

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РФ  
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ И ОБРАЗОВАНИЯ  
ФГОУ ВПО КОСТРОМСКАЯ ГСХА

Кафедра деталей машин

# **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА**

## **СТАТИКА**

Методические указания по изучению дисциплины,  
выполнению расчётно-графической  
и контрольной работ  
для студентов направления подготовки 35.03.06 «Агроинженерия»  
и 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»  
очной и заочной форм обучения

КАРАБАЕВО  
Костромская ГСХА  
2016

УДК 531.1+378.147-322.1

ББК 22.23+74.58

Т 33

*Составители:* сотрудники кафедры деталей машин Костромской ГСХА д.т.н., профессор *С.Н. Разин*, д.т.н., профессор *П.Н. Рудовский*, к.т.н., доцент *Н.И. Коваленко*.

*Рецензент:* к.т.н., доцент кафедры технических систем в АПК Костромской ГСХА *Д.С. Лебедев*.

*Рекомендовано к изданию методической комиссией  
инженерно-технологического факультета,  
протокол № 4 от 10 мая 2016 г.*

Т 33     **Теоретическая механика. Статика** : методические указания по изучению дисциплины, выполнению расчётно-графической и контрольной работ для студентов направления подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» очной и заочной форм обучения / сост. С.Н. Разин, П.Н. Рудовский, Н.И. Коваленко. — Караваево : Костромская ГСХА, 2016. — 41 с.

Издание содержит изложение теоретического материала в виде кратких ответов на вопросы по статике, выносимые на экзамен, и примеры решения типовых задач. После изложения теоретического материала приведены 5 заданий по основным разделам статики: равновесие произвольной плоской системы сил, равновесие системы тел, расчет фермы, пространственная сходящаяся система сил и произвольная пространственная система сил.

Методические указания по изучению дисциплины, выполнению расчётно-графической и контрольной работ предназначены для студентов направления подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» очной и заочной форм обучения.

УДК 531.1+378.147-322.1

ББК 22.23+74.58

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	4
1. Общие методические указания по изучению дисциплины.....	5
1.1. Аксиомы статики .....	5
1.2. Проекция силы на ось .....	6
1.3. Связи и их реакции .....	6
1.4. Уравнения равновесия сходящейся системы сил.....	8
1.5. Теорема о трех силах.....	9
1.6. Пара сил. Свойства сил .....	9
1.7. Момент силы относительно точки.....	10
1.8. Теорема Вариньона.....	11
1.9. Теорема о параллельном переносе силы .....	12
1.10. Основная теорема статики.....	12
1.11. Случаи приведения.....	13
1.12. Момент силы относительно оси.....	14
1.13. Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил.....	15
1.14. Уравнение равновесия плоской произвольной системы сил .....	15
1.15. Равновесие системы тел .....	16
1.16. Расчет ферм .....	17
1.17. Центр параллельных сил. Центр тяжести .....	17
1.18. Аналитические и экспериментальные методы определения положения центра тяжести.....	19
1.19. Трение скольжения .....	20
1.20. Трение качения .....	20
2. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы .....	22
2.1. Задача С1 .....	22
2.2. Задача С2 .....	26
2.3. Задача С3 .....	30
2.4. Задача С4 .....	34
2.5. Задача С5 .....	37
Список рекомендуемых источников .....	41

## ВВЕДЕНИЕ

Термин «механика» впервые появляется в сочинениях одного из выдающихся ученых древности — Аристотеля (384-322 г. до н.э.) и происходит от греческого *mechané*, означающего по современным понятиям «сооружение», «машина». Возникновение и развитие механики как науки неразрывно связано с историей развития производительных сил общества, уровнем производства и техники на каждом этапе этого развития. В древности, когда запросы производства сводились, главным образом, к удовлетворению нужд строительной техники, начинает развиваться учение о простейших машинах (блок, ворот, рычаг, наклонная плоскость) и общее учение о равновесии тел (статики). Обоснование начал статики содержится уже в сочинениях одного из великих ученых древности Архимеда (287-212 г. до н.э.). В России на развитие первых исследований по механике большое влияние оказали труды М.В. Ломоносова (1711-1765), а также Эйлера, долгое время жившего в России.

Теоретическая механика, как наука состоит из трех разделов: статики, кинематики и динамики. В статике, которой посвящены методические указания, излагается учение о силах и условиях равновесия материальных тел под действием сил.

В издании изложен материал по статике в виде кратких ответов на экзаменационные вопросы, приведены примеры решения типовых задач и задания по основным разделам статики: равновесие произвольной плоской системы сил, равновесие системы тел, расчет фермы, пространственная сходящаяся система сил и произвольная пространственная система сил.

Данное издание предназначено для студентов специальностей 110301 «Механизация сельского хозяйства», 110302 «Электрификация и автоматизация сельского хозяйства», 110303 «Механизация переработки сельскохозяйственной продукции», 110304 «Технология обслуживания и ремонта машин в агропромышленном комплексе» направления «Агроинженерия» и специальностей 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270106 «Производство строительных материалов, изделий и конструкций», 270114 «Проектирование зданий» направления «Строительство» очной и заочной форм обучения.

# 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

## 1.1. Аксиомы статики

1. Аксиома: две силы можно приложить к телу или отбросить, не изменяя оказываемого действия, если они равны по величине, направлены в противоположные стороны и имеют общую линию действия.

Линией действия силы называется прямая, определяемая точкой приложения силы и ее направлением.

Следствие: силу можно переносить вдоль линии ее действия.

Доказательство: пусть в точке А (рис. 1) приложена сила  $\vec{F}$ . Приложим в точке В, лежащей на линии действия силы  $\vec{F}$ , две равные по величине силы  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$  и направленные в противоположные стороны силы, линии действия которых совпадают с линией действия силы  $\vec{F}$ . Тогда по первой аксиоме сила  $\vec{F}$  эквивалентна  $\vec{F}$ ,  $\vec{F}'$ ,  $\vec{F}''$ . По той же аксиоме силы  $\vec{F}'$  и  $\vec{F}''$  можно отбросить. В результате будем иметь одну силу  $\vec{F}''$ , приложенную в точке В и равную  $\vec{F}$ . Что и требовалось доказать.

Таким образом, сила — скользящий вектор.

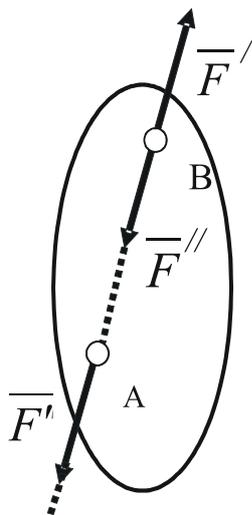


Рис. 1

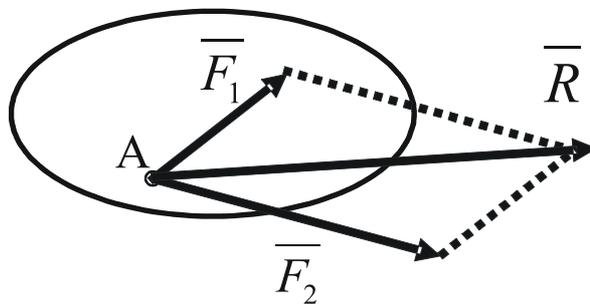


Рис. 2

2. Аксиома параллелограмма сил. Две силы, приложенные в одной точке, можно заменить одной силой, равной их геометрической сумме и приложенной в той же точке (рис. 2).

Сила  $\vec{R}$ , эквивалентная данной системе  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  сил, называется равнодействующей. Две системы называются эквивалентными ( $\sim$ ), если одну из них можно получить из другой с помощью 1 и 2 аксиомы.

3. Аксиома равенства действия и противодействия. При всяком взаимодействии силы действия и противодействия равны по величине, имеют общую линию действия и направлены в противоположные стороны.

4. Принцип затвердеваемости. Равновесие деформируемого тела не нарушится, если представить его как абсолютно твердое.

## 1.2. Проекция силы на ось

Сила — вектор. Действие силы на тело определяется точкой приложения, направлением и величиной силы. Силу можно переносить вдоль линии ее действия (следует из аксиомы 1).

Силы бывают: *сосредоточенные, распределенные, активные и пассивные.*

*Распределенная* нагрузка (рис. 3) задается ее интенсивностью  $q$ . *Интенсивность* — сила, отнесенная к соответствующей геометрической единице (м; м<sup>2</sup>; м<sup>3</sup>).

Сила может быть распределена по линии (рис. 3), по площади или по объему (н/м, н/м<sup>2</sup>, н/м<sup>3</sup>). *Распределенную* нагрузку заменяют сосредоточенной силой, равной площади эпюры нагрузки и приложенной в центре ее тяжести. Например, если  $L = 2$  м, а  $q = 5$  кН/м, то  $Q = q \cdot L = 10$  кН.

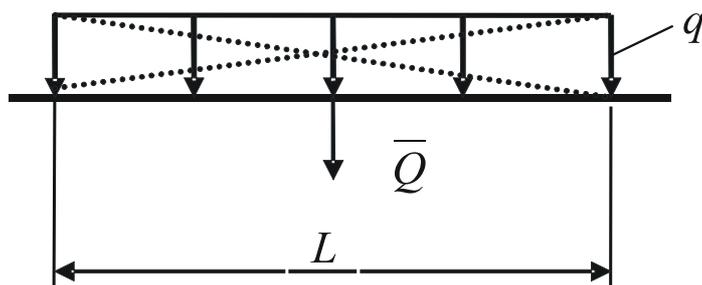


Рис. 3

*Проекцией* силы на ось называется алгебраическая величина, равная длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца вектора на эту ось (рис. 4).

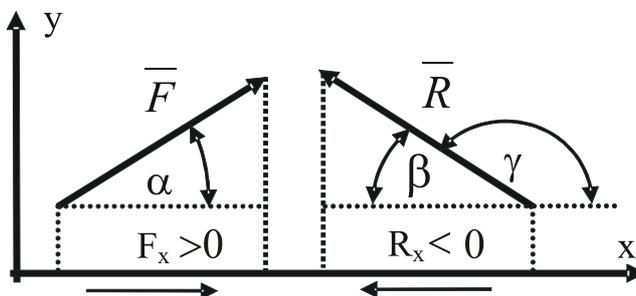


Рис. 4

Проекция положительна, если проход от проекции начала к проекции конца совпадает с положительным направлением оси. Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси:  $F_x = F \cos \alpha$ ,  $R_x = R \cos \beta = -R \cos \gamma$ .

## 1.3. Связи и их реакции

Тела, ограничивающие перемещение рассматриваемого тела в том или ином направлении, называются *связями*. Силы, с которыми эти связи действуют на тело, называются *реакциями*. Эти силы пассивны, они возникают только при наличии активных (заданных) сил. Для их определения пользуются *принципом освобожденности*: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие на тело соответствующими силами, которые называются *реакциями связей*.

## Виды связей

*Гладкая поверхность* (рис. 5) — ее реакция  $N$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  направлена по общей нормали к телу и поверхности.

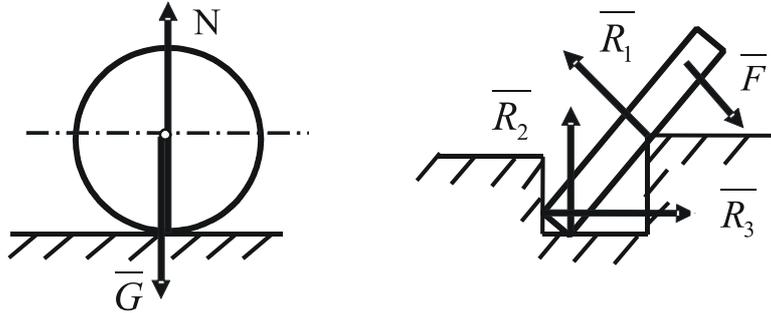


Рис. 5

*Гибкая нить* (рис. 6) — ее реакция  $T$  направлена по касательной к нити в точке ее соединения с телом. У прямолинейной нити — вдоль нити (рис. 7).

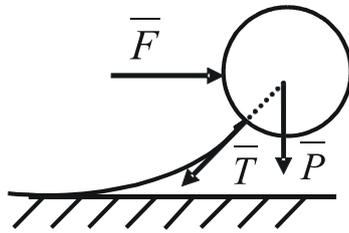


Рис. 6

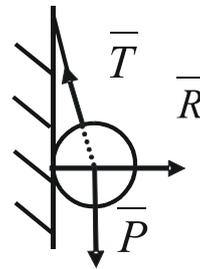


Рис. 7

*Невесомый стержень* — его реакция направлена вдоль линии, соединяющей концы стержня (рис. 8). Принято вначале реакцию направлять во внутрь стержня, т.е. считать его растянутым.

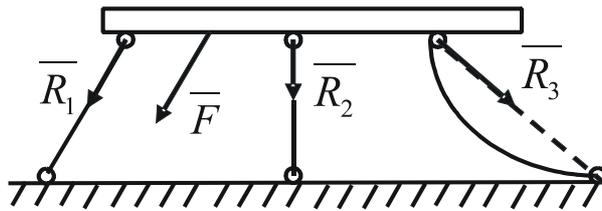


Рис. 8

*Подвижный шарнир* — реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно к поверхности, на которой он находится (рис. 9, в точке В).

*Неподвижный шарнир* — его реакция состоит из двух составляющих, направленных вдоль осей координат (рис. 9, в точке А).

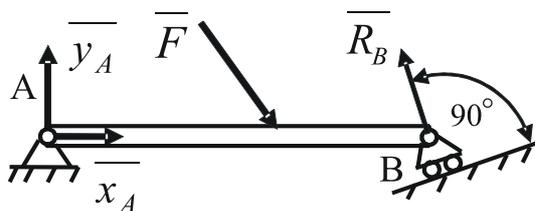


Рис. 9

*Жесткая заделка* — ее реакция состоит из двух составляющих, направленных вдоль осей координат и момента сил реакций (рис. 10).

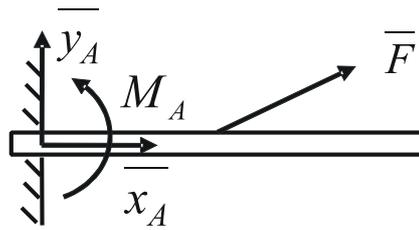


Рис. 10

*Скользящая заделка* (с одной степенью свободы) — ее реакция состоит из силы, направленной перпендикулярно направляющим и момента сил реакций (рис. 11).

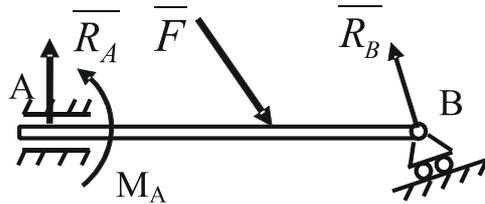


Рис. 11

*Скользящая заделка* (с двумя степенями свободы) — ее реакция состоит из момента сил реакций (рис. 12).

