

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Информационная безопасность»

М.А. Басараб, Н.С. Коннова

Методы оптимизации

*Методические указания к лабораторным работам по дисциплине
«Методы оптимизации»
для студентов направлений «Информационная безопасность»,
«Информационная безопасность автоматизированных систем»*

Москва

(С) 2019 МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА

УДК 519.8 (075.8)

ББК 22.18

Рецензенты:

Басараб М.А., Коннова Н.С.

Методы оптимизации. М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2019. 92 с.

Методические указания являются руководством для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации». Они охватывают различные разделы ...

Методические указания предназначены для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана, обучающихся по специальностям «Информационная безопасность» (100401 - магистратура), «Информационная безопасность автоматизированных систем» (090303 - специалитет) и «Компьютерная безопасность» (0903010065 - специалитет). Пособие может быть также полезно студентам и аспирантам других специальностей, интересующимся современными методами поиска и оптимизации.

Рекомендовано НМС МГТУ им. Н.Э. Баумана

Басараб Михаил Алексеевич

Коннова Наталья Сергеевна

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

© 2019 МГТУ имени Н.Э. Баумана

Оглавление

Введение	4
Лабораторная работа № 1	6
Исследование методов прямого поиска экстремума униmodalьной функции одного переменного	6
Лабораторная работа № 2	21
Исследование метода случайного поиска экстремума функции одного переменного	21
Лабораторная работа № 3	28
Исследование алгоритма имитации отжига	28
Лабораторная работа № 4	45
Исследование генетических алгоритмов в задачах поиска экстремумов	45
Лабораторная работа № 5	53
Решение задачи многокритериальной оптимизации	53
Лабораторная работа № 6	74
Исследование стохастической фильтрации сигналов как задачи двухкритериальной оптимизации с использованием методов прямого пассивного поиска	74
Лабораторная работа № 7	83
Построение сетевого графа работ и его анализ методом критического пути (СРМ)	83

Введение

При решении производственных, управленческих, организационно-технических и др. задач в области информационной безопасности часто приходится иметь дело с проблемой выбора одного варианта (оптимального или квазиоптимального) среди множества альтернативных решений.

В силу значительного многообразия условий решаемых практических задач, в данном пособии предлагается ознакомиться с различными подходами, методами и алгоритмами к их решению на примерах простых математических задач, которые в дальнейшем смогут помочь и при решении реальных проблем в области информационной безопасности.

Лабораторный практикум включает в себя работы по поиску экстремумов унимодальных и мультимодальных функций одной переменной (пассивный поиск, последовательный поиск, случайный поиск, метод прямого отжига и др.), оптимизации функций нескольких переменных (генетические и эволюционные алгоритмы), многокритериальной оптимизации (методы главного критерия, линейной свертки, сужения множества Парето, анализа иерархий и др.), оптимизации при управлении проектами (метод критического пути) и т.д.

При выполнении лабораторных работ целесообразно воспользоваться либо готовыми программными пакетами математического моделирования Matlab, MathCAD и др., электронными таблицами (MS Excel) либо собственными программами, написанными на языке программирования высокого уровня (C++, C#, Python и др.). В последнем случае программа может реализовать не полное решение задачи, а какие-либо вспомогательные и наиболее рутинные шаги всей процедуры.

При подготовке отчета по каждой лабораторной работе необходимо последовательно и полно представить все основные шаги метода (алгоритма) с выводом промежуточных результатов и необходимыми комментариями, демонстрирующими понимание сути процедуры. Студент должен быть знаком с такими понятиями, как вычислительная сложность и погрешность метода, уметь провести качественный и количественный анализ получаемых результатов, быть способным лаконично ответить на предложенные ему контрольные вопросы.

Методические указания содержат достаточный теоретический материал для выполнения каждой лабораторной работы. Вместе с тем, для более глубокого понимания методов и алгоритмов следует использовать дополнительные источники, в том числе указанные в списке литературы.

Данные лабораторные работы являются частью программы дисциплины «Методы оптимизации», посвященной изучению методов и алгоритмов поиска и оптимизации. Они

были разработаны на основе практических и лабораторных занятий, которые проводились с 2015 г. на кафедрах «Информационная безопасность» и «Теоретическая информатика и компьютерные технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие предназначено для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана, обучающихся по специальностям «Информационная безопасность» (100401 – магистратура, 1 курс), «Информационная безопасность автоматизированных систем» (090303 – специалитет, 2 курс), «Компьютерная безопасность» (0903010065 – специалитет, 2 курс), изучающих предмет «Методы оптимизации».

В результате изучения дисциплины студенты будут знать:

- основные понятия и концепции теории оптимизации;
- классификации и условия применения различных методов оптимизации;
- методы поиска экстремумов функций одного и многих переменных;
- инженерные методы решения задач многокритериальной оптимизации и детали их применения на практике;
- особенности и преимущества вычислительных систем, основанных на оптимизационных технологиях.

Лабораторная работа № 1

Исследование методов прямого поиска экстремума униmodalьной функции одного переменного

Цель работы

Исследовать функционирование и провести сравнительный анализ различных алгоритмов прямого поиска экстремума (пассивный поиск, метод дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи) на примере униmodalьной функции одного переменного.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

На интервале $[a, b]$ задана униmodalьная функция одного переменного $f(x)$. Используя методы *последовательного поиска* (см. пп. 2.3-2.5 в [1]) (дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи), найти интервал нахождения минимума $f(x)$ при заданной наибольшей допустимой длине интервала неопределенности $\varepsilon = 0,1$. Провести сравнение с методом *оптимального пассивного поиска* (п. 2.2 в [1]). Результат, в зависимости от числа точек разбиения N , представить в виде таблицы.

Сведения из теории [1]

Пусть требуется путем *пассивного поиска* найти точку $x^* \in [0, 1]$, в которой *униmodalьная* на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения $f^* = f(x^*)$. *Минимаксный метод поиска*, в котором информация о значениях функции, вычисленных в предшествующих точках, не может быть использована, называют **ОПТИМАЛЬНЫМ ПАССИВНЫМ ПОИСКОМ**. Рассмотрим алгоритм такого поиска при различном числе N точек, выбираемых на отрезке $[0, 1]$. Сразу заметим, что рассуждения аппроксимируются на любой интервал $[a, b]$ путем сдвига на a и растяжения в $(b-a)$ раз: $[0, 1]^* (b-a) + a \rightarrow [a, b]$.

Если $N=1$, то единственную точку целесообразно выбрать в середине отрезка, т.е. принять $x_1=1/2$ (рис 1.1). В этом случае в следствие униmodalьности функции $f(x)$ имеем $f^* \leq f(1/2)$. Поэтому наименьшая возможная длина *интервала неопределенности* равна $l_1^* = 1$ и можно гарантировать, что выбор в качестве точки $x^* \in [0, 1]$ точки $x_1 = 1/2$ приведет к погрешности не более $\Delta_1^* = l_1^*/2 = 1/2$. При любом ином положении точки x_1 погрешность

при выборе $x_* = x_1$ будет $\Delta_1 > \Delta_1^*$, так как в действительности точка x_* может лежать на большей части отрезка $[0, 1]$.

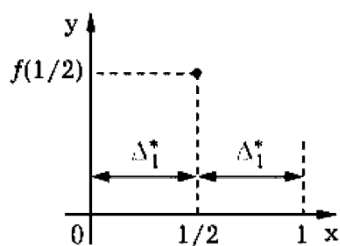


Рис. 1.1. Случай $N=1$.

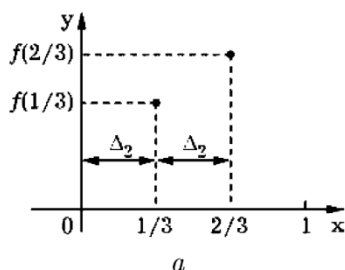
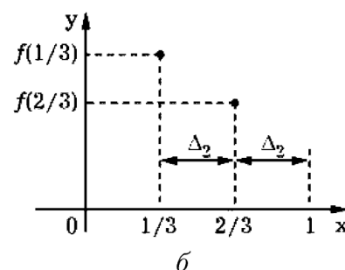


Рис. 1.2. Случай $N=2$.



Если при $N = 2$ (рис 1.2) две точки расположить на отрезке $[0, 1]$ так, чтобы они делили его на равные части, т.е. выбрать $x_1=1/3$ и $x_2 = 2/3$, то точка $x_* \in [0, 1]$ будет найдена с точностью $\Delta_2^* = 1/3$, а наименьшая длина интервала неопределенности составит $l_2^* = 2\Delta_2^* = 2/3$. В самом деле, если $f(1/3) < f(2/3)$ (рис. 1.2,а), то в силу унимодальности функции $f(x)$ отрезок $[2/3, 1]$ можно исключить и считать, что $x_* \in [0, 2/3]$. Тогда при выборе $x_* = 1/3$ наибольшая погрешность равна $\Delta_2 = 1/3$ и $f_* \approx f(1/3)$. Если же окажется, что $f(1/3) > f(2/3)$ (рис. 1.2, б), то можно исключить отрезок $[0, 1/3]$ и считать, что $x_* \in [1/3, 1]$. И в этом случае выбор $x_* = 2/3$ приведет к погрешности не более $\Delta_2 = 1/3$, а $f_* \approx f(2/3)$. Заметим, что при $f(1/3) = f(2/3)$ можно исключить любой из указанных отрезков, гарантируя ту же точность нахождения точки $x_* \in [0, 1]$. При ином делении отрезка $[0, 1]$ на части двумя точками длина какой-то из его частей будет больше $1/3$ и в действительности точка x_* может принадлежать именно этой части, так что получим погрешность $\Delta_2 > \Delta_2^* = 1/3$.

Рассуждая аналогично, можно заключить, что при $N = 3$ нужно будет также выбирать точки равномерно на отрезке $[0, 1]$: $x_1 = 1/4$, $x_2 = 2/4$, $x_3 = 3/4$, обеспечив точность $\Delta_3^* = 1/4$ нахождения точки $x_* \in [0, 1]$ и наименьшую длину $l_3^* = 1/2$ интервала неопределенности. В случае произвольного $N \in \mathbb{N}$ по тем же соображениям надо выбирать точки

$$x_k = \frac{k}{N+1} \in [0, 1], \quad k = \overline{1, N}, \quad (1)$$

Обеспечивая точность $\Delta_N^* = 1/(N+1)$ нахождения точки x_* и наименьшую возможную длину интервала неопределенности.

$$l_N^* = \frac{2}{N+1} \quad (2)$$

Таким образом, оптимальный пассивный поиск состоит в выборе точек, равномерно расположенных на отрезке. При этом (2) дает оценку скорости сходимости пассивного поиска с ростом числа N точек, так как скорость сходимости любого метода прямого поиска можно характеризовать скоростью уменьшения интервала неопределенности с возрастанием N .

Рассуждения, приведенные выше, попутно обосновывают **процедуру исключения отрезка**, которую во всех методах прямого поиска точки минимума унимодальной функции одного переменного. Эта процедура состоит в следующем. Пусть на отрезке $[a, b]$ числовой прямой расположены две точки c и d , $a < c < d < b$, и известны (или вычислены) значения $f(c)$ и $f(d)$ унимодальной на $[a, b]$ функции $f(x)$. Если $f(c) < f(d)$ (рис. 1.3, а), то в силу унимодальности функции $f(x)$ имеем $x_* \in [a, d]$, а отрезок $[a, b]$ можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Наоборот, если $f(c) \geq f(d)$ (рис. 1.3, б), то $x_* \in [c, b]$, а отрезок $[a, c]$ далее можно не рассматривать.

Таким образом, в результате применения процедуры исключения отрезка получаем новый отрезок, вложенный в рассматриваемый и заведомо содержащий точку x_* . В методах пассивного поиска применение этой процедуры позволяет оценить наибольшую возможную погрешность нахождения точки x_* . Все рассмотренные далее методы *последовательного поиска* используют процедуру исключения отрезка для выбора нового отрезка на каждом очередном *шаге* такого поиска.

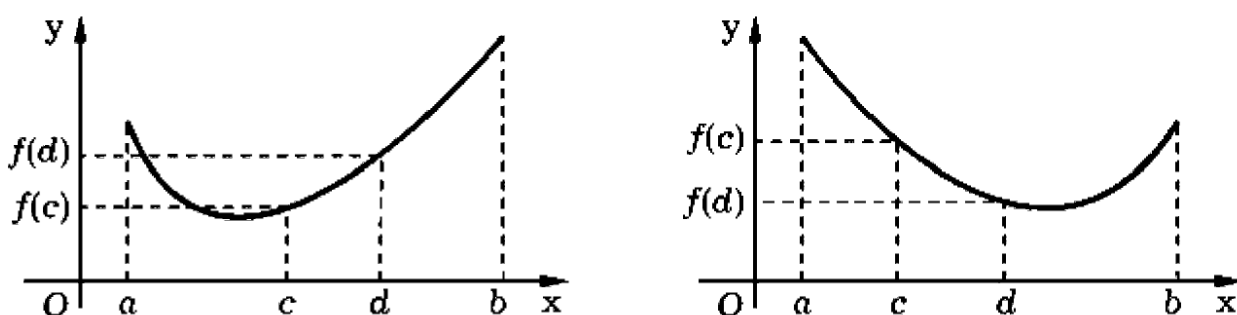


Рис. 1.3. Исключение отрезка.

Методы последовательного поиска

Метод дихотомии. Рассмотрим *последовательный поиск* точки $x_* \in [0, 1]$, в которой *унимодальная* на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения $f_* = f(x_*)$. Метод прямого поиска, основанный на делении пополам отрезка, на котором находится точка x_* , называют *методом дихотомии*.

Пусть известно, что на k -м шаге последовательного поиска $x_* \in [a_k, b_k] \subset [0, 1]$ (на первом шаге при $k = 1$ имеем $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$). На отрезке $[a_k, b_k]$ длиной l_k выберем две точки $x_{k1} = \frac{(a_k+b_k)}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{(a_k+b_k)}{2} + \delta$ (рис. 1), где $\delta > 0$ – некоторое достаточно мало число. Вычислим значения $f(x_{k1})$ и $f(x_{k2})$ функции $f(x)$ в этих точках и выполним процедуру исключения отрезка. В результате получим новый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$. Если длина l_{k+1} нового отрезка больше заданной наибольшей допустимой длины ε_* интервала неопределенности, то алгоритм метода дихотомии переходит к $(k + 1)$ -му шагу, повторяя все описанные для k -го шага действия. Если же $l_{k+1} \leq \varepsilon_*$, то вычисления прекращают и полагают $x_* = \frac{(a_{k+1}+b_{k+1})}{2}$.

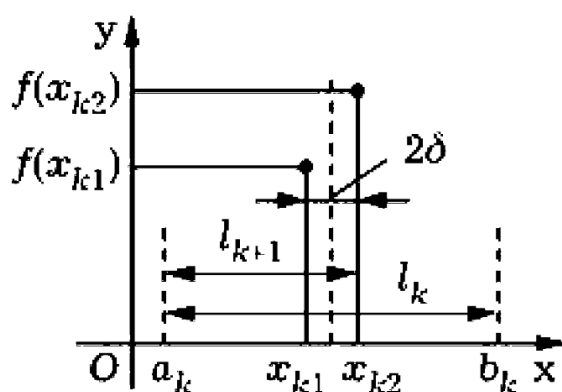


Рис. 1.4. Итерация метода дихотомии.

Так как $l_{k+1} = l_k/2 + \delta$, или $l_{k+1} - 2\delta = (l_k - 2\delta)/2$, то

$$l_k - 2\delta = \frac{l_1 - 2\delta}{2^{k-1}}$$

Из этого равенства выводим следующую формулу длины l_k отрезка $[a_k, b_k]$, получаемого на k -м шаге метода дихотомии:

$$l_k = \frac{l_1 - 2\delta}{2^{k-1}} + 2\delta \quad (3)$$

Из (3) следует, что $l_k \rightarrow 2\delta$ при $k \rightarrow \infty$, но при этом $l_k \rightarrow 2\delta$. Поэтому выполнение неравенства $l_{k+1} < \varepsilon_*$, означающее достижение заданной точности нахождения точки x_* , возможно лишь при условии выбора $2\delta < \varepsilon_*$. Кроме того, нужно учитывать неизбежную погрешность, возникающую при вычислении приближенных значений $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$. Это приводит к дополнительной погрешности Δ_* при нахождении точки x_* . Поэтому выбор значения δ ограничен и снизу, т.е. $\Delta_* < 2\delta < \varepsilon_*$. Если эти неравенства нарушаются,

то знак разности $\tilde{f}(x_{k1}) - \tilde{f}(x_{k2})$ может не совпадать со знаком разности $f(x_{k1}) - f(x_{k2})$, что приводит к ошибочному выполнению процедуры исключения отрезка.

Итак, метод дихотомии – это последовательное построение на каждом k -м шаге поиска точек $x_{k1} = \frac{(a_k+b_k)}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{(a_k+b_k)}{2} + \delta$, симметричных относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$ длины l_k . После выполнения k -го шага будет выделен отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ длины l_{k+1} и вычислено $N = 2k$ значений функции. Используя формулу (3) для длины отрезка (*интервала неопределенности*) и полагая $l_1 = 1$, получаем

$$l_N^d = l_{k+1} = \frac{1 - 2\delta}{2^{k+1}} + 2\delta = \frac{1 - 2\delta}{2^{N/2}} + 2\delta. \quad (4)$$

Сравнивая (4) с $l_N^* = \frac{2}{N+1}$, видим, что скорость сходимости метода дихотомии значительно выше скорости сходимости *оптимального пассивного поиска*.

Отметим, что после исключения отрезка на k -м шаге описанного алгоритма точки x_{k1} и x_{k2} принадлежат новому отрезку $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, причем одна из них является внутренней для этого отрезка. Но вычисленное в этой точке значение функции $f(x)$ в методе дихотомии не используют для исключения отрезка на следующем шаге, а проводят вычисления в двух новых точках. Существуют методы последовательного поиска, в которых на каждом k -м шаге начиная с $k = 2$ вычисляют лишь одно новое значение функции в точке, принадлежащей отрезку $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Это значение вместе с уже вычисленным на предыдущем шаге значением функции во внутренней точке отрезка $[a_k, b_k]$ используют при выполнении процедуры исключения отрезка на следующем шаге последовательного поиска. О них – ниже.

Метод золотого сечения. Как известно, *золотым сечением отрезка* называют такое его деление на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей.

Рассмотрим k -й шаг последовательного поиска. Чтобы выполнить процедуру исключения отрезка на этом шаге, отрезок $[a_k, b_k]$ необходимо двумя внутренними точками $x_{k1}, x_{k2}, x_{k1} < x_{k2}$, разделить на три части. Эти точки выберем симметрично относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$ (рис. 1.5) и так, чтобы каждая из них производила золотое сечение отрезка $[a_k, b_k]$. В этом случае отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ внутри будет содержать одну из точек x_{k1}, x_{k2} (другая будет одним из концов отрезка), причем эта точка будет производить золотое сечение отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Это вытекает из равенства длин отрезков $[a_k, x_{k1}]$ и $[x_{k2}, b_k]$. Таким образом, на $(k + 1)$ -м шаге в одной из точек $x_{k+1,1}, x_{k+1,2}$ значение

функции вычислять не нужно. При этом отношение l_k / l_{k+1} длин отрезков сохраняется от шага к шагу, т.е.

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \frac{l_{k+1}}{l_{k+2}} = \tau = \text{const.} \quad (5)$$

Число τ называют *отношением золотого сечения*.

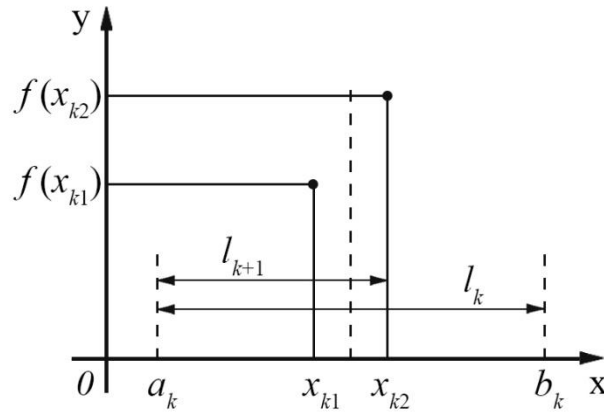


Рис. 1.5. Выбор точек в методе золотого сечения.

Последовательный поиск, в котором на k -м шаге каждая из симметрично выбранных на отрезке $[a_k, b_k]$ точек x_{k1}, x_{k2} осуществляет золотое сечение этого отрезка, называют *методом золотого сечения*. В этом методе каждое исключение отрезка уменьшает отрезок в τ раз. Выясним, чему равно отношение золотого сечения. Так как точки x_{k1} и x_{k2} , $x_{k1} < x_{k2}$, выбраны симметрично относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$, то

$$b_k - x_{k2} = x_{k1} - a_k = l_k - l_{k+1}.$$

(см. рис. 1.5). Для определенности будем считать, что на k -м шаге выбран отрезок $[a_k, x_{k2}]$. Тогда на $(k + 1)$ -м шаге одной из точек деления (а именно правой) будет точка x_{k1} . Значит, длина l_{k+2} отрезка, выбираемого на $(k + 1)$ -м шаге, совпадает с длиной отрезка $[a, x_{k1}]$ и верно равенство $l_{k+2} = l_k - l_{k+1}$. Подставляя найденное выражение для l_{k+2} в уравнение (5), получаем

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \frac{l_{k+1}}{l_k - l_{k+1}},$$

или $\tau = 1 / (\tau - 1)$. Преобразуя это соотношение, приходим к квадратному уравнению $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, имеющему единственное положительное решение $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$.

Предположим, что отрезком минимизации унимодальной функции $f(x)$ является $[0, 1]$, т.е. $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ и $l_1 = 1$. На первом шаге последовательного поиска ($k = 1$) на отрезке $[0, 1]$ выбираем две точки $x_{11} = a_1 + (1 - 1/\tau)b_1 = 1 - 1/\tau$ и $x_{12} = a_1 + b_1/\tau = 1/\tau$, осуществляющие золотое сечение отрезка $[0, 1]$. Вычисляем значения минимизируемой

функции в этих точках и выполняем процедуру исключения отрезка. Если $f(x_{11}) < f(x_{12})$, то выбираем отрезок $[a_1, x_{12}]$, т.е. полагаем $a_2 = a_1 = 0$, $b_2 = x_{12}$; в противном случае выбираем отрезок $[x_{11}, b_1]$, т.е. полагаем $a_2 = x_{11}$, $b_2 = b_1 = 1$. Кроме того, в первом случае принимаем $\tilde{x}_2 = x_{11}$, а во втором случае $\tilde{x}_2 = x_{12}$. Точка \tilde{x}_2 – одна из точек, осуществляющих золотое сечение отрезка $[a_2, b_2]$, меньшая в первом случае и большая во втором. Если длина вновь полученного отрезка больше заданной допустимой длины ε_* интервала неопределенности, то следует перейти ко второму шагу алгоритма, на котором одна из точек x_{21}, x_{22} есть точка \tilde{x}_2 , а вторую можно найти, например, по формуле $a_2 + b_2 - \tilde{x}_2$. На втором шаге алгоритма вычисляем лишь одно значение функции в точке, симметричной \tilde{x}_2 относительно середины отрезка $[a_2, b_2]$. Если же длина l_2 отрезка $[a_2, b_2]$, полученного после первого шага алгоритма, оказалась меньше ε_* , то поиск прекращают и полагают $x_* \approx (a_k + b_k)/2$.

