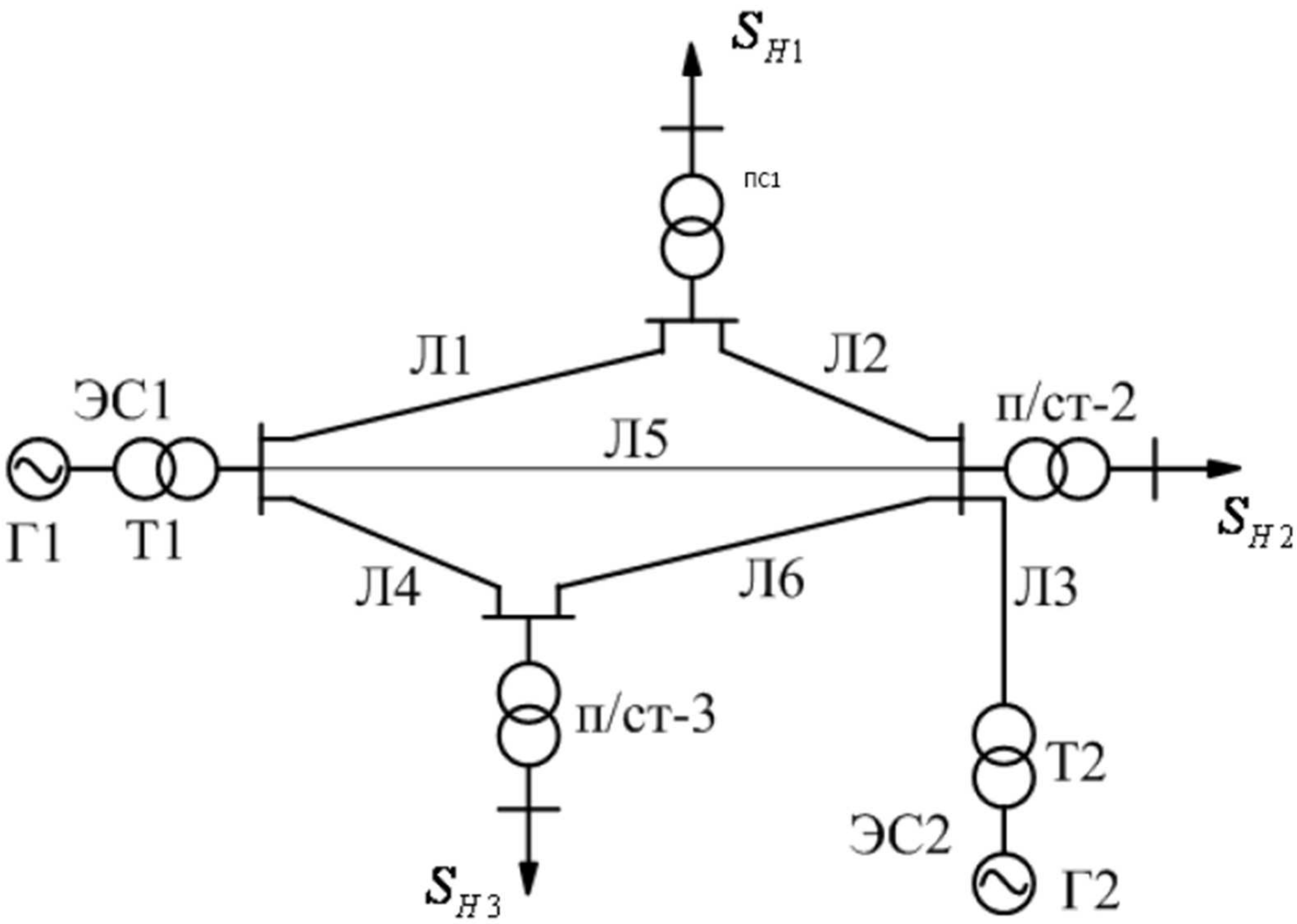
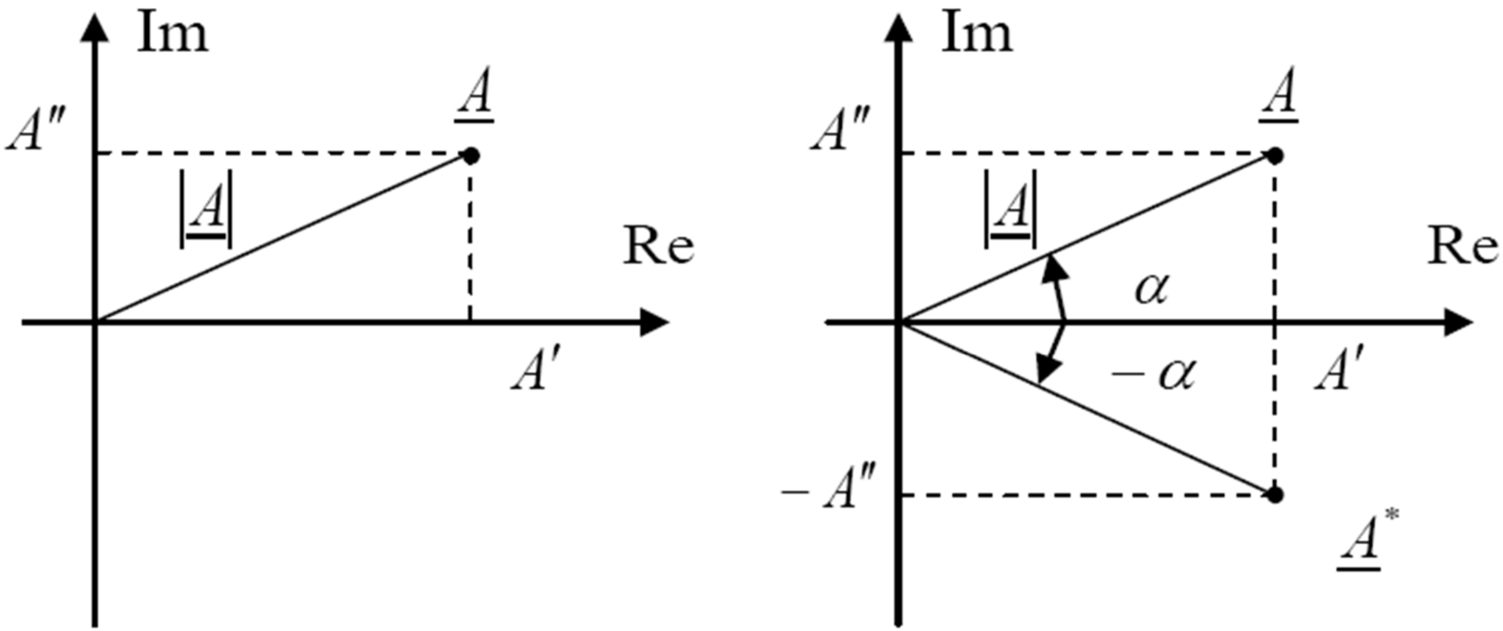
Математическое моделирование в электроэнергетике