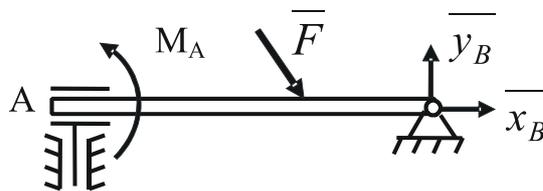


Рис. 12

#### 1.4. Уравнения равновесия сходящейся системы сил

Система сил называется *сходящейся*, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке. Сходящаяся система эквивалентна одной силе, равной их геометрической сумме. Эта сила называется *равнодействующей*.

Так как  $\bar{R} = \left| \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \right|$ , то для того чтобы модуль равнодействующей  $\bar{R}$  был равен нулю, необходимо, чтобы одновременно выполнялось три равенства:

$$\begin{cases} R_x = 0; \\ R_y = 0; \\ R_z = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum Fkx = 0; \\ \sum Fky = 0; \\ \sum Fkz = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum x = 0; \\ \sum y = 0; \\ \sum z = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Это и есть *уравнения равновесия пространственной сходящейся системы сил*.

Если система сил плоская сходящаяся и все силы лежат в плоскости  $xu$ , то последнее уравнение системы (1) выполняется тождественно, и уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0. \end{cases}$$

Это и есть уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил.

### 1.5. Теорема о трех силах

Теорема: если тело под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство: пусть на тело действуют три силы (рис. 13), две из которых пересекаются, тогда  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3 \sim \bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{F}'_3$  по следствию из первой аксиомы, а  $\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \bar{F}'_3 \sim \bar{R}, \bar{F}_3$  — по второй аксиоме.

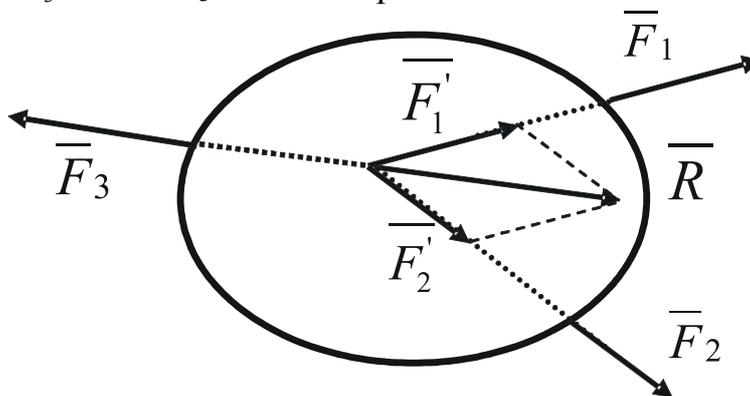


Рис. 13

Знак  $\sim$  обозначает эквивалентность систем. Но по условию система  $\sim 0$ , следовательно, по третьей аксиоме силы  $\bar{R}$  и  $\bar{F}_3$  равны по величине и имеют общую линию действия. Что и требовалось доказать.

### 1.6. Пара сил. Свойства сил

Система, состоящая из двух равных по величине и противоположно направленных сил, линии действия которых не совпадают, называется парой сил (рис. 14).

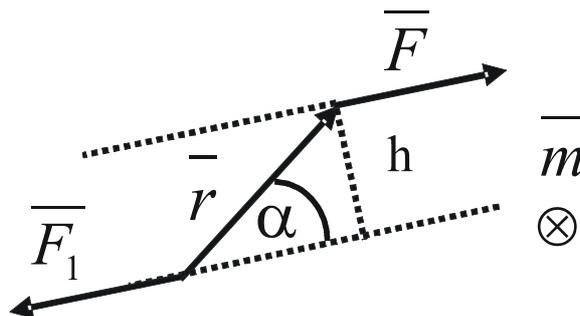


Рис. 14

Действие пары на тело определяется моментом пары. Момент пары — это вектор, равный векторному произведению радиуса вектора, проведенного из точки приложения одной силы в точку приложения другой, на вектор последней силы:  $\vec{m} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Векторное произведение двух векторов — это вектор, направленный перпендикулярно плоскости, в которой лежат перемножаемые вектора, в ту сторону, откуда вращение от 1-го вектора ко 2-му по кратчайшему пути видно происходящим против часовой стрелки. Модуль векторного произведения равен произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними, тогда:

$$|\vec{m}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| h, \quad \text{т.к. } |\vec{r}| \sin \alpha = h.$$

Можно дать другое определение: момент пары — это вектор, направленный перпендикулярно плоскости действия пары, в ту сторону, откуда вращение пары видно происходящим против часовой стрелки. В примере (см. рис. 14) вектор момента  $\vec{m}$  направлен от нас (направление от нас изображается  $\otimes$ , а направление на нас —  $\odot$ ). Величина момента равна произведению модуля одной из сил пары на плечо.

*Плечо  $h$*  — расстояние между линиями действия сил пары.

Свойства пар:

1. У пары можно произвольно менять силы и плечо, оставляя при этом неизменным момент пары.
2. Пару можно переносить в плоскости ее действия.
3. Пару можно переносить в плоскость, параллельную плоскости ее действия.

Момент пары — это свободный вектор, т.е. его можно изображать где угодно. Если на тело действует несколько пар, то их можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической сумме моментов этих пар.

### 1.7. Момент силы относительно точки

Момент силы относительно точки характеризует вращательный эффект силы.

Момент силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$  равен векторному произведению радиуса вектора, проведенного из центра  $O$  в точку приложения силы, на вектор этой силы (рис. 15):  $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$ .

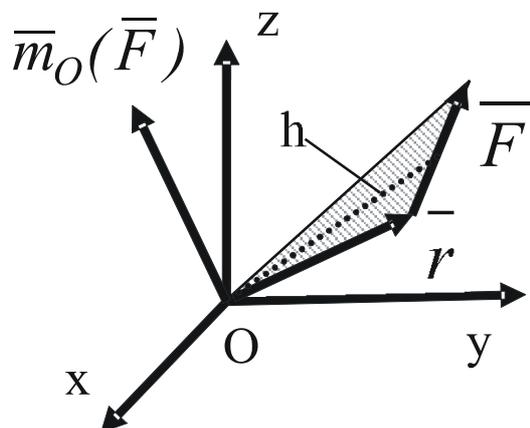


Рис. 15

Величина момента:  $|\overline{m}_O(\overline{F})| = |\overline{r}| |\overline{F}| \sin\alpha = |\overline{F}| h$ , где величина  $h$  — плечо силы (кратчайшее расстояние от центра  $O$  до линии действия силы). Понятие момента как вектора используется при решении пространственных задач.

Если все силы лежат в одной плоскости, то моменты сил будут направлены перпендикулярно этой плоскости. Поэтому в этом случае достаточно определения момента как алгебраической величины (т.е. величины со знаком): момент силы равен произведению силы на плечо и имеет знак (+), если сила поворачивает тело вокруг центра против часовой стрелки (рис. 16).

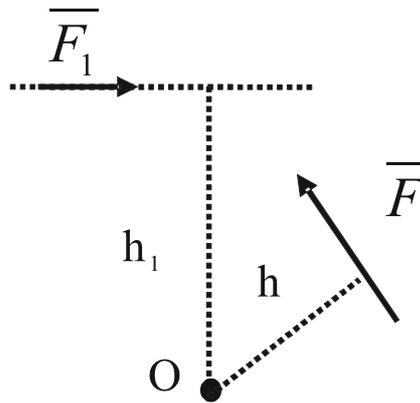


Рис. 16

Тогда:  $m_O(\overline{F}) = F \cdot h$ ;  $m_O(\overline{F}_1) = -F_1 \cdot h_1$ .

### 1.8. Теорема Вариньона

Теорема: если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра равен сумме моментов составляющих относительно того же центра.

Доказательство: пусть (рис. 17) система  $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$  имеет равнодействующую  $\overline{R}$ . Приложим к телу силу  $\overline{R}' = -\overline{R}$ , тогда система  $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n, \overline{R}' \sim 0$ , следовательно, сумма моментов всех сил системы относительно любого центра  $O$  будет равна 0, т.е.:  $\sum \overline{m}_O(\overline{F}_k) + \overline{m}_O(\overline{R}') = 0$ .

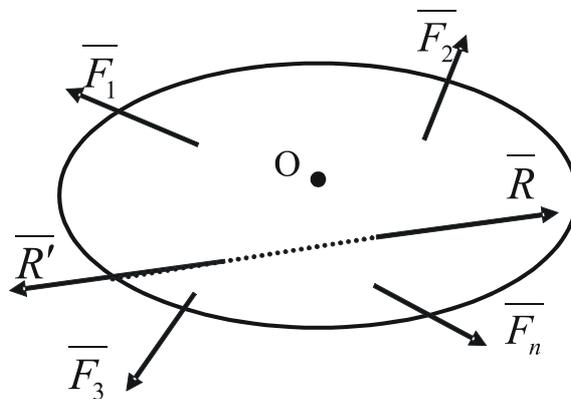


Рис. 17

Но  $\bar{m}_O(\bar{R}') = -\bar{m}_O(\bar{R})$ , тогда  $\sum \bar{m}_O(\bar{F}_k) - \bar{m}_O(\bar{R}) = 0$ . Следовательно,  $\bar{m}_O(\bar{R}) = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k)$ . Что и требовалось доказать.

### 1.9. Теорема о параллельном переносе силы

Теорема: силу можно переносить из данной точки в любую другую, добавляя при этом пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.

Доказательство: пусть в точке А (рис. 18) приложена сила  $\bar{F}$ .

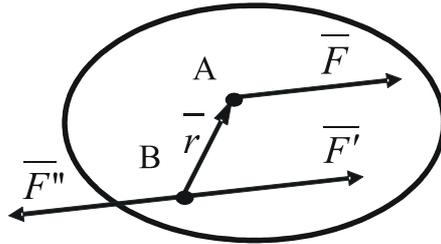


Рис. 18

Приложим в точке В силы  $\bar{F}'$  и  $\bar{F}''$ , равные, параллельные силе  $\bar{F}$  и направленные в противоположные стороны (это можно сделать по первой аксиоме). Тогда систему сил  $\bar{F}$ ,  $\bar{F}'$ ,  $\bar{F}''$  можно рассматривать как силу  $\bar{F}'$ , равную  $\bar{F}$  и приложенную в точке В, и пару сил  $\bar{F}$ ,  $\bar{F}''$ , момент которой равен моменту силы  $\bar{F}$  относительно точки В:  $\bar{m}(\bar{F}, \bar{F}'') = \bar{m}_B(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}$ . Что и требовалось доказать.

### 1.10. Основная теорема статики

Определение: главным вектором системы сил называется вектор, равный геометрической сумме сил системы:  $\bar{R} = \sum \bar{F}_k$ .

Определение: главным моментом системы относительно центра О называется вектор, равный геометрической сумме моментов всех сил системы относительно этого центра:  $\bar{M}_O = \sum \bar{m}_O(\bar{F}_k)$ .

Статика решает две задачи:

- задача о равновесии (каким условиям должна удовлетворять система сил, для того чтобы тело под ее действием находилось в равновесии);
- задача о приведении (как данную систему сил заменить другой, в частности заменить простой).

Вторую задачу статики решает основная теорема статики: любую систему сил можно заменить одной силой, равной главному вектору и приложенной в центре приведения, и одной парой сил с моментом, равным главному моменту относительно центра приведения.

**Доказательство:** пусть на тело (рис. 19) действует система сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ . Выберем произвольно т. О — центр приведения. По теореме о параллельном переносе, каждую из сил можно перенести в центр О, добавив при этом соответствующую пару сил.

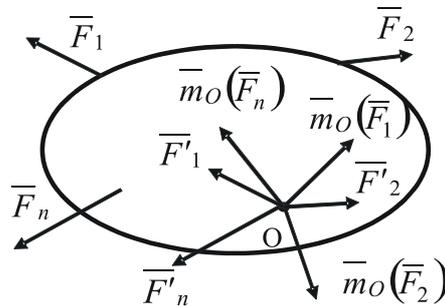


Рис. 19

В результате, перенеся все силы в точку О, получим систему сил, приложенных в т. О, и систему пар сил с моментами, равными моментам сил системы относительно центра О. Сложив все силы, приложенные к центру О, получим главный вектор системы  $\vec{R}$ . Сложив все моменты пар сил, получим главный момент  $\vec{M}_O$ . Таким образом, данную систему сил заменили одной силой  $\vec{R}$  и одной парой сил с моментом  $\vec{M}_O$ , что и требовалось доказать.

### 1.11. Случаи приведения

1.  $\vec{R} = 0, \vec{M}_O = 0$ . Система сил эквивалентна нулю, т.е. находится в равновесии.
2.  $\vec{R} = 0, \vec{M}_O \neq 0$ . Система приводится к паре сил. При этом главный момент не зависит от выбора центра приведения.
3.  $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O = 0$ . Система приводится к равнодействующей, приложенной в центре приведения.
4.  $\vec{R} \neq 0, \vec{M}_O \neq 0$ .
  - а)  $\vec{R} \perp \vec{M}_O$ . Система приводится к равнодействующей, лежащей на расстоянии  $h = |\vec{M}_O| / |\vec{R}|$  от центра приведения (рис. 20);
  - б)  $\vec{R} \parallel \vec{M}_O$ . В этом случае говорят, что система приводится к динаме (рис. 21).

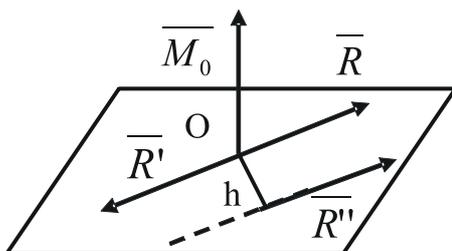


Рис. 20

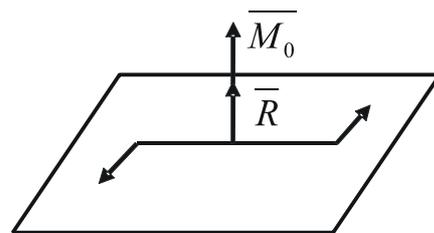


Рис. 21

Во всех остальных случаях система может быть приведена к динаме. Под действием динамы тело совершает винтовое движение.

## 1.12. Момент силы относительно оси

Моментом силы относительно оси называется алгебраическая величина, равная проекции момента силы относительно точки, лежащей на оси, на эту ось (рис. 22).

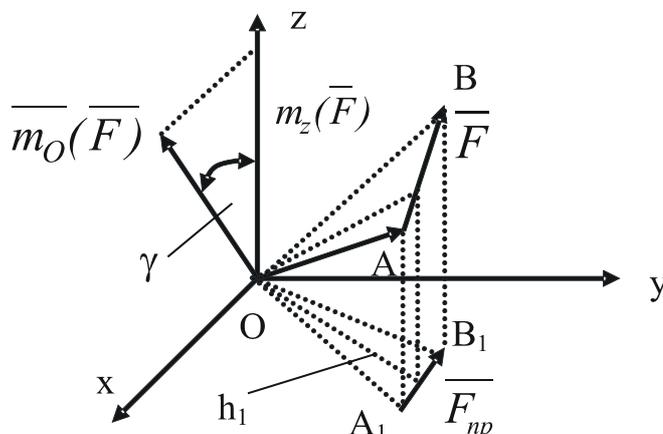


Рис. 22

Таким образом:  $m_z(\bar{F}) = |\bar{m}_O(\bar{F})| \cos \gamma$ .