Пусть на k -м шаге, $k \geq 2$, последовательного поиска по методу золотого сечения выбран отрезок $[a_k, b_k]$ и в нем точка \tilde{x}_k , осуществляющая золотое сечение этого отрезка. Значение $f(\tilde{x}_k)$ функции в этой точке уже вычислено на предыдущем шаге. Находим вторую точку \hat{x}_k золотого сечения по формуле

$$\hat{x}_k = a_k + b_k - \tilde{x}_k$$

и вычисляем в ней значение функции. Если $\hat{x}_k < \tilde{x}_k$, то $x_{k1} = \hat{x}_k$ и $x_{k2} = \tilde{x}_k$, иначе $x_{k1} = \tilde{x}_k$ и $x_{k2} = \hat{x}_k$. Пусть для определенности $\hat{x}_k < \tilde{x}_k$ (см. рис. 1.4) и $x_{k1} = \hat{x}_k$, $x_{k2} = \tilde{x}_k$. Если $f(x_{k1}) < f(x_{k2})$, то выбираем отрезок $[a_k, x_{k2}]$, т.е. полагаем $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{k2}$, $\tilde{x}_{k+1} = x_{k1}$, иначе выбираем отрезок $[x_{k1}, b_k]$, т.е. полагаем $a_{k+1} = x_{k1}$, $b_{k+1} = b_k$, $\tilde{x}_{k+1} = x_{k2}$. Длину l_{k+1} нового отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ сравниваем с ε_* и принимаем решение, продолжать поиск (при $l_{k+1} \geq \varepsilon_*$) или нет (при $l_{k+1} < \varepsilon_*$). В случае прекращения поиска, полагаем $x_* \approx (a_k + b_k)/2$.

Согласно описанию алгоритма, на первом шаге значение функции вычисляют в двух точках, а на каждом из последующих шагов вычисляют лишь одно значение функции. Поэтому после k шагов алгоритма значение функции будет вычислено в $N = k + 1$ точках. Поскольку после каждого шага интервал неопределенности уменьшается в τ раз, то для длины l_{k+1} отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ получаем $l_{k+1} = l_1 / \tau^k = 1 / \tau^k$, а зависимость l_N^Z длины интервала неопределенности от количества N вычисленных значений функции выражается формулой

$$l_N^Z = l_{k+1} = \frac{1}{\tau^k} = \frac{1}{\tau^{N-1}}. \quad (6)$$

Алгоритмы методов золотого сечения и дихотомии аналогичны. Различие состоит лишь в том, что в методе дихотомии расстояние 2δ между точками x_{k1}, x_{k2} отрезка $[a_k, b_k]$

на каждом k -м шаге остается неизменным, а в методе золотого сечения оно зависит от номера шага поиска и уменьшается с уменьшением длины l_k отрезка по мере возрастания номера шага. Действительно, в методе золотого сечения на k -м шаге поиска внутренними точками отрезка $[a_k, b_k]$ будут $x_{k1} = a_k + (1 - 1/\tau)l_k$ и $x_{k2} = a_k + l_k/\tau$, а расстояние между ними равно $x_{k2} - x_{k1} = (2/\tau - 1)l_k = (\sqrt{5} - 2)l_k \approx 0,236068 l_k$.

Метод Фибоначчи. Пусть при поиске точки $x_* \in [0, 1]$, в которой унимодальная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее на этом отрезке значение, можно вычислить ее значения только в двух точках. Тогда предпочтение следует отдать методу дихотомии при $\delta \ll 1$, так как он позволит уменьшить интервал неопределенности почти вдвое, а метод золотого сечения – лишь в $\tau \approx 1,618$ раз. Сравнение (6) и (4) показывает, что при количестве вычисляемых значений функции $N \geq 4$ эффективность метода золотого сечения становится выше, чем метода дихотомии.

Однако при любом заданном общем числе $N > 2$ вычисляемых значений функции можно построить еще более эффективный метод, состоящий из $N - 1$ шагов. Он сочетает преимущество симметричного расположения внутренних точек x_{k1}, x_{k2} на отрезке $[a_k, b_k]$ относительно его середины, реализованное в методах дихотомии и золотого сечения, с возможностью на каждом шаге изменять отношение l_k / l_{k+1} длин сокращаемого и нового отрезков. Как показано при обсуждении метода золотого сечения, в случае выбора внутренних точек симметрично относительно середины отрезка для трех последовательных шагов этого метода выполняется соотношение

$$l_{k-i} = l_k + l_{k+i}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (7)$$

Построение алгоритма такого метода удобнее начать с последнего шага, но предварительно уточним задачу. Располагая возможностью вычислить в N точках $x_k \in [0, 1]$, $k = \overline{1, N}$, значения унимодальной на отрезке функции $f(x)$, необходимо как можно точнее, т.е. с наименее возможной длиной интервала неопределенности, отыскать точку x^* наименьшего значения этой функции на отрезке $[0, 1]$.

При выполнении процедуры исключения отрезка на последнем, $(N - 1)$ -м шаге имеем отрезок $[a_{N-1}, b_{N-1}]$ длины l_{N-1} с двумя внутренними точками x_{N-1} и x_N , симметрично расположенными относительно середины отрезка на достаточно малом расстоянии 2δ друг от друга (рис. 1.6). В этих точках вычислены значения $f(x_{N-1})$ и $f(x_N)$ функции $f(x)$. Пусть для определенности $f(x_N) < f(x_{N-1})$, тогда для нового отрезка $[a_N, b_N]$ длины $l_N = l_{N-1} / 2 + \delta$ внутренней будет точка x_N , а точка x_{N-1} совпадет с одним из его концов.

В такой ситуации при выборе $x_* = x_N$ длина интервала неопределенности равна пока неизвестной длине l_N отрезка $[a_N, b_N]$. Через l_N можно выразить длину $l_{N-1} = 2l_N - 2\delta$ отрезка $[a_{N-1}, b_{N-1}]$. Далее в соответствии с (7) получаем

$$\begin{aligned} l_{N-2} &= l_{N-1} + l_N = 3l_N - 2\delta, & l_{N-3} &= l_{N-2} + l_{N-1} = 5l_N - 4\delta, \\ l_{N-4} &= l_{N-3} + l_{N-2} = 8l_N - 6\delta, & l_{N-5} &= l_{N-4} + l_{N-3} = 13l_N - 10\delta, \end{aligned}$$

и в общем виде

$$l_{N-K} = F_{K+2}l_N - 2F_K\delta, \quad K = \overline{0, N-1}, \quad (8)$$

где коэффициенты F_m определены рекуррентным соотношением

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \quad m = \overline{3, N-1}, \quad F_1 = F_2 = 1. \quad (9)$$

Так как при $K = N - 1$ длина $l_{N-K} = l_1 = 1$ отрезка $[0, 1]$ известна, то из (8) можно найти длину интервала неопределенности

$$l_N^f = \frac{l_1}{F_{N+1}} + 2\delta \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} \quad (10)$$

Существует алгоритм метода прямого поиска, удовлетворяющий соотношению (10).

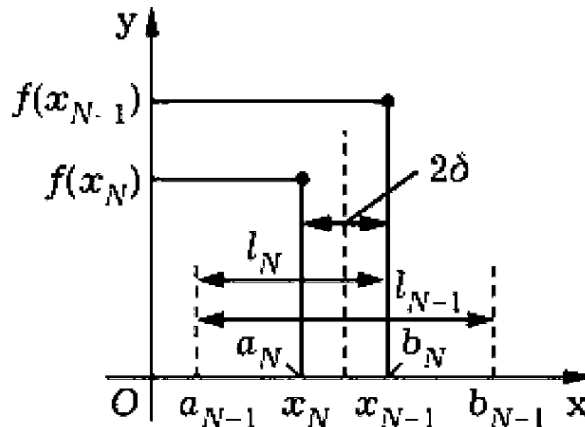


Рис. 1.6. Последний шаг метода Фибоначчи.

Все коэффициенты F_m принадлежат множеству N натуральных чисел, их называют *числами Фибоначчи* (см. табл. 1.1). Метод, использующий числа Фибоначчи для выбора длин отрезков l_k , а значит, и точек $x_k \in [0, 1], k = \overline{1, N}$, в которых вычисляют значения минимизируемой функции, называют *методом Фибоначчи* (иногда – оптимальным последовательным поиском). Если на первом шаге поиска ($k = 1, K = N - 1$) интервал

неопределённости имеет длину l_1 , то в соответствии с (8) и (10) длина l_2 нового отрезка $[a_2, b_2]$ равна $l_2 = F_N l_N - 2\delta F_{N-2} = \frac{F_N}{F_{N+1}} l_1 + 2\delta \frac{F_N F_{N-1} - F_N F_{N-2}}{F_{N+1}} = \frac{F_N}{F_{N+1}} l_1 + (-1)^{N+1} \frac{2\delta}{F_{N+1}}$.

Табл. 1.1. Первые 25 чисел Фибоначчи.

m	F_m	m	F_m	m	F_m	m	F_m	m	F_m
1	1	6	8	11	89	16	987	21	10946
2	1	7	13	12	144	17	1597	22	17711
3	2	8	21	13	233	18	2584	23	28657
4	3	9	34	14	377	19	4181	24	46368
5	5	10	55	15	610	20	6765	25	75025

Опишем алгоритм метода, пренебрегая малой величиной δ , т.е. принимая $\frac{l_1}{l_2} = \frac{F_{N+1}}{F_N}$.

Несложно проверить, что в этом случае выполнение процедуры исключения отрезка на последнем, $(N - 1)$ -м шаге поиска приводит к совпадению внутренних точек x_{N-1} и x_N (см. рис. 1.6).

Отметим, что уже при $N = 11$ имеем $F_{12}/F_{11} = 144/89 \approx 1,617978$, а при $N = 21$ получаем $F_{22}/F_{21} = 17711/10946 \approx 1,618034$, что совпадает с отношением τ золотого сечения с точностью 10^{-6} . Таким образом, на первом шаге длина исходного отрезка уменьшается практически так же, как и в методе золотого сечения.

При $l_1 = 1$ из находим $l_2 = F_N/F_{N+1}$. Таким образом, учитывая (9), заключаем, что на первом шаге выбора точек, симметричных относительно середины отрезка $[0, 1]$, можно определить по формулам

$$x_1 = l_2 = \frac{F_N}{F_{N+1}}, \quad x_2 = 1 - l_2 = 1 - \frac{F_N}{F_{N+1}} = \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}}, \quad x_2 < x_1,$$

причём расстояние между ними будет равно

$$d_1 = x_1 - x_2 = \frac{F_N}{F_{N+1}} - \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = \frac{F_{N-2}}{F_{N+1}}.$$

После выполнения на этом шаге процедуры исключения отрезка одна из точек x_1, x_2 будет граничной точкой нового отрезка $[a_2, a_1]$, а другая – его внутренней точкой, которую обозначим x'_2 . Вторая внутренняя точка на этом отрезке должна быть выбрана симметрично точке x'_2 относительно его середины. Аналогично происходит выбор второй внутренней точки нового отрезка на всех последующих шагах поиска.

На k -м шаге в соответствии с равенством (8), в котором следует положить $K = N - k$, и равенством (10) длина отрезка $[a_k, b_k]$ равна $l_k = F_{N+2-k}/F_{N+1}$ и происходит её уменьшение в $l_k/l_{k+1} = F_{N+2-k}/F_{N+1-k}$ раз. Если внутренние точки на этом отрезке обозначить α_k и β_k , то получим

$$\alpha_k = \alpha_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1}}, \quad \beta_k = \alpha_k + \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+1}}, \quad \alpha_k < \beta_k, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Подчеркнём, что реализация метода Фибоначчи предполагает априорное задание требуемого количества N вычисляемых значений функции (или количества шагов поиска). Этот параметр необходим для реализации первого шага алгоритма при выборе точек x_{11} и x_{12} деления отрезка $[a_1, b_1]$. Если параметр N по каким-либо причинам не может быть задан заранее, следует использовать другие методы, например, дихотомии или золотого сечения.

Практическая часть

Пример выполнения работы

На интервале $[1, 4]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x) = -\sqrt{x} * \sin x + 2$ (см. рис. 1.7). Используя метод дихотомии, найти интервал нахождения минимума $f(x)$ при заданной наибольшей допустимой длине интервала неопределённости $\varepsilon = 0,1$. Провести сравнение с методом оптимального пассивного поиска.

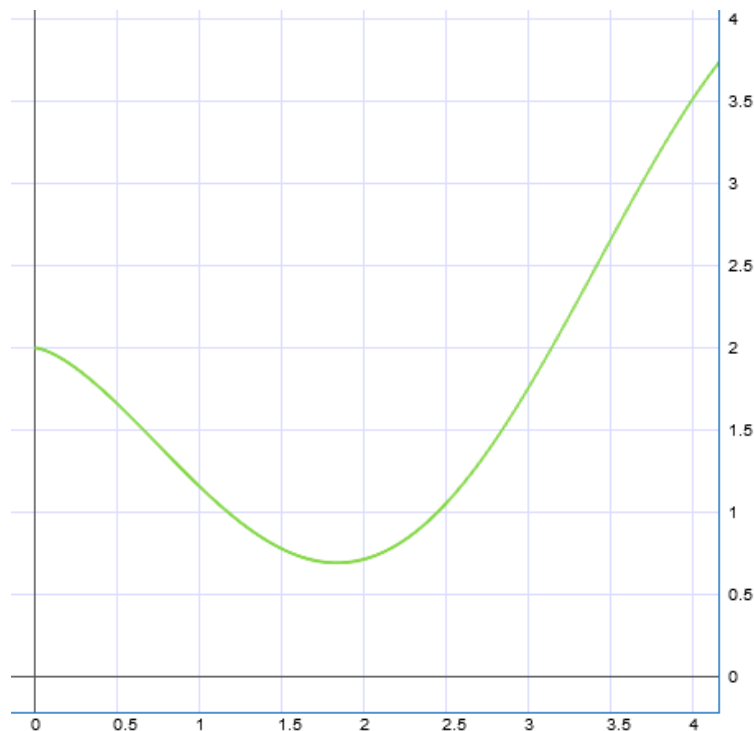


Рис. 1.7. График функции $f(x)$.

Рассмотрим последовательный поиск методом дихотомии. Здесь на отрезке $[a_k, b_k]$ длиной l_k выберем две точки $x_{k1} = \frac{b_k+a_k}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{b_k+a_k}{2} + \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое достаточно малое число, причём $2\delta < \varepsilon$. Вычислим значения функции $f(x_{k1})$ и $f(x_{k2})$ в этих точках и выполняем процедуру исключения отрезка. В результате получим новый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$. Если длина нового отрезка $l_{k+1} > \varepsilon$, то алгоритм метода дихотомии переходит к следующему шагу. Если $l_{k+1} < \varepsilon$, то вычисления прекращаются и полагают $x^* = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$. Для заданной функции получим следующий результат:

Табл. 1.2. Последовательный поиск (дихотомия):

Начало интервала (ak)	Конец интервала (bk)	Длина интервала (l)	f(ak)	f(bk)
1.0	4.0	3.0	1.043	1.065
1.0	2.49	1.49	0.7005	0.6976
1.755	2.49	0.735	0.7546	0.7641
1.755	2.113	0.3575	0.6985	0.7017
1.755	1.924	0.1688	0.6924	0.6925
1.755	1.829	0.07438	l < epsilon	

Минимальное значение функции достигается при $x = 1.792 \pm 0.037$

Как видно, уже после 5 шага алгоритма достигается значение допустимого интервала неопределённости $\varepsilon < 0,1$.

Рассмотрим оптимальный пассивный поиск. Здесь заданный отрезок поиска делится на $N + 1$ частей точками с координатами $x_k = \frac{b-a}{N+1} * k + a, k = 1, \dots, N$ и вычисляется значение функции в каждой из этих точек, среди которых ищется экстремум. Точность поиска равна $\Delta_N^* = \frac{b-a}{N+1}$, наименьшая длина неопределённости $l_N^* = \frac{2(b-a)}{N-1}$. Для заданной функции получим следующий результат:

Табл. 1.3. Оптимальный пассивный поиск:

Количество точек (N)	Значение x в минимуме
1	2.5 ± 1.5
2	2.0 ± 1.0
3	1.75 ± 0.75

4	1.6 ± 0.6	
5	2.0 ± 0.5	
6	1.86 ± 0.429	
7	1.75 ± 0.375	
8	2.0 ± 0.333	
9	1.9 ± 0.3	
10	1.82 ± 0.273	
11	1.75 ± 0.25	
12	1.92 ± 0.231	
13	1.86 ± 0.214	
14	1.8 ± 0.2	
15	1.75 ± 0.188	
16	1.88 ± 0.176	
17	1.83 ± 0.167	
18	1.79 ± 0.158	
19	1.9 ± 0.15	
20	1.86 ± 0.143	
21	1.82 ± 0.136	
22	1.78 ± 0.13	
23	1.88 ± 0.125	
24	1.84 ± 0.12	
25	1.81 ± 0.115	
26	1.89 ± 0.111	
27	1.86 ± 0.107	
28	1.83 ± 0.103	
29	1.8 ± 0.1	

При $N = 29$ достигается заданная неопределённость в методе оптимального пассивного поиска. Заметно, что метод дихотомии эффективнее метода пассивного поиска при отыскании экстремума унимодальной функции одного переменного.

Варианты заданий

Табл. 1.4. Варианты функций, отрезков поиска и алгоритмов

№пп	Функция $f(x)$	a	b	Метод поиска	
1	$-0,5 \cos 0,5x - 0,5$	-5	2	опт. пассивный	дихотомия
2	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-4	3	опт. пассивный	золотое сечение
3	$-\sqrt{x} \cdot \sin x$	0	3	опт. пассивный	Фибоначчи
4	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	-2	0	опт. пассивный	дихотомия
5	$-\cos 0,5x - 1$	-2	4	опт. пассивный	золотое сечение
6	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-5	2	опт. пассивный	Фибоначчи

7	$-\sqrt{x} \cdot \sin x + 2$	1	4	опт. пассивный	дихотомия
8	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	1,5	4	опт. пассивный	золотое сечение
9	$-0,5 \cos 0,5x + 1$	-2,5	1,5	опт. пассивный	Фибоначчи
10	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-2	4	опт. пассивный	дихотомия
11	$-2\sqrt{x} \cdot \sin 0,5x$	2	6	опт. пассивный	золотое сечение
12	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	7	11	опт. пассивный	Фибоначчи
13	$2 \cos(x) + \lg(x)$	1,5	5	опт. пассивный	дихотомия
14	$\exp(-0.2x) \sin(x)$	2	6	опт. пассивный	золотое сечение
15	$x^2 \sin(x)$	9	12	опт. пассивный	Фибоначчи
16	$x^2 \exp[\sin(x)]$	9	14	опт. пассивный	дихотомия
17	$\cos(x) + \lg(x)$	7	10	опт. пассивный	золотое сечение
18	$\exp(-0.2x) \sin(x) + 1$	9	12	опт. пассивный	Фибоначчи
19	$x^2 \sin(x) - 2$	4	7	опт. пассивный	дихотомия
20	$x^2 \exp[\sin(x)]$	16	20	опт. пассивный	золотое сечение
21	$5 \cos(x) + x + \sqrt{x}$	2	6	опт. пассивный	Фибоначчи
22	$\exp(-0.1x) \sin(x) - 2$	-3	0	опт. пассивный	дихотомия
23	$x^2 \sin(x)$	15	18	опт. пассивный	золотое сечение
24	$x \exp[\cos(x)] - x$	8	12	опт. пассивный	Фибоначчи

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту, результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции, предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи по варианту; график заданной функции; таблицы, оформленные согласно указаниям из практической части, с результатами работы пассивного и последовательного алгоритмов; график зависимостей погрешности от числа точек N ; выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность метода оптимального пассивного поиска?
2. Поясните принцип разбиения интервала при последовательном поиске методами дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи.

3. Что такое интервал неопределенности? Приведите выражения для оценки интервала неопределенности для методов оптимального пассивного и последовательного поиска.

Лабораторная работа № 2

Исследование метода случайного поиска экстремума функции одного переменного

Цель работы

Изучение метода случайного поиска экстремума на примере унимодальной и мультимодальной функций одного переменного.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

1. На интервале $[a, b]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x)$. Используя метод *случайного поиска* осуществить поиск минимума $f(x)$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε . Определить необходимое число испытаний N . Численный эксперимент выполнить для значений $P = 0,90, 0,91, \dots, 0,99$ и значений $\varepsilon = (b-a)q$, где $q = 0,005, 0,010, \dots, 0,100$.

Последовательность действий:

- определить вероятность P_1 непопадания в ε -окрестность экстремума за одной испытание;
- записать выражение для вероятности P_N непопадания в ε -окрестность экстремума за N испытаний;
- из выражения для P_N определить необходимое число испытаний N в зависимости от заданных $P_N = P$ и ε .

2. При аналогичных исходных условиях осуществить поиск минимума $f(x)$, модулированной сигналом $\sin 5x$, т.е. *мультимодальной* функции $f(x) \cdot \sin 5x$.

Сведения из теории [3]

Пусть нам необходимо решить задачу минимизации функции $f(x)$ при условии, что $\bar{x} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. В данной области по равномерному закону выбираем случайную точку \bar{x}_1 и вычисляем в ней значение функции $y_1 = f(\bar{x}_1)$. Затем выбираем таким же образом случайную точку \bar{x}_2 и вычисляем $y_2 = f(\bar{x}_2)$. Запоминаем минимальное из этих значений и точку, в которой значение функции минимально. Далее генерируем новую точку.

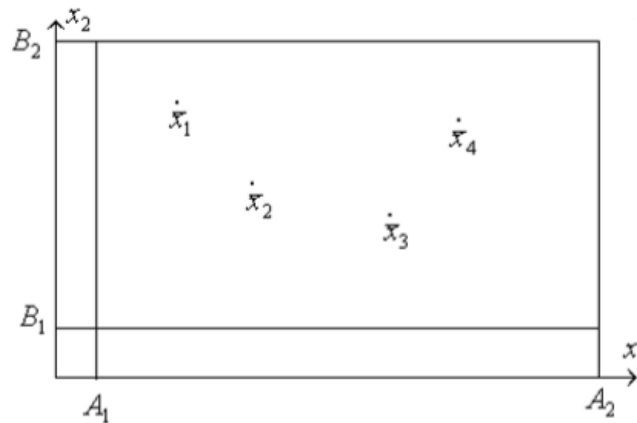


Рис. 2.1. Простой случайный поиск.

Делаем N экспериментов, после чего лучшую точку берем в качестве решения задачи (точку, в которой функция имеет минимальное значение среди всех “случайно” сгенерированных).

Оценим число экспериментов, необходимое для определения решения (точки минимума) с заданной точностью. Пусть n - размерность вектора переменных. Объем n -мерного прямоугольника, в котором ведется поиск минимума,

$$v = \prod_{i=1}^n (B_i - A_i).$$

Если необходимо найти решение с точностью ε_i , $i = \overline{1, n}$, по каждой из переменных, то мы должны попасть в окрестность оптимальной точки с объемом

$$v_\varepsilon = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Вероятность попадания в эту окрестность при одном испытании равна

$$P_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{v}.$$

Вероятность непопадания равна $1 - P_\varepsilon$. Испытания независимы, поэтому вероятность непопадания за N экспериментов равна $(1 - P_\varepsilon)^N$.

Вероятность того, что мы найдем решение за N испытаний:

$$P = 1 - (1 - P_\varepsilon)^N.$$

Отсюда нетрудно получить оценку необходимого числа испытаний N для определения минимума с требуемой точностью:

$$N \geq \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - P_\varepsilon)}.$$

Опираясь на заданную точность ε_i , $i = \overline{1, n}$, и величину V , можно определить P_ε и, задаваясь вероятностью P , определить требуемое количество экспериментов N в зависимости от P_ε и P .

При решении экстремальных задач на областях со сложной геометрией обычно вписывают эту область в n -мерный параллелепипед. А далее генерируют в этом n -мерном параллелепипеде случайные точки по равномерному закону, оставляя только те, которые попадают в допустимую область.

Различают направленный и ненаправленный случайный поиск.

Ненаправленный случайный поиск. При таком поиске все последующие испытания проводят совершенно независимо от результатов предыдущих. Сходимость такого поиска очень мала, но имеется важное преимущество, связанное с возможностью решения многоэкстремальных задач (искать глобальный экстремум). Примером ненаправленного поиска является рассмотренный простой случайный поиск.