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭНЕРГОСИСТЕМ

4.1. Задачи расчёта установившихся режимов энергосистем. Схемы замещения элементов энергосистем


S Н1
пс1
Л1
Л2
ЭС1
Л5
п/ст-2
Г1
Т1
S Н2
Л4
Л6
Л3
п/ст-3
Т2
ЭС2
Г2
S Н3


Im
$\underline{A}$
A''
$|\underline{A}|$
Re
A'
Im
$\underline{A}$
A''
$|\underline{A}|$
Re
α
$-\alpha$
A'
$-A''$
$\underline{A}^*$

а) б)

$$\underline{A} = A' + jA'' = Ae^{j\varphi}$$

$$\left|\underline{A}\right| = \sqrt{\left(A'\right)^2 + \left(A''\right)^2} \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{A''}{A'}$$

$$A' = \operatorname{Re}\left(\underline{A}\right) = \left|\underline{A}\right|\cos\alpha$$

$$A'' = \operatorname{Im}\left(\underline{A}\right) = \left|\underline{A}\right|\sin\alpha$$

$$\underline{A} = \left|\underline{A}\right|\cos\alpha + j\left|\underline{A}\right|\sin\alpha$$

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \qquad \underline{A} = \left|\underline{A}\right|e^{j\alpha}$$

$$\underline{A} = A_m e^{j(\omega t+\psi)} = A_m\left[\cos(\omega t+\psi)+j\sin(\omega t+\psi)\right]$$

$$\theta = \omega t + \psi$$

$$\underline{A}_m = \underline{A}\Big|_{t=0} = A_m e^{j\psi}$$

$$\underline{A} = A_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = \underline{A}_m e^{j\omega t}$$

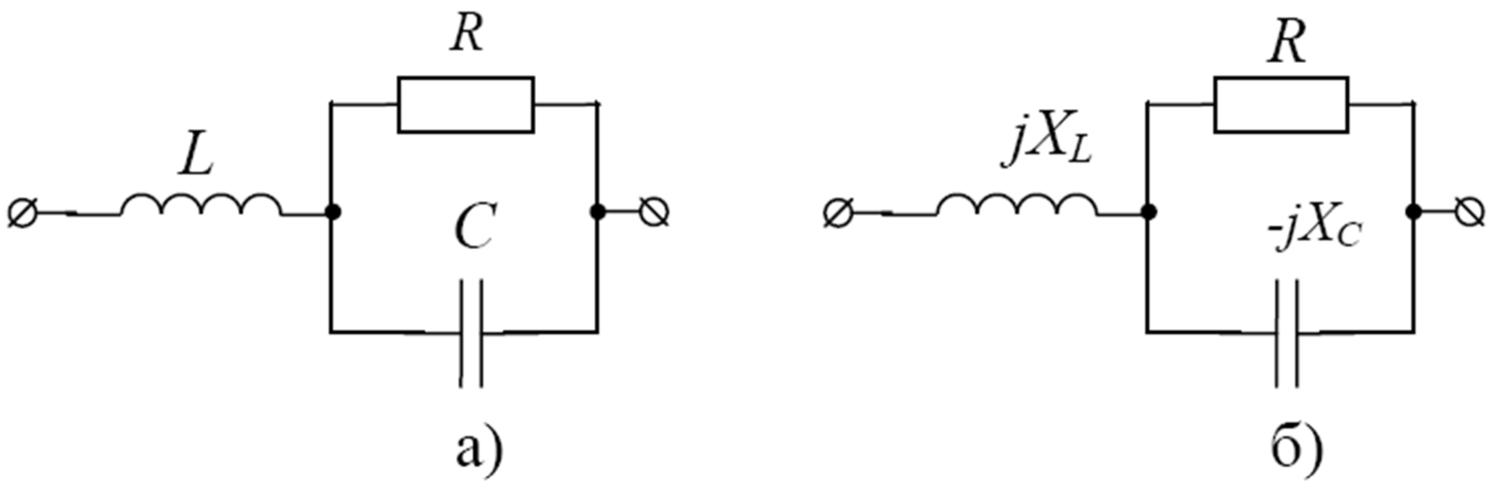
$$i = 5\sin\left[10^3 t + \frac{\pi}{3}\right] \qquad \underline{I}_m = 5e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$u = 50\sin 10^5 t \qquad \underline{U}_m = 50e^{j0} = 50$$