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде определителя. Тогда, разложив его по элементам первой строки, получим:

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k}.$$

С другой стороны:  $\bar{m}_O(\bar{F}) = m_x(\bar{F})\bar{i} + m_y(\bar{F})\bar{j} + m_z(\bar{F})\bar{k}$ .

Сравнивая эти формулы, получаем:

$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= y \cdot F_z - z \cdot F_y; \\ m_y(\bar{F}) &= z \cdot F_x - x \cdot F_z; \\ m_z(\bar{F}) &= x \cdot F_y - y \cdot F_x. \end{aligned}$$

При решении задач удобно определять момент силы относительно оси по следующему правилу: *момент силы относительно оси равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси и плоскости*. То есть:  $m_z(\bar{F}) = m_O(\bar{F}_{np}) = \bar{F}_{np} \cdot h_1$ .

Вывод: момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси ( $F_{np} = 0$ ) или сила пересекает ось ( $h_1 = 0$ ). Оба эти случая можно объединить: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.

Геометрически момент силы относительно центра O равен удвоенной площади  $\Delta OAB$ , а относительно оси z — удвоенной площади  $\Delta OA_1B_1$ .

### 1.13. Уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил

Для равновесия необходимо, чтобы выполнялось два равенства:

$$\overline{R} = 0; \quad \overline{M}_O = 0.$$

Поскольку  $|\overline{R}| = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$ , а  $|\overline{M}_O| = \sqrt{Mx^2 + My^2 + Mz^2}$ , то для того чтобы выполнялись эти равенства, необходимо, чтобы одновременно выполнялось шесть уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum Rx = 0; \\ \sum Ry = 0; \\ \sum Rz = 0; \\ \sum Mx = 0; \\ \sum My = 0; \\ \sum Mz = 0; \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum F_{kx} = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; \\ \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x(\overline{F}_k) = 0; \\ \sum m_y(\overline{F}_k) = 0; \\ \sum m_z(\overline{F}_k) = 0. \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum Z = 0; \\ \sum m_x = 0; \\ \sum m_y = 0; \\ \sum m_z = 0. \end{array} \right.$$

Это и есть *уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил*.

Если линии действия всех сил системы параллельны, то, выбрав ось  $Z$  так, чтобы она была параллельна линиям действия сил, получим, что первые два и последние уравнения системы выполняются тождественно, тогда останутся три уравнения равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{kz} = 0; \\ \sum m_x(\overline{F}_k) = 0; \\ \sum m_y(\overline{F}_k) = 0. \end{array} \right.$$

Это и есть *уравнения равновесия пространственной системы параллельных сил*.

### 1.14. Уравнение равновесия плоской произвольной системы сил

Для равновесия плоской произвольной системы сил необходимо, чтобы  $\overline{R} = 0$  и  $M_O = 0$ , а для этого должны выполняться три равенства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum m_o(\overline{F}_k) = 0. \end{array} \right.$$

При решении задач их записывают в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M_o = 0. \end{array} \right.$$

Это и есть *уравнение равновесия произвольной плоской системы сил*.

Имеется два других вида уравнения равновесия.

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases} \quad \text{— здесь ось } x \text{ не } \perp \text{ АВ.}$$

$$\begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0; \\ \sum M_C = 0. \end{cases} \quad \text{— здесь точки А, В, С не лежат на одной прямой.}$$

Если линии действия всех сил плоской системы параллельны, то система сил называется плоской системой параллельных сил.

Выберем ось  $X$  так, чтобы она была перпендикулярна линиям действия сил. Тогда уравнение  $\sum X = 0$  выполняется тождественно. В результате получим два вида уравнений равновесия плоской системы параллельных сил:

$$\begin{cases} \sum Y = 0; \\ \sum M_O = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum M_A = 0; \\ \sum M_B = 0. \end{cases}$$

### 1.15. Равновесие системы тел

Иногда приходится решать задачи о равновесии нескольких тел, связанных между собой связями, которые называются *внутренними*, в отличие от внешних связей, связывающих рассматриваемую систему тел с другими телами. На рисунке 23: D — внутренняя связь, A, B, C — внешние связи.

Для решения задачи в этом случае необходимо составить три уравнения равновесия для всей системы в целом (см. рис. 23) и три уравнения для какой-либо ее части, например, DC (рис. 24). В результате будем иметь шесть уравнений, из которых можно определить 6 неизвестных  $x_A, y_A, R_B, R_C, x_D, y_D$ .

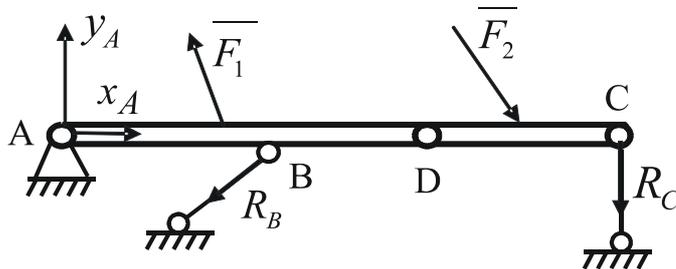


Рис. 23

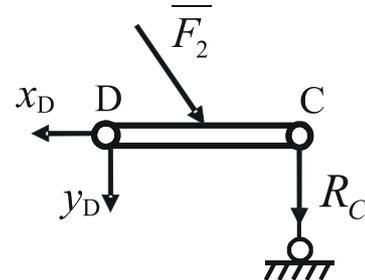


Рис. 24

Три уравнения для другой части AD будут уравнениями проверки. Здесь следует учесть, что сила, с которой правая часть балки действует на левую, равна и противоположно направлена силе, с которой левая часть балки действует на правую (по аксиоме равенства действия и противодействия).

Задачу можно решить и по-другому: составив по три уравнения для левой и правой частей. Тогда три уравнения для всей балки будут проверкой.

Если система состоит из  $n$  — тел, то можно составить  $3n$  уравнений и определить  $3n$  неизвестных. Если неизвестных больше, то задача называется статически неопределимой; если меньше, то система не будет жесткой.

### 1.16. Расчет ферм

*Фермой* называется конструкция, состоящая из невесомых стержней, соединенных между собой шарнирами. Места соединения стержней фермы называются узлами. У статически определимой фермы число узлов  $n$  и число стержней  $k$  удовлетворяют равенству:  $k = 2n - 3$ . Расчет фермы заключается в определении внешних реакций связей и определении усилий в стержнях фермы.

Методом вырезания узлов пользуются в том случае, если требуется определить усилия во всех стержнях фермы. Если требуется определить усилия в каком-то конкретном стержне, то используют метод сечений (Риттера).

*Метод вырезания узлов* заключается в том, что последовательно вырезают и рассматривают равновесие таких узлов фермы, в которых сходится не более двух стержней с неизвестными усилиями.

*Метод сечений* заключается в том, что ферму рассекают линией, пересекающей не более трех стержней с неизвестными усилиями, и рассматривают равновесие той части фермы, которая проще.

### 1.17. Центр параллельных сил. Центр тяжести

*Центром параллельных сил* называется точка  $C$ , через которую проходит равнодействующая системы параллельных сил при любом повороте всех сил системы в одну и ту же сторону на один и тот же угол.

Найдем координаты т.  $C$  (рис. 25).

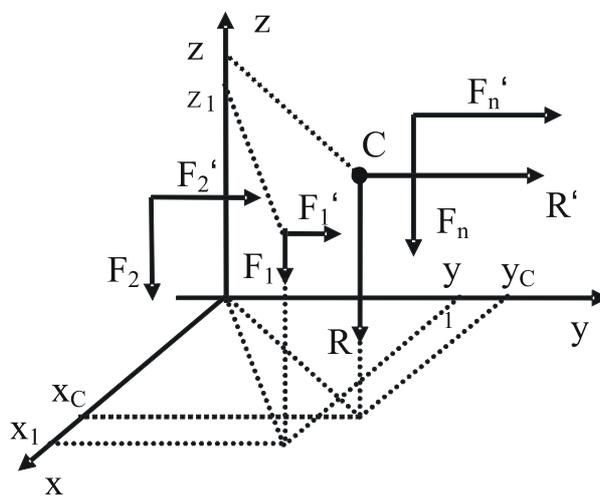


Рис. 25

Поскольку  $m_x(\bar{R}) = \sum m_x(\bar{F}_k)$ , то  $-R \cdot y_c = -F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2 - \dots - F_n \cdot y_n$ .

Отсюда находим:  $y_c = (\sum F_k \cdot y_k) / R = (\sum F_k \cdot y_k) / \sum F_k$ , где  $y_k$  — координата  $y$ , точки приложения силы  $F_k$ . Аналогично определяем координату  $x_c$ :  $m_y(R) = \sum m_y(F_k)$ , или  $R \cdot x_c = \sum F_k \cdot x_k$ .

Тогда  $x_c = (\sum F_k \cdot x_k) / \sum F_k$ .

Для определения  $z_c$  повернем все силы системы так, чтобы они стали параллельны оси  $y$ , тогда  $m_x(R') = \sum m_x(F'_k)$  или  $-R' \cdot z_c = -\sum F'_k \cdot z_k$ . Отсюда находим:  $z_c = (\sum F_k \cdot z_k) / \sum F_k$ .

Силы тяжести, действующие на тело, можно приближенно считать системой параллельных сил. Центр системы сил тяжести называется центром тяжести.

Определение: *центром тяжести называется точка, через которую проходит равнодействующая сил тяжести тела при любом повороте тела.*

Для определения положения координат центра тяжести тела можно использовать формулы, ранее полученные для определения координат центра параллельных сил.

Если тело неоднородно, то, разбивая его на несколько простых тел, у которых легко определить координаты центра тяжести, получим формулы для определения координат центра тяжести неоднородного тела:

$$\begin{cases} x_c = (\sum P_k x_k) / \sum P_k \\ y_c = (\sum P_k y_k) / \sum P_k \\ z_c = (\sum P_k z_k) / \sum P_k \end{cases}, \quad (2)$$

где  $P_k$  — сила тяжести части тела с номером  $k$ .

Если тело однородное, то:

$$P_k = V_k \cdot \rho, \quad (3)$$

где  $V_k$  — объем тела с номером  $k$ ;

$\rho$  — удельный вес.

В этом случае говорят о центре тяжести объема. Подставив (3) в (2) и сократив на  $\rho$ , получим формулы, аналогичные (2), в которых вместо  $P_k$  будет стоять  $V_k$ .

Если у тела два размера много больше третьего, то говорят о центре тяжести поверхности, в этом случае:

$$P_k = V_k \cdot \rho = S_k \cdot h \cdot \rho, \quad (4)$$

где  $S_k$  — площадь части тела с номером  $k$ ;

$h$  — толщина.

Если  $h = \text{const}$ , то, подставив (4) в (2), получим аналогичные формулы, в которых вместо  $P$  будет стоять  $S$ .

Если у тела один размер много больше двух других, то говорят о центре тяжести линии. В этом случае, если площадь сечения  $S$  постоянна:

$$P_k = V_k \cdot \rho = S \cdot L_k \cdot \rho, \quad (5)$$

где  $L_k$  — длина участка с номером  $k$ .

Подставляя (5) в (2), получим формулы, аналогичные (2), в которых вместо  $P$  будет стоять  $L$ .

## 1.18. Аналитические и экспериментальные методы определения положения центра тяжести

1. Метод разбиений. Метод заключается в том, что тело разбивают на несколько простейших тел, у которых известно положение центра тяжести, и используют формулы типа (2).

2. Метод отрицательных площадей. Заключается в том, что данное тело дополняют до простейшего. При этом дополняющие вес, объем, площадь или длину считают отрицательными.

Простейшими являются тела, у которых известно положение центра тяжести. Ими являются: однородные диск и окружность — их ц.т. находится в центре; прямоугольник и параллелограмм — их ц.т. находится на пересечении диагоналей; треугольник — его ц.т. находится на пересечении медиан. При этом следует учитывать, что медианы точкой их пересечения делятся в отношении 1 : 2 (рис. 26). Положение центра тяжести кругового сектора можно определить по формуле:

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

где  $\alpha$  — половина центрального угла, выраженного в радианах (рис. 27).

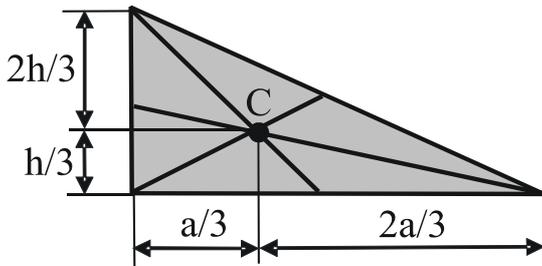


Рис. 26

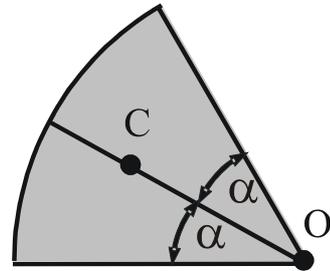


Рис. 27

Центр тяжести тела, имеющего центр, плоскость или ось симметрии, находится на них.

Среди экспериментальных способов можно отметить нижеприведенные.

3. Метод взвешивания (рис. 28). По известным весу тела  $P$ , показаниям весов  $R$  и расстоянию  $a$  определяют расстояние  $x$  из уравнения:

$$\sum m_O = -P \cdot x + R \cdot a;$$

откуда:

$$x = R \cdot a / P.$$

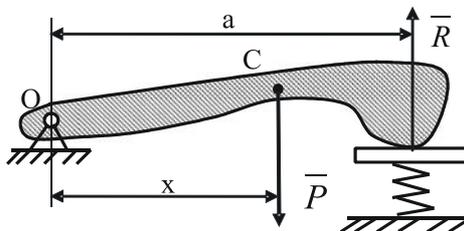


Рис. 28

4. Метод подвешивания. При этом способе тело подвешивают на нити сначала в одной точке и проводят линию, продолжая нить, затем в другой точке, точка пересечения этих линий и дает положение центра тяжести.

### 1.19. Трение скольжения

При попытке сдвинуть одно тело относительно другого возникает сила, препятствующая этому. Она называется *силой трения*. Гладкая поверхность — это идеализированная поверхность, когда нет трения. Реальные поверхности шероховатые. Силу трения находят из уравнений равновесия. В предельном случае, когда тело вот-вот выйдет из состояния покоя, силу трения можно определить по формуле:

$$F_{mp} = N \cdot f,$$

где  $N$  — сила нормального давления;

$f$  — коэффициент трения (безразмерная величина), определяется экспериментально.

Коэффициент трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей, незначительно зависит от скорости. Коэффициент трения покоя больше коэффициента трения движения и незначительно уменьшается с увеличением скорости.

Реакция шероховатой поверхности  $R$  (рис. 29) есть сумма нормальной реакции  $N$  и силы трения. Она отклонена от нормали.

