Понятие о неклассических логиках

Исчисление высказываний и исчисление предикатов первого порядка называют *аристотелевской* или *классической логикой*. В отличие от классической логики существует целый ряд других логик, которые называют *неклассическими*. Причиной появления неклассических логик является существование большого количества проблем, для моделирования и решения которых недостаточно формализма классической логики. Несмотря на большое количество неклассических логик, их делят на два класса: первый класс включает логики, которые рассматриваются как расширения классической логики, а другой класс — как альтернативы классической логике.

К первому классу относят модальную логику и ее разновидности: *темпоральную*, *динамическую* и другие логики, а ко второму — *многозначную*, *частичную*, *нечеткую* и *интуиционистскую* логики.

Рассмотрим некоторые из них. Начнем с многозначных логик и среди них подробнее остановимся на трёхзначной логике $\mathbf{L_3}$ Лукасевича (Лукашевича).

Многозначная логика — тип формальной логики, для которого характерно наличие трёх и более истинностных значений (*истинности* и *ложности*).

Пусть $k \geq 2$, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Определение. **Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функцией k-значной логики, или k-значной функцией, если**

$$\boldsymbol{f}:\quad \boldsymbol{E_k^n} \to \boldsymbol{E_k}, \quad \text{где } n \geq 1.$$

Множество всех функций k-значной логики обозначим как $\mathbf{P_k}$, множество всех функций k-значной логики, зависящих от переменных x1, …, xn, обозначим как $\mathbf{P_k(n)}$.

При k = 2 функции называются также **булевыми функциями** или функциями алгебры логики или логическими функциями, а при k≥3 – **функциями многозначной логики**, или **многозначными функциями**.

Равенство функций k-значной логики (при k≥2) рассматривается с точностью до несущественных (фиктивных) переменных.

Первая система многозначной логики, которую мы рассмотрим, – это **троичная логика,** предложенная польским математиком Яном Лукасевичем в 1920 году.

- **Лукасевич** (Łukasiewicz) Ян (21.12.1878, Львов, — 13.11.1956, Дублин), польский логик,
- Построил первую систему многозначной логики, а с её помощью — систему *модальной логики*.
- Разработал оригинальный язык для формализации логических и математических выражений (бесскобочная символика Лукасевича) .

Троичная логика (трёхзначная, тройная, англ. ternary logic)

Данная логика использует три истинностных значения: ИСТИНА, ЛОЖЬ и НЕОПРЕДЕЛЁННОТЬ (НЕЙТРАЛЬНОСТЬ, НЕИЗВЕСТНОСТЬ). Для обозначения этих значений в литературе используются такие наборы знаков:

ложь	неопределённость	истина	комментарий
0	1/2	1	авторский набор Лукасевича
0	1	2	
-	0	+	
-1	0	+1	
Л	Н	И	
N	Z	P	

Классический пример состояний такой логики – множества {>,<,=} или {>,<,=} – это значения, которые могут быть, например, результатом сравнения двух объектов.

Применялась при разработке троичной малой ЭВМ «Сетунь», которая была разработана в 1959 г. на ВЦ МГУ и выпускалась серийно на казанском машиностроительном заводе. К 1965 г. было выпущено 46 ЭВМ, из них 30 поступили в университеты.

Определение. **Троичной функцией от n переменных** называется отображение:

$$\mathbf{f: T^n \rightarrow T,} \quad \text{где } T=\{0,1,2\}.$$

Сравним с двоичной функцией:

$$\mathbf{f: B^n \rightarrow B,} \quad \text{где } B=\{0,1\}.$$

В настоящее время ∃-ют разные варианты троичных логик: в них по-разному вводится понятие отрицания. Это логики Лукасевича, Поста, Бочвара, Гейтинга и др.

Троичные операции

Рассмотрим следующие "элементарные" функции трёхзначной логики.

1. Нуль-местные (константы): 0,1,2

2. Одноместные. Тождественная функция x **и отрицания:**

a) $\boldsymbol{\sim x = 2 - x}$ **–** отрицание Лукасевича – «зеркальное» отражение x

b) $\boldsymbol{\bar{x} = x + 1 \ (mod\ 3)}$ **–** отрицание Поста – «циклическое отрицание», т.е. циклический сдвиг значений

c) $\boldsymbol{-x = 3 - x \ (mod\ 3)}$ – минус x

Приведём их таблицы истинности:

x	**~x**	$\bar{x}$	**-x**
0	2	1	0
1	1	2	2
2	0	0	1

Всего существует $3^{3^1} = 27$ одноместных троичных функций.