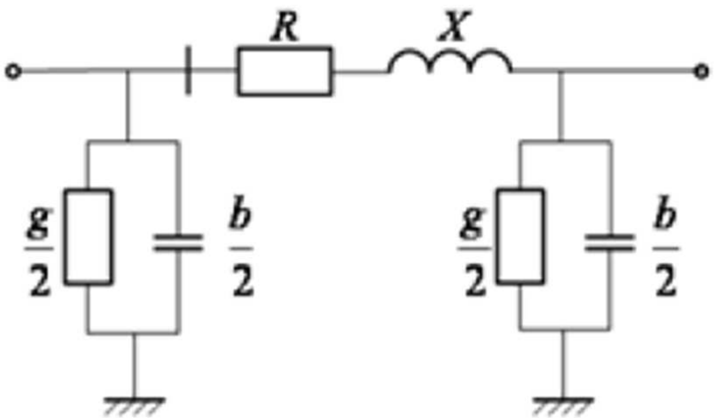
$$u_L = L\frac{di}{dt} \;{}_{\bullet}\!\!=^{\bullet}\; j\omega L\underline{I}_m = jX_L\underline{I}_m = \underline{Z}_L\underline{I}_m = \underline{U}_{Lm}$$

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt \;{}_{\bullet}\!\!=^{\bullet}\; \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_m = -jX_C\underline{I}_m = \underline{Z}_C\underline{I}_m = \underline{U}_{Cm}$$

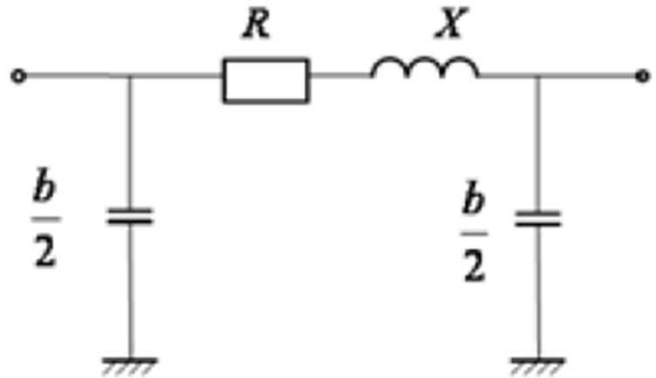
$$u_R = Ri \;{}_{\bullet}\!\!=^{\bullet}\; R\underline{I}_m = \underline{Z}_R\underline{I}_m = \underline{U}_{Rm}$$



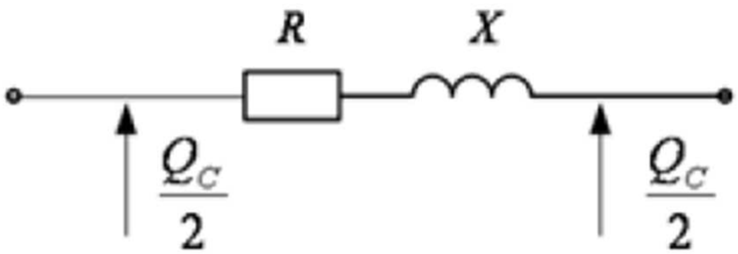
$$\underline{Z} = jX_L + \frac{R\left(-jX_C\right)}{R - jX_C}$$



а)



б)