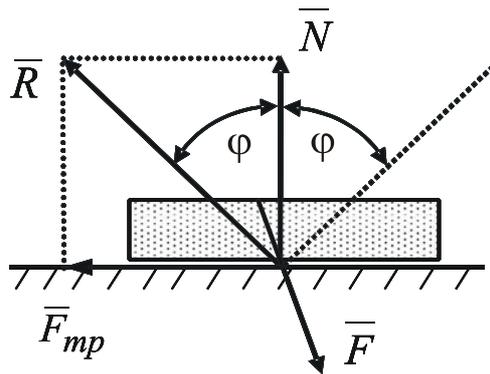


Рис. 29

Максимальный угол отклонения реакции шероховатой поверхности от нормали  $\varphi$  называется *углом трения*. Его можно найти по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = F_{mp} / N = f.$$

Если равнодействующая  $F$  внешних сил, приложенных к телу, проходит внутри угла трения, то тело не выйдет из равновесия при сколь угодно большой силе  $\bar{F}$ .

### 1.20. Трение качения

В теоретической механике все тела считаются абсолютно твердыми. Если бы это было так, то тело (рис. 30) вышло бы из состояния покоя при сколь угодно малой силе  $F$ , т.к. сумма моментов сил, приложенных к телу, не равна 0. Но этого не происходит. В действительности, все тела деформируемы, поэтому нормальная реакция  $N$  (рис. 31) смещается в направлении действия силы на не-

которое расстояние и образует вместе с силой тяжести пару сил, препятствующую качению. Максимальное смещение  $\delta$  называется *коэффициентом трения качения*. Измеряется в сантиметрах. В механике, в случае если сопротивление качению необходимо учесть, тела считают абсолютно твердыми, но к ним прикладывают момент  $M_c$  (момент сопротивления качению), препятствующий качению тела (рис. 32). Величина момента сопротивления качению может быть найдена по формуле:

$$M_c = N \cdot \delta.$$

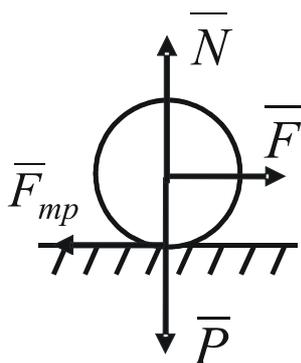


Рис. 30

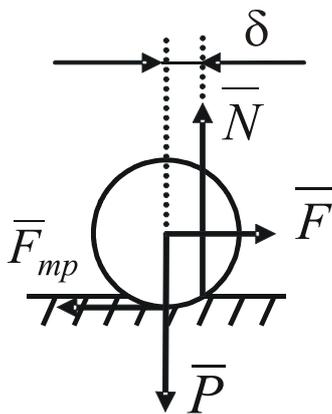


Рис. 31

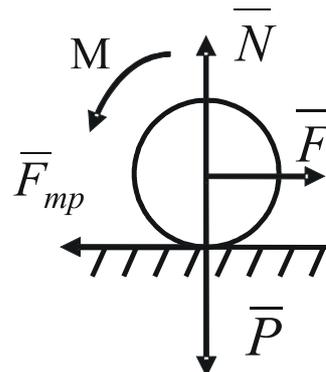


Рис. 32

Условие, при котором начинается качение, имеет вид:

$$F \cdot R \geq N \cdot \delta$$

или

$$F \geq N \cdot \delta / R,$$

здесь  $R$  — радиус колеса.

Условие, при котором начинается скольжение:

$$F \geq F_{mp} = f \cdot N.$$

Поскольку  $f \gg \delta/R$ , то при скольжении надо приложить силу много большую, чем при качении.

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для выполнения контрольной работы следует решить пять задач. Решение каждой из задач необходимо начинать на *развороте тетради* (на четной странице, начиная со второй). Сверху указывается номер задачи, выполняется чертеж в соответствующем масштабе и записывается условие задачи. Текст задачи не переписывается. Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, с нанесением всех размеров и обозначений. Решение задачи необходимо сопровождать краткими пояснениями. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие перечисленным требованиям, не проверяются и возвращаются на доработку.

При выполнении контрольных работ следует номер рисунка выбирать по последней цифре шифра, а номер варианта — в соответствующих таблицах по предпоследней цифре шифра.

Пример: если шифр 892341, то при решении задачи С1 следует взять рисунок 1.1, а условие № 4.

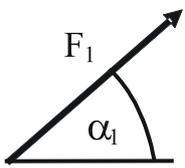
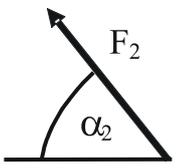
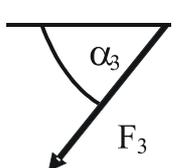
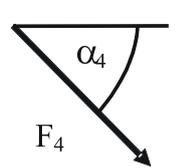
### 2.1. Задача С1

Жесткая рама (рис. 1.0-1.9) находится под действием пары сил с моментом  $M = 20$  кН·м и двух сосредоточенных сил, значения которых указаны в таблице 1. В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом  $P = 25$  кН. Определить реакции связей, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять  $a = 0,5$  м.

Указание. Задача С1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. Данные для решения задачи взять из таблицы 1. При вычислении момента силы  $F$  часто удобно разложить ее на составляющие  $F'$  и  $F''$ , для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона, тогда:  $m_o(\vec{F}) = m_o(\vec{F}') + m_o(\vec{F}'')$ .

Таблица 1

Исходные данные для решения задачи С1

Номер варианта	Силы							
								
	$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
	точка прило-жения	$\alpha_1$ град	точка прило-жения	$\alpha_1$ град	точка прило-жения	$\alpha_1$ град	точка прило-жения	$\alpha_1$ град
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	Н	30	—	—	—	—	К	60
1	—	—	Д	15	Е	60	—	—
2	К	75	—	—	—	—	Е	30

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	–	–	K	60	H	30	–	–
4	D	30	–	–	–	–	E	60
5	–	–	H	30	–	–	D	75
6	E	60	–	–	K	15	–	–
7	–	–	D	60	–	–	H	15
8	H	60	–	–	D	30	–	–
9	–	–	E	75	K	30	–	–

Рисунки к вариантам заданий

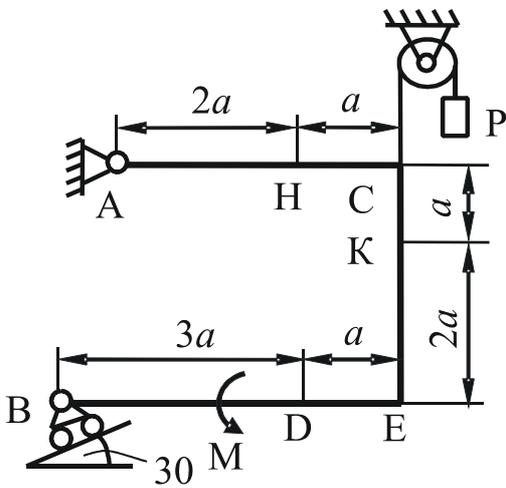


Рис. 1.0

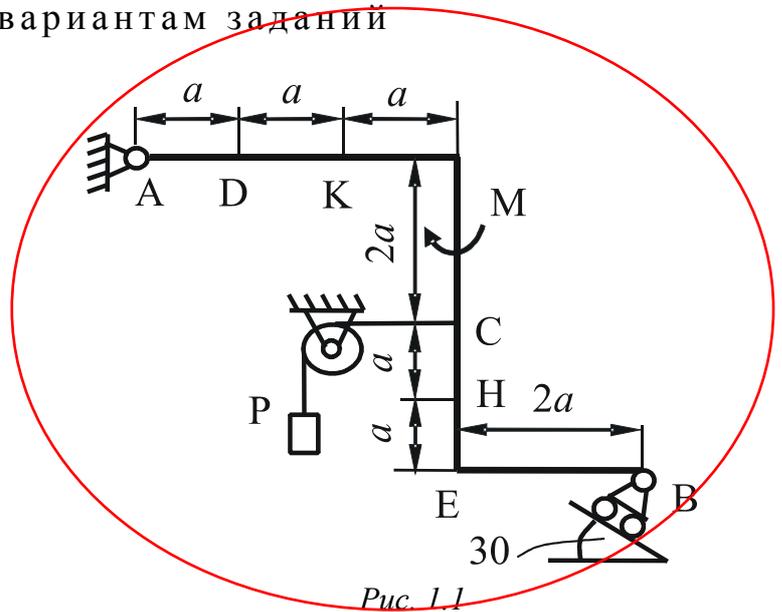


Рис. 1.1

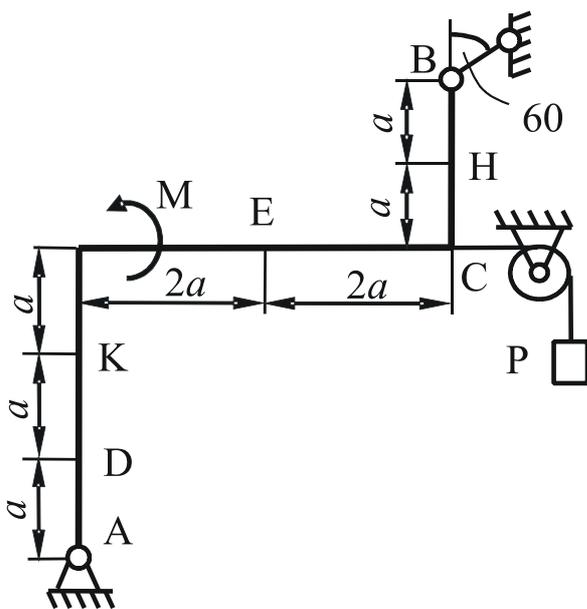


Рис. 1.2

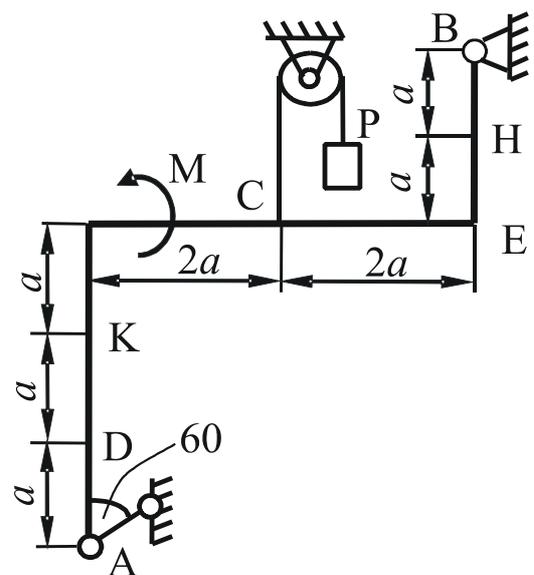
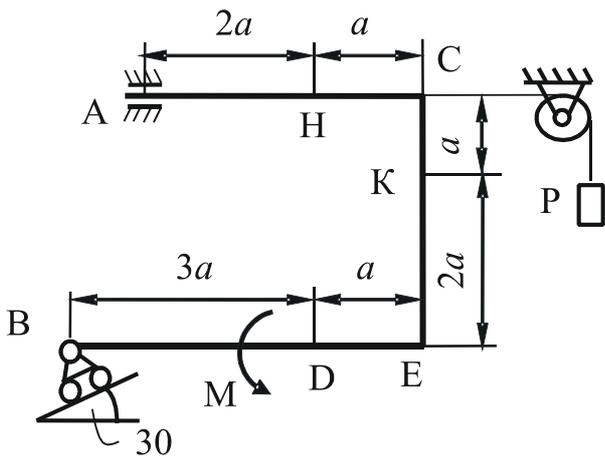
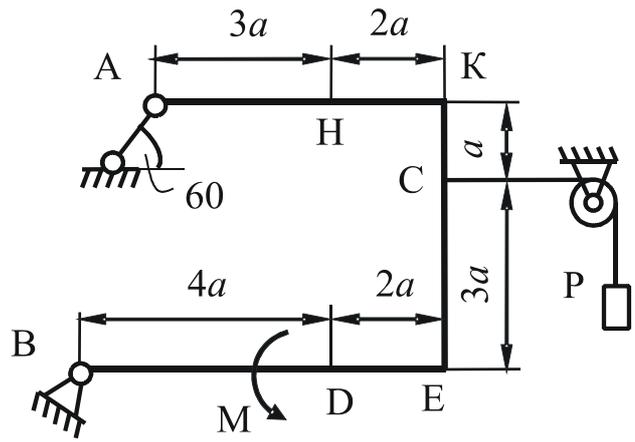


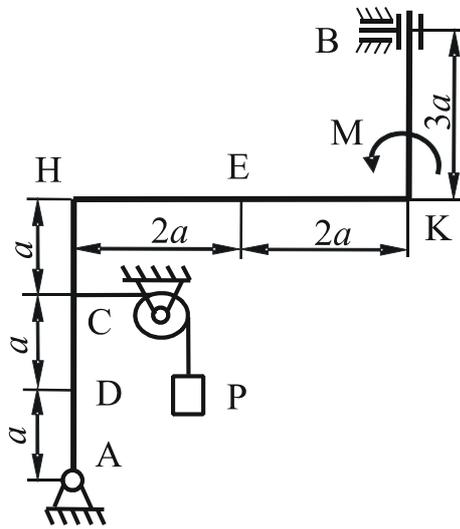
Рис. 1.3



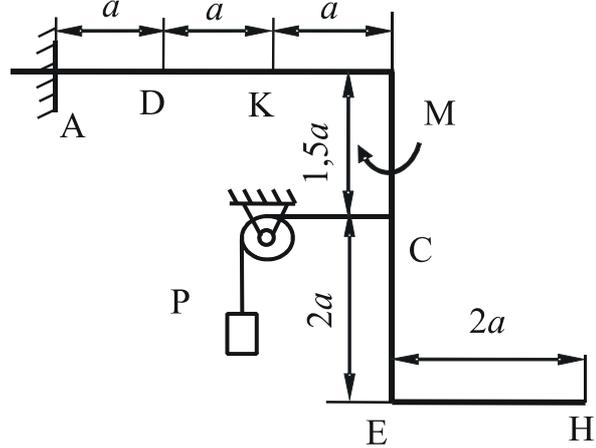
Puc. 1.4



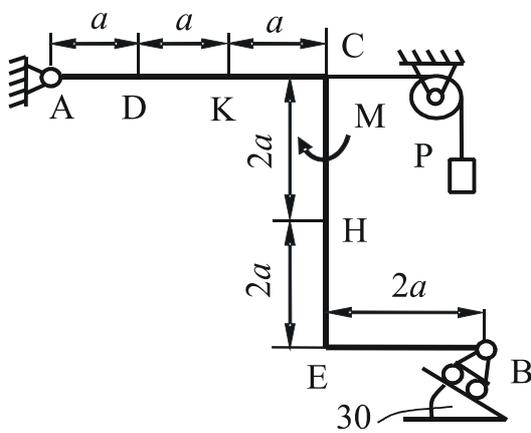
Puc. 1.5



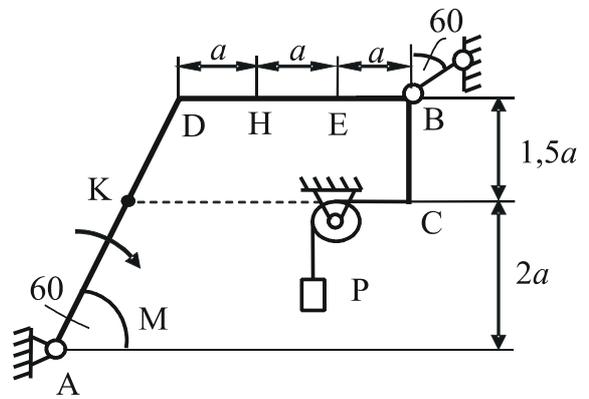
Puc. 1.6



Puc. 1.7



Puc. 1.8



Puc. 1.9

### Пример выполнения задачи С1

Изогнутый стержень BCDA имеет в точке А неподвижную шарнирную опору, а в точке В — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке 1.10.

