**Задачи 1,5,9 следует доработать. Работу над ошибками следует выполнять в том же файле другим цветом, сохраняя замечания преподавателя.**

**№1** Доказать равенства, используя свойства операций над множествами и определения операций. Проиллюстрировать при помощи диаграмм Эйлера-Венна.

а)  $\left(A∪B\right)∖\left(B∩C\right)=\left(A∖B\right)∪\left(B∖C\right)$ ,

б) $\left(A∩B\right)×\left(C∩D\right)=\left(A×C\right)∩\left(B×C\right)∩\left(A×D\right).$

**Решение.**

**а)** $x\in \left(A∪B\right)∖\left(B∩C\right)⟺x\in \left(A∪B\right) и x \notin \left(B∩C\right)⟺$

$$⟺\left(x\in A или x\in B\right) и (x\notin B или x\notin C)⟺$$

$$⟺\left(x\in A и x\notin B\right) или \left(x\in A и x\notin C\right) или \left(x\in B и x\notin B\right) или \left(x\in B и x\notin C\right).$$

Так как включения $\left(x\in B и x\notin B\right)$ невозможны, то

$$\left(x\in A и x\notin B\right) или \left(x\in A и x\notin C\right) или \left(x\in B и x\notin B\right) или \left(x\in B и x\notin C\right)⟺$$

$$⟺\left(x\in A и x\notin B\right) или \left(x\in A и x\notin C\right) или \left(x\in B и x\notin C\right).$$

Рассмотрим элементы $\left(x\in A и x\notin C\right)$. Для таких элементов возможно одно из двух принадлежностей: $x\in B$ или $x\notin B$. Следовательно,

$$\left(x\in A и x\notin C\right)⟺\left(x\in A и x\notin C и x\in B\right) или \left(x\in A и x\notin C и x\notin B\right).$$

Поэтому

$$\left(x\in A и x\notin B\right) или \left(x\in A и x\notin C\right) или \left(x\in B и x\notin C\right)⟺$$

$$⟺\left(x\in A и x\notin B\right) или \left(x\in A и x\notin C и x\in B\right) или \left(x\in A и x\notin C и x\notin B\right) или \left(x\in B и x\notin C\right).$$

Заметим, что

$$\left(x\in A и x\notin C и x\notin B\right)⟹\left(x\in A и x\notin B\right), \left(x\in A и x\notin C и x\in B\right)⟹ \left(x\in B и x\notin C\right).$$

Поэтому

$$\left(x\in A и x\notin B\right) или \left(x\in A и x\notin C и x\in B\right) или \left(x\in A и x\notin C и x\notin B\right) или \left(x\in B и x\notin C\right)⟺\left(x\in A и x\notin B\right) или \left(x\in B и x\notin C\right)⟺x\in \left(A∖B\right)∪\left(B∖C\right).$$

*А где доказательство с использованием свойств операций?*

На рисунке 1 серым цветом выделено множество $\left(A∪B\right)∖\left(B∩C\right)$. На рисунке 2 серым цветом выделено множество $\left(A∖B\right)∪\left(B∖C\right)$.



Рис. 1 $\left(A∪B\right)∖\left(B∩C\right)$ Рис. 2 $\left(A∪B\right)∖\left(B∩C\right)$

б) $\left(A∩B\right)×\left(C∩D\right)=\left\{x\in A∩B, y\in C∩D\right\}=$

$$=\left\{\left(x\in A и x\in B\right) и (y\in C и y\in D)\right\}=$$

$$=\left\{\left(x\in A и y\in C\right) и \left(x\in A и y\in D\right) и \left(x\in B и y\in C\right) и \left(x\in B и y\in D\right) \right\}=$$

$$=\left\{\left(x\in A и y\in C\right) и \left(x\in A и y\in D\right) и \left(x\in B и y\in C\right) \right\}=\left(A×C\right)∩\left(B×C\right)∩\left(A×D\right).$$

Для изображения графика рассмотрим частный случай.

$A=\left[1,3\right], B=[2,5]$ по оси $Ox$.

$C=\left[2,4\right], D=[3,6]$ по оси $Oy$.