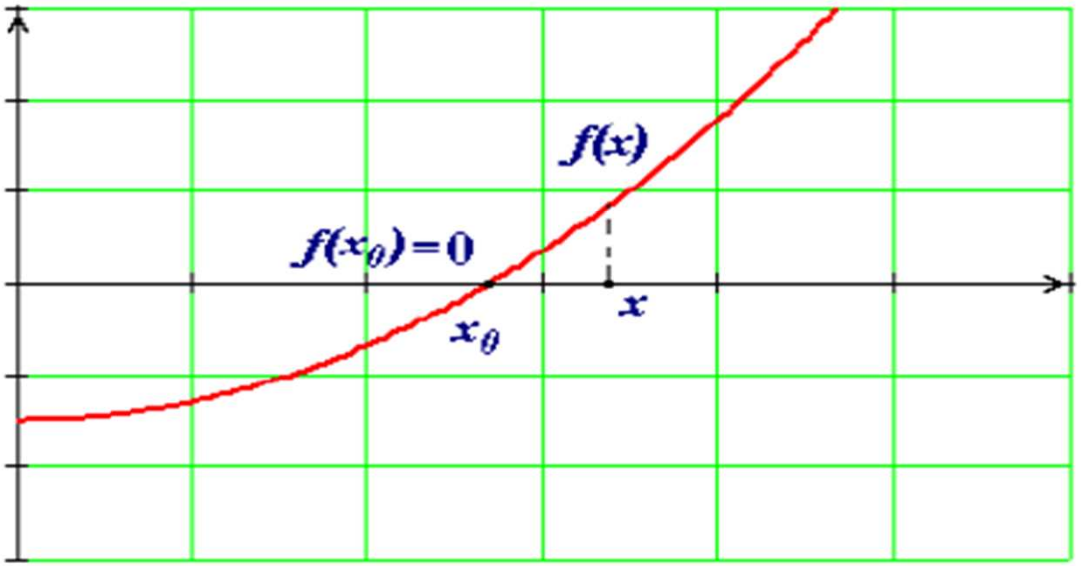
в)

4.2. Общие сведения о формах математического описания установившихся режимов энергосистем

Задача расчёта установившихся режимов: при заданной исходной информации о структуре схемы, параметрах схемы замещения элементов пассивной части, мощности узлов нагрузки и генерации рассчитать векторы напряжений узлов и потоки мощности в ветвях (связях).

Нелинейные уравнения.
Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть нам нужно решить нелинейное уравнение типа $f(x)=0$.



Разложим в ряд Тейлора в окрестности предполагаемого корня $f(x)$

$$\overset{0}{f(x)} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cancel{\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2} + \ldots .$$

Если точка x_0 достаточно близка к корню уравнения, то функцию с известной точностью можно считать равной нулю.
Отбросим члены порядка малости выше первого и найдем в оставшемся выражении x_0

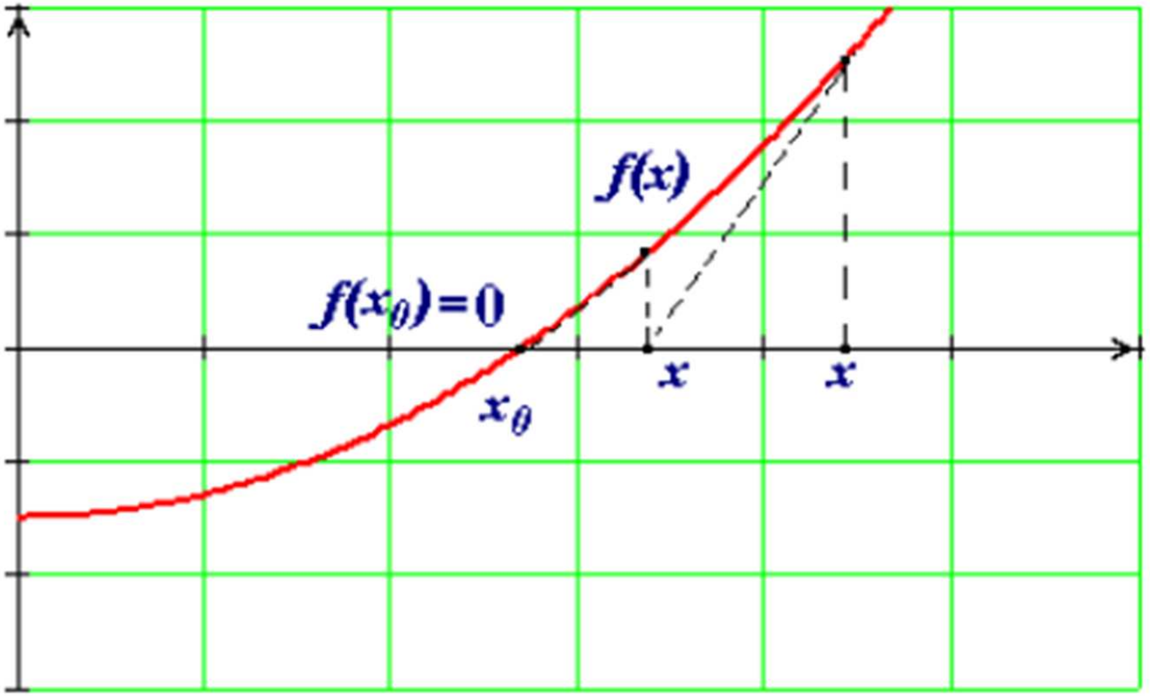
$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow (x - x_0) = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Чем ближе точка x к точке x_0, тем точнее можно заменить $f'(x_0)$ на $f'(x)$.