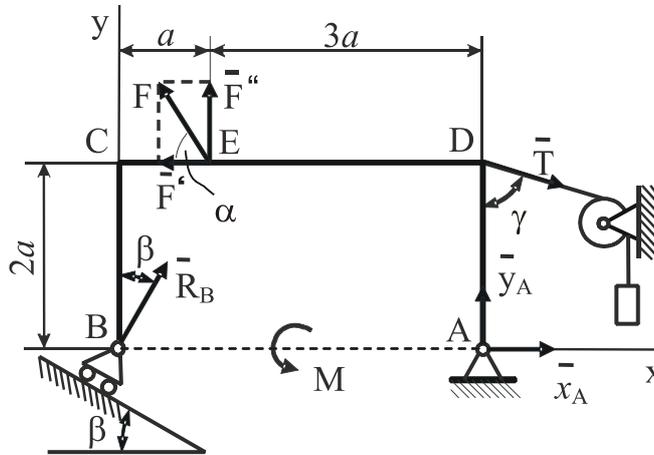


Рис. 1.10

Дано:  $F = 25$  кН,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $P = 18$  кН,  $\gamma = 75^\circ$ ,  $M = 50$  кН·м,  $\beta = 30^\circ$ ,  $a = 0,5$  м.

Определить: реакции в точках А и В, вызываемые действующими нагрузками.

Решение:

1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси  $x$  и  $y$  и изобразим действующие на пластину силы: силу  $\vec{F}$ , пару сил с моментом  $M$ , натяжение троса  $\vec{T}$  (по модулю  $T = P$ ) и реакции связей  $\vec{x}_A$ ,  $\vec{y}_A$ ,  $\vec{R}_B$  (реакцию неподвижной шарнирной опоры А изображаем двумя ее составляющими, реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы  $\vec{F}$  относительно точки А воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу  $\vec{F}$  на составляющие  $\vec{F}'$ ,  $\vec{F}''$  ( $F' = F \cos \alpha$ ,  $F'' = F \sin \alpha$ ) и учтем, что  $m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}') + m_A(\vec{F}'')$ .

$$\text{Получим: } \sum F_{kx} = 0, \quad x_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad y_A + R_B \cos \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0;$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot 3a - T \sin \gamma \cdot 2a = 0.$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ:  $x_A = -8,5$  кН;  $y_A = -23,3$  кН;  $R_B = 7,3$  кН. Знаки указывают, что силы  $\vec{x}_A$  и  $\vec{y}_A$  направлены противоположно показанным на рисунке 1.10.

## 2.2. Задача С2

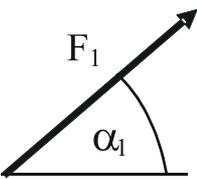
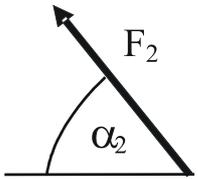
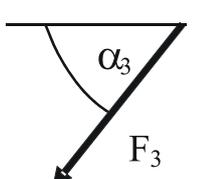
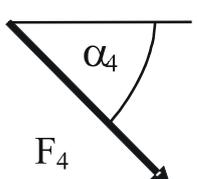
Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке С или соединены друг с другом шарнирно (рис. 2.0-2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. 2.6-2.9).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом  $M = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q = 20 \text{ кН/м}$  и еще две силы. Эти силы, направления и точки их приложения указаны в таблице 2.1; там же в столбце «Участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка. Определить реакции связей в точках А, В, С и D, вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять  $a = 0,2 \text{ м}$ . Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в таблице 2.2.

Указание. Задача С2 — на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем — равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия.

Таблица 2.1

Исходные данные для решения задачи С2

Номер варианта	Силы								Участок
									
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$		
	точка приложения	$\alpha_1$ , град	точка приложения	$\alpha_2$ , град	точка приложения	$\alpha_3$ , град	точка приложения	$\alpha_4$ , град	
0	К	60	—	—	Н	30	—	—	CL
1	—	—	L	60	—	—	Е	30	СК
2	L	15	—	—	К	60	—	—	АЕ
3	—	—	К	30	—	—	Н	60	CL
4	L	30	—	—	Е	60	—	—	СК
5	—	—	L	75	—	—	К	30	АЕ
6	Е	60	—	—	К	75	—	—	CL
7	—	—	Н	60	L	30	—	—	СК
8	—	—	К	30	—	—	Е	15	CL
9	Н	30	—	—	—	—	L	60	СК

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 1, 2, 4, 6, 8	рис. 0, 3, 5, 7, 9
			

Рисунки к вариантам заданий

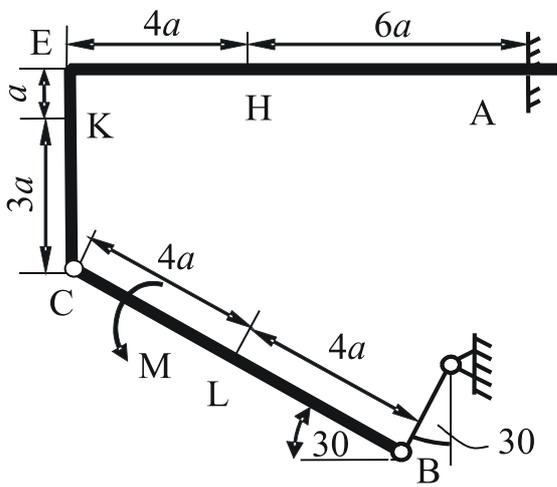


Рис. 2.0

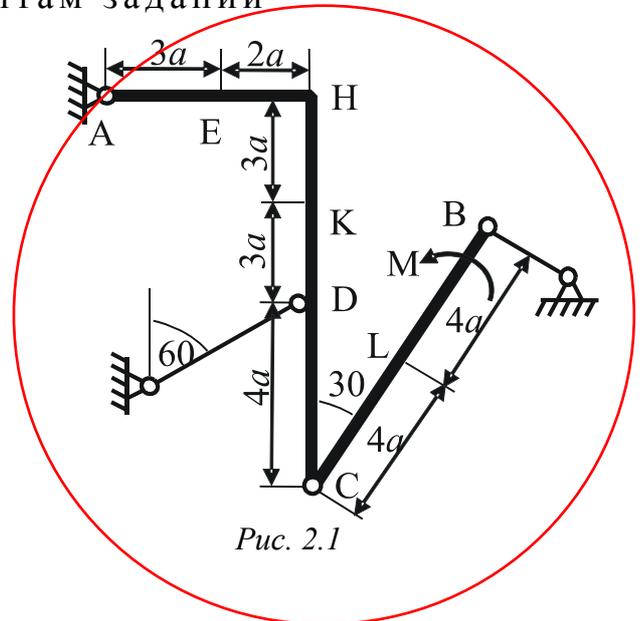


Рис. 2.1

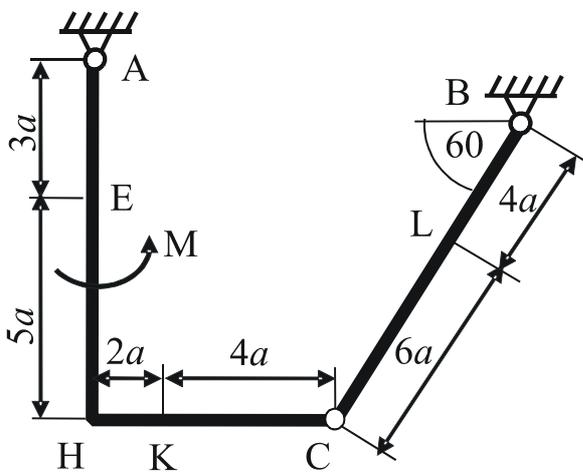


Рис. 2.2

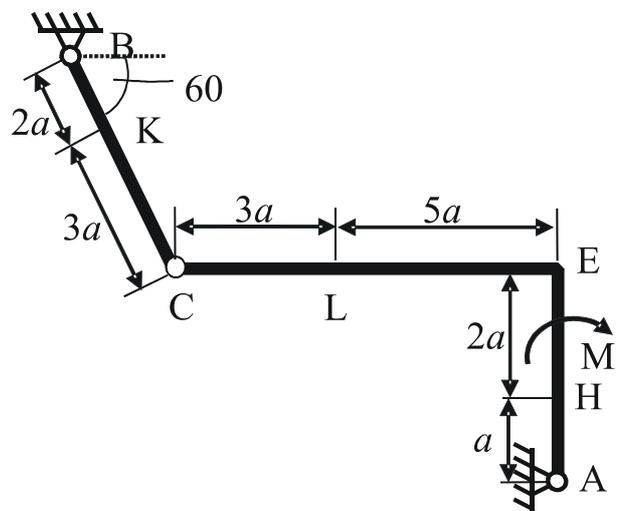
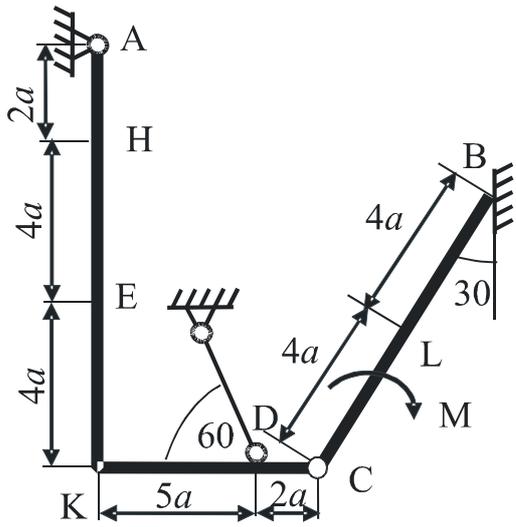
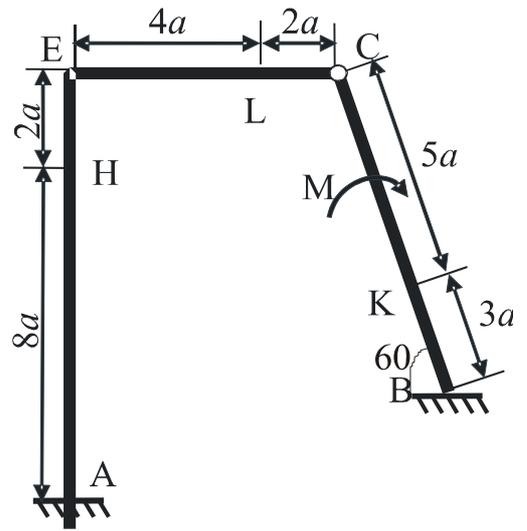


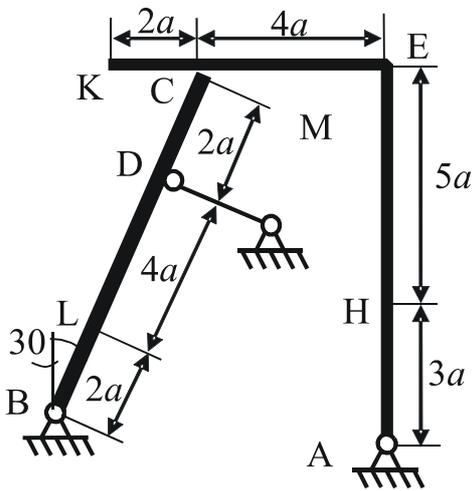
Рис. 2.3



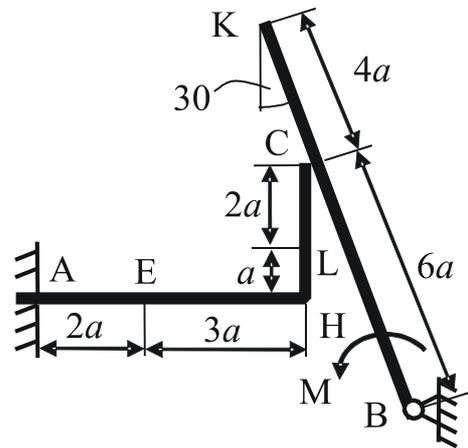
Puc. 2.4



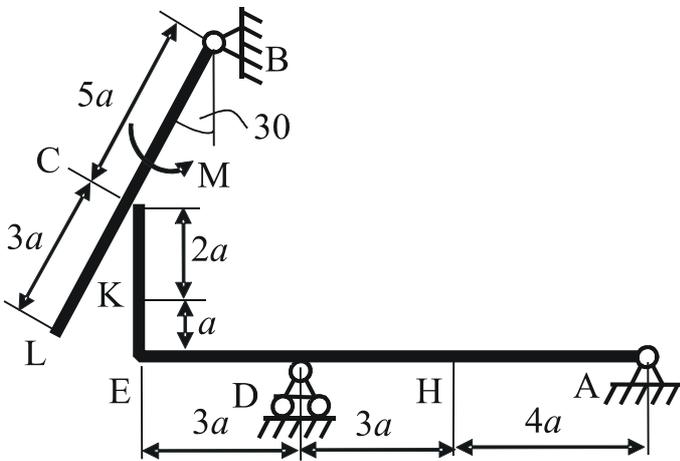
Puc. 2.5



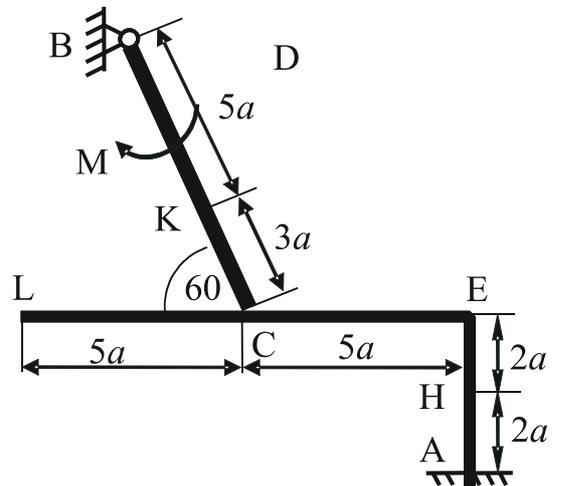
Puc. 2.6



Puc. 2.7



Puc. 2.8



Puc. 2.9

## Пример выполнения задачи С2

На угольник ABC ( $\angle ABC = 90^\circ$ ), конец А которого жестко заделан, в точке С опирается стержень DE (рис. 2.10, а).