Направленный случайный поиск. В этом случае отдельные испытания связаны между собой. Результаты проведенных испытаний используются для формирования последующих. Как правило, случайность используется при формировании направления спуска. Сходимость таких методов, как правило, выше, но сами методы обычно приводят только к локальным экстремумам.

Практическая часть

Пример выполнения работы

Задана функция: $f(x) = (1 - x)^2 + \exp(x)$ на интервале $[-4, 3]$ (см. рис. 2.2).

В данном методе P – это вероятность того, что найденная точка минимума находится в интервале неопределенности, а q – это вероятность попадания в интервал неопределенности для отдельно взятой точки. Тогда вероятность непопадания в интервал неопределенности за одно испытание будет равна $1 - q$. Вероятность непопадания в интервал неопределенности за N испытаний будет равна $(1 - q)^N$. Тогда вероятность $P = 1 - (1 - q)^N$. Отсюда можем найти $N = \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-q)}$.

Представим таблицу 2.1 зависимости N от P и q . В верхней строке записаны P , а в первом столбце – q . На пересечении – соответствующее значение N .

Случайно выбираем N точек в заданном отрезке $[a, b]$, определим значение унимодальной функции в этих точках и среди них найдем наименьшее значение. Результаты численного эксперимента для $f(x)$ представим в виде таблицы (2.2) в зависимости от P и q .

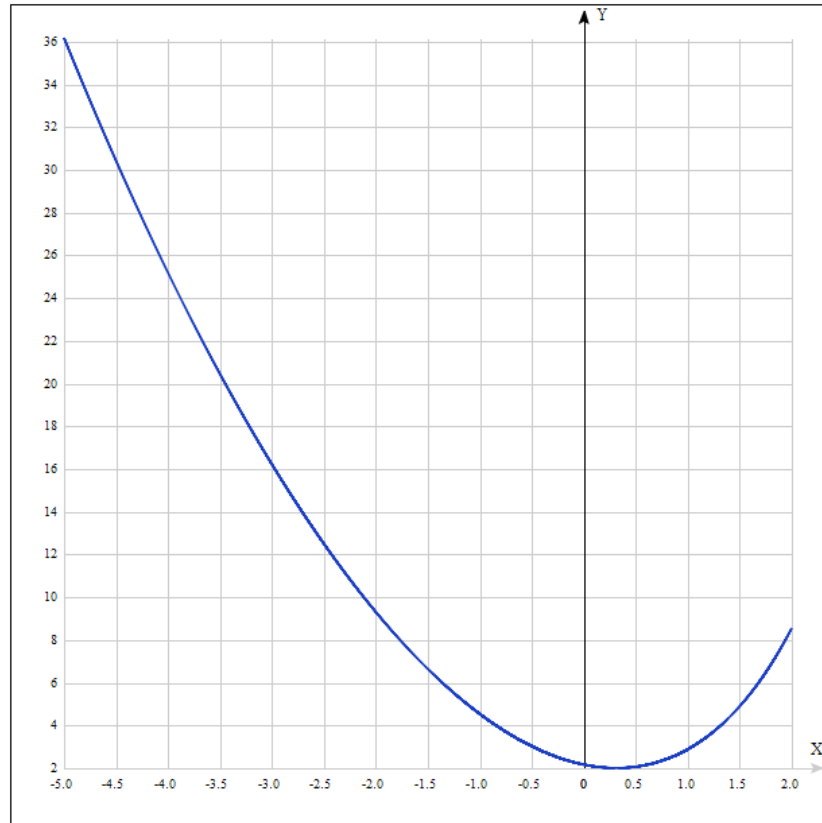


Рис. 2.2. График функции $f(x)$.

Табл. 2.1. Зависимость N от P и q .

$q \backslash P$	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	460	481	504	531	562	598	643	700	781	919
0.01	230	240	252	265	280	299	321	349	390	459
0.015	153	160	168	176	187	199	213	233	259	305
0.02	114	120	126	132	140	149	160	174	194	228
0.025	91	96	100	106	112	119	128	139	155	182
0.03	76	80	83	88	93	99	106	116	129	152
0.035	65	68	71	75	79	85	91	99	110	130
0.04	57	59	62	66	69	74	79	86	96	113
0.045	51	53	55	58	62	66	70	77	85	101
0.05	45	47	50	52	55	59	63	69	77	90
0.055	41	43	45	48	50	53	57	62	70	82
0.06	38	39	41	43	46	49	53	57	64	75
0.065	35	36	38	40	42	45	48	53	59	69
0.07	32	34	35	37	39	42	45	49	54	64
0.075	30	31	33	35	37	39	42	45	51	60
0.08	28	29	31	32	34	36	39	43	47	56
0.085	26	28	29	30	32	34	37	40	45	52
0.09	25	26	27	29	30	32	35	38	42	49
0.095	24	25	26	27	29	31	33	36	40	47
0.1	22	23	24	26	27	29	31	34	38	44

Табл. 2.2. Результаты поиска экстремума $f(x)$ в зависимости от P и q .

$q \setminus P$	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	1.8395	1.8397	1.8406	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395
0.01	1.8397	1.8395	1.8405	1.8395	1.8395	1.8395	1.8397	1.8397	1.8402	1.8395
0.015	1.8396	1.8396	1.8398	1.8395	1.8396	1.8395	1.8396	1.8395	1.8398	1.8395
0.02	1.8398	1.8395	1.8395	1.8417	1.8395	1.8398	1.8395	1.845	1.8396	1.8401
0.025	1.841	1.8395	1.8403	1.8398	1.8411	1.8395	1.8395	1.8415	1.8395	1.8395
0.03	1.8395	1.8395	1.8513	1.8425	1.8404	1.8408	1.8399	1.8409	1.8396	1.8415
0.035	1.8395	1.8419	1.8395	1.8408	1.8401	1.8477	1.8409	1.8568	1.8396	1.8396
0.04	1.84	1.8395	1.8395	1.8416	1.8437	1.8413	1.8499	1.8434	1.8401	1.8397
0.045	1.8747	1.8479	1.8395	1.8397	1.8475	1.8399	1.8395	1.84	1.8395	1.8605
0.05	1.8492	1.8714	1.841	1.8542	1.8395	1.8443	1.8396	1.8395	1.8395	1.8395
0.055	1.8399	1.8405	1.8422	1.847	1.8506	1.8405	1.8396	1.8417	1.8514	1.842
0.06	1.884	1.8401	1.916	1.8424	1.8803	1.8434	1.8994	1.8911	1.8406	1.8493
0.065	1.8396	1.8412	1.8404	1.8983	1.8562	2.0562	1.8424	1.8424	1.8435	1.8398
0.07	1.8512	1.9151	1.9281	1.8644	1.8398	1.8427	1.8429	1.8396	1.8396	1.8643
0.075	1.8539	1.9089	1.8605	1.8486	1.8562	1.8396	2.1243	1.8397	1.9459	1.8606
0.08	1.8402	1.8458	1.8455	1.8398	1.8405	1.8399	1.8395	1.8481	1.8397	1.8463
0.085	1.8432	1.8785	1.841	1.8441	1.8405	1.8437	1.8409	1.842	1.8773	1.8458
0.09	1.8396	1.8518	1.8396	1.847	1.8442	1.8467	1.8401	1.8922	1.8781	1.8549
0.095	1.8831	1.854	1.8771	1.8395	1.84	1.8414	1.8998	1.8399	1.9239	1.8466
0.1	1.8879	1.8403	1.8674	1.8404	1.8445	1.9425	1.8992	2.1525	1.8997	1.8399

Аналогичные вычисления требуется проделать для мультимодальной функции (см. рис. 2.3). Результаты приведены в табл. 2.3.

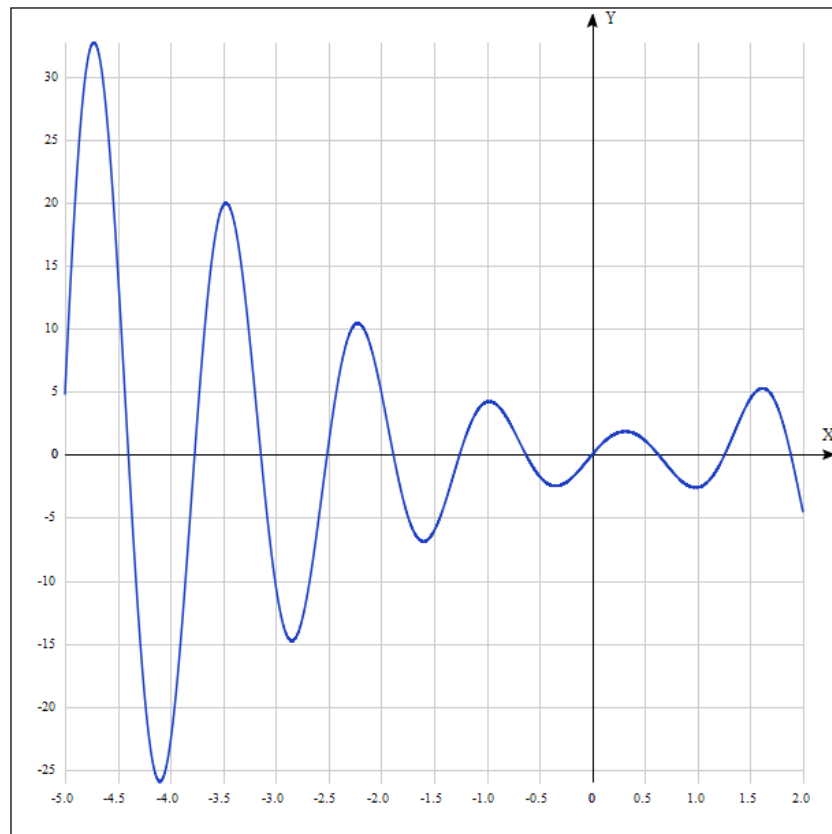
Рис.2.3. График функции $f(x) * \sin(5x)$.

Табл. 2.3. Результаты поиска экстремума $f(x) * \sin(5x)$ в зависимости от P и q .

q\P	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	-25.8699	-25.8936	-25.9435	-25.9179	-25.9277	-25.9267	-25.9351	-25.9428	-25.9308	-25.9319
0.01	-25.8258	-25.6362	-25.9265	-25.9433	-25.9099	-25.7317	-25.9429	-25.9395	-25.9405	-25.9074
0.015	-25.6701	-25.4789	-25.7474	-25.9427	-25.8591	-25.9235	-25.8886	-25.9368	-25.922	-25.89
0.02	-25.9318	-25.8272	-25.9425	-25.9441	-25.8277	-25.9438	-25.4661	-25.9425	-25.9089	-25.944
0.025	-25.4242	-25.7551	-25.5895	-25.7903	-25.3961	-25.9205	-25.7614	-24.9657	-24.1226	-24.4174
0.03	-22.5735	-25.8211	-24.8563	-21.7011	-25.7235	-25.6297	-25.7626	-25.2883	-24.44	-25.9421
0.035	-17.3733	-25.9296	-25.8761	-25.4818	-25.8134	-25.8056	-23.4375	-22.2337	-25.8993	-25.9405
0.04	-20.8763	-25.9303	-21.6365	-25.1439	-25.7133	-25.3327	-25.4947	-25.5244	-25.8113	-25.8388
0.045	-25.9404	-25.9441	-14.776	-24.1936	-24.4998	-18.4416	-25.9123	-25.9438	-25.8551	-25.9325
0.05	-22.1929	-25.9357	-25.4707	-25.031	-22.3551	-25.9424	-25.94	-25.8784	-25.6868	-25.8219
0.055	-25.4743	-22.8004	-25.8115	-24.9401	-25.8819	-25.621	-25.9125	-21.8811	-25.9348	-25.752
0.06	-16.0773	-23.2919	-25.944	-25.6623	-25.7506	-25.4119	-25.8751	-12.0173	-24.3568	-25.9107
0.065	-25.8816	-25.7177	-24.0046	-24.4502	-23.6948	-18.2723	-17.3193	-24.4777	-25.9399	-25.9041
0.07	-25.1769	-25.9194	-25.7966	-24.7145	-23.3231	-20.8782	-25.8758	-25.1432	-25.6259	-24.2508
0.075	-14.7843	-25.6757	-25.9441	-23.6924	-13.7648	-25.9417	-25.9064	-22.2499	-25.867	-25.7107
0.08	-20.011	-15.7513	-20.6872	-24.5536	-23.5958	-25.8282	-25.5775	-25.1634	-25.8783	-25.7966
0.085	-23.737	-9.0817	-25.7201	-25.7261	-25.937	-25.772	-25.7633	-25.1223	-25.7869	-25.9329
0.09	-6.8877	-24.4021	-15.9203	-25.9404	-25.8428	-23.8404	-23.655	-25.5172	-25.7463	-25.9426
0.095	-22.2785	-23.0565	-25.9383	-25.7853	-24.3834	-23.7355	-25.7562	-14.4845	-22.1085	-24.2696
0.1	-23.1944	-25.9396	-24.7222	-14.3922	-22.0041	-25.5749	-8.1873	-24.9599	-25.879	-23.4859

Как видно из полученных результатов, применимость метода случайного поиска не зависит от того, является ли функция унимодальной или мультимодальной. Для увеличения вероятности попадания в заданный интервал или для уменьшения интервала неопределенности необходимо увеличивать число случайных точек.

Варианты заданий

Табл. 2.4. Исходные данные

№пп	Функция $f(x)$	a	b
1	$-0,5 \cos 0,5x - 0,5$	-5	2
2	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-4	3
3	$-\sqrt{x} \cdot \sin x$	0	3
4	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	-2	0
5	$-\cos 0,5x - 1$	-2	4
6	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-5	2
7	$-\sqrt{x} \cdot \sin x + 2$	1	4
8	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	1,5	4
9	$-0,5 \cos 0,5x + 1$	-2,5	1,5
10	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-2	4
11	$-2\sqrt{x} \cdot \sin 0,5x$	2	6
12	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	7	11
13	$2 \cos(x) + \lg(x)$	1,5	5
14	$\exp(-0.2x) \sin(x)$	2	6

15	$x^2 \sin(x)$	9	12
16	$x^2 \exp[\sin(x)]$	9	14
17	$\cos(x) + \lg(x)$	7	10
18	$\exp(-0.2x) \sin(x) + 1$	9	12
19	$x^2 \sin(x) - 2$	4	7
20	$x^2 \exp[\sin(x)]$	16	20
21	$5 \cos(x) + x + \sqrt{x}$	2	6
22	$\exp(-0.1x) \sin(x) - 2$	-3	0
23	$x^2 \sin(x)$	15	18
24	$x \exp[\cos(x)] - x$	8	12

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать графики исходных унимодальной и мультимодальной функций, программную реализацию метода случайного поиска, результаты работы метода для каждой из исходных функций; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; графики исходных унимодальной и мультимодальной функций; результаты эксперимента (таблицы для обеих исходных функций $f(x)$ и $f(x) \cdot \sin 5x$); график зависимостей погрешности от числа точек N ; выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность метода случайного поиска? Какова область применимости данного метода?
2. Поясните принцип разбиения интервала при случайном поиске.
3. Что такое интервал неопределенности? Приведите выражения для оценки интервала неопределенности для метода случайного поиска.

Лабораторная работа № 3

Исследование алгоритма имитации отжига

Цель работы

Изучение метода имитации отжига для поиска экстремума на примере унимодальной и мультимодальной функций одного переменного.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

1. На интервале $[a, b]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x)$. Используя метод имитации отжига осуществить поиск минимума $f(x)$.
2. При аналогичных исходных условиях осуществить поиск минимума $f(x)$, модулированной сигналом $\sin 5x$, т.е. *мультимодальной* функции $f(x) \cdot \sin 5x$.

Сведения из теории [2]

Алгоритм имитации отжига (Simulated Annealing, SA) предложен в 1953г. Метрополисом (N. С. Metropolis). Алгоритм SA можно считать одним из немногих универсальных алгоритмов решения задач глобальной оптимизации. Алгоритм вдохновлён механизмом исправления дефектов в кристаллической решётке металла и некоторых других веществ. Указанные выше дефекты в кристаллической решётке обусловлены тем, что некоторые атомы занимают в решётке «неправильные» места. В силу нехватки кинетической энергии при нормальной температуре, указанные атомы не могут преодолеть потенциальный барьер и занять «правильные» положения в решётке. При этом в целом вся система атомов находится в состоянии локального энергетического минимума. Для вывода системы из этого минимума и перевода в состояние глобального энергетического минимума, соответствующего бездефектной кристаллической решётке, металл нагревают до высокой температуры, а затем медленно охлаждают. При этом «неправильные» атомы могут приобрести энергию, достаточную для преодоления потенциального барьера и занятия «правильных» положений в решётке. Вероятность преодоления потенциального барьера пропорциональна температуре металла, так что по мере его охлаждения вероятность такого перехода стремится к нулю, и кристаллическая

решётка стабилизируется в окрестности нового (меньшего) локального или глобального минимума.

Таким образом, положительная роль повышения температуры отжигаемого металла заключается в том, что температурные флуктуации позволяют системе покидать локальные минимумы энергии и смещаться в сторону более глубоких энергетических минимумов.

Применение данной схемы к оптимизации основано на том, что локальное (субоптимальное) решение, найденное в процессе решения задачи оптимизации, также можно рассматривать как дефектное решение. Улучшить это решение (приблизиться к глобальному оптимуму) можно путём его случайных флуктуаций, амплитуда которых уменьшается с ростом номера итераций.

Принципиальным в алгоритме SA является то, что, в отличие от большинства других стохастических алгоритмов поисковой оптимизации, он допускает шаги, приводящие к увеличению значений фитнес-функции.

Алгоритм SA относится к классу так называемых пороговых стохастических алгоритмов безусловной оптимизации. На текущей итерации порогового алгоритма в окрестности $d(X)$ текущего приближения к решению X выбираем случайное решение X' . Если разность $\varphi(X') - \varphi(X) < \varepsilon$, то в качестве нового текущего приближения к решению принимаем X' . В противном случае в окрестности $d(X)$ выбираем новое решение. Здесь ε -заданный положительный порог, величина которого по тому или иному закону убывает с ростом числа итераций t , так что имеет место предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$. Пороговый алгоритм в процессе поиска допускает ухудшение значений фитнес-функции до заданного порога ε , и этот порог в процессе итераций последовательно снижается до нуля.

В алгоритме SA величина ε представляет собой случайную величину с математическим ожиданием, равным $\bar{\varepsilon}$, которому придается смысл «температуры» отжигаемого металла. Таким образом, в алгоритме SA переход от решения $(X, \varphi = \varphi(X))$ к решению $(X', \varphi' = \varphi(X'))$ допускается с вероятностью

$$\xi(X \rightarrow X') = \begin{cases} 1, & \varphi' \leq \varphi, \\ \exp\left(-\frac{\varphi' - \varphi}{\bar{\varepsilon}}\right), & \varphi' > \varphi. \end{cases}$$

Последняя формула означает, что если переход от точки X к точке X' приводит к уменьшению значения фитнес-функции $\varphi(X)$, то этот переход осуществляется безусловно. В противном случае переход выполняем с вероятностью, которая убывает с

ростом разности $(\varphi' - \varphi)$ и уменьшением «температуры» $\bar{\varepsilon}$ в соответствии с известным распределением Гиббса.

Скорость сходимости алгоритма SA в значительной мере определяет вид функции $\varphi(t)$. Поэтому известно большое число различных рекомендаций по выбору этой функции. Чаще всего вслед за основоположниками алгоритма используют функцию вида $\bar{\varepsilon}(t) = \alpha \bar{\varepsilon}(t - 1)$, где α - положительный коэффициент понижения «температуры», достаточно близкий к единице, например, $\alpha \in [0,8; 0,99]$, так что последовательность $\bar{\varepsilon}(t), \bar{\varepsilon}(t + 1), \bar{\varepsilon}(t + 2), \dots$ представляет собой убывающую геометрическую прогрессию. Часто функцию $\bar{\varepsilon}(t)$ определяют формулой

$$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\ln(t + 1)},$$

где $\bar{\varepsilon}_0$ - начальная «температура».

Широко известен вариант так называемого сверхбыстрого отжига (very fast annealing), когда функцию $\bar{\varepsilon}(t)$ задает формула

$$\bar{\varepsilon}(t) = \bar{\varepsilon}_0 \exp\left(-\beta t^{\frac{1}{|x|}}\right),$$

где β - положительная вещественная константа, имеющая смысл декремента затухания.

Практическая часть

Пример выполнения работы

Пусть задана функция $f(x) = -\sqrt{x} \cdot \sin(x)$. График этой функции и функции, модулированной сигналом $\sin 5x$, т.е. мультимодальной функции $f_2(x) = -\sqrt{x} \cdot \sin(x) \cdot \sin 5x$, представлены на рис. 3.1 и 3.2 соответственно. Интервал поиска – $[0, 3]$.

Реализовываем алгоритм имитации отжига следующим образом:

1. Изначально задаются начальная температура (T_{max}) и конечная температура (T_{min}).
2. Случайно выбирается точка x_l на отрезке. Вычисляется значение функции в этой точке $f(x_l)$.
3. Пока $T_i > T_{min}$
 - 1) Случайно выбирается точка x_i на отрезке. Вычисляется значение функции в этой точке $f(x_i)$.
 - 2) Определяется $\Delta f = f(x_i) - f(x_{i-1})$.
 - 3) Если $\Delta f \leq 0$, то осуществляется переход в точку x_i .
 - 4) Если $\Delta f > 0$, то переход осуществляется с вероятностью $P(\Delta f) = e^{\frac{-\Delta f}{T_i}}$.

5) Понижение температуры: $T_{i+1} = T_i \cdot 0,95$.

В качестве начальной температуры возьмем $T_{max} = 10000$, конечной – $T_{min} = 0.1$.

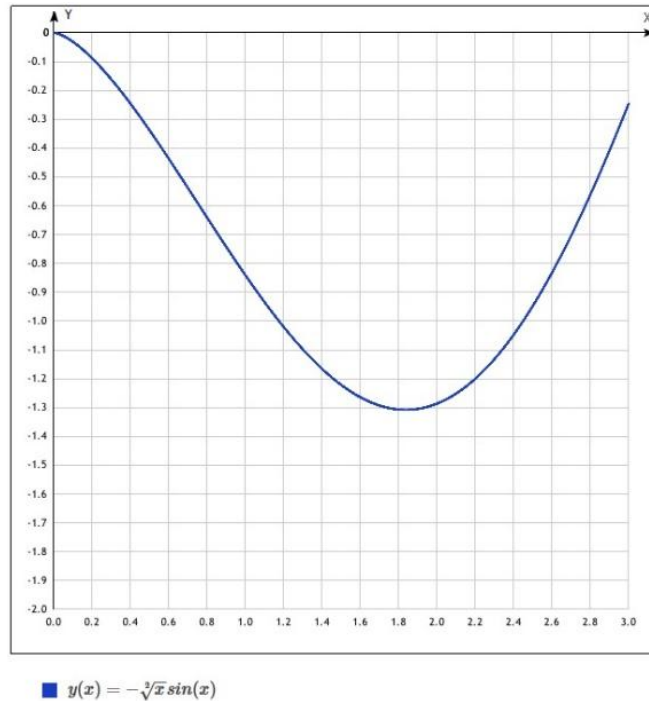


Рис. 3.1. График функции $f(x)$.

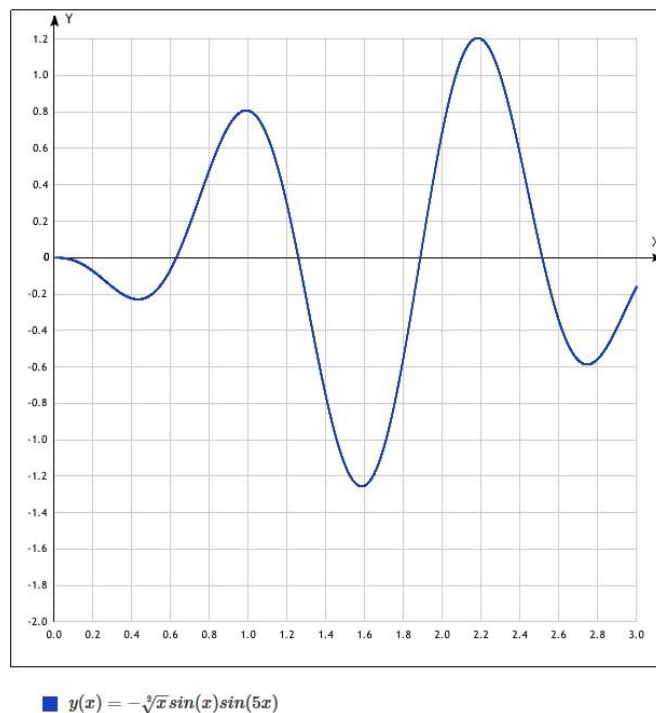


Рис. 3.2. График функции $f(x) * \sin 5x$.