3. Характеристические функции выделенного значения – первого и второго рода.

Характеристическая функция 1-го рода:

$$j_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = m \\ 0, & \text{если } x \neq m \end{cases}$$

Характеристическая функция 2-го рода:

$$J_m(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x = m \\ 0, & \text{если } x \neq m \end{cases}$$

4. Двухместные функции

1) импликация

$$x \rightarrow y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq y \\ 2 - (x - y), & \text{если } x > y \end{cases}$$

2) конъюнкция (минимум): $x \wedge y = \min(x,y)$

3) дизъюнкция (максимум): $x \vee y = \max(x,y)$

4) сложение (по модулю 3): $x \oplus y \pmod 3$

5) разность (по модулю 3):

$$x - y \pmod 3 = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y \\ 3 - (y - x), & \text{если } x < y \end{cases}$$

6) умножение (по модулю 3): $x \cdot y \pmod 3$

7) усечённая разность

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y \\ 0\,, & \text{если } x < y \end{cases}$$

8) функция Вебба: $V_3(x,y) = \max(x,y) + 1 \pmod 3$

В следующей таблице приведены значения указанных выше элементарных функций.

x	y	$x \rightarrow y$	min(x, y)	max(x, y)	x + y(mod 3)	x – y	xy(mod 3)	$x \dot{-} y$	$V_3(x, y)$
0	0	2	0	0	0	0	0	0	1
0	1	2	0	1	1	2	0	0	2
0	2	2	0	2	2	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	2
1	1	2	1	1	2	0	1	0	2
1	2	2	1	2	0	2	2	0	0
2	0	0	0	2	2	2	0	2	0
2	1	1	1	2	0	1	2	1	0
2	2	2	2	2	1	0	1	0	0

Функции алгебры логики обобщаются на функции трёхзначной логики следующим образом:

n	**P_2**	**P_3**	**пояснения**
n = 0	0, 1	0, 1, 2	константы
n = 1	x $\bar{x}$	x $\bar{x}$, $\sim x$	тождественная функция отрицания
n = 2	$x \wedge y$ $x \vee y$ $x \oplus y$ $x \to y$	min(x, y) max(x, y) x + y (mod k) $x \to y$	конъюнкция / минимум дизъюнкция / максимум сложение по модулю k импликация

Характеристические функции $j_m(x)$ и $J_m(x)$ являются аналогами функции x^σ в P_2. Функция Вебба – аналог штриха Шеффера.

Элементарные функции $-x$, $x \dot{-} y$ не имеют явного прообраза в двузначном случае.

Определение формулы в L_3 аналогично определению формулы в P_2.

Определение равносильности. **Формулы F и G называются равносильными** (эквивалентными), если они задают (реализуют) равные функции. Записывается равносильность: F=G.

<u>В трёхзначной логике выполняются следующие законы.</u>

Доказываются они либо с помощью таблиц истинности либо путём перебора всех значений входящих в них переменных либо с использованием уже доказанных законов.

1. Коммутативность

$x \wedge y = y \wedge x = \min(x, y)$

$x \vee y = y \vee x = \max(x, y)$

2. Ассоциативность

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, т.е. $\min(x, \min(y,z)) = \min(\min(x, y), z)$

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, т.е. $\max(x, \max(y,z)) = \max(\max(x, y), z)$

3. Дистрибутивность

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$, т.е. $\min(x, \max(y,z)) = \max(\min(x, y), \min(x,z))$

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$, т.е. $\max(x, \min(y,z)) = \min(\max(x, y), \max(x,z))$

Докажем, например, дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции. Для этого рассмотрим всевозможные отношения между x,y,z:

а) $x \le y \le z \Rightarrow$ $x \vee (y \wedge z) = \max(x, \min(y,z)) = \max(x, y) = y$;

$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = \min(\max(x, y), \max(x,z)) = \min(y,z) = y$

б) $x \le z \le y \Rightarrow$ $x \vee (y \wedge z) = \max(x, \min(y,z)) = \max(x, z) = z$

$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = \min(\max(x,y), \max(x,z)) = \min(y,z) = z$

и т.д. – всего 6 случаев.