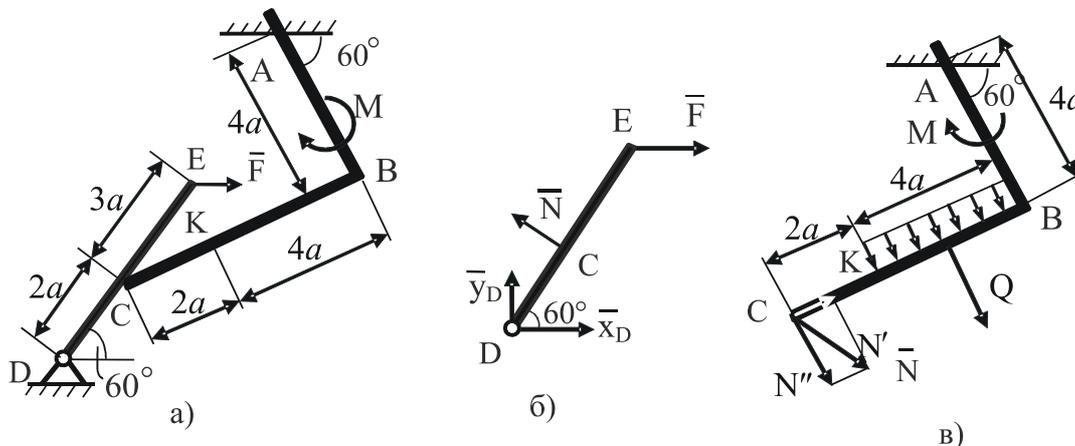


Рис. 2.10

Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору, и к нему приложена сила  $\bar{F}$ , а к угольнику — равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности  $q$  и пара с моментом  $M$ .

Дано:  $F = 10$  кН,  $M = 5$  кН·м,  $q = 20$  кН/м,  $a = 0,2$  м.

Определить: реакции в точках А, С, D, вызванные заданными нагрузками.

Решение:

1. Для определения реакции расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. 2.10, б). Проведем координатные оси  $xu$  и изобразим действующие на стержень силы: силу  $\bar{F}$ , реакцию  $\bar{N}$ , направленную перпендикулярно стержню, и составляющие  $\bar{X}_D$  и  $\bar{Y}_D$  реакции шарнира D. Для получения плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_D + F - N \sin 60^\circ = 0; \quad (6)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_D + N \cos 60^\circ = 0; \quad (7)$$

$$\sum m_D(\bar{F}_k) = 0, \quad N \cdot 2a - F \cdot 5a \sin 60^\circ = 0. \quad (8)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. 2.10, в). На него действуют сила давления стержня  $\bar{N}'$ , направленная противоположно реакции  $\bar{N}$ , равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой  $\bar{Q}$ , приложенной в середине участка KB (численно  $Q = q \cdot 4a = 16$  кН), пара сил с моментом  $M$  и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими  $\bar{X}_D, \bar{Y}_D$ , и пары с моментом  $M_A$ . Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + Q_B \cos 60^\circ - N' \sin 60^\circ = 0; \quad (9)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q \sin 60^\circ - N' \cos 60^\circ = 0; \quad (10)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M_A + M + Q \cdot 2a + N' \cos 60^\circ \cdot 4a + N' \cos 30^\circ \cdot 6a = 0. \quad (11)$$

При вычислении момента силы разлагаем ее на составляющие  $\bar{N}'_1$  и  $\bar{N}'_2$  и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (6-11), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно  $N' = N$  в силу равенства действия и противодействия.

Ответ:  $N = 21,7$  кН,  $Y_D = -10,8$  кН;  $X_D = 8,8$  кН,  $X_A = -26,8$  кН,  $Y_A = 24,7$  кН,  $M_A = -42,6$  кН·м. Знаки указывают, что силы  $\bar{Y}_D, \bar{X}_A$  и момент  $M_A$  направлены противоположно показанным на рисунках 2.10, а, б, в.

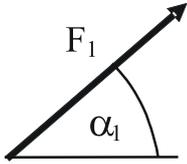
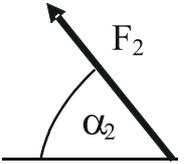
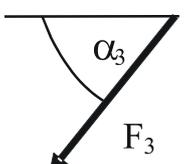
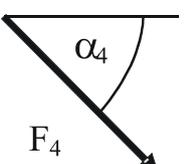
### 2.3. Задача С3

Ферма, состоящая из 7 стержней и пяти узлов, закреплена, как показано на рисунках 3.0-3.9. В узлах фермы приложены две сосредоточенные силы, значения которых и точки их приложения указаны в таблице 3. Здесь же даны размеры фермы. Требуется методом вырезания узлов определить усилия во всех стержнях фермы. Для трех стержней фермы (по усмотрению студента) сделать проверку методом сечений. При расчете принять  $\alpha = 60^\circ$ .

Указание. Вначале необходимо составить уравнения равновесия для всей фермы в целом и определить три неизвестные реакции опор.

Таблица 3

Исходные данные для решения задачи С3

Номер варианта	Силы		Силы							
										
			$F_1 = 10$ кН		$F_2 = 20$ кН		$F_3 = 30$ кН		$F_4 = 40$ кН	
а, м	Н, м	точка приложения	$\alpha_1$ , град	точка приложения	$\alpha_2$ , град	точка приложения	$\alpha_3$ , град	точка приложения	$\alpha_4$ , град	
0	4	2	С	30	—	—	—	—	Д	60
1	5	3	—	—	Е	30	С	60	—	—
2	6	4	Е	60	—	—	—	—	С	30
3	7	3	—	—	—	60	—	30	—	—
4	8	4	С	30	—	—	—	—	Д	60
5	4	2	—	—	Д	30	—	—	С	90
6	5	3	Е	60	—	—	С	30	—	—
7	6	4	—	—	С	60	—	—	Е	30
8	7	3	С	60	—	—	—	30	—	—
9	8	2	—	—	Д	60	С	30	—	—

Рисунки к вариантам заданий

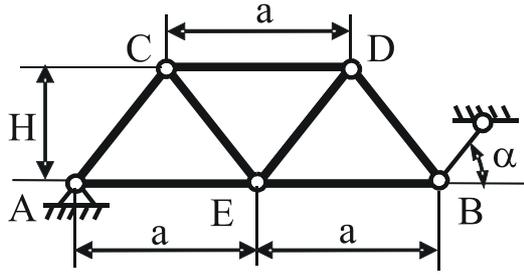


Рис. 3.0

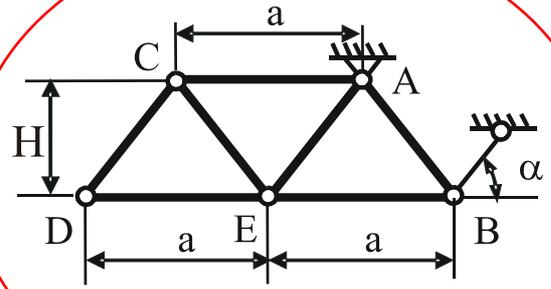


Рис. 3.1

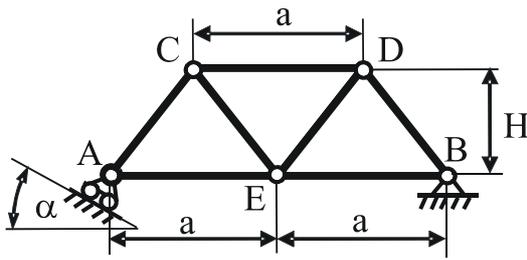


Рис. 3.2

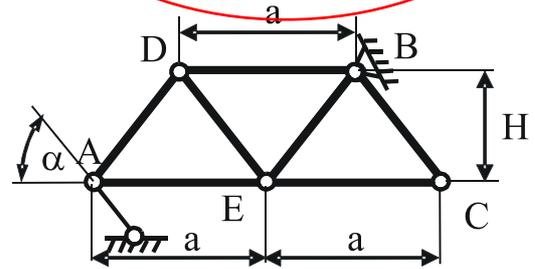


Рис. 3.3

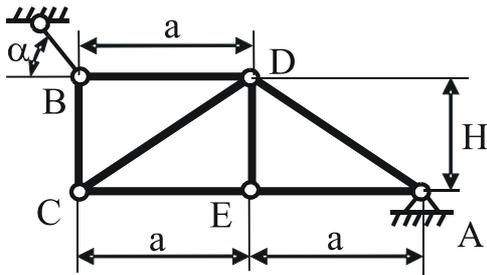


Рис. 3.4

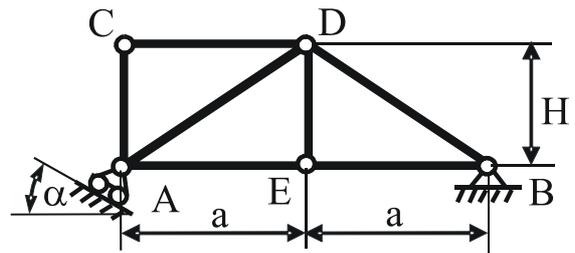


Рис. 3.5

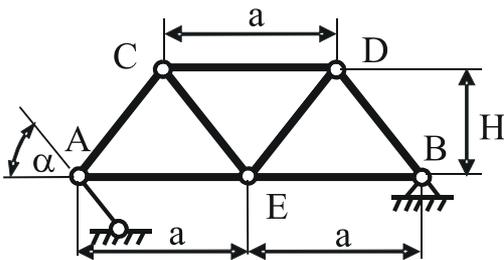


Рис. 3.6

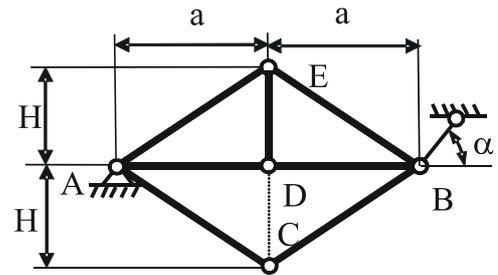


Рис. 3.7

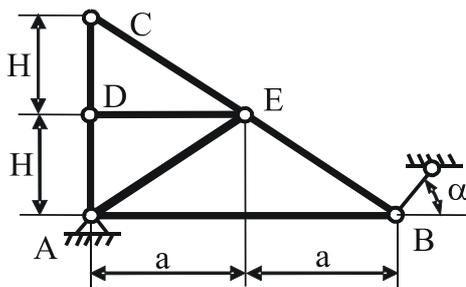


Рис. 3.8

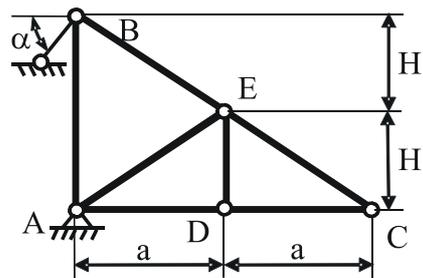


Рис. 3.9

### Пример выполнения задачи С3

Дано: в узлах фермы С и D приложены силы:  $F_1 = 10$  Н и  $F_2 = 20$  Н.

Определить: усилия во всех стержнях фермы методом вырезания узлов. Кроме того, определить усилия в стержнях 2-4 методом сечений. Размеры указаны на рисунке 3.10.

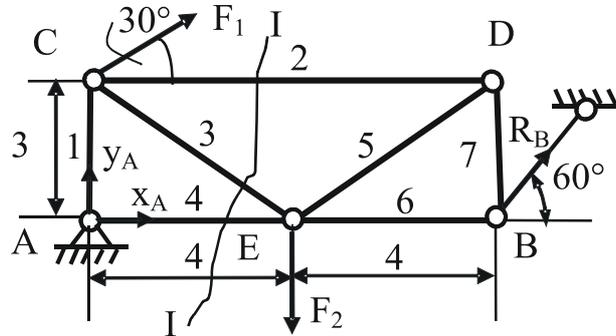


Рис. 3.10

Решение:

1. Определим реакции опор:  $x_A, y_A, R_B$ .

Для этого составим уравнения равновесия для всей фермы в целом:

$$\sum x = x_A + F_1 \cos 30 + R_B \cos 60 = 0; \quad (12)$$

$$\sum y = y_A + F_1 \sin 30 - F_2 + R_B \sin 60 = 0; \quad (13)$$

$$\sum M_A = -F_1 \cos 30 \cdot 3 - F_2 \cdot 4 + R_B \sin 60 \cdot 8 = 0. \quad (14)$$

Решая уравнения (12-14), находим:

$$x_A = -16,309 \text{ Н}; \quad y_A = 1,752 \text{ Н}; \quad R_B = 15,297 \text{ Н}.$$

2. Определим усилия в стержнях фермы методом вырезания узлов. Вначале будем полагать, что все стержни растянуты, тогда их реакции будут направлены во внутрь стержней. Покажем все силы, действующие на узел А (рис. 3.11, а). Поскольку в узле А сходится только 2 стержня, то усилия в этих стержнях можно определить из уравнений равновесия:

$$\sum x = x_A + s_4 = 0.$$

$$\text{Отсюда: } s_4 = -x_A = 16,309 \text{ Н}; \quad \sum y = y_A + s_1 = 0; \quad s_1 = -y_A = -1,752 \text{ Н}.$$

Далее можно рассмотреть равновесие узла В (в нем сходится два стержня) или узла С (рис. 3.11, б). В узле С сходится три стержня, но усилие  $s_1$  нами уже определено, поэтому из уравнений равновесия можно найти  $s_2, s_3$ . Угол  $\alpha$  определим из треугольника АЕС:  $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$ , тогда:  $\alpha = 36,9^\circ$  и  $\sin \alpha = 0,6$ ;  $\cos \alpha = 0,8$ .

Составим уравнения равновесия:

$$\sum x = F_1 \cos 30 + s_3 \cos \alpha + s_2 = 0;$$

$$\sum y = F_1 \sin 30 - s_3 \sin \alpha - s_1 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим:  $s_3 = 11,254 \text{ Н}$ ,  $s_2 = -17,663 \text{ Н}$ . Отрицательные значения усилий в первом и втором стержнях показывают, что эти стержни не растянуты, как предполагалось, а сжаты.