Результаты численного эксперимента для $f(x)$ представим в таблице 3.1, а для мультимодальной функции – в табл. 3.2.

Табл. 3.1. Результаты поиска экстремума $f(x)$.

N	T	x	f(x)
1	10000.000	0.004	-0.000
2	9500.000	1.650	-1.280
3	9025.000	1.539	-1.240
4	8573.750	0.989	-0.831
5	8145.063	0.302	-0.164
6	7737.809	0.249	-0.123
7	7350.919	2.193	-1.203
8	6983.373	1.834	-1.308
9	6634.204	2.058	-1.268
10	6302.494	2.540	-0.902
11	5987.369	2.397	-1.049
12	5688.001	2.061	-1.267
13	5403.601	1.438	-1.189
14	5133.421	1.591	-1.261
15	4876.750	0.726	-0.566
16	4632.912	0.943	-0.786
17	4401.267	0.151	-0.058
18	4181.203	2.070	-1.263
19	3972.143	2.845	-0.494
20	3773.536	2.597	-0.834
21	3584.859	2.363	-1.080
22	3405.616	0.646	-0.484
23	3235.335	0.742	-0.582
24	3073.569	2.531	-0.913
25	2919.890	0.334	-0.189
26	2773.896	1.312	-1.108
27	2635.201	1.829	-1.308
28	2503.441	2.253	-1.165
29	2378.269	1.982	-1.291
30	2259.355	2.640	-0.782
31	2146.388	0.138	-0.051
32	2039.068	1.046	-0.886
33	1937.115	0.835	-0.677
34	1840.259	2.224	-1.184
35	1748.246	2.196	-1.202
36	1660.834	2.434	-1.014
37	1577.792	0.536	-0.374
38	1498.903	2.373	-1.070
39	1423.957	1.152	-0.981
40	1352.760	1.461	-1.201
41	1285.122	2.385	-1.060
42	1220.865	1.525	-1.234
43	1159.822	0.679	-0.518
44	1101.831	1.291	-1.092

45	1046.740	2.136	-1.234
46	994.403	0.514	-0.353
47	944.682	2.126	-1.239
48	897.448	1.750	-1.302
49	852.576	2.122	-1.241
50	809.947	1.320	-1.113
51	769.450	0.481	-0.321
52	730.977	1.793	-1.306
53	694.428	2.424	-1.024
54	659.707	1.056	-0.894
55	626.722	1.082	-0.919
56	595.386	0.642	-0.480
57	565.616	1.800	-1.307
58	537.335	0.250	-0.124
59	510.469	0.010	-0.001
60	484.945	2.520	-0.925
61	460.698	0.411	-0.256
62	437.663	1.671	-1.286
63	415.780	2.948	-0.330
64	394.991	1.275	-1.080
65	375.241	1.579	-1.257
66	356.479	0.515	-0.354
67	338.655	1.144	-0.974
68	321.723	1.583	-1.258
69	305.636	0.154	-0.060
70	290.355	1.609	-1.268
71	275.837	0.575	-0.413
72	262.045	1.099	-0.934
73	248.943	1.540	-1.240
74	236.496	2.940	-0.344
75	224.671	2.648	-0.771
76	213.437	0.280	-0.146
77	202.765	1.614	-1.269
78	192.627	0.588	-0.425
79	182.996	1.820	-1.307
80	173.846	1.269	-1.075
81	165.154	1.936	-1.300
82	156.896	0.033	-0.006
83	149.051	1.908	-1.304
84	141.599	2.842	-0.497
85	134.519	0.414	-0.259
86	127.793	1.857	-1.307
87	121.403	2.514	-0.931
88	115.333	1.474	-1.208
89	109.566	1.023	-0.864
90	104.088	0.972	-0.814
91	98.884	1.570	-1.253
92	93.939	0.798	-0.639
93	89.242	2.090	-1.255
94	84.780	1.369	-1.146
95	80.541	0.829	-0.671
96	76.514	0.847	-0.690

97	72.689	1.904	-1.304
98	69.054	2.395	-1.051
99	65.601	2.798	-0.564
100	62.321	2.083	-1.258
101	59.205	2.058	-1.268
102	56.245	2.080	-1.259
103	53.433	1.261	-1.070
104	50.761	1.669	-1.286
105	48.223	1.494	-1.219
106	45.812	0.424	-0.268
107	43.521	1.055	-0.894
108	41.345	1.931	-1.300
109	39.278	2.506	-0.940
110	37.314	2.116	-1.244
111	35.448	2.741	-0.646
112	33.676	1.902	-1.304
113	31.992	1.689	-1.291
114	30.393	2.273	-1.151
115	28.873	0.218	-0.101
116	27.429	2.965	-0.302
117	26.058	2.944	-0.336
118	24.755	2.473	-0.975
119	23.517	0.591	-0.429
120	22.341	0.919	-0.762
121	21.224	1.457	-1.199
122	20.163	1.277	-1.082
123	19.155	1.212	-1.031
124	18.197	0.800	-0.642
125	17.287	0.074	-0.020
126	16.423	0.130	-0.047
127	15.602	0.034	-0.006
128	14.822	0.631	-0.468
129	14.081	2.303	-1.129
130	13.377	2.642	-0.778
131	12.708	1.635	-1.276
132	12.072	1.094	-0.929
133	11.469	0.801	-0.642
134	10.895	1.248	-1.060
135	10.351	1.682	-1.289
136	9.833	2.195	-1.202
137	9.341	2.481	-0.966
138	8.874	1.600	-1.264
139	8.431	0.342	-0.196
140	8.009	2.788	-0.579
141	7.609	2.009	-1.284
142	7.228	1.485	-1.214
143	6.867	0.774	-0.615
144	6.523	2.064	-1.265
145	6.197	0.300	-0.162
146	5.887	2.871	-0.453
147	5.593	0.873	-0.716
148	5.313	1.942	-1.299

149	5.048	2.336	-1.102
150	4.795	2.138	-1.233
151	4.556	2.138	-1.233
152	4.328	0.637	-0.475
153	4.111	0.757	-0.598
154	3.906	0.596	-0.434
155	3.711	0.631	-0.469
156	3.525	2.458	-0.990
157	3.349	1.573	-1.254
158	3.181	0.819	-0.661
159	3.022	0.661	-0.499
160	2.871	1.686	-1.290
161	2.728	2.642	-0.779
162	2.591	2.195	-1.202
163	2.462	1.765	-1.304
164	2.339	1.208	-1.028
165	2.222	2.026	-1.278
166	2.111	0.747	-0.588
167	2.005	2.389	-1.056
168	1.905	0.807	-0.649
169	1.810	2.645	-0.774
170	1.719	1.920	-1.302
171	1.633	2.317	-1.118
172	1.551	0.943	-0.786
173	1.474	0.744	-0.585
174	1.400	2.552	-0.889
175	1.330	0.551	-0.389
176	1.264	0.286	-0.151
177	1.200	1.795	-1.306
178	1.140	1.419	-1.177
179	1.083	1.945	-1.298
180	1.029	1.945	-1.298
181	0.978	1.945	-1.298
182	0.929	2.261	-1.159
183	0.882	1.228	-1.043
184	0.838	1.228	-1.043
185	0.796	0.911	-0.754
186	0.757	2.290	-1.139
187	0.719	2.290	-1.139
188	0.683	0.142	-0.053
189	0.649	0.678	-0.517
190	0.616	2.282	-1.145
191	0.585	1.880	-1.306
192	0.556	1.556	-1.247
193	0.528	1.556	-1.247
194	0.502	2.390	-1.056
195	0.477	1.478	-1.211
196	0.453	1.392	-1.161
197	0.430	1.912	-1.303
198	0.409	1.912	-1.303
199	0.388	1.912	-1.303
200	0.369	1.912	-1.303

201	0.351	1.912	-1.303
202	0.333	1.912	-1.303
203	0.316	1.863	-1.307
204	0.301	2.061	-1.267
205	0.286	2.061	-1.267
206	0.271	1.334	-1.122
207	0.258	1.334	-1.122
208	0.245	1.334	-1.122
209	0.233	1.334	-1.122
210	0.221	1.334	-1.122
211	0.210	1.334	-1.122
212	0.199	1.334	-1.122
213	0.189	1.334	-1.122
214	0.180	1.963	-1.295
215	0.171	1.963	-1.295
216	0.162	1.963	-1.295
217	0.154	1.963	-1.295
218	0.147	1.248	-1.060
219	0.139	1.248	-1.060
220	0.132	2.030	-1.277
221	0.126	2.030	-1.277
222	0.119	2.030	-1.277
223	0.113	2.030	-1.277
224	0.108	2.030	-1.277
225	0.102	2.030	-1.277
226	0.097	1.835	-1.308
227	0.092	1.835	-1.308
228	0.088	1.835	-1.308
229	0.083	1.835	-1.308
230	0.079	1.835	-1.308
231	0.075	1.723	-1.297
232	0.071	1.723	-1.297
233	0.068	1.723	-1.297
234	0.065	1.723	-1.297
235	0.061	1.713	-1.296
236	0.058	1.421	-1.179
237	0.055	1.421	-1.179
238	0.053	1.421	-1.179
239	0.050	1.421	-1.179
240	0.047	1.421	-1.179
241	0.045	1.421	-1.179
242	0.043	1.747	-1.301
243	0.041	1.747	-1.301
244	0.039	1.747	-1.301
245	0.037	1.814	-1.307
246	0.035	1.715	-1.296
247	0.033	1.715	-1.296
248	0.031	1.715	-1.296
249	0.030	1.567	-1.252
250	0.028	1.567	-1.252
251	0.027	1.567	-1.252
252	0.026	1.567	-1.252

253	0.024	1.567	-1.252
254	0.023	1.567	-1.252
255	0.022	1.796	-1.306
256	0.021	1.796	-1.306
257	0.020	1.796	-1.306
258	0.019	1.796	-1.306
259	0.018	1.796	-1.306
260	0.017	1.796	-1.306
261	0.016	1.796	-1.306
262	0.015	1.796	-1.306
263	0.015	1.886	-1.306
264	0.014	1.830	-1.308
265	0.013	1.830	-1.308
266	0.012	1.830	-1.308
267	0.012	1.830	-1.308
268	0.011	1.830	-1.308
269	0.011	1.830	-1.308
270	0.010	1.830	-1.308

Result: Xmin = 1.835 Fmin = -1.308

Табл. 3.2. Результаты поиска экстремума $f(x) * \sin(5x)$.

N	T	x	f(x)
1	10000.000	1.853	-0.210
2	9500.000	1.650	-1.182
3	9025.000	1.539	-1.224
4	8573.750	2.758	-0.584
5	8145.063	0.492	-0.209
6	7737.809	1.690	-1.069
7	7350.919	0.249	-0.116
8	6983.373	2.193	1.203
9	6634.204	2.058	0.964
10	6302.494	1.143	0.523
11	5987.369	2.540	-0.119
12	5688.001	1.118	0.607
13	5403.601	2.061	0.975
14	5133.421	1.093	0.677
15	4876.750	1.591	-1.255
16	4632.912	0.726	0.266
17	4401.267	0.943	0.786
18	4181.203	2.920	-0.335
19	3972.143	2.070	1.008
20	3773.536	2.569	-0.238
21	3584.859	2.597	-0.341
22	3405.616	2.363	0.737
23	3235.335	2.157	1.197
24	3073.569	2.531	-0.079
25	2919.890	0.334	-0.188
26	2773.896	2.528	-0.066
27	2635.201	1.829	-0.360
28	2503.441	2.253	1.122

29	2378.269	1.982	0.599
30	2259.355	2.640	-0.461
31	2146.388	2.555	-0.184
32	2039.068	1.905	0.127
33	1937.115	0.835	0.581
34	1840.259	2.224	1.175
35	1748.246	2.434	0.391
36	1660.834	0.651	0.056
37	1577.792	0.536	-0.167
38	1498.903	2.775	-0.577
39	1423.957	2.373	0.689
40	1352.760	0.028	-0.001
41	1285.122	1.461	-1.025
42	1220.865	2.385	0.635
43	1159.822	1.525	-1.201
44	1101.831	0.679	0.130
45	1046.740	1.291	-0.184
46	994.403	2.136	1.174
47	944.682	1.246	0.057
48	897.448	2.126	1.157
49	852.576	2.122	1.150
50	809.947	1.673	-1.124
51	769.450	1.320	-0.349
52	730.977	0.481	-0.215
53	694.428	1.793	-0.579
54	659.707	2.424	0.443
55	626.722	1.056	0.754
56	595.386	1.082	0.703
57	565.616	0.642	0.034
58	537.335	2.393	0.597
59	510.469	0.250	-0.118
60	484.945	2.448	0.320
61	460.698	2.946	-0.276
62	437.663	2.520	-0.029
63	415.780	1.123	0.591
64	394.991	2.948	-0.271
65	375.241	0.935	0.777
66	356.479	1.579	-1.256
67	338.655	0.515	-0.189
68	321.723	1.144	0.518
69	305.636	0.154	-0.042
70	290.355	0.877	0.682
71	275.837	0.575	-0.108
72	262.045	2.090	1.074
73	248.943	1.540	-1.226
74	236.496	2.940	-0.291
75	224.671	2.648	-0.481
76	213.437	0.280	-0.144
77	202.765	1.614	-1.239
78	192.627	0.588	-0.086
79	182.996	1.820	-0.416
80	173.846	1.269	-0.066

81	165.154	1.936	0.328
82	156.896	0.648	0.048
83	149.051	1.908	0.150
84	141.599	2.303	0.979
85	134.519	2.240	1.149
86	127.793	2.514	-0.004
87	121.403	1.157	0.472
88	115.333	1.023	0.794
89	109.566	0.972	0.805
90	104.088	1.570	-1.253
91	98.884	0.798	0.479
92	93.939	2.090	1.073
93	89.242	1.463	-1.033
94	84.780	0.829	0.566
95	80.541	0.847	0.613
96	76.514	2.395	0.586
97	72.689	1.059	0.749
98	69.054	2.465	0.233
99	65.601	2.083	1.051
100	62.321	2.080	1.042
101	59.205	2.379	0.663
102	56.245	1.261	-0.025
103	53.433	1.160	0.457
104	50.761	1.494	-1.130
105	48.223	2.564	-0.219
106	45.812	0.019	-0.000
107	43.521	1.931	0.296
108	41.345	1.220	0.188
109	39.278	2.116	1.138
110	37.314	0.152	-0.040
111	35.448	1.902	0.113
112	33.676	0.739	0.305
113	31.992	0.373	-0.213
114	30.393	0.218	-0.090
115	28.873	2.965	-0.234
116	27.429	2.944	-0.280
117	26.058	2.473	0.194
118	24.755	2.304	0.976
119	23.517	1.457	-1.010
120	22.341	1.277	-0.113
121	21.224	1.212	0.226
122	20.163	0.800	0.486
123	19.155	0.074	-0.007
124	18.197	1.582	-1.256
125	17.287	0.130	-0.028
126	16.423	0.871	0.668
127	15.602	2.303	0.981
128	14.822	1.416	-0.843
129	14.081	1.635	-1.210
130	13.377	1.094	0.676
131	12.708	0.801	0.488
132	12.072	0.421	-0.228

133	11.469	1.248	0.043
134	10.895	2.195	1.202
135	10.351	2.481	0.154
136	9.833	2.562	-0.211
137	9.341	1.600	-1.251
138	8.874	0.342	-0.194
139	8.431	2.788	-0.567
140	8.009	2.009	0.745
141	7.609	0.533	-0.170
142	7.228	0.774	0.411
143	6.867	2.064	0.988
144	6.523	0.855	0.633
145	6.197	2.871	-0.443
146	5.887	0.873	0.674
147	5.593	2.336	0.852
148	5.313	2.138	1.176
149	5.048	2.457	0.274
150	4.795	0.637	0.021
151	4.556	0.899	0.725
152	4.328	0.596	-0.069
153	4.111	0.302	-0.163
154	3.906	0.631	0.007
155	3.711	1.573	-1.254
156	3.525	0.819	0.540
157	3.349	0.661	0.082
158	3.181	2.379	0.664
159	3.022	2.642	-0.467
160	2.871	2.642	-0.467
161	2.728	1.765	-0.736
162	2.591	1.208	0.246
163	2.462	2.026	0.828
164	2.339	0.682	0.138
165	2.222	2.389	0.615
166	2.111	2.389	0.615
167	2.005	1.920	0.228
168	1.905	1.920	0.228
169	1.810	0.943	0.786
170	1.719	0.744	0.320
171	1.633	0.251	-0.119
172	1.551	2.552	-0.169
173	1.474	0.551	-0.146
174	1.400	0.286	-0.150
175	1.330	0.430	-0.229
176	1.264	1.795	-0.570
177	1.200	1.419	-0.854
178	1.140	1.577	-1.255
179	1.083	1.945	0.386
180	1.029	1.761	-0.759
181	0.978	2.920	-0.335
182	0.929	2.920	-0.335
183	0.882	1.228	0.150
184	0.838	0.412	-0.227

185	0.796	0.412	-0.227
186	0.757	0.412	-0.227
187	0.719	0.533	-0.171
188	0.683	0.142	-0.035
189	0.649	0.678	0.127
190	0.616	1.880	-0.029
191	0.585	1.556	-1.244
192	0.556	1.556	-1.244
193	0.528	1.556	-1.244
194	0.502	1.655	-1.170
195	0.477	1.655	-1.170
196	0.453	1.912	0.175
197	0.430	0.543	-0.157
198	0.409	0.543	-0.157
199	0.388	2.863	-0.459
200	0.369	2.863	-0.459
201	0.351	2.609	-0.378
202	0.333	2.609	-0.378
203	0.316	2.609	-0.378
204	0.301	2.609	-0.378
205	0.286	1.334	-0.421
206	0.271	1.334	-0.421
207	0.258	2.532	-0.085
208	0.245	2.532	-0.085
209	0.233	2.839	-0.501
210	0.221	2.839	-0.501
211	0.210	2.839	-0.501
212	0.199	2.839	-0.501
213	0.189	2.839	-0.501
214	0.180	2.839	-0.501
215	0.171	2.839	-0.501
216	0.162	2.839	-0.501
217	0.154	2.839	-0.501
218	0.147	2.839	-0.501
219	0.139	2.671	-0.526
220	0.132	2.671	-0.526
221	0.126	1.762	-0.754
222	0.119	1.762	-0.754
223	0.113	1.762	-0.754
224	0.108	1.762	-0.754
225	0.102	1.762	-0.754
226	0.097	1.762	-0.754
227	0.092	1.659	-1.161
228	0.088	1.659	-1.161
229	0.083	1.659	-1.161
230	0.079	1.659	-1.161
231	0.075	1.659	-1.161
232	0.071	1.659	-1.161
233	0.068	1.659	-1.161
234	0.065	1.659	-1.161
235	0.061	1.659	-1.161
236	0.058	1.659	-1.161

237 0.055 1.659 -1.161
 238 0.053 1.659 -1.161
 239 0.050 1.659 -1.161
 240 0.047 1.659 -1.161
 241 0.045 1.659 -1.161
 242 0.043 1.659 -1.161
 243 0.041 1.659 -1.161
 244 0.039 1.659 -1.161
 245 0.037 1.659 -1.161
 246 0.035 1.659 -1.161
 247 0.033 1.659 -1.161
 248 0.031 1.567 -1.251
 249 0.030 1.567 -1.251
 250 0.028 1.567 -1.251
 251 0.027 1.567 -1.251
 252 0.026 1.567 -1.251
 253 0.024 1.567 -1.251
 254 0.023 1.567 -1.251
 255 0.022 1.567 -1.251
 256 0.021 1.567 -1.251
 257 0.020 1.567 -1.251
 258 0.019 1.567 -1.251
 259 0.018 1.567 -1.251
 260 0.017 1.567 -1.251
 261 0.016 1.567 -1.251
 262 0.015 1.567 -1.251
 263 0.015 1.567 -1.251
 264 0.014 1.567 -1.251
 265 0.013 1.567 -1.251
 266 0.012 1.567 -1.251
 267 0.012 1.567 -1.251
 268 0.011 1.567 -1.251
 269 0.011 1.567 -1.251
 270 0.010 1.567 -1.251

Result: Xmin = 1.582 Fmin = -1.256

Варианты заданий

Табл. 3.3. Исходные данные

№пп	Функция $f(x)$	a	b
1	$-0,5 \cos 0,5x - 0,5$	-5	2
2	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-4	3
3	$-\sqrt{x} \cdot \sin x$	0	3
4	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	-2	0
5	$-\cos 0,5x - 1$	-2	4
6	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-5	2

7	$-\sqrt{x} \cdot \sin x + 2$	1	4
8	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	1,5	4
9	$-0,5 \cos 0,5x + 1$	-2,5	1,5
10	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-2	4
11	$-2\sqrt{x} \cdot \sin 0,5x$	2	6
12	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	7	11
13	$2 \cos(x) + \lg(x)$	1,5	5
14	$\exp(-0.2x) \sin(x)$	2	6
15	$x^2 \sin(x)$	9	12
16	$x^2 \exp[\sin(x)]$	9	14
17	$\cos(x) + \lg(x)$	7	10
18	$\exp(-0.2x) \sin(x) + 1$	9	12
19	$x^2 \sin(x) - 2$	4	7
20	$x^2 \exp[\sin(x)]$	16	20
21	$5 \cos(x) + x + \sqrt{x}$	2	6
22	$\exp(-0.1x) \sin(x) - 2$	-3	0
23	$x^2 \sin(x)$	15	18
24	$x \exp[\cos(x)] - x$	8	12

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать графики исходных унимодальной и мультимодальной функций, программную реализацию метода имитации отжига, результаты работы метода для каждой из исходных функций; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; графики исходных унимодальной и мультимодальной функций; результаты эксперимента (таблицы для обеих исходных функций $f(x)$ и $f(x) \cdot \sin 5x$); график зависимостей погрешности от числа точек N ; выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит сущность метода имитации отжига? Какова область применимости данного метода?
2. Поясните принцип разбиения интервала при данном поиске.

3. Назовите основные достоинства и недостатки данного метода поиска. Какова его вычислительная сложность?

Лабораторная работа № 4

Исследование генетических алгоритмов в задачах поиска экстремумов

Цель работы

Изучить основные принципы действия генетических алгоритмов на примере решения задач оптимизации функций двух переменных.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

Найти максимум функции $f(x, y)$ в области D с помощью простого (классического) генетического алгоритма.

За исходную популяцию принять 4 случайных точки. Хромосома каждой особи состоит из двух генов: значений координат x, y . В качестве потомков следует выбирать результат скрещивания лучшего решения со вторым и третьим в порядке убывания значений функции приспособленности с последующей случайной мутацией обоих генов. В качестве критерия останова эволюционного процесса задаться номером конечной популяции ($N \sim 10^1 \dots 10^2$). Визуализировать результаты расчетов.

Сведения из теории

Генетические алгоритмы – это алгоритмы, которые позволяют найти удовлетворительное решение к аналитически неразрешимым проблемам через последовательный подбор и комбинирование искоемых параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию. Они объединяют различные варианты использования эволюционных принципов для достижения поставленной цели.

Пусть перед нами стоит задача оптимизации.

1. Переформулируем её как задачу нахождения максимума некоторой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемой **функцией приспособленности** (fitness function). Она должна:
 - быть определена на ограниченной области определения,
 - принимать неотрицательные значения,
 - при этом совершенно не требуются непрерывность и дифференцируемость.

