.3	139.24	299.29	204.14
4	17.3	15.9	299.29	252.81	275.07
5	15.9	16.1	252.81	259.21	255.99
6	16.1	20.5	259.21	420.25	330.05
7	20.5	19.2	420.25	368.64	393.6
8	19.2	19.9	368.64	396.01	382.08
9	19.9	23.9	396.01	571.21	475.61
10	23.9	22.8	571.21	519.84	544.92
11	22.8	23.8	519.84	566.44	542.64
<b>Итого</b>	<b>192.4</b>	<b>203.1</b>	<b>3539.72</b>	<b>3934.55</b>	<b>3700.41</b>

$$r(1) = \frac{(12-1) \sum_{t=1}^{11} y_t y_{t+1} - \sum_{t=1}^{11} y_t \cdot \sum_{t=1}^{11} y_{t+1}}{\sqrt{(12-1) \sum_{t=1}^{11} y_t^2 - \left( \sum_{t=1}^{11} y_t \right)^2} \cdot \sqrt{(12-1) \sum_{t=1}^{11} y_{t+1}^2 - \left( \sum_{t=1}^{11} y_{t+1} \right)^2}} =$$

$$= \frac{11 \cdot 3700.41 - 192.4 \cdot 203.1}{\sqrt{11 \cdot 3539.72 - 192.4^2} \cdot \sqrt{11 \cdot 3934.55 - 201.3^2}} \approx 0.825;$$

1.2. Рассчитаем коэффициент автокорреляции со смещением на 2 месяца. Для этого составим расчетную таблицу 10.

Таблица 10.

Месяц	$y_t$	$y_{t+2}$	$y_t^2$	$y_{t+2}^2$	$y_t y_{t+2}$
1	13.1	11.8	171.61	139.24	154.58
2	11.9	17.3	141.61	299.29	205.87
3	11.8	15.9	139.24	252.81	187.62
4	17.3	16.1	299.29	259.21	278.53
5	15.9	20.5	252.81	420.25	325.95
6	16.1	19.2	259.21	368.64	309.12
7	20.5	19.9	420.25	396.01	407.95
8	19.2	23.9	368.64	571.21	458.88
9	19.9	22.8	396.01	519.84	453.72
10	23.9	23.8	571.21	566.44	568.82
<b>Итого</b>	<b>169.6</b>	<b>191.2</b>	<b>3019.88</b>	<b>3792.94</b>	<b>3351.04</b>

$$r(2) = \frac{(12-2) \sum_{t=1}^{10} y_t y_{t+2} - \sum_{t=1}^{10} y_t \cdot \sum_{t=1}^{10} y_{t+2}}{\sqrt{(12-2) \sum_{t=1}^{10} y_t^2 - \left( \sum_{t=1}^{10} y_t \right)^2} \cdot \sqrt{(12-2) \sum_{t=1}^{10} y_{t+2}^2 - \left( \sum_{t=1}^{10} y_{t+2} \right)^2}} =$$

$$= \frac{10 \cdot 3351.04 - 169.6 \cdot 191.2}{\sqrt{10 \cdot 3019.88 - 169.6^2} \cdot \sqrt{10 \cdot 3792.94 - 191.2^2}} \approx 0.772;$$

1.3. Рассчитаем коэффициент автокорреляции со смещением на 3 месяца. Для этого составим расчетную таблицу 11.

Таблица 11.

Месяц	$y_t$	$y_{t+3}$	$y_t^2$	$y_{t+3}^2$	$y_t y_{t+3}$
1	13.1	17.3	171.61	299.29	226.63
2	11.9	15.9	141.61	252.81	189.21
3	11.8	16.1	139.24	259.21	189.98
4	17.3	20.5	299.29	420.25	354.65
5	15.9	19.2	252.81	368.64	305.28
6	16.1	19.9	259.21	396.01	320.39
7	20.5	23.9	420.25	571.21	489.95
8	19.2	22.8	368.64	519.84	437.76
9	19.9	23.8	396.01	566.44	473.62
<b>Итого</b>	<b>145.7</b>	<b>179.4</b>	<b>2448.67</b>	<b>3653.7</b>	<b>2987.47</b>