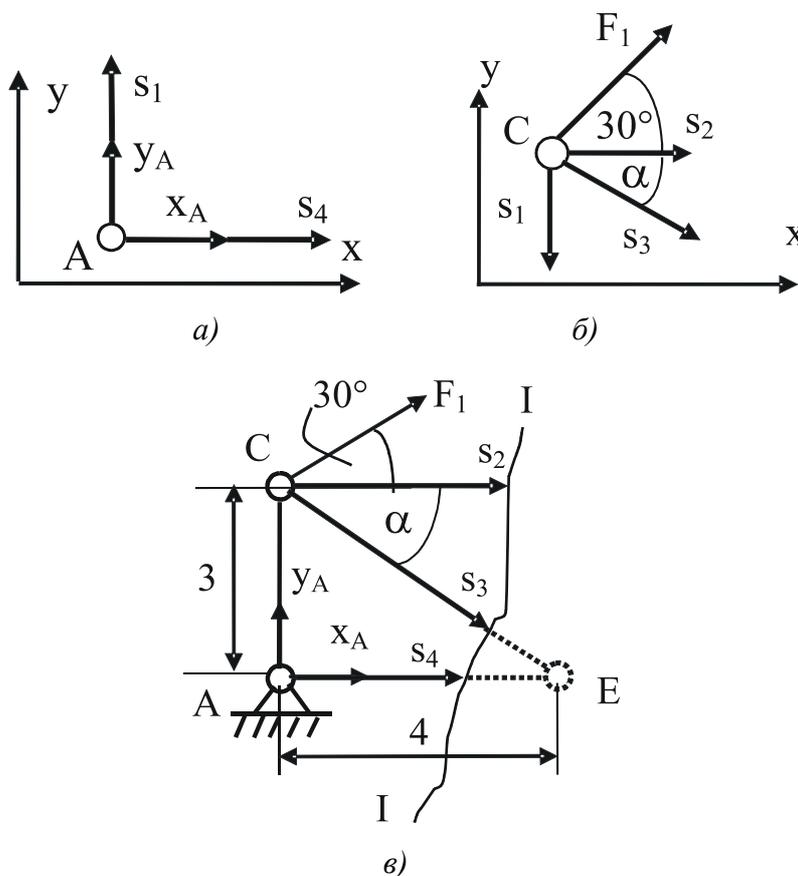


Рис. 3.11

Далее можно рассмотреть равновесие узла E и определить  $s_5, s_6$ . Из уравнения проекций на ось  $y$  для узла D можно найти усилие в седьмом стержне —  $s_7$ . Уравнения равновесия для узла B должны обратиться в тождество, они являются уравнениями проверки.

3. Определим усилия в стержнях 2, 3, 4 методом сечений. Рассечем ферму сечением I-I (рис. 3.11, в) и составим уравнения равновесия для части фермы, лежащей слева от сечения:

$$\sum M_E = -F_1 \cos 30^\circ \cdot 3 - F_1 \sin 30^\circ \cdot 4 - s_2 \cdot 3 - y_A \cdot 4 = 0; \quad (15)$$

$$\sum y = F_1 \sin 30^\circ - s_3 \sin \alpha + y_A = 0; \quad (16)$$

$$\sum M_C = x_A \cdot 3 + s_4 \cdot 3 = 0. \quad (17)$$

Из уравнения (15) находим  $s_2 = -17,663 \text{ Н}$ .

Из уравнения (16) находим  $s_3 = 11,254 \text{ Н}$ .

Из уравнения (17) находим  $s_4 = 16,309 \text{ Н}$ .

Сравнивая эти результаты с полученными ранее, делаем вывод о том, что задача решена правильно.

## 2.4. Задача С4

Шесть невесомых стержней соединены своими концами шарнирно друг с другом в двух узлах и прикреплены другими концами (тоже шарнирно) к неподвижным опорам А, В, С, D (рис. 4.0-4.9). Стержни и узлы (узлы расположены в вершинах Н, К, L или М прямоугольного параллелепипеда) на рисунках не показаны и должны быть изображены по данным таблицы 4. В узле, который указан первым (см. табл. 4), приложена сила  $P = 200$  Н; во втором узле приложена сила  $Q = 100$  Н. Сила  $\vec{P}$  образует с положительными направлениями координатных осей  $x, y, z$  углы, равные соответственно:  $\alpha_1 = 45^\circ, \beta_1 = 60^\circ, \gamma_1 = 60^\circ$ , а сила  $Q$  — углы:  $\alpha_2 = 60^\circ, \beta_2 = 45^\circ, \gamma_2 = 60^\circ$ . Грани параллелепипеда, параллельные плоскости  $xy$ , — квадраты. Диагонали других (боковых) граней образуют с плоскостью  $xy$  угол  $\varphi = 60^\circ$ , а диагональ параллелепипеда образует с этой плоскостью угол  $\Theta = 51^\circ$ . Определить усилия в стержнях.

Указание. Задача С4 — на равновесие пространственной системы сходящихся сил. При ее решении следует рассмотреть отдельно равновесие каждого из двух узлов.

Таблица 4

Исходные данные для решения задачи С4

Номер варианта	Узлы	Стержни
0	Н, М	НМ, НА, НВ, МА, МС, МD
1	L, М	LM, LA, LD, МА, МВ, МС
2	К, М	KM, КА, КВ, МА, МС, МD
3	L, Н	LH, LC, LD, НА, НВ, НС
4	К, Н	KN, KB, KC, НА, НС, НD
5	М, Н	MN, MB, MC, НА, НС, НD
6	L, Н	LH, LB, LD, НА, НВ, НВ
7	К, Н	KN, KC, KD, НА, НВ, НС
8	L, М	LM, LB, LD, МА, МВ, МС
9	К, М	KM, КА, KD, МА, МВ, МС

Рисунки к вариантам заданий

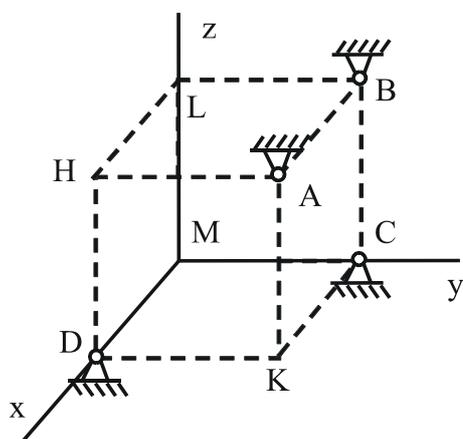


Рис. 4.0

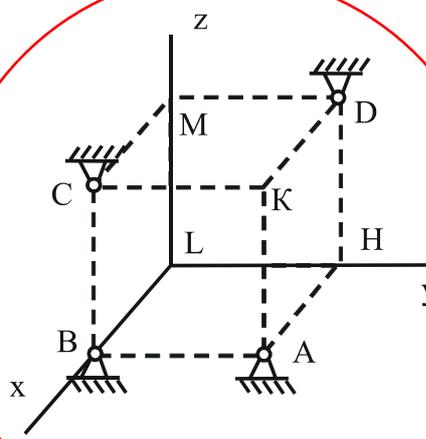
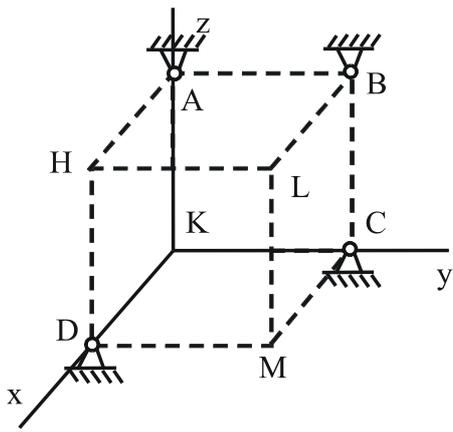
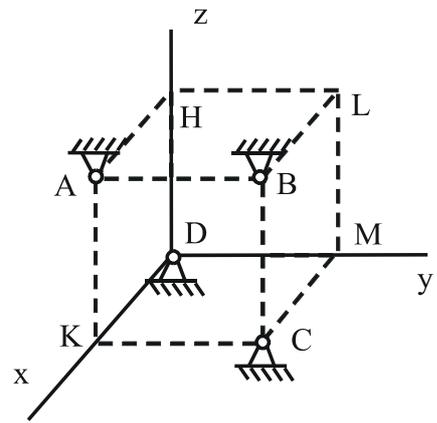


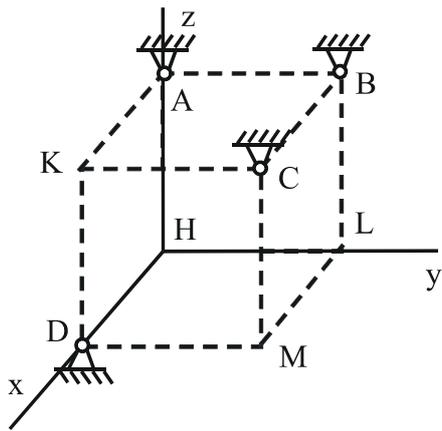
Рис. 4.1



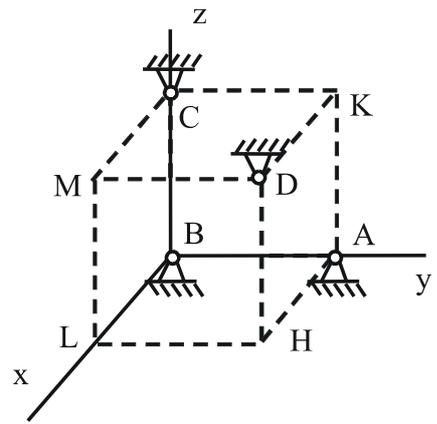
Puc. 4.2



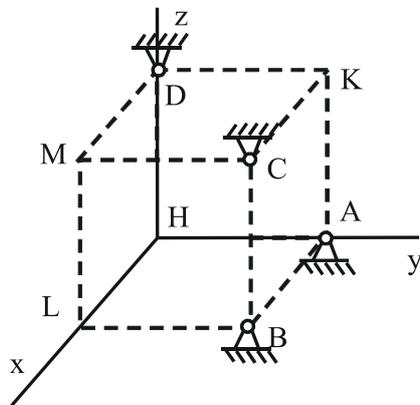
Puc. 4.3



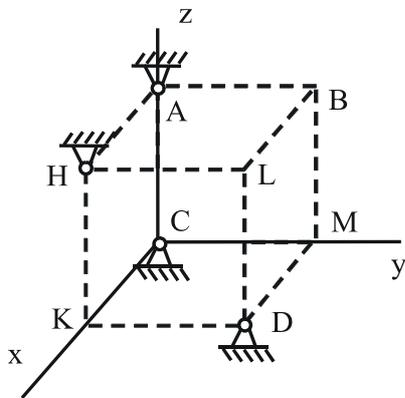
Puc. 4.4



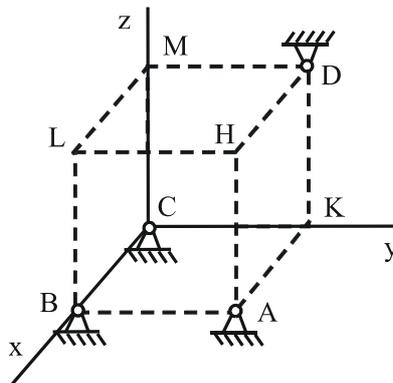
Puc. 4.5



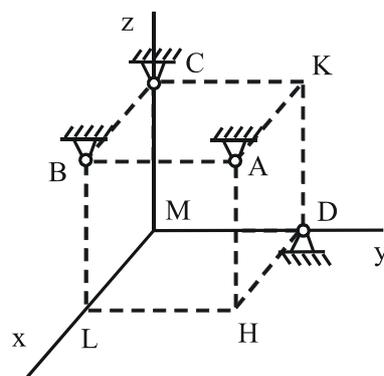
Puc. 4.6



Puc. 4.7



Puc. 4.8



Puc. 4.9

### Пример решения задачи С4

Конструкция состоит из невесомых стержней 1, 2, ..., 6, соединенных друг с другом (в узлах К и М) и с неподвижными опорами А, В, С, D шарнирами (рис. 4.10). В узлах К и М приложены силы  $\vec{P}$  и  $\vec{Q}$ , образующие с координатными осями углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  и  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  соответственно (на рисунке показаны только углы  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ).

Дано:  $P = 100$  Н,  $\alpha_1 = 60^\circ, \beta_1 = 60^\circ, \gamma_1 = 45^\circ, Q = 50$  Н,  $\alpha_2 = 45^\circ, \beta_2 = 60^\circ, \gamma_2 = 60^\circ; \psi = 30^\circ, \varphi = 60^\circ, \delta \approx 74^\circ$ .

Определить: усилия в стержнях 1-6.

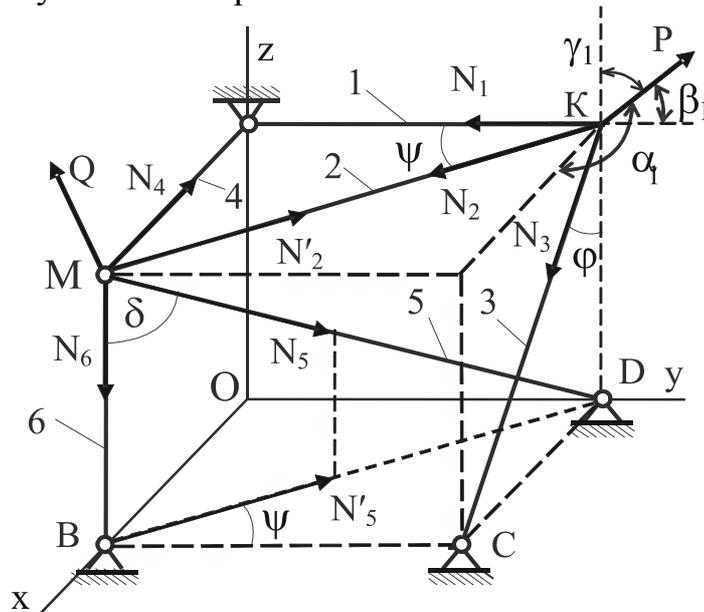


Рис. 4.10

Решение:

1. Рассмотрим равновесие узла К, в котором сходятся стержни 1-3. На узел действуют сила  $\vec{P}$  и реакции  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$  стержней, которые направим по стержням от узла, считая стержни растянутыми.

Составим уравнения равновесия этой пространственной системы сходящихся сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P \cos \alpha_1 + N_2 \sin \psi + N_3 \sin \varphi = 0; \quad (18)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad P \cos \beta_1 - N_1 - N_2 \cos \psi = 0; \quad (19)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad P \cos \gamma_1 - N_3 \cos \varphi = 0. \quad (20)$$

Решив уравнения (18-20) при заданных числовых значениях силы  $P$  и углов, получим:  $N_1 = 349$  Н,  $N_2 = -345$  Н,  $N_3 = 141$  Н.

2. Рассмотрим равновесие узла М. На узел действуют силы  $\vec{Q}$ ,  $\vec{N}'_2, \vec{N}_4, \vec{N}_5, \vec{N}_6$  стержней. При этом по закону о равенстве действия и противодействия реакция  $\vec{N}'_2$  направлена противоположно  $\vec{N}_2$ , численно же:  $N'_2 = N_2$ .

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad Q \cos \alpha_2 - N_2 \sin \psi - N_4 - N_5 \sin \delta \sin \psi = 0; \quad (21)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Q \cos \beta_2 + N_2 \cos \psi + N_5 \sin \delta \cos \psi = 0; \quad (22)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Q \cos \gamma_2 - N_5 \cos \delta - N_6 = 0. \quad (23)$$

При определении проекций силы  $\overline{N}_5$  на оси  $x$  и  $y$  в уравнениях (21) и (22) удобно сначала найти проекцию  $\overline{N}'_5$  этой силы на плоскость  $xOy$  (по величине  $N'_5 = N_5 \sin \delta$ ), а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на оси. Решив систему уравнений (21-23) и учитывая, что  $N'_2 = N_2 = -345 \text{ Н}$ , найдем, чему равны  $N_4, N_5, N_6$ .