2. Каждый параметр функции приспособленности кодируется строкой битов. (В нашем случае параметрами являются координаты точек).
3. Особью будет называться строка, являющаяся конкатенацией строк упорядоченного набора параметров:

$$1010 \ 10110 \ 101 \ \dots \ 10101$$

$$| \ x1 \ | \ x2 \ | \ x3 \ | \ \dots \ | \ x_n \ |$$
4. Популяция – совокупностью всех «особей», представляющих собой строки, кодирующие одно из решений задачи.
5. С помощью функции приспособленности:
 - наиболее приспособленные (более подходящие решения) получают возможность скрещиваться и давать потомство,
 - наихудшие (плохие решения) удаляются из популяции и не дают потомства.
6. Таким образом, приспособленность нового поколения в среднем выше предыдущего.
7. В классическом ГА:
 - начальная популяция формируется случайным образом,
 - размер популяции (количество особей N) фиксируется и не изменяется в течение работы всего алгоритма,
 - каждая особь генерируется как случайная L -битная строка, где L - длина кодировки особи,
 - длина кодировки для всех особей одинакова.

Шаг алгоритма состоит из трех стадий:

1. генерация промежуточной популяции (*intermediate generation*) путем отбора (*selection*) текущего поколения,
2. скрещивание (*recombination*) особей промежуточной популяции путем *кроссовера* (*crossover*), что приводит к формированию нового поколения,
3. мутация нового поколения.

Критерии останова алгоритма:

- Достижение заданного номера поколения,
- Схождение (*convergence*) популяции. Схождением называется состояние популяции, когда все строки находятся в области некоторого экстремума и почти

одинаковы. Таким образом, сходжение популяции означает, что достигнуто решение близкое к оптимальному. Итоговым решением задачи может служить наиболее приспособленная особь последнего поколения.

- Достижение заданного лимита времени работы алгоритма.
- Сходжение фитнес-функции и т.д.

Виды алгоритмов селекции:

- рулеточный (пропорциональный отбор),

$$p_{sl_i} = \frac{Fit_i}{\sum_{k=1}^N Fit_k}$$

- элитарный,
- дальнейшее родство (ДР) – ближнее родство (БР),

$$dist_{HAM}(x_i, x_j) > R \sim "ДР"$$

$$dist_{HAM}(x_i, x_j) < R \sim "БР"$$

ГДЕ R – РАДИУС СКРЕЩИВАНИЯ

$$"ДР" \xrightarrow{t \rightarrow \infty} "БР"$$

- случайный,
- детерминистский,

$$Fit_i \geq Fit_{ave} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Fit_k$$

- гибридный (турнирный и др.).

Виды операторов кроссовера:

- одноточечный,
- двухточечный,
- N-точечный (случайный и детерминированный),
- упорядоченный,
- "жадный" и др.

Виды операторов мутации:

- инвертирование гена,
- обмен генов: одноточечный, двухточечный, N-точечный,

- инверсия сегмента,
- транспозиция,
- транслокация и др.

Таким образом, класс генетических алгоритмов весьма широк, в т.ч. за счет использования различных вариаций и комбинаций видов операторов селекции, кроссовера и мутации. В самом общем виде схема генетического алгоритма (не простого) представлена на рис. 4.1.

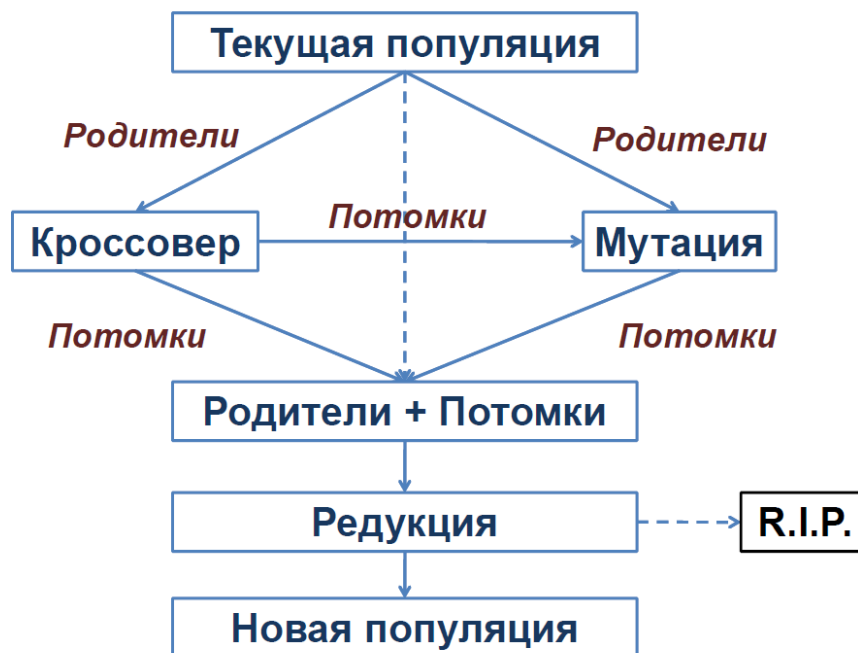


Рис. 4.1. Общая схема генетических алгоритмов.

Практическая часть

Пример выполнения работы

Пусть задана функция $f(x, y) = \exp(-x^2) \exp(-y^2) / (1 + x^2 + y^2)$ на области $D = (-2, 2) \times (-2, 2)$. График поверхности изображен на рис. 4.2. Из графика видно, что реальное максимальное (искомое) значение функции находится в точке $[0;0]$ и равно 1. Используем эти сведения для проверки полученного в ходе работы решения.

По условию задачи требуется написать программу, реализующую создание 4-х особей, имеющих по 2 хромосомы каждая (координаты x, y). При этом создание особей происходит случайным способом (невоспроизводимый ГПСЧ). После создания особей программа должна выполнить расчет среднего и максимального значения ФИТ-функции для популяции. Далее программа производит селекцию (отбор) и последующий кроссовер

особей в соответствии с условием задания. При этом следует учесть мутацию (положим вероятность мутации равной 25%). Данные действия повторяются для каждого поколения (итерации алгоритма) дл достижения критерия останова алгоритма, в данном случае – номера поколения N .

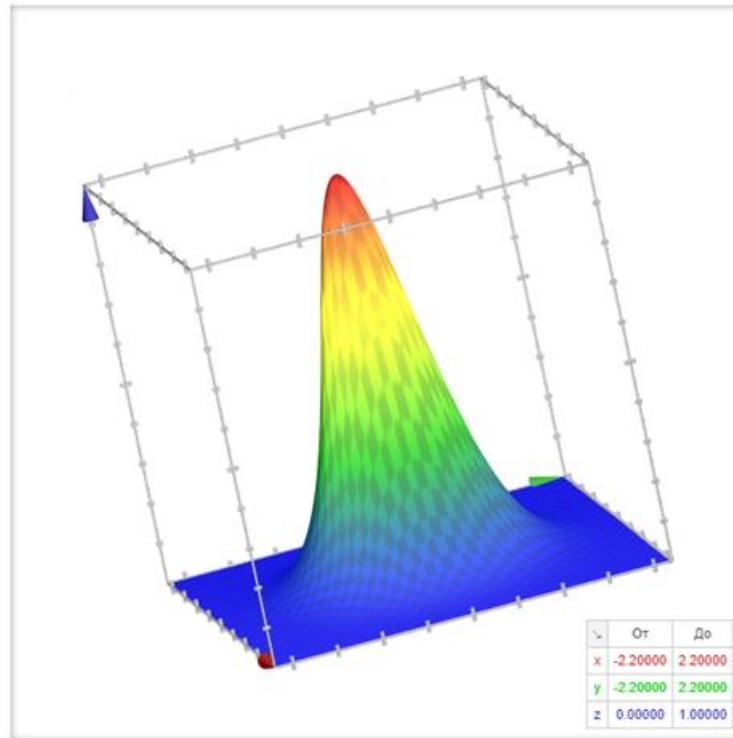


Рис. 4.2. График функции $f(x, y)$.

Сгенерированные числа, а также среднее и максимальное значения ФИТ–функции популяции для поколений $N = 1...10$ представлены в сводной таблице 4.1.

Табл. 4.1. Популяции для первых 10 итераций алгоритма.

№ поколения	X	Y	ФИТ	Максимальный результат	Средний результат
0 (исходное)	-0,276418	-2,02194	0,00300794	0,985333	0,301567
	0,896396	0,306229	0,214867		
	-1,84563	0,862288	0,00306143		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
1	-0,0764733	0,306229	0,82317	0,82317	0,337132
	0,896396	-0,0394116	0,247664		
	-0,0764733	0,862288	0,270183		
	-1,84563	-0,0394116	0,00751159		
2	-0,0764733	0,862288	0,270183	0,985333	0,573388
	-0,0764733	0,306229	0,82317		

	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	0,896396	0,306229	0,214867		
3	-0,0764733	0,306229	0,985333	0,985333	0,766005
	-0,0764733	-0,0394116	0,82317		
	-0,0764733	0,862288	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,270183		
4	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,944792
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	0,306229	0,82317		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
5	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
6	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
7	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
8	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
9	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
10	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		

Для большей наглядности рекомендуется построить графики, содержащие визуализацию всех особей популяции по поколениям. На них можно увидеть, как положение особей сгущается вокруг реального положения искомого экстремума.

Как видно из таблицы, а также на рис. 4.2., уже к 5му поколению происходит схождение алгоритма и хромосом всех особей в популяции, а результат вычисления Басараб М.А., Коннова Н.С. Методы оптимизации

приближен к искомому. Высокая скорость сходимости (что в задачах с большим количеством экстремумов может стать проблемой) обусловлена использованием элитарного механизма селекции особей для скрещивания. Решением данной проблемы может стать турнирный метод селекции, когда случайным образом особи поколения разбиваются на n групп по k особей. При этом в каждой группе производится селекция. После этого все отобранные особи объединяются для кроссовера.

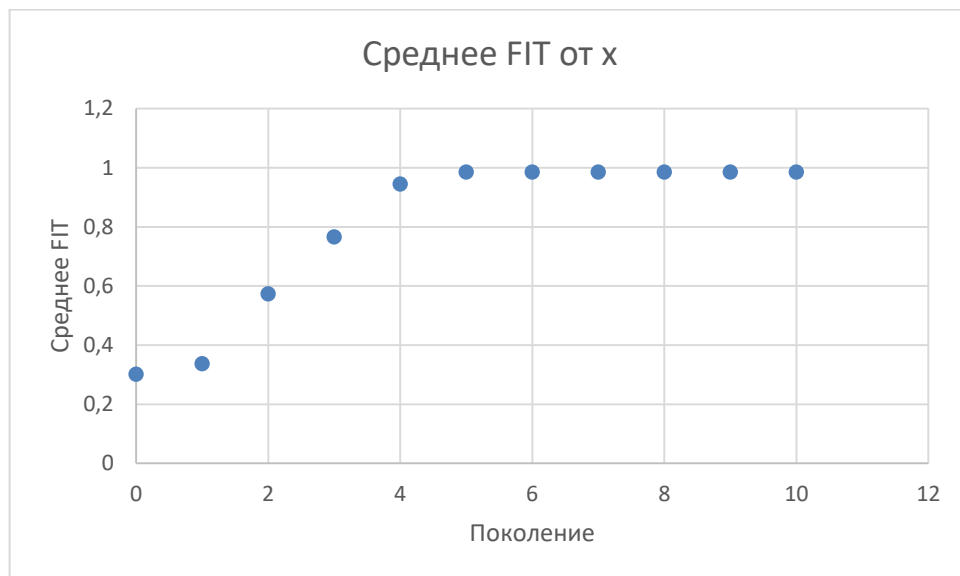


Рис. 4.2. График зависимости среднего значения ФИТ от номера популяции.

Варианты заданий

Табл. 4.2. Исходные данные

№ пп	Вид функции $f(x, y)$	Область допустимых значений D
1	$\sin x / (1 + x^2 + y^2)$	$(-2, 2) \times (-2, 2)$
2	$\cos x \cos y \exp(y/2)$	$(-2, 2) \times (-2, 2)$
3	$\exp(-x^2) \exp(-y^2) / (1 + x^2 + y^2)$	$(-2, 2) \times (-2, 2)$
4	$-\ln(1 + x^2 + y^2)$	$(-2, 2) \times (-2, 2)$
5	$\sin x \sin y / (1 + x^2 + y^2)$	$(0, 2) \times (-2, 2)$
6	$\cos x \cos y$	$(-2, 2) \times (-2, 2)$
7	$\exp(-x^2 - y^2)$	$(-2, 2) \times (-2, 2)$
8	$\sin x \exp(-x^2 - y^2)$	$(-2, 2) \times (-2, 2)$
9	$-\sqrt{\ln(1 + x^2 + y^2)}$	$(-1, 1) \times (-1, 1)$
10	$\sin^2 x / (1 + x^2 + y^2)$	$(0, 2) \times (-2, 2)$
11	$1 / \sqrt{0.01 + x^2 + y^2}$	$(-1, 1) \times (-1, 1)$

12	$1/(1 + x^2 + y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
13	$\cos x \cos y \exp(-x^2 - y^2)$	$(-2,2) \times (-2,2)$
14	$-\ln(1 + x^2 + y^2) + x^2 / 2$	$(-1,1) \times (-1,1)$
15	$\sin x \exp(-y^2)/(1 + x^2 + y^2)$	$(0,2) \times (-2,2)$
16	$-\cos x \cos y \ln(1 + x^2 + y^2)$	$(-1,1) \times (-1,1)$

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию генетического алгоритма, результаты численного эксперимента для заданного варианта исходных данных, графики исходной функции и популяции каждого поколения; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; график заданной поверхности; все хромосомы всех особей, значения их фитнес-функций, максимальное и среднее значения для популяции каждого поколения для $N=1..10$; визуализацию популяций; табличные значения параметров популяций для $N=10..100$ с шагом 10; выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Опишите основные шаги классического генетического алгоритма.
2. Объясните основную идею эволюционных алгоритмов.
3. Опишите основные преимущества и недостатки, область применимости генетических алгоритмов.
4. Перечислите виды алгоритмов селекции, кроссовера, мутации.

Лабораторная работа № 5

Решение задачи многокритериальной оптимизации

Цель работы

Изучить постановку задачи многокритериальной оптимизации (МКО); овладеть навыками решения задач МКО с помощью различных методов, осуществить сравнительный анализ результатов, полученных при помощи разных методов.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

Выбрать лучшую из альтернатив решения предложенной задачи по варианту из табл. 5.1 с точки зрения указанных критериев следующими методами:

- 1) заменой критериев ограничениями;
- 2) формированием и сужением множества Парето;
- 3) методом взвешивания и объединения критериев;
- 4) методом анализа иерархий.

Методические указания по порядку выполнения работы

1. Составить вектор весов критериев, используя шкалу $1 \div 10$ и нормализовать его.
2. Замена критериев ограничениями:
 - 2.1. Выбрать главный критерий и минимально допустимые уровни для остальных.
 - 2.2. Выбрать все приемлемые альтернативы и лучшую из них по главному критерию.
3. Формирование и сужение множества Парето:
 - 3.1. Выбрать два критерия и сформировать множество Парето графическим методом.
 - 3.2. Выбрать оптимальную альтернативу из множества Парето по минимуму расстояния до точки утопии (расстояния для вариантов $k = N$ (номер по журналу) $\bmod 3$: 1) Евклидово, 2) Манхеттен, 3) Чебышева).
4. Взвешивание и объединение критериев:
 - 4.1. Составить матрицу рейтингов альтернатив по критериям, используя шкалу $1 \div 10$ и нормализовать ее.

4.2. Умножить нормализованную матрицу на нормализованный вектор весов критериев и получить значения объединенного критерия для всех альтернатив. Выбрать наиболее приемлемую альтернативу.

5. Метод анализа иерархий:

5.1. Для каждого из критериев: составить и нормализовать матрицу попарного сравнения альтернатив, вектор приоритетов альтернатив, меру согласованности оценок и коэффициент их согласованности. Если коэффициент согласованности превосходит 0.1, вернуться к составлению матрицы попарного сравнения альтернатив по соответствующему критерию.

5.2. Составить и нормализовать матрицу попарного сравнения критериев, вектор приоритетов критериев, меру согласованности оценок и коэффициент их согласованности. Если коэффициент согласованности превосходит 0.1, вернуться к составлению матрицы попарного сравнения критериев.

5.3. Определить средневзвешенные рейтинги альтернатив путем умножения компонент векторов приоритетов альтернатив по критериям на соответствующую компоненту вектора приоритетов критериев. Выбрать наиболее приемлемую альтернативу. Сравнить с результатом выбора в п. 4.

Сведения из теории [4]

Инженерные методы решения задач многокритериальной оптимизации заключаются в сведении задачи к однокритериальной и решению ее известными алгоритмами однокритериальной оптимизации.

Рассмотрим несколько методов. Одним из самых простых методов является **метод главного критерия** или, иначе, метод замены критериев ограничениями. Как следует из названия, основная идея заключается в выборе одного из учитываемых критериев в качестве главного, оптимизируемого, (на основе мнения ЛПР), а остальные критерии заменяются ограничениями. Ограничения, как правило, диктуются различными экономическими или технологическими соображениями и чаще всего задаются в виде "не менее $X\%$ от максимального значения по данному критерию среди всех альтернатив в задаче". Затем среди альтернатив, удовлетворяющих всем заданным ограничениям, выбирается та, значение главного критерия для которой максимально (или минимально в зависимости от смысла задачи).

Взвешивание и объединение критериев

Другим подходом к поиску компромиссного решения задачи векторной оптимизации является сведение её к скалярной (однокритериальной) оптимизации при помощи свертки критериев: частные критерии $z_i(X)$, $X = (x_1, \dots, x_n)$ объединяются в обобщенный критерий $Z(X) = \Phi[z_1(X), z_2(X), \dots, z_m(X)]$, который затем оптимизируется. Наиболее распространенным обобщенным критерием является аддитивный – взвешенная сумма частных критериев.

Метод взвешенной суммы частных критериев

Обобщенный критерий записывается в виде:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m w_i z_i(X),$$

где w_i – весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq w_i \leq 1, \sum_{i=1}^m w_i = 1.$$

Величина w_i – определяет важность i -го частного критерия, при этом более важному критерию приписывается больший вес.

Примечание: как правило, частные критерии имеют различную размерность, поэтому обобщенный критерий формируется из их нормированных значений: отношений “натуральных” частных критериев к некоторой нормирующей величине.

Варианты выбора нормирующего делителя:

- 1) Директивные значения параметров, заданные заказчиком (указанные в ТЗ);
- 2) Максимальные значения критериев, достигаемых в области допустимых решений (области D);
- 3) Лучшие мировые достижения в данной области;
- 4) Разность между максимальным и минимальным значениями критерия в

$$\text{области D: } \bar{z}_i(X) = \frac{z_i^{\max} - z_i(X)}{z_i^{\max} - z_i^{\min}} \text{ или } \bar{z}_i(X) = \frac{z_i(X) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}.$$

Нормированные критерии будем обозначать через $\bar{z}_i(X)$, т.е. аддитивный критерий примет вид $Z(X) = \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X)$.

Примечание: если некоторые критерии требуется максимизировать, а другие – минимизировать, следует изменить знак всех критериев одной из групп и решать задачу поиска минимума или максимума критерия $Z(X)$.

Пусть имеется два решения X_1 и X_2 . Для обоснования перехода от X_1 к X_2 необходимо вычислить сумму абсолютных изменений всех частных критериев:

$\Delta Z = \sum_{i=1}^m w_i [\bar{z}_i(X_2) - \bar{z}_i(X_1)] = \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X_2) - \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X_1)$. В случае $\Delta Z < 0$ решения X_2 признается лучшим, чем X_1 , если критерии $Z(X)$ минимизируется, а если максимизируется, то X_1 признается лучшим, чем X_2 . Тогда при поиске минимума $Z(X)$ оптимальному решению X_{opt} соответствует $\Delta Z \geq 0$ при переходе к любому другому решению X : $\sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X) \geq \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X_{opt})$, а при поиске максимума $Z(X)$: $\sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X) \leq \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X_{opt})$. Таким образом, оптимальному решению соответствует минимум либо максимум суммы нормированных частных критериев.

Мультипликативная свертка

Теоретической основой использования мультипликативного обобщенного критерия задачи многокритериальной оптимизации является *принцип справедливой относительной компенсации*: справедливым следует считать такой компромисс, когда суммарный уровень относительного снижения значений одного или нескольких критериев не превышает суммарного уровня относительного увеличения других критериев. Математическая формулировка условия оптимальности на основе этого принципа имеет вид:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Delta z_i(X)}{z_i(X)} = 0$$

где $\Delta z_i(X), z_i(X)$ – приращение величины i -го критерия и его первоначальное значение соответственно. Полагая $\Delta z_i(X) \ll z_i(X)$, можно записать:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Delta z_i(X)}{z_i(X)} = \sum_{i=1}^m d(\ln z_i(X)) = d \ln \prod_{i=1}^m z_i(X) = 0,$$

откуда следует, что принцип справедливой относительной компенсации приводит к мультипликативному обобщенному критерию оптимальности $Z(X) = \prod_{i=1}^m z_i(X)$, в который в случае неравноценности частных критериев вводятся весовые коэффициенты w_i :

$$Z(X) = \prod_{i=1}^m z_i^{w_i}(X).$$

Замечание. Мультипликативный критерий иногда представляется в виде отношения

$$Z(X) = \prod_{i=1}^{m_1} z_i^+(X) / \prod_{j=1}^{m_2} z_j^-(X),$$

где в числителе перемножаются частные критерии, требующие максимизации и имеющие ограничения $z_i^+(X) \geq TT_i$, а в знаменателе – частные критерии, требующие минимизации и имеющие ограничения $z_i^-(X) \leq TT_i$; TT_i – значение технического требования, предъявленного к i -му критерию; $m_1 + m_2 = m$. Такая обобщенная целевая функция в дальнейшем подвергается максимизации.

Достоинство мультипликативного критерия: при его использовании не требуется нормирование частных критериев. *Недостаток*: недостаточная величина одного частного критерия может компенсироваться избыточной величиной другого.

Методы определения весовых коэффициентов

Веса критериев – самое тонкое место в проблеме многокритериального анализа в целом, и вышеприведенных методов в частности. Весовые коэффициенты w_i должны качественно отражать важность соответствующих частных критериев. Их значения выбираются исходя из анализа мирового уровня развития данной отрасли, из требований к проектируемому объекту и из существующих возможностей реализации этих требований.

Чаще всего веса назначают, исходя из интуитивного представления о сравнительной важности критериев, но необходимы специальные процедуры получения весов. Наиболее популярны на практике методы экспертных оценок.

Метод ранжирования

Пусть экспертиза проводится группой из L экспертов, которые являются квалифицированными специалистами в той области, где принимается решение. Расставляем частные критерии в порядке их важности. Цифрой 1 обозначают наиболее важный частный критерий, цифрой 2 – следующий по важности и т.д. Далее ранг 1 получает оценку m (количество частных критериев), ранг 2 – оценку $m - 1$ и т.д. до ранга m , которому присваивается оценка 1. Обозначим полученные оценки r_{ik} , где i – номер эксперта, k – номер критерия. Значения элементов $r_i = \sum_{j=1}^L r_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда весовые коэффициенты $w_i = r_i / \sum_{i=1}^m r_i$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Метод приписывания баллов

Эксперты оценивают важность частного критерия по шкале от 0 до 10, при этом разрешается оценивать важность дробными величинами или приписывать одну и ту же величину нескольким критериям. Обозначим через h_{ji} балл j -го эксперта для i -го

критерия, тогда вес i -го критерия, установленный j -м экспертом $r_{ji} = \frac{h_{ji}}{\sum_{i=1}^m h_{ji}}$, а значения весовых коэффициентов определяются аналогично методу ранжирования.