4. Идемпотентность

$x \wedge x = x$, т.е. $\min(x,x) = x$

$x \vee x = x$, т.е. $\max(x,x) = x$

5. $\sim(\sim x) = x$ – закон двойного отрицания Лукасевича

$\bar{\bar{\bar{x}}} = x$ – **закон тройного отрицания Поста**

6. Свойства констант

$x \wedge 2 = x$; $x \wedge 0 = 0$

$x \vee 2 = 2$; $x \vee 0 = x$

7. Неизменность третьего состояния (1) при отрицании Лукасевича:

$\sim 1 = 1$, т.к. $\sim 1 = 2 - 1 = 1$

$\sim(x \wedge 1) = \sim x \vee 1$, т.е. $2 - \min(x,1) = \max(2-x,1)$

Для док-ва надо рассмотреть 3 случая:

а) $x < 1 \Rightarrow$ $2 - \min(x,1) = 2 - x = \max(2-x,1)$

б) $x = 1 \Rightarrow$ $2 - \min(x,1) = 2 - 1 = 1 = \max(2-x,1) = \max(1,1)$

в) $x > 1 \Rightarrow$ $2 - \min(x,1)\ ) = 2 - 1 = 1 = \max(2-x,1) = 1$

8. Буквальное определение отрицания Поста (циклического отрицания)

$\bar{0} = 0 + 1 = 1$

$\bar{1} = 1 + 1 = 2$

$\bar{2} = 2 + 1 \pmod 3 = 0$

9. Законы де Моргана

$\sim($ $x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$, т.е. $\sim\min(x,y) = \max(\sim x, \sim y)$

$\sim($ $x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$, т.е. $\sim\max(x,y) = \min(\sim x, \sim y)$

Докажем, например, первый закон. Возможны 3 случая:

а) $x < y \Rightarrow$ $\sim\min(x,y) = 2 - \min(x,y) = 2 - x = \max(2-x, 2-y) = \max(\sim x, \sim y)$

б) $x = y \Rightarrow$ $\sim\min(x,y) = 2 - \min(x,y) = 2 - x = \max(2-x, 2-y) = \max(\sim x, \sim y)$

в) $x > y \Rightarrow$ $\sim\min(x,y) = 2 - \min(x,y) = 2 - y = \max(2-x, 2-y) = \max(\sim x, \sim y)$

В трёхзначной логике **не соблюдаются законы исключённого третьего и противоречия (ПРОВЕРИТЬ!)**

Важным свойством трёхзначных логик, отражающим их адекватность, есть то, что **все они являются расширениями классической двузначной логики**.

Рассмотрим примеры доказательства эквивалентности формул для произвольного k.

Примеры.

1. Докажем тождество: $-(\bar{x}) = \sim x$.

$$-(\bar{x}) = -(x+1) = (k-1) - x = \sim x.$$

2. Докажем тождество: $\sim \max(\sim x, \sim y) = \min(x, y)$.

$$\sim \max(\sim x, \sim y) =$$

$$= (k-1) - \begin{cases} (k-1) - x, & (k-1) - x \geq (k-1) - y; \\ (k-1) - y, & (k-1) - x < (k-1) - y; \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & x \leq y; \\ y, & x > y; \end{cases} = \min(x, y).$$

Преимущества троичной системы счисления перед двоичной и проблемы реализации

Основные преимущества троичной логики перед двоичной:

- троичная система счисления (СС) позволяет вмещать больший диапазон чисел в памяти троичного компьютера, поскольку $3^n > 2^n$.
- троичная СС использует меньше разрядов для записи чисел, по сравнению с двоичной СС. Например:

  $1110101_2 = 11100_3$
  $1000_2 = 22_3$

- компьютер, основанный на троичной логике, обладает большим быстродействием. Например, троичный сумматор и полусумматор в троичном компьютере при сложении тритов выполняет примерно в 1,5 раза меньше операций сложения по сравнению с двоичным компьютером.

Практические реализации

Говоря о будущем таких машин, как «Сетунь» (то есть троичных компьютеров), известный американский учёный Дональд Кнут, отмечал, что они занимают очень мало место в отрасли вычислительной техники из-за **массового засилья двоичных компонентов,** производимых в огромных количествах. Но, поскольку троичная логика гораздо эффективнее двоичной, не исключено, что в недалёком будущем к ней вернутся.