О т в е т:  $N_1 = 349 \text{ Н}$ ;  $N_2 = -345 \text{ Н}$ ;  $N_3 = 141 \text{ Н}$ ;  $N_4 = 50 \text{ Н}$ ;  $N_5 = 329 \text{ Н}$ ;  $N_6 = -66 \text{ Н}$ . Знаки показывают, что стержни 2 и 6 сжаты; остальные — растянуты.

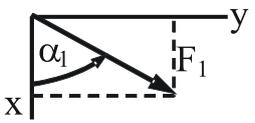
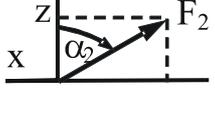
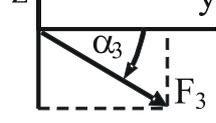
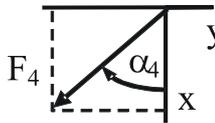
## 2.5. Задача С5

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены, как показано на рисунках 5.0-5.9.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты  $P_1 = 5 \text{ кН}$ , вес меньшей плиты  $P_2 = 3 \text{ кН}$ . Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость  $xu$  горизонтальная). На плиты действует пара сил с моментом  $M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в таблице 5; при этом силы  $\overline{F}_1$  и  $\overline{F}_4$  лежат в плоскостях, параллельных плоскости  $xu$ , сила  $\overline{F}_2$  — в плоскости, параллельной  $xz$ , и сила  $\overline{F}_3$  в плоскости, параллельной  $yz$ . Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит. Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять  $a = 0,6 \text{ м}$ .

У к а з а н и е. Задача С5 — на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) — две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы  $\overline{F}$  часто удобно разложить ее на две составляющие  $\overline{F}'$  и  $\overline{F}''$ , параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона,  $m_x(\overline{F}) = m_x(\overline{F}') + m_z(\overline{F}'')$ .

## Исходные данные для решения задачи С5

Номер варианта	Силы							
								
	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
	точка прило- жения	$\alpha_1$ , град	точка прило- жения	$\alpha_2$ , град	точка прило- жения	$\alpha_3$ , град	точка прило- жения	$\alpha_4$ , град
0	Е	60	Н	30	–	–	–	–
1	–	–	D	60	Е	30	–	–
2	–	–	–	–	К	60	D	30
3	К	30	–	–	D	0	–	–
4	–	–	Е	30	–	–	D	60
5	Н	0	К	60	–	–	–	–
6	–	–	Н	90	Е	30	–	–
7	–	–	–	–	Н	60	К	90
8	D	30	–	–	К	0	–	–
9	–	–	Е	90	–	–	Н	30

## Рисунки к вариантам заданий

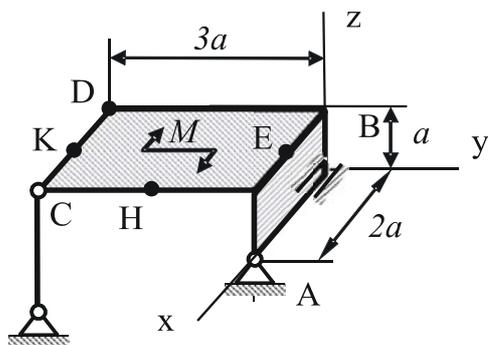


Рис. 5.0

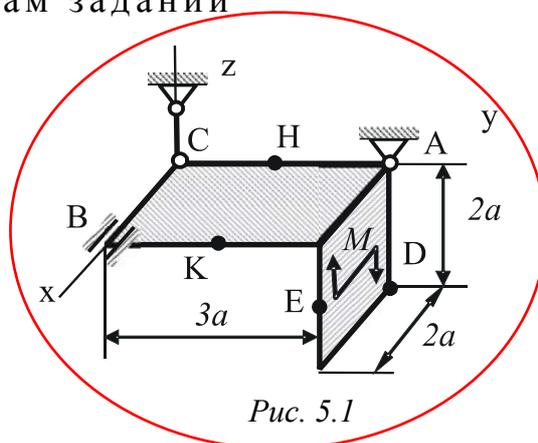


Рис. 5.1

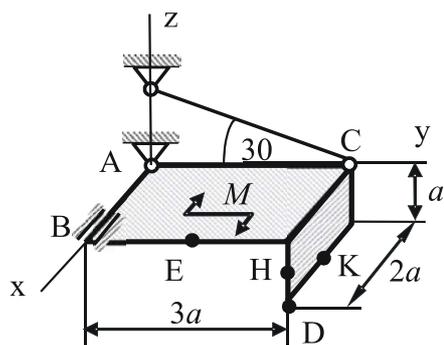


Рис. 5.2

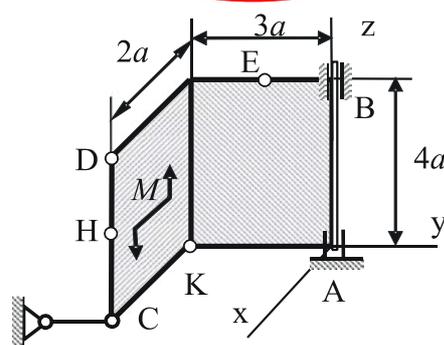
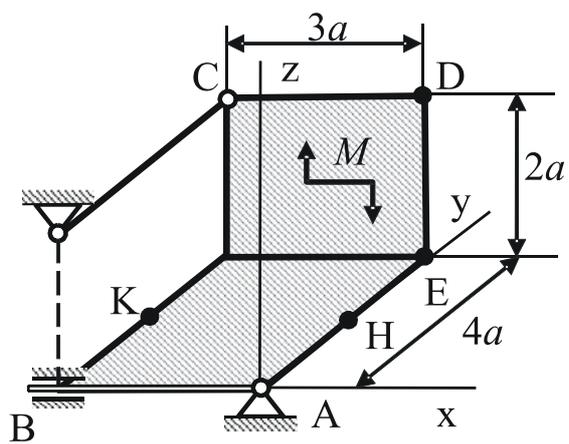
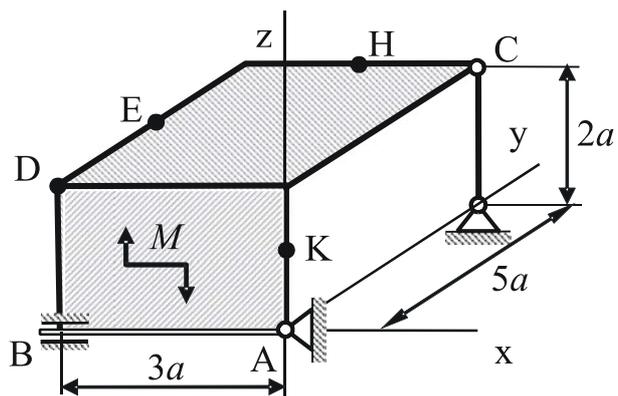


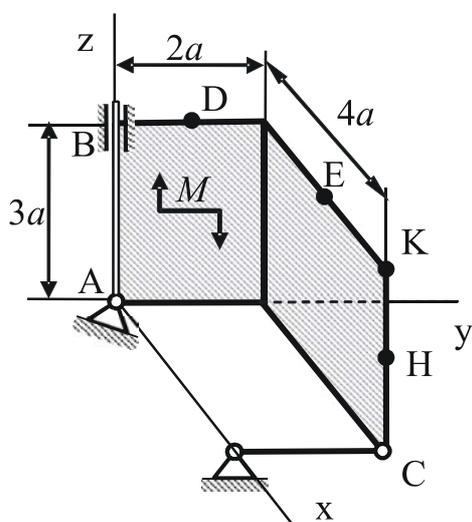
Рис. 5.3



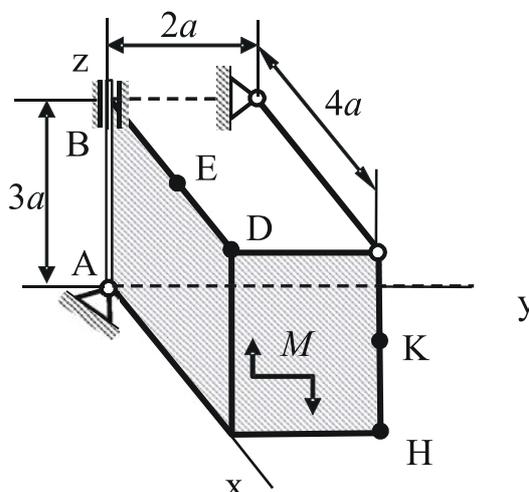
Puc. 5.4



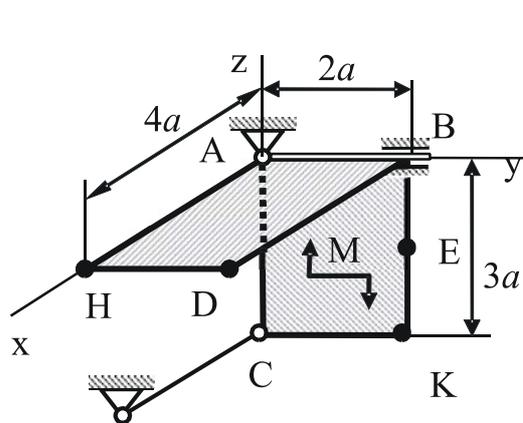
Puc. 5.5



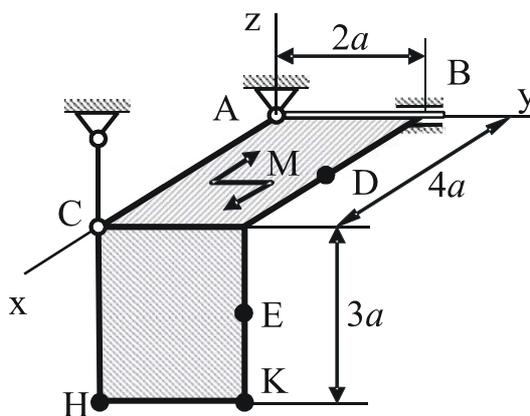
Puc. 5.6



Puc. 5.7



Puc. 5.8



Puc. 5.9

### Пример решения задачи С5

Горизонтальная прямоугольная плита весом  $P$  (рис. 5.10) закреплена сферическим шарниром в точке  $A$ , цилиндрическим (подшипником) в точке  $B$  и невесомым стержнем  $DD'$ . На плиту в плоскости, параллельной  $xz$ , действует сила  $\bar{F}$ , а в плоскости, параллельной  $yz$ , — пара сил с моментом  $M$ .

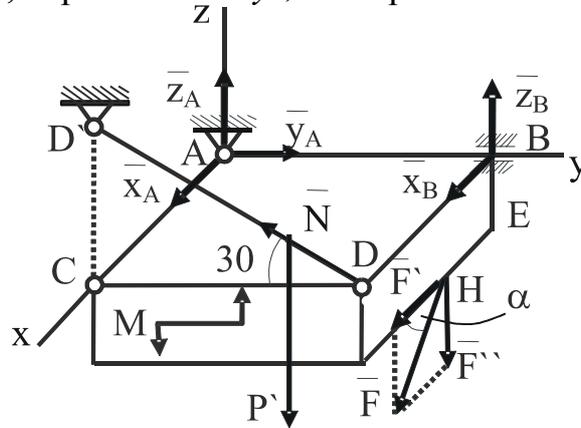


Рис. 5.10

Дано:  $P = 3$  кН,  $F = 8$  кН,  $M = 4$  кН·м,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $AC = 0,8$  м,  $AB = 1,2$  м,  $BE = 0,4$  м,  $EH = 0,4$  м.

Определить: реакции опор  $A$ ,  $B$  и стержня  $DD'$ .

Решение:

1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы  $\bar{P}$ ,  $\bar{F}$  и пара с моментом  $M$ , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Z_A$ , цилиндрического (подшипника) — на две составляющие  $X_B$ ,  $Z_B$  (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию  $\bar{N}$  стержня направляем вдоль стержня от  $D'$ , предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & X_A + X_B + F \cos 60^\circ &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0, & Y_A - N \cos 30^\circ &= 0; \\ \sum F_{kz} &= 0, & Z_A + Z_B - P + N \sin 30^\circ - F \sin 60^\circ &= 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0, & M - P \frac{AB}{2} + Z_B \cdot AB - F \sin 60^\circ \cdot AB + N \sin 30^\circ \cdot AB &= 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0, & P \frac{AC}{2} - N \sin 30^\circ \cdot AC + F \sin 60^\circ \frac{AC}{2} - F \cos 60^\circ \cdot BE &= 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0, & -F \cos 60^\circ \cdot AB - N \cos 30^\circ \cdot AC - X_B \cdot AB &= 0. \end{aligned}$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ:  $X_A = 3,4$  кН;  $Y_A = 5,1$  кН;  $X_B = -7,4$  кН;  $Z_B = 2,1$  кН;  $N = 5,9$  кН. Знак минус указывает, что реакция  $X_B$  направлена противоположно показанной на рисунке 5.10.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

### *Основной*

1. Бать, М.И., Джанелидзе, Г.Ю., Кельзон, А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. — Т. 1, 2. — М., 1964 (и последующие издания).
2. Кепе, О.Э. Сборник коротких задач по теоретической механике. — М. : Высшая школа, 1989.
3. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике : учебное пособие. — М., 1986 (и последующие издания).
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учебник. — М., 1994.
5. Яблонский, А.А., Никифорова, В.М. Курс теоретической механики. — Ч. 1. — М. : Высшая школа, 1971 (и последующие издания).

### *Дополнительный*

6. Бутенин, Н.В., Лунц, Я.Л., Меркин, Д.Р. Курс теоретической механики. — Ч. 1, 2. — М. : Наука, 1971 (и последующие издания).
7. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики. — Ч. 1. — М. : Наука, 1965.
8. Лойцянский, Л.Г., Лурье, А.И. Курс теоретической механики. — Ч. 1, 2. — М.-Л. : Физматгиз, 1952.
9. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики : учебник. — М. : Наука, 1990.
10. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учебное пособие / под ред. А.А. Яблонского. — М. : Наука, 1998.

*Учебно-методическое издание*

**Теоретическая механика. Статика** : методические указания по изучению дисциплины, выполнению расчётно-графической и контрольной работ для студентов направления подготовки 35.03.06 «Агроинженерия» и 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника» очной и заочной форм обучения / сост. С.Н. Разин, П.Н. Рудовский, Н.И. Коваленко. — Караваево : Костромская ГСХА, 2016. — 41 с.

Методические указания издаются в авторской редакции.

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Костромская государственная сельскохозяйственная академия" 156530, Костромская обл., Костромской район, пос. Караваево, уч. городок, д. 34, КГСХА

Компьютерный набор. Подписано в печать 10/06/2016.  
Заказ №077. Формат 84х60/16. Тираж 100 экз. Усл.  
печ. л. 2,64. Бумага офсетная. Отпечатано 20/06/2016.  
Цена 42,00 руб.

Отпечатано с готовых оригинал-макетов в академической типографии на цифровом дубликаторе. Качество соответствует предоставленным оригиналам.  
вид издания: исправленное (электронная версия)  
(редакция от 17.05.2016 № 65)



Цена 42,00 руб.



2016\*077