С определенной долей точности можно записать

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Этот метод определения корней называется методом касательных – метод последовательных приближений Ньютона



$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Рассмотрим **пример 3**. Пусть дано нелинейное уравнение $P_m \cdot \sin(\delta) - P_T = 0$, где $P_T = 0,6; P_m = 1$ – известные величины. Определить корень уравнения на интервале $\delta \in \{0, \pi/2\}$ с заданной точностью $\varepsilon = 10 \cdot 10^{-6}$.

Запишем уравнение Ньютона для выражения $P(\delta) = P_m \cdot \sin(\delta) - P_T$:

$$\delta = \delta_0 - \frac{P(\delta_0)}{P'(\delta_0)} = \delta_0 - \frac{P_m \cdot \sin(\delta_0) - P_T}{P_m \cdot \cos(\delta_0)}.$$

1. Выбираем любое стартовое значение, например $\delta^{(0)} = \pi/3 = 1,0472$ рад и производим первую итерацию.

$$\delta^{(0)} = 1.0472,\ P_m \cdot \sin(\delta^{(0)}) = 0.866,\ P_m \cdot \cos(\delta^{(0)}) = 0.5;$$

$$\delta^{(1)} = \delta^{(0)} - \frac{P(\delta^{(0)})}{P'(\delta^{(0)})} = 1.0472 - \frac{0.866 - 0.6}{0.5} = 0.51515 \text{ рад;}$$

невязка $\Delta = \left|\delta^{(1)} - \delta^{(0)}\right| = 0.532.$

2. Для следующей итерации стартовым значением будет величина $\delta^{(1)} = \pi/3 = 0.51515$ рад

$$\delta^{(1)} = 0.51515,\ P_m \cdot \sin(\delta^{(1)}) = 0.493,\ P_m \cdot \cos(\delta^{(1)}) = 0.87;$$

$$\delta^{(2)} = \delta^{(1)} - \frac{P(\delta^{(1)})}{P'(\delta^{(1)})} = 0.51515 - \frac{0.493 - 0.6}{0.87} = 0.63849 \text{ рад};$$

невязка $\Delta = \left|\delta^{(2)} - \delta^{(1)}\right| = 0.123.$

3. Продолжая итерационный процесс, получаем

$$\delta^{(2)} = 0.63849,\ P_m \cdot \sin(\delta^{(2)}) = 0.596,\ P_m \cdot \cos(\delta^{(2)}) = 0.803;$$

$$\delta^{(3)} = \delta^{(2)} - \frac{P(\delta^{(2)})}{P'(\delta^{(2)})} = 0.51515 - \frac{0.596 - 0.6}{0.803} = 0.6435 \text{ рад};$$

невязка $\Delta = \left|\delta^{(3)} - \delta^{(2)}\right| = 5 \cdot 10^{-3}.$

4. И, наконец, последняя итерация

$$\delta^{(3)} = 0.6435,\ \ P_m \cdot \sin(\delta^{(3)}) = 0.6,\ \ P_m \cdot \cos(\delta^{(3)}) = 0.8;$$

$$\delta^{(4)} = \delta^{(3)} - \frac{P(\delta^{(3)})}{P'(\delta^{(3)})} = 0.6435 - \frac{0.6 - 0.6}{0.803} = 0.6435 \ \text{рад};$$

невязка $\Delta = \left|\delta^{(4)} - \delta^{(3)}\right| = 9.333 \cdot 10^{-6}.$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Общие замечания

http://bourabai.ru/einf/mathcad/index.htm

Численные методы

Расщепление комплексных матриц на действительную и мнимую части. Решение нелинейных уравнений узловых напряжений в форме баланса токов

До сих пор мы рассматривали методы решения СЛАУ и нелинейных уравнений для систем уравнений с **действительными коэффициентами**.