В настоящее время особо благоприятное влияние на развитие троичной логики оказала разработка квантовых компьютеров, работающих на основе **квантовой механики** и принципиально отличающихся от классических компьютеров, работающих на основе **классической механики**. Полноценный квантовый компьютер является пока гипотетическим устройством, сама возможность построения которого связана с серьёзным развитием квантовой теории в области многих частиц и сложных экспериментов. Эта работа лежит на переднем крае современной физики. Согласно некоторым исследованиям, компьютер, который в обычном случае использовал бы **50 традиционных квантовых вентилей**, сможет обойтись всего **девятью –** если будет основан на троичном представлении.

Перейдём теперь к рассмотрению функций k-значной логики.

Функции k-значной логики

Пусть E={0,1,2, … ,k-1} и $f(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ – k-значная функция, т.е. её аргументы и она сама принимают значения из E.

Рассмотрим «элементарные» функции k-значной логики.

1. Константы: 0,1,2, … , k-1.
2. Тождественная функция x.
3. Функции, являющиеся обобщением отрицания в P_2 :
   a) $\sim x = (k-1) - x$ – отрицание Лукасевича – «зеркальное» отражение x
   b) $\bar{x} = x + 1 \pmod k$ – отрицание Поста – «циклическое отрицание»
   c) $-x = 3 - x \pmod k$ – минус x

x	x	$\bar{x}$	$\sim x$	$-x$
0	0	1	$k-1$	0
1	1	2	$k-2$	$k-1$
…				
$k-2$	$k-2$	$k-1$	1	2
$k-1$	$k-1$	0	0	1

4. Характеристические функции 1-го рода $j_m(x)$ и 2-го рода $I_m(x)$, m=0,1,…, k-1.

$$j_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = m \\ 0, & \text{если } x \neq m \end{cases}$$

$$J_m(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x = m \\ 0, & \text{если } x \neq m \end{cases}$$

5. Функции min(x,y) **и** x·y (mod k). Эти функции являются обобщением конъюнкции. Функция min(x,y) обозначается также $x \wedge y$ или x&y.
6. Функции max(x,y) – аналог дизъюнкции в P_2. Она обозначается также $x \vee y$.

7. Импликация

$$x \to y = \begin{cases} k-1, & \text{если } x \leq y \\ (k-1)-(x-y), & \text{если } x > y \end{cases}$$

8. Сложение (по модулю k): $x \oplus y \pmod k$

9. Разность (по модулю k):

$$x - y \pmod k = \begin{cases} x-y, & \text{если } x \geq y \\ k-(y-x), & \text{если } x < y \end{cases}$$

10. Функция Вебба: $V_k(x,y) = \max(x,y) + 1 \pmod k$

Пример. Найдём вектор значений функции $f(x) \in P_5$, которая задаётся формулой:

$$\sim(3x^2)$$

Искомая функции записана в самом правом столбце.

x	x^2	$3x^2$	$\sim 3x^2$
0	0	0	4
1	1	3	1
2	4	2	2
3	4	2	2
4	1	3	1

Аналогично троичной логике можно проверить ряд важных свойств функций из P_k.

Нормальные формы. 1-я и 2-я формы функции

Данные представления являются аналогами совершенной дизъюнктивной нормальной формы в P_2.

Теорема 1 (о 1-й форме).

Пусть $k \geq 2$. Каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ k-значной логики может быть задана формулой следующего вида:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \max_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n} \min \left(J_{\sigma_1}(x_1), \ldots, J_{\sigma_n}(x_n), f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \right).$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный набор $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in E_k^n$. Тогда

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \max_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in E_k^n} \min \left(J_{\sigma_1}(a_1), \ldots, J_{\sigma_n}(a_n), f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \right) =$$

$$= \max(0, \ldots, 0, f(a_1, \ldots, a_n), 0, \ldots, 0) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

$\square$

Пример.

Пусть $f(x) = \bar{x} \in P_3$:

x	f
0	1
1	2
2	0

Найдём её 1-ю форму:

$$f(x) = \max(\min(J_0(x), f(0)), \min(J_1(x), f(1)), \min(J_2(x), f(2))) =$$
$$= \max(\min(J_0(x), 1), \min(J_1(x), 2), \min(J_2(x), 0)) =$$
$$= \max(\min(J_0(x), 1), J_1(x)).$$

Теорема 2 (о 2-й форме).