Статистическая обработка результатов экспертных оценок

Если рассматривать результаты оценок каждого из экспертов как значения некоторой случайной величины, то к ним можно применять методы математической статистики. Среднее значение оценки для i -го критерия выражает коллективное мнение группы экспертов. Степень согласованности мнений экспертов характеризуется величиной дисперсией оценок $\sigma_i^2 = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l (r_{ji} - \bar{r}_i)^2$. Чем меньше значение дисперсии, тем с большей уверенностью можно опираться на значения r_{ji} , $i = 1, \dots, m$ как оценки степени важности частных критериев F_i , $i = 1, \dots, m$. Весовые коэффициенты $w_i = \frac{\bar{r}_i}{\sum_{i=1}^m \bar{r}_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

На достоверность экспертизы существенно влияют такие факторы, как численный состав экспертной группы, уровень компетентности экспертов; состав вопросов, представляемых экспертам и т.д. Индивидуальные экспертные оценки также носят на себе печать случайности: настроение, самочувствие, обстановка, а также знание и опыт.

Формальные методы определения весовых коэффициентов – это приемы, позволяющие по информации о частных критериях оптимальности определять значения весовых коэффициентов w_i . Приведем 2 приема:

Прием 1. Для каждого частного критерия оптимальности F_i , $i = 1, \dots, m$ вычисляется коэффициент относительного разброса по формуле:

$$\delta_i = \frac{F_i^+ - F_i^-}{F_i^+} = 1 - \frac{F_i^-}{F_i^+}, \text{ где } F_i^- = \min_{X \in D} F_i(X), F_i^+ = \max_{X \in D} F_i(X).$$

Весовые коэффициенты получают наибольшее значение для тех критериев, относительный разброс которых наиболее значителен:

$$w_i = \frac{\delta_i}{\sum_{k=1}^m \delta_k}, i = 1, \dots, m.$$

Прием 2. Пусть все $F_i^- \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Рассматриваются коэффициенты $\beta_i(x) = \frac{F_i(x) - F_i^-}{F_i^-}$, характеризующие отклонение частных критериев оптимальности от их наименьших значений, и важность i -го критерия зависит от выполнения неравенства $\beta_i \leq \xi_i$ (*).

Значения ξ_i , $i = 1, \dots, m$ задаются ЛПР и характеризуют важность критериев (чем важнее критерий, тем меньше значение ξ_i). Пусть R_i^* – наибольший радиус окрестности точки X_i^*

– точки минимума i -го критерия оптимальности, точки которой (x_1, \dots, x_n) удовлетворяют неравенству (*): $R_i^* = \max_{X \in D} \left\{ \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^*)^2 \mid \frac{F_i(x_1, \dots, x_n) - F_i^-}{F_i^-} \leq \xi_i \right\}$.

Чем больше значение R_i^* , тем меньше выбирается значение весового коэффициента:

$$w_i = \frac{1/R_i^*}{\sum_{i=1}^m 1/R_i^*}, i = 1, \dots, m.$$

Метод попарных сравнений

Для самостоятельного выполнения задания (без группы экспертов) рекомендуется следующий метод попарных сравнений критериев друг с другом:

$$f_i \succ f_j \Leftrightarrow \text{“цель } i \text{ важнее цели } j \text{”}$$

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & f_i \succ f_j \\ 0, & f_i \prec f_j \\ 0.5 & f_i \sim f_j \end{cases}$$

(всего $m(m-1)/2$ значений).

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} \gamma_{ij}$$

Обобщением способа попарных сравнений является **метод Саати (метод анализа иерархий)**, где попарно сравниваются не только критерии между собой для определения их весовых коэффициентов, но и альтернативы друг с другом по принципу "каждая с каждой" по каждому из критериев. Пример реализации таких сравнений приведен в практической части данной работы.

Формирование и сужение множества Парето

Рассмотрим следующий метод решения задачи МКО. Пусть для каждого решения $X = (x_1, \dots, x_n)$ из области D определен набор его оценок по всем критериям: $(z_1(X), z_2(X), \dots, z_m(X))$ – *векторная оценка* решения X . Сравнение двух любых решений представляет собой сравнение их векторных оценок. Далее будем считать, не нарушая общности, что оптимальным является решение, которому соответствует минимальное значение каждого частного критерия $z_i(X), i = 1, \dots, m$.

1. Решение X_1 *доминирует* решение X_2 , если $z_i(X_1) \leq z_i(X_2) \forall i = 1, \dots, m$ и хотя бы для одного (j -го) критерия $z_j(X_1) < z_j(X_2)$, т.е. переход от X_2 к X_1 не приведет к росту значения какого-либо критерия, но значение одного из критериев точно уменьшится.

2. Решение, не доминируемое никаким другим решением, называется *Парето – оптимальным*. Множество таких решений называется *множеством Парето* (обозначается

буквой $P, P \subset D$). Парето – оптимальные решения располагаются между решениями, оптимальными с точки зрения каждого частного критерия.

3. Множество векторных оценок, соответствующих множеству D , называется *критериальным пространством* Y_D , множество Парето – *областью компромиссов* Y_P , множество доминируемых решений – *областью согласия* Y_C .

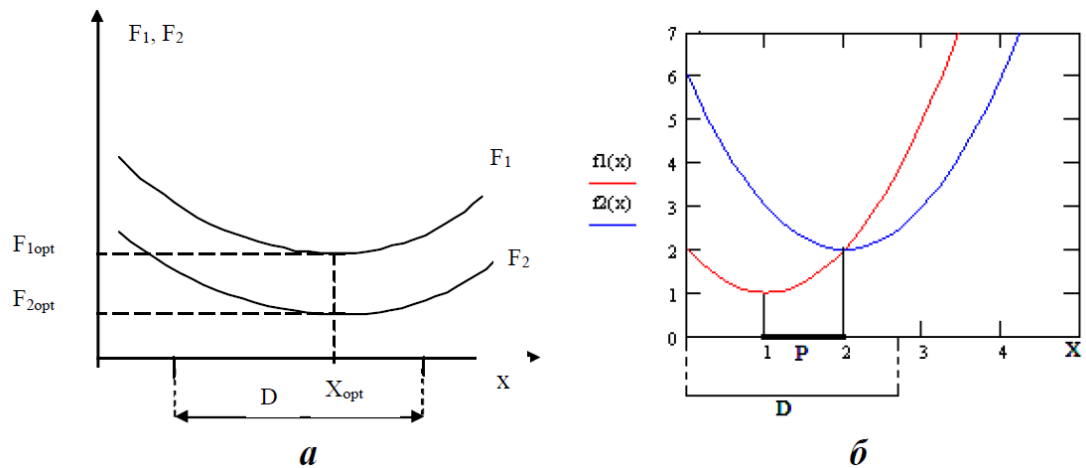


Рис. 5.1. Отсутствие (а) и наличие (б) противоречий между частными критериями.

В области согласия нет противоречий между частными критериями оптимальности, т.е. в этой области существует решение, оптимальное с точки зрения всех критериев, см. рис. 5.1а. В области компромиссов частные критерии противоречат друг другу: минимум по каждому из них соответствует различным Парето – оптимальным решениям, см. рис. 5.1б.

Оптимальность по Парето означает, что невозможно улучшить значение одного из частных критериев, не ухудшая значения хотя бы одного из остальных.

Пример. Пусть множество D состоит из 11 решений, оцениваемых двумя критериями. Векторные оценки решений следующие: $Z(X_1) = (2; 4)$, $Z(X_2) = (3; 5)$, $Z(X_3) = (3; 3)$, $Z(X_4) = (5; 2)$, $Z(X_5) = (4; 3)$, $Z(X_6) = (1; 3)$, $Z(X_7) = (2; 3)$, $Z(X_8) = (3; 2)$, $Z(X_9) = (2; 2)$, $Z(X_{10}) = (3; 1)$, $Z(X_{11}) = (2; 1)$. Критериальное пространство иллюстрирует рис. 5.2а. Множество Парето образуют решения, лежащие на правой верхней или левой нижней границе области D : если оба критерия необходимо максимизировать, то множество Парето образуют решения X_2, X_4, X_5 а если минимизировать – то решения X_6, X_{11} .

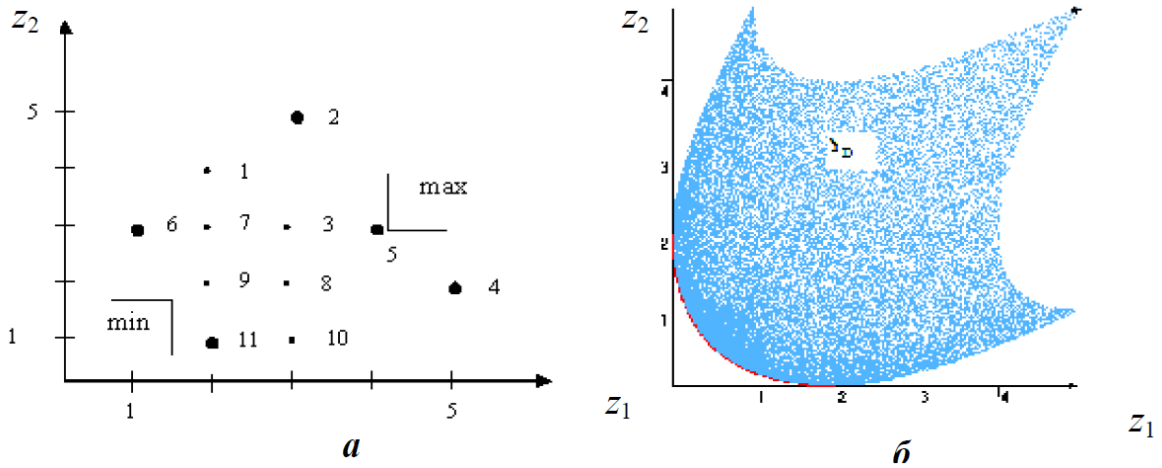


Рис. 5.2. Критериальные пространства и множества Парето.

Замечания.

1. Для определения множества Парето используют правило «уголка»: уголок вида L используется для определения области компромиссов в критериальном пространстве, когда критерии максимизируются, а уголок \neg – когда минимизируются [4].
2. В случае, когда множество D является непрерывным, критериальное пространство представляет собой некоторую область на плоскости, см. рис. 5.2б. Множество Парето в данном случае представляет собой часть границы области Y_D : если критерии минимизируются – «юго-западную границу», если максимизируются – «северо-восточную».
3. Если область Y_D не выпуклая, ее Парето-оптимальная граница может состоять из отдельных линий и/или точек. На рис. 5.2б для случая максимизации критериев это правый верхний пик.

Построение множества Парето

Множество Парето в двумерном пространстве критериев ($m = 2$) называется *компромиссной кривой*. Если $(y_1^{(1)}, y_1^{(2)})$ и $(y_2^{(1)}, y_2^{(2)})$ – произвольные точки, принадлежащие компромиссной кривой (КК), и $y_1^{(1)} < y_2^{(1)}$, то $y_1^{(2)} > y_2^{(2)}$, т.е. в двумерном представлении критериального пространства КК не содержит ни горизонтальных, ни вертикальных отрезков. Она может состоять из несвязных отрезков, содержать изолированные точки и представляет собой геометрическое место точек соприкосновения поверхностей уровня $z_1(X) = b_1$ и $z_2(X) = b_2$, в которых справедливо равенство: $grad z_1 = -\delta grad z_2, 0 \leq \delta \leq \alpha$.

Если функции $z_1(X)$ и $z_2(X)$ дифференцируемы, то равенство $gradz_1 = -\delta gradz_2$ эквивалентно системе алгебраических уравнений $\frac{\partial z_1}{\partial x_j} = -\delta \frac{\partial z_2}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, n$, которая определяет кривую в пространстве параметров $x_1 = \varphi_1(\delta), \dots, x_n = \varphi_n(\delta)$. КК представляет собой участок этой кривой, на котором $\delta \geq 0$, принадлежащий множеству D , и определяет параметрическими уравнениями:

$$z_1 = z_1(\varphi_1(\delta), \dots, \varphi_n(\delta)), z_2 = z_2(\varphi_1(\delta), \dots, \varphi_n(\delta)), \delta \geq 0.$$

Способы сужения множества Парето

Оптимально-компромиссным решением называется одно из Парето-оптимальных, предпочтительное с точки зрения ЛПР. Выбор ЛПР зависит от имеющейся информации о важности частных критериев.

Для выбора оптимально-компромиссного решения в каждой конкретной многокритериальной задаче необходимо использовать дополнительную информацию, которая при формировании совокупности критериев осталась неформализованной и потому неиспользованной.

Способы сужения множества Парето с использованием дополнительной информации:

- 1) *Указание граничных значений критериев.* Дополнительная информация в этом случае имеет вид: $z_i(X_{opt}) \leq C_i, z_j(X_{opt}) \geq C_j, i, j, k = 1, \dots, m, i \neq j$. Каждое из чисел C_i представляет собой верхнюю или нижнюю границу для i -ого критерия.
- 2) *Субоптимизация.* В этом случае дополнительная информация представляет собой указание на один из критериев как важнейший и задание граничных значений для остальных.
- 3) *Лексикографическая оптимизация.* Критерии упорядочиваются по относительной важности следующим образом: $z_i \succ z_j \succ \dots \succ z_k, i, j, k = 1, \dots, m, i \neq j \neq k$: выбирается важнейший критерий, затем следующий за ним по важности и т.д. до наименее важного.
- 4) *Методы ЭЛЕКТРА.* Для каждого из m критериев определяется вес – положительное число, характеризующее его важность.
- 5) *Расстояние до точки утопии.* (Точка с идеальными значениями по всем критериям).

Практическая часть

Пример выполнения работы

Рассмотрим следующую задачу:

Выбор материала водопроводных труб для ремонта.

Доступные альтернативы: А. Металлопласт; В. Армированный пластик; С. Нержавеющая сталь; D. Черная сталь.

Учитываемые критерии: 1. Дешевизна; 2. Допустимое давление; 3. Долговечность; 4. Внешний вид.

Описание предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР):

Дешевизна: самая дорогая – нержавеющая сталь, металлопласт немного дешевле, армированный пластик – еще дешевле, черная сталь – самая дешевая.

Допустимое давление: самое большое – у нержавеющей и черной стали, у металлопласта – существенно ниже, у армированного пластика – еще ниже.

Долговечность: самый долговечный – металлопласт, немного менее – нержавеющая сталь, еще менее – армированный пластик, самая недолговечная – черная сталь.

Внешний вид: лучший – у армированного пластика, чуть хуже – у металлопласта, существенно хуже – у нержавеющей и черной стали.

Требуется выбрать лучшую из альтернатив решения предложенной задачи с точки зрения указанных критериев следующими методами:

- 1) заменой критериев ограничениями;
- 2) формированием и сужением множества Парето;
- 3) методом взвешивания и объединения критериев;
- 4) методом анализа иерархий.

Ход работы:

1. Составляем вектор весов критериев (с нашей точки зрения), используя шкалу 1÷10.

Дешевизна	Допустимое давление	Долговечность	Внешний вид
6	8	4	2

Нормализовав, получим вектор (0.3, 0.4, 0.2, 0.1);

1) Метод замены критериев ограничениями

Составим матрицу А оценок для альтернатив.

Критерии	1	2	3	4
A	3	3	5	6
B	4	2	3	5
C	2	7	4	1

<i>D</i>	5	7	2	1
-----------------	---	---	---	---

Выберем в качестве главного критерия дешевизну (критерий 1).

Установим минимально допустимые уровни для остальных критериев:

Допустимое давление не менее $0.2 * A_{max2}$.

Долговечность не менее $0.5 * A_{max3}$.

Внешний вид не менее $0.1 * A_{max4}$.

Проведём нормировку матрицы (кроме столбца главного критерия) по формуле:

$$A_{ij} = \frac{A_{ij} - A_{minj}}{A_{maxj} - A_{minj}}, \text{ где } A_{minj} \text{ и } A_{maxj} - \text{минимальное и максимальное значение в столбце}$$

соответственно.

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>A</i>	3	1/5	1	1
<i>B</i>	4	0	1/3	0.8
<i>C</i>	1	1	2/3	0
<i>D</i>	5	1	0	0

При заданных условиях приемлемыми являются следующие решения:

альтернатива А – металлопласт.

Примечание: для данных оценок ослабление ограничений по критериям 2-4 не приведет к существенным изменениям, только если снизить требования до 0. В случае решения задач, когда установленным ограничениям по критериям, кроме главного, удовлетворяет несколько альтернатив, то среди них выбирается в качестве итогового решения та, значение главного критерия для которой максимально (или минимально, если критерий минимизируется).

2) Формирование и сужение множества Парето

Выберем в качестве главных критериев для данного метода допустимое давление и долговечность. Допустимое давление – по оси x , долговечность – по оси y . Сформируем множество Парето графическим методом (см. рис. 5.1). Об критерия максимизируются, поэтому точка утопии находится в правом верхнем углу графика.

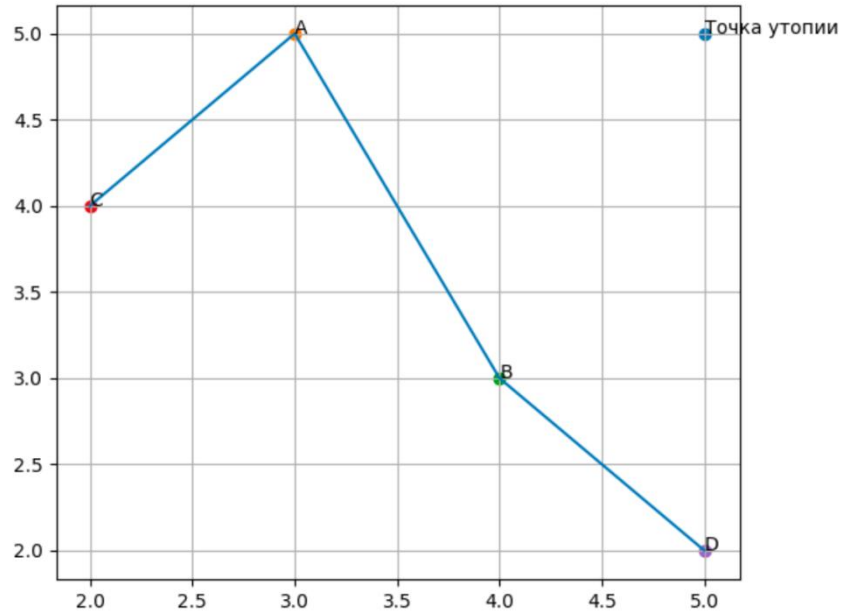


Рис. 5.1. Графическое решение методом сужения множества Парето.

Исходя из графика можно сказать, что Манхэттенское расстояние до точки утопии минимально для варианта А (металлопласт). А значит альтернатива А оптимальна.

3) Взвешивание и объединение критериев

Составим матрицу рейтингов альтернатив по критериям, используя шкалу 1÷10:

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>A</i>	3	3	5	6
<i>B</i>	4	2	3	5
<i>C</i>	2	7	4	1
<i>D</i>	5	7	2	1

Нормализуем ее:

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>A</i>	3/14	3/19	5/14	6/13
<i>B</i>	2/7	2/19	3/14	5/13
<i>C</i>	1/7	7/19	2/7	1/13
<i>D</i>	5/14	7/19	1/7	1/13

Составим экспертную оценку критериев (по методу попарного сравнения):

$$\gamma_{12} = 0.5; \quad \gamma_{23} = 1; \quad \gamma_{34} = 1;$$

$$\gamma_{13} = 1; \quad \gamma_{24} = 1;$$

$$\gamma_{14} = 1;$$

Получим вектор весов критериев:

$$\alpha_1 = 0.5 + 1 + 1 = 2.5;$$

$$\alpha_2 = 0.5 + 1 + 1 = 2.5;$$

$$\alpha_3 = 0 + 0 + 1 = 1;$$

$$\alpha_4 = 0 + 0 + 0 = 0;$$

Нормализуем его и получим $\mathbf{a} = (0.42, 0.42, 0.16, 0)$.

Умножим нормализованную матрицу на нормализованный вектор весов критериев и получим значения объединенного критерия для всех альтернатив:

$$\begin{pmatrix} 0.214 & 0.158 & 0.357 & 0.462 \\ 0.286 & 0.105 & 0.214 & 0.385 \\ 0.143 & 0.368 & 0.286 & 0.077 \\ 0.357 & 0.368 & 0.143 & 0.077 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.417 \\ 0.417 \\ 0.167 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.215 \\ 0.199 \\ 0.261 \\ 0.326 \end{pmatrix}$$

Как видно из полученной интегральной оценки, наиболее приемлемой является альтернатива D - чёрная сталь.

Отличие полученного решения по методу линейной свертки критериев с предыдущими методами возникает из-за того, что в данном методе критерий прочности оказался важнее долговечности.

4) Метод анализа иерархий:

Для каждого из критериев составим и нормализуем матрицу попарного сравнения альтернатив:

- *Дешевизна*

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>Сумма по строке</i>	<i>Нормированная сумма по строке</i>
<i>A</i>	1	1/3	3	1/5	4.533	0.144
<i>B</i>	3	1	5	1/3	9.333	0.296
<i>C</i>	1/3	1/5	1	1/7	1.167	0.053
<i>D</i>	5	3	7	1	16	0.507

Отношение согласованности = 0.11 чуть больше 0.1

- *Допустимое давление*

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>Сумма по строке</i>	<i>Нормированная сумма по строке</i>
<i>A</i>	1	2	1/5	1/5	3.4	1.102
<i>B</i>	1/2	1	1/7	1/7	1.785	0.054
<i>C</i>	5	7	1	1	14	0.421
<i>D</i>	5	7	1	1	14	0.421

Отношение согласованности = 0.01

- *Долговечность*

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>Сумма по строке</i>	<i>Нормированная сумма по строке</i>
<i>A</i>	1	5	3	7	16	0.507
<i>B</i>	1/5	1	1/3	3	4.53	0.144
<i>C</i>	1/3	3	1	5	9.33	0.296
<i>D</i>	1/7	1/3	1/5	1	1.676	0.053

Отношение согласованности = 0.12 чуть больше 0.1

- *Внешний вид*

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>Сумма по строке</i>	<i>Нормированная сумма по строке</i>
<i>A</i>	1	1/3	5	5	11.33	0.33
<i>B</i>	3	1	7	7	18	0.529
<i>C</i>	1/5	1/7	1	1	2.343	0.069
<i>D</i>	1/5	1/7	1	1	2.343	0.069

Отношение согласованности = 1.39 сильно больше 0.1. Данное противоречие происходит из-за огромной разницы между альтернативами исходя из условий задачи.

- *Оценка приоритетов критериев*

	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>Сумма по строке</i>	<i>Нормированная сумма по строке</i>
<i>1</i>	1	3	5	7	16	0.507
<i>2</i>	1/3	1	3	5	9.333	0.295

3	1/5	1/3	1	3	12.2	0.144
4	1/7	1/5	1/3	1	1.676	0.053

Отношение согласованности = 0.12 чуть больше 0.1

Составим матрицу (i – альтернатива, j - критерий) и умножим на столбец оценки приоритетов:

0.144	0.102	0.507	0.333	0.507	0.194
0.296	0.054	0.144	0.529	$\times 0.296$	$= 0.215$
0.053	0.421	0.296	0.069	0.144	0.198
0.507	0.421	0.053	0.069	0.053	0.393

Оценив полученный вектор, можем сделать вывод, что оптимальным вариантом является D – чёрная сталь.

Примечание: в данной работе в случае отношения согласованности больше 0.1 предлагается переназначение экспертных оценок альтернативам и повторение процедуры расчета и выбора.

Результаты могут отличаться в зависимости от применяемых методов решения, главным образом, в зависимости от оценки критериев. В таких методах, как анализ иерархий и линейная свертка критериев, также сравниваются между собой и сами критерии. Для приведенных данных можно заметить, что отношение согласованности и вектор весов критериев α показывают, что сравнение альтернатив, которые сильно отличаются между собой по нескольким критериям, может оказываться неточным.

Варианты заданий

Табл. 5.1. Задачи многокритериальной оптимизации.

Примечание: заменять указанные критерии на обратные или альтернативные нельзя.