$$r(3) = \frac{(12-3) \sum_{t=1}^9 y_t y_{t+3} - \sum_{t=1}^9 y_t \cdot \sum_{t=1}^9 y_{t+3}}{\sqrt{(12-3) \sum_{t=1}^9 y_t^2 - \left( \sum_{t=1}^9 y_t \right)^2} \cdot \sqrt{(12-3) \sum_{t=1}^9 y_{t+3}^2 - \left( \sum_{t=1}^9 y_{t+3} \right)^2}} =$$

$$= \frac{9 \cdot 2987.47 - 145.7 \cdot 179.4}{\sqrt{9 \cdot 2448.67 - 145.7^2} \cdot \sqrt{9 \cdot 3653.7 - 179.4^2}} \approx 0.995;$$

1.4. Рассчитаем коэффициент автокорреляции со смещением на 4 месяца. Для этого составим расчетную таблицу 12.

Таблица 12.

Месяц	$y_t$	$y_{t+4}$	$y_t^2$	$y_{t+4}^2$	$y_t y_{t+4}$
1	13.1	15.9	171.61	252.81	208.29
2	11.9	16.1	141.61	259.21	191.59
3	11.8	20.5	139.24	420.25	241.9
4	17.3	19.2	299.29	368.64	332.16
5	15.9	19.9	252.81	396.01	316.41
6	16.1	23.9	259.21	571.21	384.79
7	20.5	22.8	420.25	519.84	467.4
8	19.2	23.8	368.64	566.44	456.96
<b>Итого</b>	<b>125.8</b>	<b>162.1</b>	<b>2052.66</b>	<b>3354.41</b>	<b>2599.5</b>

$$r(4) = \frac{(12-4) \sum_{t=1}^8 y_t y_{t+4} - \sum_{t=1}^8 y_t \cdot \sum_{t=1}^8 y_{t+4}}{\sqrt{(12-4) \sum_{t=1}^8 y_t^2 - \left( \sum_{t=1}^8 y_t \right)^2} \cdot \sqrt{(12-4) \sum_{t=1}^8 y_{t+4}^2 - \left( \sum_{t=1}^8 y_{t+4} \right)^2}} =$$

$$= \frac{8 \cdot 2599.5 - 125.8 \cdot 162.1}{\sqrt{8 \cdot 2052.66 - 125.8^2} \cdot \sqrt{8 \cdot 3354.41 - 162.1^2}} \approx 0.700;$$

Проверим значимость всех коэффициентов автокорреляции.

Значимость коэффициентов автокорреляции принято проверять с помощью двух критериев: критерия стандартной ошибки и  $Q$  - критерия Бокса – Пирса.

Первый критерий используется для проверки значимости *отдельного* коэффициента автокорреляции. С его помощью удастся выявить среди запаздывающих переменных те, которые необходимо включить в модель. Второй критерий позволяет сделать вывод о значимости всего множества переменных, включаемых в модель.

Суть проверки по первому критерию сводится к построению доверительного интервала для каждого коэффициента автокорреляции по формуле:

$$-1,96 \frac{1}{\sqrt{n}} \leq r_k \leq 1,96 \frac{1}{\sqrt{n}},$$

где  $n$  - число пар наблюдений временного ряда.

Возможность построения такого интервала основана на том, что коэффициенты автокорреляции случайных данных обладают выборочным распределением, приближающимся к нормальному с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, равным  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Если рассчитанное значение

автокорреляции попадает в этот интервал, то можно сделать вывод, что данные **не показывают** наличие автокорреляции  $k$ -го порядка с 95% уровнем надежности.

Статистика для проверки по  $Q$  критерию рассчитывается по формуле

$$Q = n \sum_{i=1}^m r_i^2,$$

где  $n$  - объем выборочной совокупности (длина временного ряда);  $m$  - максимальный рассматриваемый лаг.