Пусть k≥ 2. Каждая функция f (x_1,…, x_n) ∈ P_k k-значной логики может быть задана формулой следующего вида:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n).$$

Пример. Пусть $g(x) = J_2(x + x^2) \in P_4$:

x	x^2	$x+x^2$	g
0	0	0	0
1	1	2	3
2	0	2	3
3	1	0	0

Найдем ее 2-ю форму:

$$g(x) = j_0(x) \cdot g(0) + j_1(x) \cdot g(1) + j_2(x) \cdot g(2) + j_3(x) \cdot g(3) =$$
$$= j_0(x) \cdot 0 + j_1(x) \cdot 3 + j_2(x) \cdot 3 + j_3(x) \cdot 0 = 3j_1(x) + 3j_2(x).$$

Представление функций полиномами

Мономом назовем формулу вида

$$x_{i_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r}^{s_r},$$

где все переменные различны, $r \geq 1$, и $s_1, \ldots, s_r \geq 1$, или константу 1.

Полиномом по модулю k назовем формулу вида

$$c_1K_1 + \ldots + c_p K_p,$$

где K_i – различные мономы и $c_i \in E_k \setminus \{0\}$ – ненулевые коэффициенты, $i = 1, \ldots, p$, или константу 0.

Теорема 3 (о представлении функций k-значной логики полиномами).

Пусть k≥ 2. Каждая функция f (x_1,…, x_n) ∈ P_k k-значной логики может быть задана полиномом по модулю k тогда и только тогда, когда k – простое число.

Доказательство.
Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_k$. Запишем ее во 2-й форме:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} j_{\sigma_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot j_{\sigma_n}(x_n) \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Заметим, что $j_\sigma(x) = j_0(x - \sigma)$. Тогда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} j_0(x_1 - \sigma_1) \cdot \ldots \cdot j_0(x_n - \sigma_n) \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

1. Если k — простое число, то по малой теореме Ферма $a^{k-1} = 1 (\mathrm{mod}\ k)$ при $1 \leq a \leq k - 1$.
Тогда $j_0(x) = 1 - x^{k-1}$ и

$$f(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E_k^n} (1 - (x_1 - \sigma_1)^{k-1}) \cdot \ldots \cdot (1 - (x_n - \sigma_n)^{k-1}) \cdot f(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Затем перемножаем скобки по свойствам дистрибутивности, коммутативности, ассоциативности и приводим подобные слагаемые. Получаем полином по модулю k для функции $f(x_1, \dots, x_n)$.
Существование полинома по модулю k для каждой k-значной функции при простых k доказано.

2. Пусть k — составное число. Тогда $k = k_1 \cdot k_2$, где $k_1 \geq k_2 > 1$.
Докажем от противного, что в этом случае функция $j_0(x)$ не задается полиномом по модулю k.

Пусть функция $j_0(x)$ задается полиномом по модулю k:

$$j_0(x) = c_s x^s + c_{s-1} x^{s-1} + \ldots + c_1 x + c_0,$$

$c_s, c_{s-1}, \ldots, c_1, c_0 \in E_k$ — коэффициенты, $c_s \neq 0$.
Тогда

$$j_0(0) = c_0 = 1;$$

$$j_0(k_2) = c_s k_2^s + c_{s-1} k_2^{s-1} + \ldots + c_1 k_2 + 1 = 0.$$

Отсюда

$$k_2 \cdot (c_s k_2^{s-1} + c_{s-1} k_2^{s-2} + \ldots + c_1) = k - 1 (\mathrm{mod}\ k).$$

Т.к. число k_2 — делитель числа k, число $k-1$ обязано делиться на $k_2 > 1$ — противоречие.
Т.е. при составных k никакой полином по модулю k не задает функцию $j_0(x)$.

Определение. Функция f (x1,…, xn) ∈ P_k называется **полиномиальной**, если она задается полиномом по модулю k.

Следующие элементарные функции являются полиномиальными при всех значениях k и при простых, и при составных:

$$\begin{aligned}
&x;\\
&\bar{x} = x + 1;\\
&\sim x = (k-1) - x = (k-1)x + (k-1);\\
&-x = k - x = (k-1)x;\\
&x + y;\\
&x - y = x + (k-1)y;\\
&x \cdot y;\\
&x^m
\end{aligned}$$

Элементарные функции:

$$\begin{aligned}
&j_i(x),\ \ i \in E_k;\\
&J_i(x),\ \ i \in E_k;\\
&\max(x, y);\\
&\min(x, y);\\
&x \dot{-} y;\\
&x \to y
\end{aligned}$$

являются полиномиальными при простых k и **не являются полиномиальными** при всех составных k.

Множество всех k-значных функций, задающихся полиномами по модулю k, обозначается как Pol_k

Следствие.