№ п/п	Задача, альтернативы	Критерии	Описание предпочтений
1	Покупка автомобиля: А. Suzuki; В. Mitsubishi; С. Honda; D. Toyota.	1. Стоимость; 2. Расходы на обслуживание; 3. Расход бензина; 4. Комфорт.	Стоимость: Suzuki существенно дороже всех, Honda немного дороже Mitsubishi, Toyota существенно дешевле всех. Расходы на обслуживание: Mitsubishi дороже всех, Toyota и Suzuki примерно равны, Honda дешевле всех. Расход бензина: самый

			<p>высокий у Suzuki, немного меньше у Honda, существенно меньше у Mitsubishi, самый низкий – у Toyota.</p> <p>Комфорт: самая комфортная – Toyota, чуть менее – Mitsubishi, существенно хуже – Honda, самая некомфортная – Suzuki.</p>
2	<p>Выбор университета для поступления:</p> <p>A. Oxford; B. МГУ; C. МФТИ; D. ТГУ</p>	<p>1. Размер стипендии; 2. Квалификация преподавателей; 3. Стоимость жизни в городе; 4. Престижность диплома.</p>	<p>Стипендия: Oxford не платит стипендии студентам, в ТГУ стипендия небольшая, в МФТИ – больше, в МГУ – существенно больше.</p> <p>Преподаватели: самые квалифицированные – в Oxford, чуть менее квалифицированные – в МГУ, менее – в МФТИ, самая низкая квалификация – в ТГУ.</p> <p>Стоимость жизни: самая низкая – в Томске, существенно выше – в Долгопрудном, гораздо выше – в Москве, самая высокая – в Лондоне.</p> <p>Диплом: самый престижный – Oxford, немного менее – МГУ, еще чуть менее – МФТИ, самый непрестижный – ТГУ.</p>
3	<p>Выбор спутницы жизни:</p> <p>A. Татьяна; B. Лариса; C. Наталья; D. Ольга.</p>	<p>1. Внешность; 2. Финансовые запросы; 3. Домовитость; 4. Характер.</p>	<p>Внешность: Лариса – красавица, Татьяна – довольно милοвидна, Ольга – симпатична и стройна, Наталья – менее привлекательна.</p> <p>Финансовые запросы: самые большие – у Ольги, чуть менее – у Татьяны, выше среднего – у Натальи, ниже среднего – у Ларисы.</p> <p>Домовитость: самая хозяйственная – Наталья, чуть менее – Ольга, существенно менее – Татьяна, еще менее – Лариса.</p> <p>Характер: Лариса – мягкая и покладистая, Наталья – строгая, но справедливая, Татьяна – «душа компании», но «себе на уме», Ольга – с диктаторскими наклонностями.</p>
4	<p>Выбор дороги:</p>	<p>1. Расстояние;</p>	<p>Расстояние: самое большое –</p>

	<p>A. Автострада; В. Шоссе; С. Грунтовка; D. Проселок</p>	<p>2. Качество покрытия; 3. Контроль; 4. Инфраструктура.</p>	<p>по автостраде, чуть меньше – по шоссе, существенно меньше – по грунтовке, самое короткое – по проселку. Качество покрытия: лучшее – на автостраде, существенно хуже – на шоссе, еще хуже – на грунтовке, отсутствует – на проселке. Контроль: самый жесткий – на автостраде, на шоссе – почти такой же жесткий, много мягче – на грунтовке, на проселке – практически отсутствует. Инфраструктура: самая развитая – на шоссе, чуть менее – на автостраде, существенно менее – на грунтовке, на проселке – практически отсутствует.</p>
5	<p>Выбор породы дерева для строительства: A. Береза; B. Сосна; C. Дуб; D. Лиственница.</p>	<p>1. Цена за 1 м³; 2. Легкость обработки; 3. Долговечность; 4. Водостойкость.</p>	<p>Цена: самый дорогой – дуб, лиственница немного дешевле, сосна еще дешевле, береза – самая дешевая. Обработка: самая легкая в обработке – береза, сосна – существенно тяжелее, дуб – еще тяжелее, самая тяжелая в обработке – лиственница. Долговечность: самая долговечная – лиственница, чуть менее – дуб, существенно менее – сосна, самая недолговечная – береза. Водостойкость: самая водостойкая – лиственница, чуть менее – сосна, существенно менее – дуб, еще менее – береза.</p>
6	<p>Выбор устройства для работы: A. Компьютер; B. Ноутбук; C. Планшет; D. Смартфон.</p>	<p>1. Начальная цена; 2. Стоимость обслуживания; 3. Объем памяти; 4. Размер экрана.</p>	<p>Цена: компьютер и ноутбук сравнимы по стоимости, смартфон немного дешевле, планшет существенно дешевле. Обслуживание: самый дорогой – смартфон, планшет немного дешевле, ноутбук еще дешевле, самый дешевый – компьютер. Объем памяти: компьютер и ноутбук имеют и внешнюю и оперативную память</p>

			сравнимой емкости, планшет и смартфон – только оперативную память меньшей емкости. Экран: самый большой – у компьютера, немного меньше – у ноутбука, существенно меньше – у планшета, самый маленький – у смартфона.
7	Выбор спутника жизни: А. Анатолий; В. Александр; С. Владимир; D. Сергей	1. Образование; 2. Физическая подготовка; 3. Внешность; 4. Характер.	Образование: Сергей учится в аспирантуре, Александр закончил технический вуз, Владимир – военное училище, Анатолий – экономический колледж. Физподготовка: самый физически крепкий – Владимир, Александр и Сергей уступают немного, Анатолий – существенно. Внешность: Анатолий и Владимир – красавцы, Александр и Сергей – довольно симпатичны. Характер: Анатолий – повеса и сердцеед, Александр – оптимист и трудяга, Владимир – лидер и карьерист, Сергей – умница и самоед.
8	Выбор санатория: А. "Липецк", г. Липецк; В. "Сосновый бор", Тамбовский район; С. "Лесная жемчужина", г. Котовск; D. "Сосны", г. Пенза.	1. Качество лечения; 2. Уровень сервиса; 3. Качество питания; 4. Расстояние от Москвы.	Лечение: самое качественное – в "Липецке", чуть хуже – в "Соснах", еще хуже – в "Лесной жемчужине", самое некачественное – в "Сосновом бору". Сервис: лучший – в "Сосновом бору", немного хуже – в "Соснах", существенно хуже – в "Липецке" и "Лесной жемчужине". Питание: самое качественное – в "Соснах", немного хуже – в "Лесной жемчужине", существенно хуже – в "Липецке" и "Сосновом бору". Расстояние: дальше всего – до Пензы, до Липецка существенно ближе, "Сосновый бор" и "Лесная

			жемчужина" – средне.
9	Выбор интернет-провайдера; А. "МГТС"; В. "Ростелеком"; С. "Акадо"; D. "Qwerty".	1. Стоимость пакета "Эконом+ТВ"; 2. Скорость; 3. Служба поддержки; 4. Качество услуг.	Стоимость: самая большая – у "Ростелекома", немного меньше – у "МГТС", существенно меньше – у "Qwerty", самая маленькая – у "Акадо". Скорость: самый скоростной – "МГТС", чуть менее – "Qwerty", еще меньше – у "Ростелеком", самый медленный – "Акадо". Служба поддержки: самая оперативная и компетентная – у "МГТС", немного хуже – у "Акадо" и "Qwerty", самая плохая – у "Ростелеком". Услуги: лучшее качество – у "Qwerty", чуть хуже – у "Ростелеком", еще хуже – у "МГТС", самые некачественные – у "Акадо".
10	Выбор страны для поездки в отпуск: А. Испания; В. Турция; С. Куба; D. Индонезия.	1. Цена тура (авиаперелет+проживание); 2. Удаленность от места жительства; 3. Качество пляжа; 4. Наличие интересных достопримечательностей.	Цена: самая дорогая – Индонезия, Куба немного дешевле, Испания – существенно дешевле, Турция – самая дешевая. Удаленность от места жительства: самая большая – у Индонезии, чуть ближе – Куба, Испания – существенно ближе, Турция – еще ближе. Качество пляжа: самый лучший – в Индонезии, немного хуже – на Кубе, еще менее – в Испании, наименее качественный – в Турции. Наличие интересных достопримечательностей: наибольшее количество – в Испании, существенно меньше – на Кубе, еще меньше – в Индонезии и меньше всего в Турции.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию нейросети, аппроксимирующей заданную в варианте функцию,

результаты обучения сети со всеми промежуточными шагами; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решения задачи по каждому из методов со всеми промежуточными шагами и указанием выбранных параметров; выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Сущность, достоинства и недостатки метода перевода критериев в ограничения?
2. Порядок формирования объединенного критерия?
3. Как можно оценить корректность экспертного выбора весов критериев?
4. Основные этапы метода анализа иерархий?
5. В чем суть проверки согласованности оценок при анализе иерархий?

Лабораторная работа № 6

Исследование стохастической фильтрации сигналов как задачи двухкритериальной оптимизации с использованием методов прямого пассивного поиска

Цель работы

Изучить основные принципы многокритериальной оптимизации в комбинации с методами случайного и прямого пассивного поиска применительно к задаче фильтрации дискретного сигнала методом взвешенного скользящего среднего.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

На интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$ задан сигнал $f_k = f(x_k)$, где дискретная последовательность отсчетов $x_k = x_{\min} + k(x_{\max} - x_{\min}) / K$, $k = 0, \dots, K$, K – количество отсчетов. На сигнал наложен дискретный равномерный шум $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_K)$ с нулевым средним и амплитудой, равномерно распределенной на интервале $[-a, a]$: $\tilde{f}_k = f_k + \sigma_k$, $\sigma_k = \text{rnd}(-a, a)$. В зависимости от варианта работы необходимо осуществить *фильтрацию сигнала* \tilde{f}_k одним из *методов взвешенного скользящего среднего* (табл. 6.1) [5].

Модельная задача

Исходный сигнал:

$$\begin{aligned} f_k &= \sin x_k + 0,5, \\ x_k &= x_{\min} + k(x_{\max} - x_{\min}) / K, \\ x_{\min} &= 0, \quad x_{\max} = \pi, \\ k &= 0, \dots, K, \quad K = 100; \end{aligned}$$

амплитуда равномерного шума: $2a = 0,5$;

дискретизация веса свертки: $\lambda_l = l / L$, $l = 0, \dots, L$, $L = 10$;

вероятность попадания в окрестность экстремума: $P = 0,95$;

интервал неопределенности: $\varepsilon = 0,01$;

размер скользящего окна:

- $r = 3$,
- $r = 5^*$.

Сведения из теории

Табл. 6.1. Формулы взвешенного скользящего среднего

Метод	Формула расчета ($k = M, \dots, K-M$)
Среднее арифметическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \sum_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j \alpha_{j+M+1-k}$
Среднее геометрическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \prod_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j^{\alpha_{j+M+1-k}}$
Среднее гармоническое	$\bar{f}_k(\alpha) = \left(\sum_{j=k-M}^{k+M} \frac{\alpha_{j+M+1-k}}{\tilde{f}_j} \right)^{-1}$
Среднее квадратическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \sqrt{\sum_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j^2 \alpha_{j+M+1-k}}$

В формулах табл. 1 \bar{f}_k – значения отфильтрованного сигнала; $r = 2M + 1$ – размер окна усреднения; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ – нормированные весовые коэффициенты, такие что

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1 \quad (\alpha_j \geq 0). \quad (1)$$

Набор весов α должен обеспечивать оптимизацию отфильтрованного сигнала по следующим критериям [5]:

$$\omega(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha} \text{ (уровень «зашумленности»);}$$

$$\delta(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha} \text{ (уровень отличия от исходного сигнала).}$$

В зависимости от варианта работы используется тот или иной набор функций зашумленности и отличия (табл. 6.2).

Табл. 6.2. Метрики, используемые при расчете критериев зашумленности и отличия

Метрика	Критерий зашумленности, ω	Критерий отличия, δ
Евклидова	$\sqrt{\sum_{k=1}^K (\bar{f}_k - \bar{f}_{k-1})^2}$	$\sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K (\bar{f}_k - \tilde{f}_k)^2}$
«Манхеттенская»	$\sum_{k=1}^K \bar{f}_k - \bar{f}_{k-1} $	$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \bar{f}_k - \tilde{f}_k $
Чебышева	$\max_{k=1, \dots, K} \bar{f}_k - \bar{f}_{k-1} $	$\max_{k=0, \dots, K} \bar{f}_k - \tilde{f}_k $

Так как оба критерия, ω и δ , являются взаимнопротиворечивыми, для решения задачи подбора весов α необходимо использовать *методы многокритериальной оптимизации* [6]. В данной работе следует применить *линейную свертку критериев*

$$J = \lambda\omega + (1-\lambda)\delta \rightarrow \min_{\alpha}, \quad (\lambda \in [0,1]).$$

Необходимо для различных значений весов $\lambda_l = l/L$ ($l=0, \dots, L$), используя *метод случайного поиска* [7], осуществить поиск минимума $J(\alpha)$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε . Число испытаний N при этом оценивается по формуле

$$N = \left\lceil \frac{\ln(1-P)}{\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{x_{\max} - x_{\min}}\right)} \right\rceil.$$

Случайные значения весов берутся симметричными относительно центрального веса α_{M+1} и рассчитываются с учетом условия нормировки (1), т.е. равномерно распределены на последовательности остаточных интервалов:

$$\alpha_{M+1} = \text{rnd}(0, 1),$$

$$\alpha_m = \alpha_{r-m+1} = 0,5 \text{rnd}\left(0, 1 - \sum_{s=m+1}^{r-m} \alpha_s\right), \quad (m = 2, \dots, M),$$

$$\alpha_1 = \alpha_r = 0,5\left(1 - \sum_{s=2}^{r-1} \alpha_s\right).$$

Конечная цель работы заключается в нахождении оптимального веса λ^* (методом *прямого пассивного поиска* на сетке λ_l [1]), при котором минимизируется расстояние от приближенно найденного оптимального значения интегрального критерия $J^*(\omega^*, \delta^*)$ до *идеальной точки* $\hat{J}(\hat{\omega}, \hat{\delta}) = \hat{J}(0, 0) = 0$ [6]:

$$\text{dist}(J^*, \hat{J}) \rightarrow \min_{\lambda}.$$

Метрики расстояний dist приведены в табл. 6.3.

Табл. 6.3. Метрики, используемые при расчете расстояния до идеальной точки

Метрика	Формула расстояния dist
Евклидова	$\sqrt{\omega^2 + \delta^2}$
«Манхеттенская»	$ \omega + \delta $
Чебышева	$\max(\omega, \delta)$

Практическая часть

Пример выполнения работы

Ход работы:

Исходный сигнал:

$$f_k = \sin x_k + 0,5,$$

$$x_k = x_{\min} + k(x_{\max} - x_{\min}) / K,$$

$$x_{\min} = 0, \quad x_{\max} = \pi,$$

$$k = 0, \dots, K, \quad K = 100;$$

амплитуда равномерного шума: $2a = 0,5$;

дискретизация веса свертки: $\lambda_l = l / L, l = 0, \dots, L, L = 10$;

вероятность попадания в окрестность экстремума: $P = 0,95$;

интервал неопределенности: $\varepsilon = 0,01$;

размер скользящего окна:

- $r = 3$ – см. рис. 6.1, табл. 6.4, рис. 6.2.

- $r = 5^*$ – см. рис. 6.3, табл. 6.5, рис. 6.4.

Применяя случайный поиск для поиска вектора α , прямой пассивный поиск к поиску точки, максимально приближенной к точке утопии, можно усреднить значения, и тем самым приблизить зашумленный график к графику изначального сигнала.

В результате были получим:

- значения функционала J и критериев ω, δ для оптимальных значений весов:

$$J = 0.25334$$

$$\omega = 0.128$$

$$\delta = 0.2848$$

- найденное оптимальное значение веса λ^* :

$$\lambda^* = 0.2$$

Рекомендация: отдельной задачей в данной работе является выбор масштаба системы координат (ω, δ) для наглядного отображения рассчитанных точек. Графики исходного сигнала, шума (или зашумленного сигнала), очищенного сигнала удобнее и нагляднее строить в одной координатной плоскости.

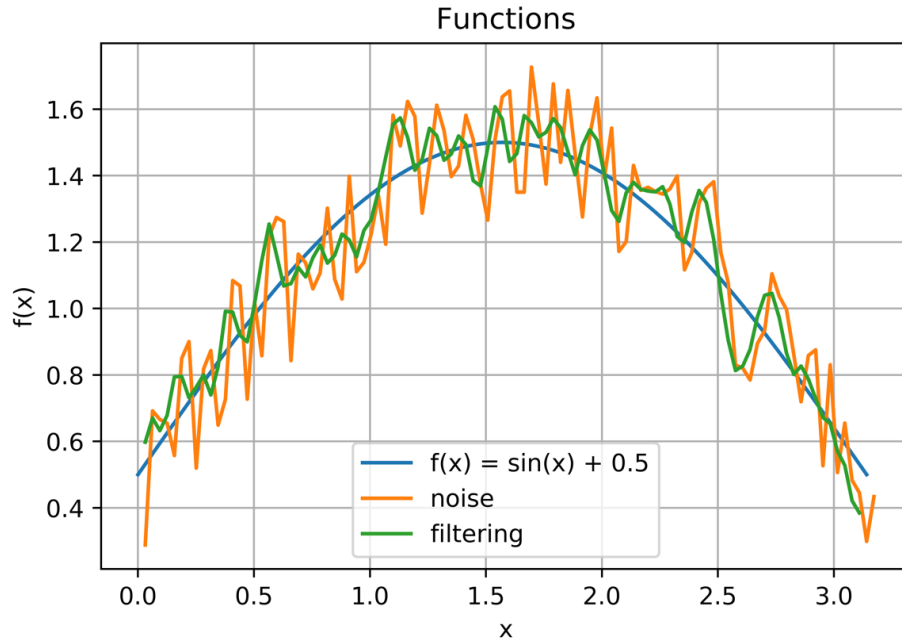


Рис. 6.1. Графики исходного сигнала, шума, очищенного сигнала для $r = 3$.

Табл. 6.4. Результаты численного эксперимента для $r = 3$ и оптимальное значение веса λ^* , функционала J и критериев ω , δ .

h	dis	alpha			w	d
0.0	0.4179	[0.0007,	0.9986,	0.0007]	0.4179	0.0006
0.1	0.4182	[0.0004,	0.9993,	0.0004]	0.4182	0.0004
0.2	0.4175	[0.001,	0.998,	0.001]	0.4175	0.0009
0.3	0.4186	[0.0001,	0.9997,	0.0001]	0.4186	0.0001
0.4	0.4186	[0.0,	0.9999,	0.0]	0.4186	0.0001
0.5	0.276	[0.1196,	0.7607,	0.1196]	0.276	0.1019
0.6	0.225	[0.282,	0.436,	0.282]	0.1667	0.225
0.7	0.2251	[0.2821,	0.4359,	0.2821]	0.1667	0.2251
0.8	0.225	[0.282,	0.436,	0.282]	0.1667	0.225
0.9	0.2252	[0.2822,	0.4357,	0.2822]	0.1667	0.2252
1.0	0.2249	[0.2819,	0.4362,	0.2819]	0.1668	0.2249
h*	J	w	d			
1.0	0.1668	0.1668	0.2249			

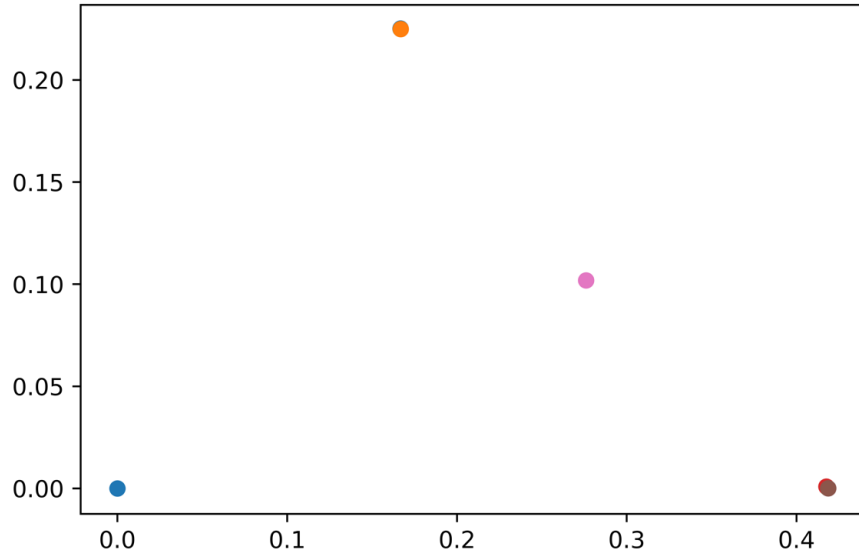


Рис. 6.2. Графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω, δ) в зависимости от весов λ_l для $r = 3$. (Некоторые точки практически сливаются).

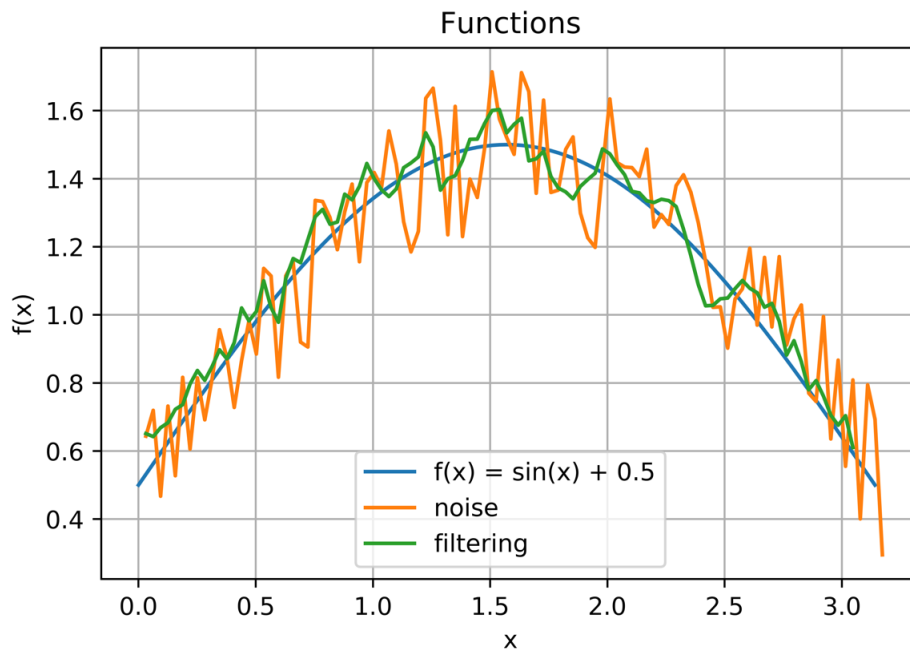


Рис. 6.3. Графики исходного сигнала, шума, очищенного сигнала для $r = 5$.