На рисунке 3 по оси $ Ox$ красным цветом выделено множество $A∩B=\left[2,3\right].$

На рисунке 3 по оси $ Oy$ красным цветом выделено множество$C∩D=\left[3,4\right].$

Декартово произведение $\left(A∩B\right)×\left(C∩D\right)= \left[2,3\right]×\left[3,4\right].$

С другой стороны $A×C=\left[1,3\right]×\left[2,4\right], B×C=\left[2,5\right]×\left[2,4\right], A×D=\left[1,3\right]×\left[3,6\right].$

Пересечение всех трех множеств $\left[2,3\right]×\left[3,4\right]$ на рисунке 3 заштриховано отрезками трех видов: вертикальными, горизонтальными, наклонными .

6

1

2

3

4

2

3

4

O

x

y

Рис. 3

**№5** Девять сотрудников фирмы направляются на изучение иностранного языка, причем нужно распределить их для изучения английского, немецкого и французского языков (каждый изучает только один язык). Сколько существует различных способов такого распределения? Сколькими способами они могут устроиться заниматься в трех совершенно одинаковых комнатах библиотеки (не менее двоих в комнате)?

**Решение.**

1. Распределение сотрудников на 3 группы по изучаемому языку при условии, что каждый изучает только один язык, сводится к упорядоченному разбиению исходного множества сотрудников $А=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на 3 подмножества.
2. Разбиения на 3 подмножества возможно на 1+1+7, 1+2+6, 1+3+5, 1+4+4, 2+2+5, 2+3+4, 3+3+3 элемента в разном порядке. Число разбиений находим по формуле:

$$R\left(9,3\right)=\sum\_{\begin{array}{c}n\_{1}+n\_{2}+n\_{3}=9\\n\_{i}>0\end{array}}^{}R\left(9;n\_{1},n\_{2},n\_{3}\right),$$

где

$$R\left(9,n\_{1},n\_{2},n\_{3}\right)=\frac{9!}{n\_{1}!n\_{2}!n\_{3}!}.$$

Порядок в каждом разбиении $n\_{1}+n\_{2}+n\_{3}$ будем учитывать домножая каждое слагаемое $R\left(9,n\_{1},n\_{2},n\_{3}\right)$ на количество вариантов таких разбиений. Разбиений 1+1+7, 1+4+4, 2+2+5 будет по 3 варианта, разбиений 1+2+6, 1+3+5, 2+3+4 будет по 6 вариантов, разбиение 3+3+3 будет одно.

Вычислим

$$R\left(9,3\right)=3⋅R\left(9;1,1,7\right)+6⋅R\left(9;1,2,6\right)+6⋅R\left(9;1,3,5\right)+3⋅R\left(9;1,4,4\right)+ 3⋅R\left(9;2,2,5\right)+6⋅R\left(9;2,3,4\right)+ R\left(9;3,3,3\right)=$$

$$=3⋅\frac{9!}{1!1!7!}+6⋅\frac{9!}{1!2!6!}+6⋅\frac{9!}{1!3!5!}+3⋅\frac{9!}{1!4!4!}+3⋅\frac{9!}{2!2!5!}+6⋅\frac{9!}{2!3!4!}+\frac{9!}{3!3!3!}=$$

$$=3⋅\frac{9⋅8}{1}+6⋅\frac{9⋅8⋅7}{2}+6⋅\frac{9⋅8⋅7⋅6}{6}+3⋅\frac{9⋅8⋅7⋅6⋅5}{24}+3⋅\frac{9⋅8⋅7⋅6}{4}+6⋅\frac{9⋅8⋅7⋅6⋅5}{12}+\frac{9⋅8⋅7⋅6⋅5⋅4}{36}=$$

$$=216+3⋅9⋅8⋅7+9⋅8⋅7⋅6+9⋅7⋅6⋅5+3⋅9⋅2⋅7⋅6+9⋅4⋅7⋅6⋅5+3⋅4⋅7⋅5⋅4$$

$$=216+1512+3024+1890+2268+7560+1680=18150.$$

Т.о. существует 18150 способов распределить 9 сотрудников фирмы для изучение иностранного языка (английского, немецкого и французского), при условии, что каждый изучает только один язык.