Статистика  $Q$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $m$  - степенями свободы и поэтому в случае, когда расчетное значение  $Q$  превосходит критическое значение  $\chi^2$  с соответствующими степенями свободы, то, **в целом, вся группа коэффициентов для лагов, не превосходящих  $m$** , считается значимой.

Проверим значимость всех коэффициентов автокорреляции исходного временного ряда с помощью критерия стандартной ошибки. Доверительный интервал для  $k$ -го коэффициента автокорреляции исходного временного ряда в соответствии с формулой

$$\frac{-1.96}{\sqrt{n}} \leq r_k \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

будет равен:

$$1) \text{ для } r(1) \quad \frac{-1.96}{\sqrt{11}} \leq r(1) \leq \frac{1.96}{\sqrt{11}} \quad \text{или}$$

$-0,591 \leq r(1) \leq 0,591$ , так как объем выборки в этом случае составляет  $n-1=12-1=11$  пар наблюдений;

$$2) \text{ для } r(2) \quad \frac{-1.96}{\sqrt{10}} \leq r(2) \leq \frac{1.96}{\sqrt{10}} \quad \text{или}$$

$-0,620 \leq r(2) \leq 0,620$ , так как объем выборки в этом случае составляет  $n-2=12-2=10$  пар наблюдений;

$$3) \text{ для } r(3) \quad \frac{-1.96}{\sqrt{9}} \leq r(3) \leq \frac{1.96}{\sqrt{9}} \text{ или}$$

$-0,653 \leq r(1) \leq 0,653$ , так как объем выборки в этом случае составляет  $n-3=12-3=9$  пар наблюдений;

$$4) \text{ для } r(4) \quad \frac{-1.96}{\sqrt{8}} \leq r(4) \leq \frac{1.96}{\sqrt{8}} \text{ или}$$

$-0,693 \leq r(1) \leq 0,693$ , так как объем выборки в этом случае составляет  $n-4=12-4=8$  пар наблюдений.

Рассчитанные значения коэффициентов автокорреляции исходного ряда составляют

$$r(1) = 0.825$$

$$r(2) = 0.772$$

$$r(3) = 0.995$$

$$r(4) = 0.700$$

и не попадают в соответствующие доверительные интервалы. Тогда делаем вывод, что данные наблюдений **показывают** наличие автокорреляции 1-ого, 2-ого, 3-его и 4-ого порядков.

Проверим **значимость всей группы коэффициентов** автокорреляции с помощью  $Q$ -критерия Бокса-Пирса.

Наблюдаемое значение  $Q$ -статистики равно

$$Q_H = n \sum_{i=1}^m r_i^2 = 12 \sum_{i=1}^4 r_i^2 = 12 \cdot (0.825^2 + 0.772^2 + 0.995^2 + 0.700^2) \approx 33.08$$

Для уровня значимости  $\alpha = 0.05$  и числа степеней свободы  $k = 4$  находим по таблице критических точек распределения  $\chi^2$  приложения 3

$$\chi_{кр}^2(\alpha = 0.05; k = 4) = 9.5.$$

Так как  $Q_H > \chi_{кр}^2$ , то в целом, вся группа коэффициентов для лагов, не превосходящих  $m = 4$ , считается **значимой**.

3. Построим коррелограмму для исходного временного ряда (рис.4).



Рис.4. График автокорреляционной функции  $r(k)$  (коррелограмма исходного временного ряда). График выполнен с применением табличного процессора **Excel**.

Знание автокорреляционной функции  $r(k)$  может оказать помощь при подборе и идентификации модели анализируемого временного ряда и статистической оценки его параметров.

По коэффициенту автокорреляции можно судить о наличии **линейной или близкой к линейной тенденции**. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную **нелинейную тенденцию**, например, параболу второго порядка или экспоненту, коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю. По знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях временного ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержат положительную автокорреляцию уровней, однако при этом они могут иметь убывающую тенденцию.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит **только тенденцию**. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка  $k$ , исследуемый ряд содержит **циклические (сезонные) колебания с периодичностью в  $k$  моментов времени**. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать предположение относительно структуры



этого ряда: *либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию*, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ.