Табл. 6.5. Результаты численного эксперимента для $r = 5$ и оптимальное значение веса λ^* , функционала J и критериев ω, δ .

h	dis	alpha	w	d
0.0	0.3262	[0.0032, 0.479, 0.0356, 0.479, 0.0032]	0.3262	0.2414
0.1	0.2503	[0.2044, 0.237, 0.1173, 0.237, 0.2044]	0.131	0.2503

0.2	0.2478	[0.1955, 0.2525, 0.104, 0.2525, 0.1955]	0.1282	0.2478
0.3	0.2506	[0.1917, 0.2499, 0.1167, 0.2499, 0.1917]	0.1223	0.2506
0.4	0.2674	[0.1734, 0.2303, 0.1927, 0.2303, 0.1734]	0.0903	0.2674
0.5	0.2634	[0.1756, 0.2374, 0.174, 0.2374, 0.1756]	0.0969	0.2634
0.6	0.2727	[0.1603, 0.2319, 0.2157, 0.2319, 0.1603]	0.0897	0.2727
0.7	0.277	[0.1338, 0.2507, 0.2311, 0.2507, 0.1338]	0.0887	0.277
0.8	0.2744	[0.1596, 0.2285, 0.2238, 0.2285, 0.1596]	0.0903	0.2744
0.9	0.2753	[0.1388, 0.2492, 0.224, 0.2492, 0.1388]	0.0886	0.2753
1.0	0.2766	[0.1414, 0.2429, 0.2313, 0.2429, 0.1414]	0.0893	0.2766

h*	J	w	d
0.2	0.22388	0.1282	0.2478

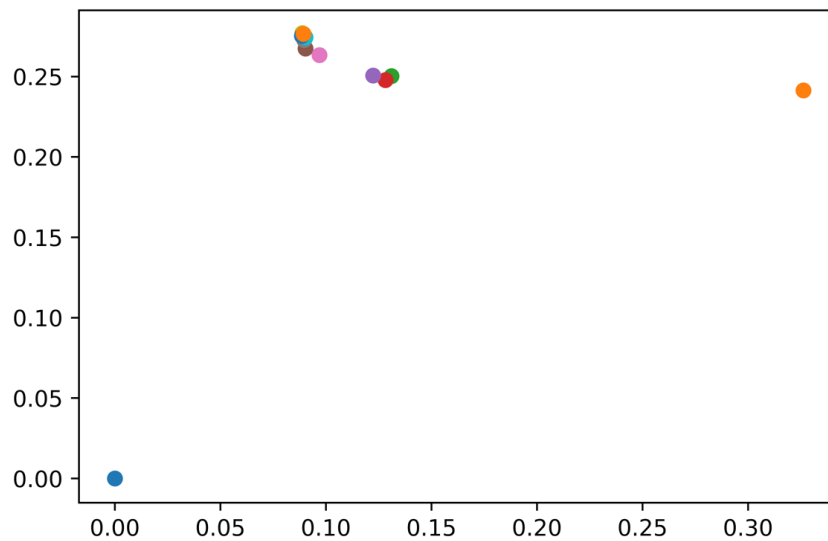


Рис. 6.4. Графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω, δ) в зависимости от весов λ_l для $r = 5$.

Варианты заданий

Табл. 6.6. Варианты методов фильтрации и метрик близости

№пп	Метод фильтрации (табл. 6.1)	Метрика близости (табл. 6.2, 6.3)
1	Среднее арифметическое	Евклидова
2	Среднее геометрическое	«Манхеттенская»
3	Среднее гармоническое	Чебышева
4	Среднее квадратическое	Евклидова
5	Среднее арифметическое	«Манхеттенская»
6	Среднее геометрическое	Чебышева
7	Среднее гармоническое	Евклидова
8	Среднее квадратическое	«Манхеттенская»

9	Среднее арифметическое	Чебышева
10	Среднее геометрическое	Евклидова
11	Среднее гармоническое	«Манхеттенская»
12	Среднее квадратическое	Чебышева
13	Среднее арифметическое	Евклидова
14	Среднее геометрическое	«Манхеттенская»
15	Среднее гармоническое	Чебышева
16	Среднее квадратическое	Евклидова
17	Среднее арифметическое	«Манхеттенская»
18	Среднее геометрическое	Чебышева
19	Среднее гармоническое	Евклидова
20	Среднее квадратическое	«Манхеттенская»
21	Среднее арифметическое	Чебышева
22	Среднее геометрическое	Евклидова
23	Среднее гармоническое	«Манхеттенская»
24	Среднее квадратическое	Чебышева

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать программную реализацию указанных алгоритмов, результаты численных экспериментов для указанных в постановке задачи параметров; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи (вариант работы); графики сигналов $f_k, \bar{f}_k, \tilde{f}_k$; найденные значения весов α для каждого значения λ_j ; значения функционала J и критериев ω, δ для оптимальных значений весов; графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω, δ) , в зависимости от весов λ_j ; найденное оптимальное значение веса λ^* ; выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Объясните принцип линейной свертки критериев.
2. Что такое идеальная точка?
3. Дайте классификацию методов поиска.
4. Объясните принцип простейшего случайного поиска на отрезке.
5. Объясните принцип прямого пассивного поиска на отрезке.

Лабораторная работа № 7

Построение сетевого графа работ и его анализ методом критического пути (СРМ)

Цель работы

Изучить задачи сетевого планирования в управлении проектами и приобрести навыки их решения при помощи метода критического пути.

Постановка задачи и сведения из теории

Постановка задачи

Задан набор работ с множествами непосредственно предшествующих работ (по варианту).

1. Построить сетевой граф, произвести его топологическое упорядочение и нумерацию.
2. Рассчитать и занести в таблицу поздние сроки начала и ранние сроки окончания работ.
3. Рассчитать и занести в таблицу ранние и поздние сроки наступления событий.
4. Рассчитать полный и свободный резервы времени работ.
5. Рассчитать резерв времени событий, определить и выделить на графе критический путь.

Сведения из теории

Основной алгоритм частичного упорядочивания:

Начать с одного из элементов без предшественников, поместить его в голову списка и вычеркнуть из S вместе с инцидентными дугами. Повторить процедуру для оставшейся части графа. Пример применения процедуры можно видеть на рис. 7.1 а и б.

Метод критического пути (СРМ)

Дано:

- список работ проекта,
- связи между работами,
- длительности выполнения работ,
- календарный план рабочего времени,
- календарный срок начала проекта.

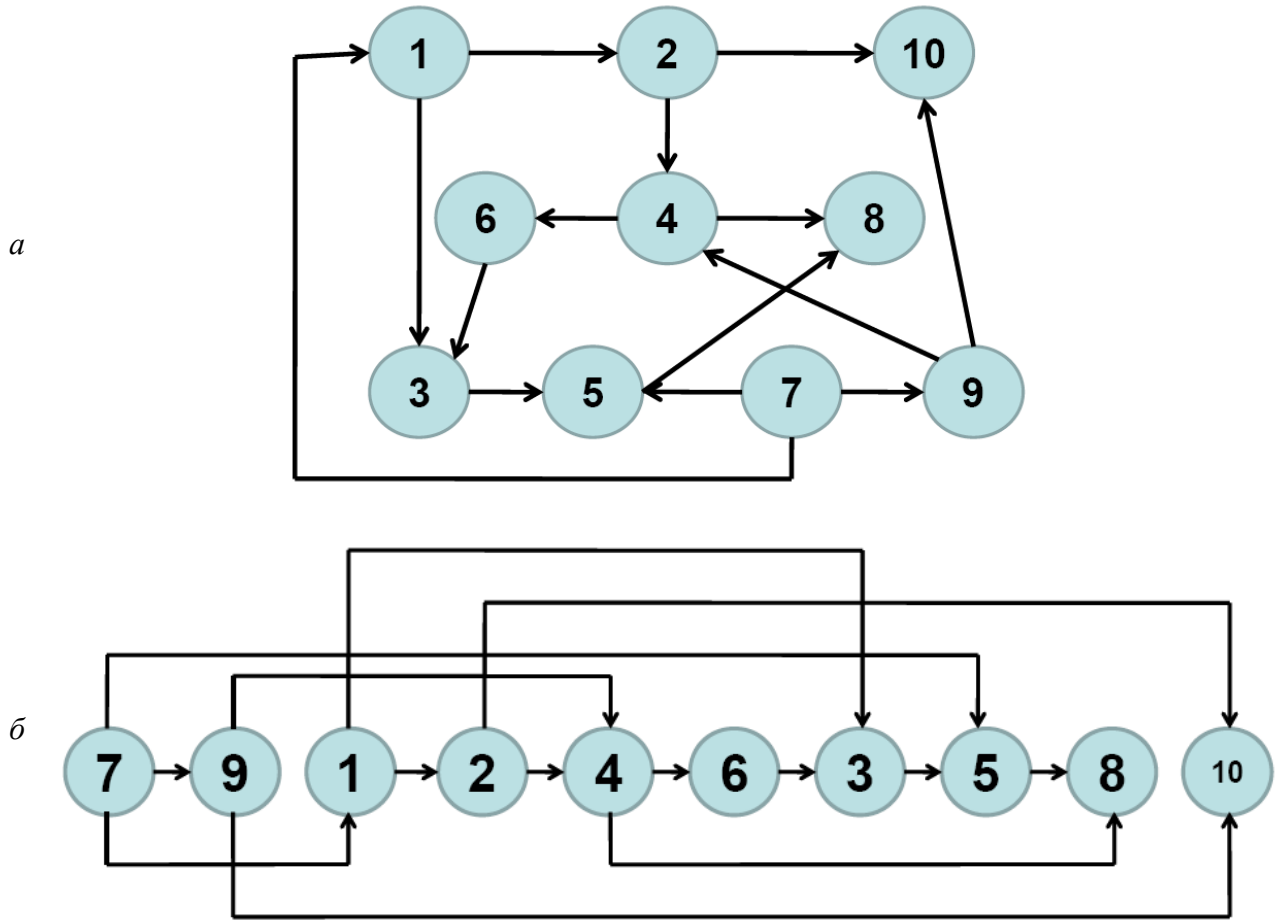
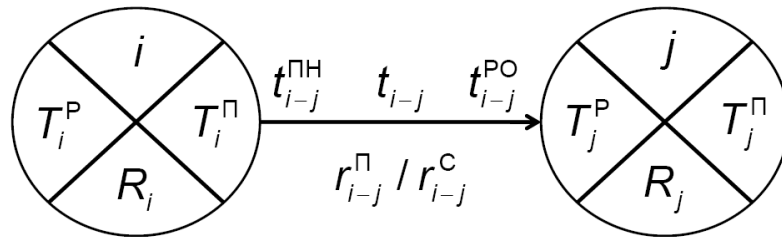


Рис. 7.1. Пример частичного упорядочивания сетевого графа.

Правила построения сетевой модели:

- 1) Строго 1 начальное и завершающее события.
- 2) Отсутствие «висячих вершин»: тупиковых кроме завершающего события и не имеющих входящих работ кроме исходного события.
- 3) Нумерация и направление дуг – слева направо.
- 4) Строго 1 работа между двумя соседними событиями. Иначе – введение промежуточных событий и фиктивных работ (логическая связь между событиями, не требующая затрат ресурсов).
- 5) Запрет на замкнутые контуры.

Параметры сетевой модели:



Алгоритм метода критического пути:

I. Прямой ход

1.1 Определение *раннего срока* T_1^P исходного события (обычно $T_1^P = 0$).

1.2 Расчет *ранних сроков окончания работ* t_{i-j}^{po} для работ, исходящих из событий i с рассчитанными T_i^P :

$$t_{i-j}^{po} = T_i^P + t_{i-j}.$$

1.3 Расчет *раннего срока совершения события* T_i^P для событий, в которые входят работы с

рассчитанными t_{i-j}^{po} : $T_i^P = \begin{cases} t_{i-j}^{po}, & i = 1 \\ \max\{t_{i-j}^{po}\}, & i > 1 \end{cases}.$

Шаги 1.2, 1.3 выполняются до насыщения (слева направо до конца линейно упорядоченного графа).

II. Обратный ход

2.1 Определение *позднего срока завершающего события* $T_k^П$:

$$T_k^П = \begin{cases} T_k^P \\ T_{дир} \end{cases}.$$

2.2 Расчет *поздних сроков начала работ* t_{i-j}^{nn} для работ, входящих в события j с рассчитанными $T_j^П$:

$$t_{i-j}^{nn} = T_j^П - t_{i-j}.$$

2.3 Расчет *позднего срока совершения события* $T_i^П$ для событий, из которых исходят работы с рассчитанными t_{i-j}^{nn} :

$$T_i^П = \begin{cases} t_{i-j}^{nn}, & i = 1 \\ \min\{t_{i-j}^{nn}\}, & i > 1 \end{cases}.$$

Шаги 2.2, 2.3 выполняются до насыщения (справа налево до конца линейно упорядоченного графа).

III. Анализ сетевой модели

3.1 Расчет *резервов времени событий*:

$$R_i = T_i^H - T_i^P .$$

3.2 Расчет *полных резервов времени работ* – максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность каждой работы ($i - j$):

$$r_{i-j}^n = T_j^H - T_i^P - t_{i-j} .$$

3.3 Расчет *свободных резервов времени работ* – минимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность каждой работы ($i - j$) при условии, что все события наступают в свои ранние сроки:

$$r_{i-j}^c = T_j^P - T_i^H - t_{i-j} .$$

3.4 *Критическое время* $T_{кр}$ – минимальное время, в течение которого выполняется весь комплекс работ ($r_{i-j}^n \rightarrow \min$). Если $T_{оур}$ не задано, то $r_{i-j}^n = 0 \quad \forall i, j$.

Критический путь – путь между начальной и конечной вершинами сетевого графа, продолжительность которого = $T_{кр}$. (+ подкритические пути = зона комплекса работ).

Практическая часть

Пример выполнения работы

Пусть заданы следующие параметры работ (см. табл. 7.1). Имеется список работ, их продолжительность, связи между работами, календарный срок начала проекта = 0, директивный срок окончания не задан. Таким образом, в нашем распоряжении имеются все необходимые данные для применения метода критического пути.

Обратите внимание, что работы могут быть заданы не только цифрами, но и буквами и любыми другими символами и т.п. Названия работ специально приведены схематично, чтобы не отвлекать от сути метода расчета.

Введем события (события – вершины, круги, на сетевом графе), соединим их в соответствии с описывающей задачу таблицей дугами (дуги – это работы на графе). Проведем его топологическое упорядочивание, выстраивание линейного порядка (см. рис. 7.1, а и б). При необходимости - перенумеруем события слева направо, получим граф, представленный на рис. 7.2.

Табл. 7.1. Расшифровка работ.

№ работы	Назв. раб.	Длит. раб. $t_{i,j}$	Предш. раб.
1-2	<name_1-2>	1	
2-7	<name_2-7>	14	1-2
7-8	<name_7-8>	1	2-7
1-3	<name_1-3>	2	
3-4	<name_3-4>	3	1-3
4-5	<name_4-5>	1	3-4
5-8	<name_5-8>	8	4-5
8-9	<name_8-9>	2	7-8, 5-8
1-6	<name_1-6>	10	
6-9	<name_6-9>	1	1-6
9-10	<name_9-10>	2	8-9, 6-9

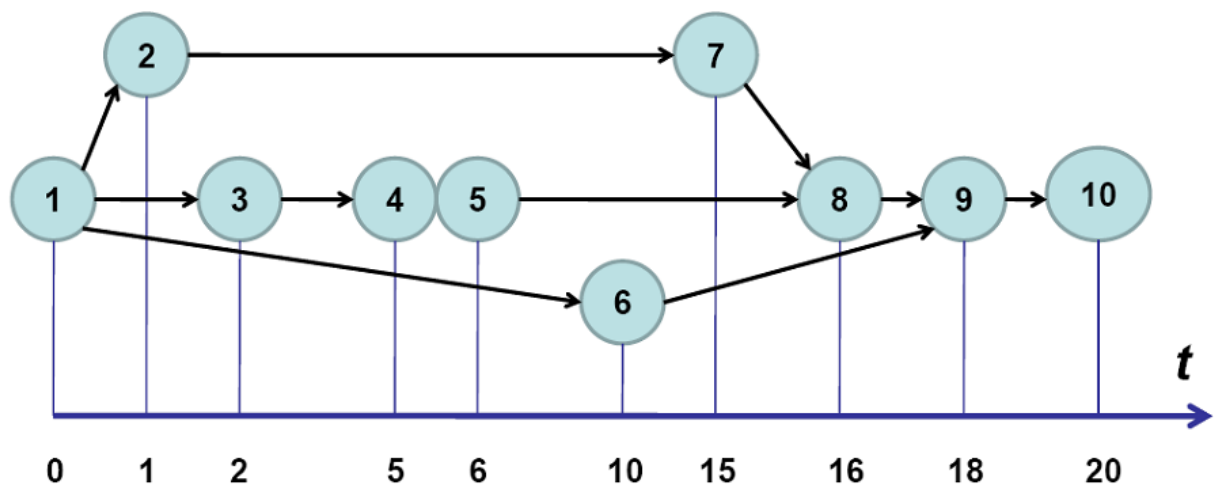


Рис. 7.2. Сетевой график задачи.

Осуществим прямой и обратный ходы алгоритма, этап анализа модели, рассчитаем по приведенным в теоретической части работы формулам параметры работ и событий. Полученные значения представлены в табл. 7.2 и 7.3.

Выберем те работы и события, для которых все резервы времени имеют нулевое значение (выделены в таблицах красным). Они будут лежать на искомом критическом пути.

Табл. 7.2. Параметры работ.

№	t_{i-j}	t_{i-j}^{PH}	t_{i-j}^{PO}	r_{i-j}^{Π}	r_{i-j}^C
1-2	1	0	1	0	0
2-7	14	1	15	0	0
7-8	1	15	16	0	0
1-3	2	2	2	2	0
3-4	3	4	5	2	0
4-5	1	7	6	2	0
5-8	8	8	14	2	2
8-9	2	16	18	0	0
1-6	10	7	10	7	0
6-9	1	17	11	1	1
9-10	2	18	19	0	0

Табл. 7.3. Параметры событий.

№	t_i^P	t_i^{Π}	R_i
1	0	0	0
2	1	1	0
3	2	4	2
4	5	7	2
5	6	8	2
6	10	17	7
7	15	15	0
8	16	16	0
9	18	18	0
10	19	19	0

Выделим критический путь на графе (см. рис. 7.3). Рассчитанные параметры также принято наносить на сетевой график в соответствии с указанной в теории схемой, здесь не приводим, чтобы не загромождать график.

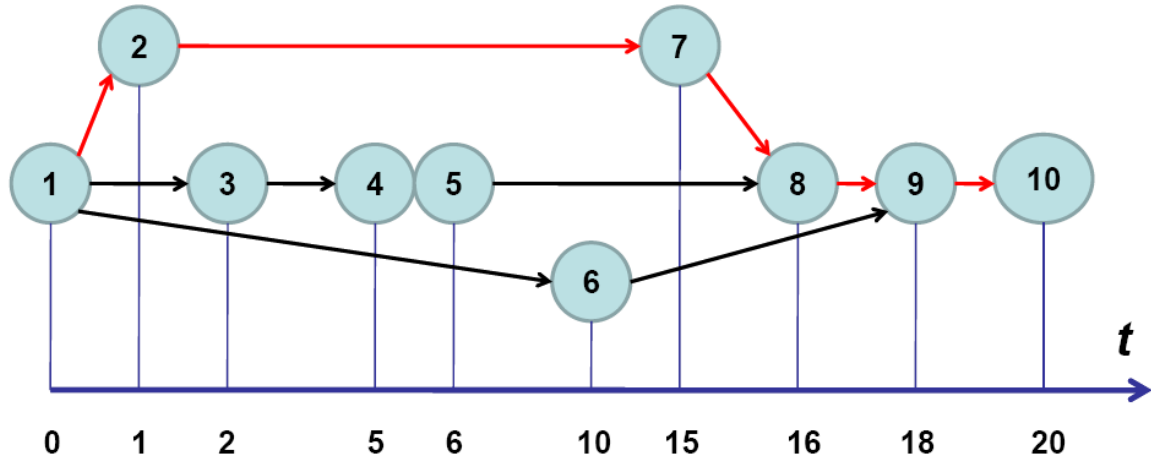


Рис. 7.3. Критический путь (красным).

Варианты заданий

Табл. 7.1. Варианты заданий

Длительности работ:

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>t</i>	3	5	2	4	3	1	4	3	3	2	5

Множества предшествующих работ:

№пп	P_a	P_b	P_c	P_d	P_e	P_f	P_g	P_h	P_i	P_j	P_k
1	\emptyset	\emptyset	\emptyset	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f,c</i>	<i>g</i>	<i>h,i</i>
2	\emptyset	\emptyset	\emptyset	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>d,g</i>	<i>h,e</i>	<i>b,f,i</i>	<i>e,h</i>
3	\emptyset	\emptyset	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>c,b</i>	<i>g</i>	<i>f,i</i>	<i>e,j</i>
4	\emptyset	\emptyset	\emptyset	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>d</i>	<i>e,f</i>	<i>g</i>	<i>h,i</i>
5	\emptyset	\emptyset	<i>b</i>	<i>b</i>	\emptyset	<i>a</i>	<i>e,d</i>	<i>f,c,g</i>	<i>f,c,g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>
6	\emptyset	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e,f</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>h,i</i>	<i>j,g</i>
7	\emptyset	\emptyset	<i>a</i>	\emptyset	<i>b,c</i>	<i>a</i>	<i>b,c</i>	<i>a</i>	<i>h,g</i>	<i>f,e,d</i>	<i>b,c</i>
8	\emptyset	\emptyset	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>a</i>	<i>e,d</i>	<i>c</i>	<i>g</i>	<i>h,j,b,f</i>	<i>c</i>	<i>g</i>
9	\emptyset	<i>a</i>	<i>b,f</i>	<i>c,h</i>	\emptyset	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>g,k</i>	\emptyset	<i>g,k</i>	<i>i</i>
10	\emptyset	<i>a</i>	<i>b,f</i>	<i>c</i>	\emptyset	<i>e</i>	<i>b,f</i>	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>g,h</i>	<i>i,j</i>
11	\emptyset	<i>a</i>	<i>b,f,i</i>	<i>c</i>	\emptyset	<i>e</i>	<i>b,f,i</i>	<i>e</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>j</i>
12	\emptyset	<i>a</i>	<i>b,f</i>	<i>c,h</i>	\emptyset	<i>e</i>	<i>b,f</i>	<i>g,j</i>	\emptyset	<i>i</i>	<i>g,j</i>
13	\emptyset	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>e,d</i>	<i>c</i>	<i>f,g</i>	<i>c</i>	<i>k,i</i>	<i>a</i>
14	\emptyset	<i>a</i>	<i>b,g,j</i>	<i>a</i>	\emptyset	<i>d,e,i</i>	<i>f</i>	\emptyset	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>h</i>
15	\emptyset	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c,g</i>	\emptyset	<i>e</i>	<i>f,j</i>	<i>b</i>	<i>f,j</i>	\emptyset	<i>i,h</i>

16	\emptyset	\emptyset	b	c	a	a	f	i	e	h,g,k	b
----	-------------	-------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	---------	-----

Примечание: обратите внимание, что P_n - это не названия событий, а лишь наименования множеств предшествующих работ! События и их нумерацию вы вводите самостоятельно.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать решение предложенной по варианту задачи сетевого планирования, все основные шаги метода критического пути, изложенные в задании, результат решения; предоставить подготовленный отчет согласно указанным ниже требованиям и ответить на контрольные вопросы по теоретической и практической частям работы.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи (вариант работы); построенный исходный сетевой граф по условию задачи; топологически упорядоченный и пронумерованный сетевой граф; таблицу, содержащую поздние сроки начала и ранние сроки окончания работ, полный и свободный резервы времени всех работ; таблицу, содержащую ранние и поздние сроки наступления событий, резервы времени событий; найденный(-ые) критический(-ие) путь(-и); выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Опишите основную идею и практическую пользу метода критического пути.
2. Какие исходные данные необходимы для использования метода критического пути?
3. Что такое ранние сроки окончания и поздние сроки начала работ?
4. Чем отличается свободный резерв времени работы от полного?
5. Как определяется критический путь по расчетам в методе критического пути?

Заключение

В результате выполнения данного лабораторного практикума студенты будут уметь:

- выбирать подходящий метод оптимизации, исходя из условий поставленной задачи;
- осуществлять программную реализацию различных оптимизационных методов и алгоритмов;
- осуществлять анализ полученных результатов.

Список литературы

1. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 440 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIV).
2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновлённые природой: учебное пособие - 2-е изд. – Москва: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 446 с.
3. Лемешко Б.Ю. Методы оптимизации. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009. – 126 с.
4. Карпушкин С.В. Теория принятия проектных решений. Учебное пособие ТГТУ. – Тамбов. 2015. – 86 с.
5. Вараюнь М.И., Антонов А.Ю. Анализ стохастического дискретного фильтра для подавления шума // Вестник СПбГУ, Сер. 10, 2007, вып. 1, с. 24-28.
6. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
7. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1973. – 312 с.