1. Распределение сотрудников на 2 совершенно одинаковые комнаты библиотеки (не менее двоих в комнате), сводится к неупорядоченному разбиению исходного множества сотрудников $А=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на 2 подмножества, т.к. порядок распределения по комнатам значения не имеет.

Комнат ТРИ!

Разбиения на 2 подмножества (причем подмножества содержат не менее двух элементов) возможно на 2+7, 3+6, 4+5 элемента.

$$R\left(9,2\right)=R\left(9;2,7\right)+R\left(9;3,6\right)+R\left(9;4,5\right)=\frac{9!}{2!7!}+\frac{9!}{3!6!}+\frac{9!}{4!5!}=\frac{9⋅8}{2}+\frac{9⋅8⋅7}{6}+\frac{9⋅8⋅7⋅6}{24}=36+3⋅4⋅7+9⋅2⋅7=36+84+126=246.$$

Т.о. существует 246 способ распределить 9 сотрудников на 2 совершенно одинаковые комнаты библиотеки (не менее двоих в комнате).

**№ 9** Орграф задан матрицей смежности.

$$\left(\begin{matrix}\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}1\\0\\\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}1\\1\\\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}1\\1\\\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}\begin{matrix}1\\0\\\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}0\\0\\\begin{matrix}1\\1\\\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right)$$

Необходимо:
а) нарисовать граф;
б) выделить компоненты сильной связности;
в) заменить все дуги ребрами и в полученном неориентированном графе найти эйлерову цепь (или цикл).

**Решение.**

**а)** Нарисуем граф(см. Рис. 6)

Рис. 6

**б)** Найдем компоненты сильной связности графа.

Пары вершин $v\_{2} и v\_{4}$, $v\_{4} и v\_{6}$, $v\_{6} и v\_{3}$ связаны парами проивоположных дуг. Следовательно, вершины $v\_{2}$, $v\_{3}$,$ v\_{4}$, $v\_{6}$ взаимодостижимы. Из вершины $v\_{3}$ есть дуга в вершину $v\_{1}$, а из вершины $v\_{1}$ есть дуга в вершину $v\_{4}$. Следовательно, вершины $v\_{1}$, $v\_{2}$, $v\_{3}$,$ v\_{4}$, $v\_{6}$ взаимодостижимы. При этом пара вершин $v\_{1} и v\_{5}$ связаны парами проивоположных дуг. Следовательно, вершины $v\_{1}$, $v\_{2}$, $v\_{3}$,$ v\_{4}$, $v\_{5}$, $v\_{6}$ взаимодостижимы. Следовательно, граф имеет одну сильно связанную компоненту: $\{v\_{1}$*,* $v\_{2}$*,* $v\_{3}$*,*$ v\_{4}$*,* $v\_{5}$*,* $v\_{6}\}$*.*

в) Заменим все дуги ребрами. Получим неориентированный граф см Рис.7.

Рис. 7

$$e\_{1}$$

$$e\_{2}$$

$$e\_{3}$$

$$e\_{4}$$

$$e\_{5}$$

$$e\_{6}$$

$$e\_{7}$$

$$e\_{8}$$

$$e\_{9}$$

$$e\_{10}$$

$$e\_{11}$$

$$e\_{12}$$

$$e\_{13}$$

Найдем степени всех вершин

$$deg\left(v\_{1}\right)=4$$

$$deg\left(v\_{2}\right)=4$$

$$deg\left(v\_{3}\right)=4$$

$$deg\left(v\_{4}\right)=5$$

$$deg\left(v\_{5}\right)=2$$

$$deg\left(v\_{6}\right)=5+2=7$$

Значит, в графе существует эйлерова цепь, так как степени ровно двух вершин нечетны.

Начиная с вершины $v\_{6}$ с нечетной степенью, получим следующую эйлерову цепь:

$$v\_{6},e\_{1},v\_{6},e\_{2},v\_{4},e\_{3},v\_{6},e\_{4}, v\_{2},e\_{7},v\_{3}, e\_{8},v\_{6}, e\_{9}, v\_{3},e\_{10},v\_{1},e\_{11},v\_{5},e\_{12},v\_{1},e\_{13},v\_{4}.$$

Ребра потерялись?