Следует отметить, что интерпретация коррелограмм требует определенного навыка и не всегда легко осуществима.

Если при анализе временного ряда установлено, что ряд содержит сезонные или циклические колебания, то при моделировании сезонных колебаний применяют простейший подход – рассчитывают значения сезонной компоненты методом скользящей средней и строят аддитивную или мультипликативную модель временного ряда.

Общий вид аддитивной модели следующий:

$$Y=T+S+E.$$

Такая модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой  $T$ , сезонной  $S$  и случайной  $E$  компонент. Общий вид мультипликативной модели может быть представлен формулой

$$Y=T \times S \times E.$$

Данная модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой  $T$ , сезонной  $S$  и случайной  $E$  компонент. Выбор одной из двух моделей проводится на основе анализа структуры сезонных колебаний.

*Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, строят аддитивную модель временного ряда*, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов.

*Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда*, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений  $T$ ,  $S$  и  $E$  для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие пункты.

- 1) Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
- 2) Расчет значений сезонной компоненты  $S$ .
- 3) Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных  $(T+S)$  в аддитивной модели или  $(T \times S)$  в мультипликативной модели.

- 4) Аналитическое выравнивание уровней  $(T+S)$  или  $(T \times S)$  и расчет значений  $T$  с использованием полученного уравнения тренда.
- 5) Расчет полученных по модели значений  $(T+S)$  или  $(T \times S)$ .
- 6) Расчет абсолютных или относительных ошибок.

4. Проведем анализ исходного временного ряда по его коррелограмме, изображенной на рис. 4.

На рис.5 по графику наблюдаемых значений временного ряда **наглядно видно** наличие возрастающей тенденции. Поэтому во временном ряду **возможно** существование линейного тренда.

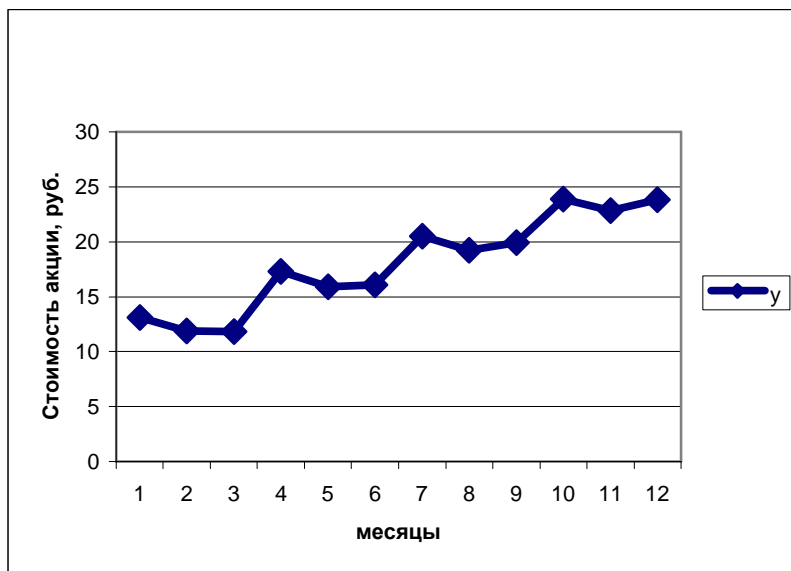


Рис.5. График наблюдаемых значений исходного временного ряда .

Высокие значения коэффициентов автокорреляции первого, второго и третьего порядков, а также значимость всей группы коэффициентов автокорреляции, свидетельствуют о том, что ряд **содержит линейную тенденцию**. Высокое значение коэффициента автокорреляции третьего порядка свидетельствует о том, что ряд **содержит циклические (сезонные) колебания с периодичностью в 3 месяца**.