Если k простое число, то $Pol_k = P_k$; если k составное число, то $Pol_k \neq P_k$.

Вопросы:

- Как строить полиномы для k-значных функций при простых k?
- Как выяснить, задается ли полиномом заданная k-значная функция, если k составное число?

Способы построения полиномов k-значных функций при простых k:

1) способ из доказательства теоремы 4 по 2-й форме;

2) метод неопределенных коэффициентов.

Если k составное число, то можно применять **метод неопределенных коэффициентов** для выяснения, задается ли данная k-значная функция полиномом по модулю k.

Рассмотрим примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathbf{f\,(x) = J_1(x) + J_2(x) \in P_4}$.

Выясним, задается ли функция $f\,(x) \in P_4$ полиномом по модулю 4 методом неопределенных коэффициентов.

Предположим, что функция f (x) задается полиномом по модулю 4.

Сначала построим таблицу степеней x^s :

x	x^2	x^3	x^4
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	3	1

Так как $x^4 = x^2$, то степени в полиноме по модулю 4 можно записывать только до третьей.

Пусть

$$f\,(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a, b, c, d \in E_4$ – неизвестные коэффициенты.

Для определения коэффициентов составим систему уравнений по значениям данной функции $f\,(x) = J_1(x) + J_2(x) \in P_4$:

$f\,(0) = \mathbf{d = 0}$;

$f\,(1) = a + b + c + d = 3$;

$f(2) = 2c + d = 3;$

$f(3) = 3a + b + 3c + d = 0.$

Из первого и третьего уравнения получаем:

$$2c = 3:$$

Подставляя все возможные значения $c \in E_4$, выясняем, что это равенство не выполняется ни при каких значениях $c \in E_4$:

$$2\cdot0=0;\ 2\cdot1=1;\ 2\cdot2=0;\ 2\cdot3=2.$$

Следовательно, исходная система не имеет решений (по модулю 4), откуда

$$f(x) = J_1(x) + J_2(x) \notin Pol_4.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathbf{g(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) \in P_4}$.

Выясним, задается ли функция $g(x) \in P_4$ полиномом по модулю 4 методом неопределенных коэффициентов.

Пусть

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a, b, c, d \in E_4$ – неизвестные коэффициенты.

Составляем систему уравнений:

$g(0) = \mathbf{d = 0}$;

$g(1) = a + b + c + d = 2;$

$g(2) = 2c + d = 2;$

$g(3) = 3a + b + 3c + d = 0.$

Из первого и третьего уравнений получаем:

$$2c = 2;\ \ \mathbf{c = 1}.$$

Тогда $a + b = 1;$
$3a + b = 1.$

Отсюда **$a = 0$; $b = 1$**.

Следовательно, функция $g(x)$ задается полиномом по модулю 4, и один из ее полиномов по модулю 4 найден:

$$g(x) = 2(J_1(x) + J_2(x)) = x^2 + x \in Pol_4.$$

Задачи

1. При всех $k \geq 2$ доказать тождества:

1) $x \to y = \sim (x \dot{-} y)$; 2) $\min(x, y) = x \dot{-} (x \dot{-} y)$;
3) $x \dot{-} y = x - \min(x, y)$; 4) $x \dot{-} y = \max(x, y) - y$.

2. Записать функцию $f \in P_k$ в 1-й и 2-й формах, если

1) $f(x) = \min(x^2, x^3)$, $k = 5$; 2) $f(x) = (\sim x)^2 \dot{-} 3 \cdot x$, $k = 4$;
3) $f(x, y) = \min(x, y)$, $k = 3$; 4) $f(x, y) = 2 \cdot x \cdot y^2$, $k = 4$.

3. Записать функцию $f \in P_k$ полиномом по модулю k, если

1) $f(x) = J_2(x) + 3J_4(x)$, $k = 5$; 2) $f(x) = \max(2x, 3x)$, $k = 5$;
3) $f(x, y) = \min(x^2, y^2)$, $k = 3$; 4) $f(x, y) = x \dot{-} y$, $k = 3$.

4. Задается ли функция $f \in P_k$ полиномом по модулю k, если

1) $f(x) = \min(x^2, x^3)$, $k = 6$; 2) $f(x) = 2 \cdot j_0(x)$, $k = 4$;
3) $f(x, y) = 5J_2(x) + y^3$, $k = 16$; 4) $f(x, y) = \min(x^2, y^2)$, $k = 4$?