**Поскольку амплитуда колебаний приблизительно постоянна, выбираем аддитивную модель временного ряда.**

Рассчитаем компоненты выбранной модели.

1). Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого: просуммируем уровни ряда последовательно за каждые 3 месяца со сдвигом на один месяц и, разделив полученные суммы на 3, найдем скользящие средние (гр.3 табл. 13);

2). Найдем оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и уровнями скользящей средней (гр.4 табл.13). Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты  $S$  (табл.14). Для этого найдем средние за каждый месяц (по всем кварталам) оценки сезонной компоненты  $S_i$ . В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимно погашаются. Для аддитивной модели это выражается в том, что сумма сезонной компоненты по всем месяцам должна быть равна нулю.

*Таблица 13.*

$t$ , месяцы	$y_t$ , стоимость акции, руб.	Простая 3-х членная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	13,1	-	-
2	11,9	12,267	-0,367
3	11,8	13,667	-1,867
4	17,3	15	2,3
5	15,9	16,433	-0,533
6	16,1	17,5	-1,4
7	20,5	18,6	1,9
8	19,2	19,867	-0,667
9	19,9	21	-1,1
10	23,9	22,2	1,7
11	22,8	23,5	-0,7
12	23,8	-	-

Таблица 14.

Показатель		Номер месяца, $i$		
		1	2	3
Квартал	1	-	-0,36667	-1,86667
	2	2,3	-0,53333	-1,4
	3	1,9	-0,66667	-1,1
	4	1,7	-0,7	-
Итого за $i$ -ый месяц (за весь год)		5,9	-2,26667	-4,36667
Средняя оценка сезонной компоненты для, $i$ –го месяца, $\bar{S}_i$		1,96667	-0,56667	-1,45556
Скорректированная сезонная компонента, $S_i$		1,98519	-0,54815	-1,43704

Для данной модели получаем:

$$1,96667 - 0,56667 - 1,45556 = -0,05556.$$

Корректирующий коэффициент определится по формуле:

$$f = \frac{\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3}{3} = -0,05556 / 3 = -0,01852.$$

Скорректированные значения сезонной компоненты определяются как разность между ее средней оценкой и корректирующим коэффициентом  $f$ :

$$S_i = \bar{S}_i - f, \quad i=1,2,3.$$

Проверяем условие равенства нулю суммы значений сезонной компоненты  $S_1 + S_2 + S_3 = 0$ :

$$1,98519 - 0,54815 - 1,43704 = 0.$$

Окончательно, для сезонной компоненты получены следующие значения:

$$\text{за 1 месяц } S_1 = 1,98519;$$

$$\text{за 2 месяц } S_2 = -0,54815;$$

за 3 месяца  $S_1 = -1,43704$ .

Полученные данные записываем в таблицу 15 для соответствующих месяцев года.

3) Элиминируем влияние сезонной компоненты, вычитая ее значение из каждого уровня исходного ряда:

$$T+E=Y-S \text{ (гр.4 табл. 15).}$$

Таблица 15.

$t$	$y_t$	$S_i$	$T+E=$ $= y_t - S_i$	$T$	$T+S$	$E = y_t -$ $-(T + S_i)$	$E^2$	$y_t - \bar{y}_t$	$(y_t - \bar{y}_t)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	13,1	1,985	11,115	11,186	13,171	-0,071	0,005	-4,917	24,174
2	11,9	-0,548	12,448	12,428	11,88	0,019	0	-6,117	37,414
3	11,8	-1,437	13,237	13,670	12,233	-0,433	0,035	-6,217	38,647
4	17,3	1,985	15,315	14,912	16,897	0,403	0,026	-0,717	0,514
5	15,9	-0,548	16,448	16,154	15,606	0,294	0,007	-2,117	4,48
6	16,1	-1,437	17,537	17,396	15,959	0,141	0	-1,917	3,673
7	20,5	1,985	18,515	18,638	20,623	-0,123	0	2,483	6,167
8	19,2	-0,548	19,748	19,88	19,331	-0,131	0	1,183	1,4
9	19,9	-1,437	21,337	21,121	19,684	0,216	0,002	1,883	3,547
10	23,9	1,985	21,915	22,363	24,348	-0,448	0,04	5,883	34,614
11	22,8	-0,548	23,348	23,605	23,057	-0,257	0,004	4,783	22,88
12	23,8	-1,437	25,237	24,847	23,41	0,39	0,152	5,783	33,447
Итого							0,274		210,957

4). Определим трендовую компоненту  $T$  данной модели. Проведем аналитическое выравнивание ряда  $(T+E)$  (гр.4 табл. 15) с помощью линейного тренда.

Для удобства переобозначим ряд  $(T+E)$  как  $W$ :

$$W=T+E.$$

Линейная модель тенденции временного ряда  $W$  имеет вид

$$\tilde{w}_t = a \cdot t + b.$$

Согласно методу наименьших квадратов параметры модели линейного тренда определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} nb + a \sum_{t=1}^n t = \sum_{t=1}^n w_t; \\ b \sum_{t=1}^n t + a \sum_{t=1}^n t^2 = \sum_{t=1}^n tw_t \end{cases}$$

Вычислим в таблице 13 необходимые суммы:

Таблица 16.

$t$	$w_t$	$t^2$	$tw_t$	$\tilde{w}_t$
1	11,115	1	11,115	11,18636
2	12,448	4	24,85647	12,42823
3	13,237	9	41,01032	13,67011
4	15,315	16	59,64793	14,91198
5	16,448	25	80,76928	16,15386
6	17,537	36	104,3744	17,39573
7	18,515	49	130,4632	18,6376
8	19,748	64	159,0358	19,87948
9	21,337	81	190,0922	21,12135
10	21,915	100	223,6323	22,36323
11	23,348	121	259,6561	23,6051
12	25,237	144	302,844	24,84697
Итого 78	216,5187	650	1587,497	

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 12b + 78a = 216,5187 \\ 78b + 650a = 1587,497; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1,241874; \\ b = 9,944485. \end{cases}$$

Линейная модель тенденции временного ряда имеет вид:

$$\tilde{w}_t = 1,241874 \cdot t + 9,944485.$$

Подставив в это уравнение значения  $t = 1, 2, 3, \dots, 12$ , получим выровненные уровни  $\tilde{w}_t$  для каждого момента времени (табл. 16) или, в старых обозначениях, уровни  $(T+E)$  (гр.5 табл.15).

5) Найдем значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого прибавляем к уровням  $T$  значения сезонной компоненты для соответствующих месяцев (гр.6 табл.15).

6) Расчет ошибки проводится по формуле

$$E=Y-(T+S).$$

Значения абсолютных ошибок приведены в гр.7 табл.15.

Для выбора лучшей модели можно использовать сумму квадратов абсолютных ошибок, которая в нашем случае равна **0,274** (см. гр.8 табл. 15).

Средний уровень исходного временного ряда легко посчитать по гр.2 табл.15. Он будет равен

$$\bar{y}_t = (13,1+11,9+11,8+\dots+23,8)/12=\mathbf{18,017}.$$

Рассчитаем отклонения уровней исходного ряда от его среднего для каждого месяца  $y_t - \bar{y}_t$  (гр.9 табл. 15).

Рассчитаем сумму квадратов отклонений уровней ряда от его среднего уровня  $\sum (y_t - \bar{y}_t)^2$  (гр.10 табл. 15), которая равна **210,957**.

По аналогии с моделью регрессии для оценки качества построенной модели составляем величину

$$1 - (0,274085 / 210,9567) = 0,9987 \text{ или } 99,87\%$$

Следовательно, можно утверждать, что аддитивная модель объясняет 99,87% общей вариации уровней временного ряда стоимости акции за последние 12 месяцев.

***Если при выборе модели сезонных колебаний была выбрана мультипликативная модель, то методика её построения состоит из следующих шагов (на примере модели с периодичностью в 3 месяца):***

1). Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого:

просуммируем уровни ряда последовательно за каждые 3 месяца со сдвигом на один месяц и, разделив полученные суммы на 3, найдем скользящие средние ;

2). Найдем оценки сезонной компоненты как **частное от деления** фактических уровней ряда на уровни скользящей средней. Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты  $S$ . Для этого найдем средние за каждый месяц (по всем кварталам) оценки сезонной компоненты  $S_t$ . В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимно

погашаются. Для мультипликативной модели это выражается в том, что сумма сезонной компоненты по всем месяцам должна быть **равна числу периодов в цикле, то есть 3**;

корректирующий коэффициент рассчитывается по формуле

$$f = \frac{3}{\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3}$$

Скорректированные значения сезонной компоненты определяются **как произведение** средней оценки на корректирующий коэффициент  $f$ :

$$S_i = \bar{S}_i \times f, \quad i=1,2,3.$$

Проверяется условие равенства **трех** суммы значений сезонной компоненты

$$S_1 + S_2 + S_2 = 3.$$

3). Делится каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты. При этом в таблицу заносится величина  $T\mathcal{E}=Y/S$ .

4). Определим трендовую компоненту  $T$  мультипликативной модели. Проведем аналитическое выравнивание ряда ( $T\mathcal{E}$ ) с помощью линейного тренда. Для удобства переобозначим ряд ( $T\mathcal{E}$ ) как  $W$ :

$$W=T\mathcal{E}.$$

Линейная модель тенденции временного ряда  $W$  имеет вид

$$\tilde{W}_t = a \cdot t + b.$$

Согласно методу наименьших квадратов параметры модели линейного тренда  $a$  и  $b$  определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} nb + a \sum_{t=1}^n t = \sum_{t=1}^n w_t; \\ b \sum_{t=1}^n t + a \sum_{t=1}^n t^2 = \sum_{t=1}^n t w_t \end{cases}$$

Подставив в уравнение  $\tilde{W}_t = a \cdot t + b$  значения  $t = 1, 2, 3, \dots, 12$ , получим выровненные уровни  $\tilde{W}_t$  для каждого момента времени или, в старых обозначениях, уровни ( $T\mathcal{E}$ ).

5) Найдём значения уровней ряда, полученные по мультипликативной модели. Для этого **умножим** уровни  $T$  на значения сезонной компоненты для соответствующих месяцев.



6) Расчет ошибки в мультипликативной модели проводится по формуле

$$E = Y / (T \times S).$$

Для сравнения мультипликативной модели с другими моделями временного ряда можно использовать сумму квадратов абсолютных ошибок. Абсолютные ошибки в мультипликативной модели определяются по формуле

$$E' = y_t - (T \cdot S).$$

Делается в таблице восьмой столбец для величины  $E'$  и девятый столбец для квадрата абсолютной ошибки  $(E')^2$ . Рассчитаем отклонения уровней исходного ряда от его среднего для каждого месяца  $y_t - \bar{y}_t$  (в десятом столбце таблицы).

Рассчитаем сумму квадратов отклонений уровней ряда от его среднего уровня  $\sum (y_t - \bar{y}_t)^2$  (в столбце 11 таблицы).

С помощью величины  $1 - \frac{(E')^2}{\sum (y_t - \bar{y}_t)^2}$  вычисляется доля объясненной дисперсии уровней ряда.

Таким образом, рассчитанная мультипликативная модель исходного временного ряда с сезонной составляющей

$$Y = T \times S \times E$$

представляется в таблице 17.

Таблица 17

$t$	$y$	$S$	$T \times E = Y/S$	$T$	$T \times S$	$E = y/(T \times S)$	$E' = y - (T \times S)$	$(E')^2$	$y - \bar{y}$	$(y - \bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

При выборе модели с сезонной компонентой можно также применить **модель регрессии с включением фактора времени и фиктивных переменных**. Подробная методика построения этой модели приведена в литературе [2].