При расчетах установившихся режимов реальных энергетических систем возникают уравнения с комплексными коэффициентами. Поэтому рассмотрим преобразование системы уравнений с **комплексными коэффициентами** в систему уравнений с действительными коэффициентами.

Пусть нужно решить комплексную систему уравнений

$$\underline{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 2+6j & -1-3j \\ 2{,}5+2j & 2{,}5-6j \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} 2-10j \\ -4+5j \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}}.$$

Разобьем систему $\underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}}$ на действительную и мнимую части:

$$\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} - j\mathbf{B}, \quad \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_r + j\mathbf{U}_i, \quad \underline{\mathbf{I}} = \mathbf{I}_r + j\mathbf{I}_i,$$

$$(\mathbf{G} - j\mathbf{B})(\mathbf{U}_r + j\mathbf{U}_i) = \mathbf{I}_r + j\mathbf{I}_i;$$

$$\mathbf{GU}_r + \mathbf{BU}_i + j(\mathbf{GU}_2 - \mathbf{BU}_1) = \mathbf{I}_r + j\mathbf{I}_i \rightarrow \mathbf{GU}_r + \mathbf{BU}_i = \mathbf{I}_r,$$

$$\mathbf{GU}_i - \mathbf{BU}_r = \mathbf{I}_i.$$

В результате получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_r \\ \mathbf{U}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_i \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G} & -\mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{U}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_i \end{pmatrix}.$$

В нашем случае

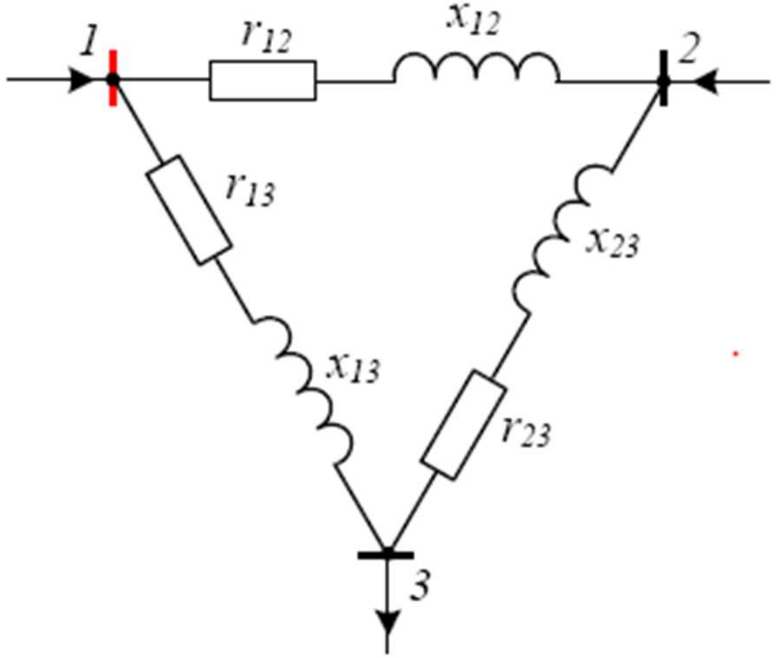
$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2,5 & 2,5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} I_1 = I_1' + jI_1'' \\ I_2 = jI_2' + jI_2'' \end{cases}, \mathbf{I}_r=\begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{I}_i=\begin{pmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix};$$

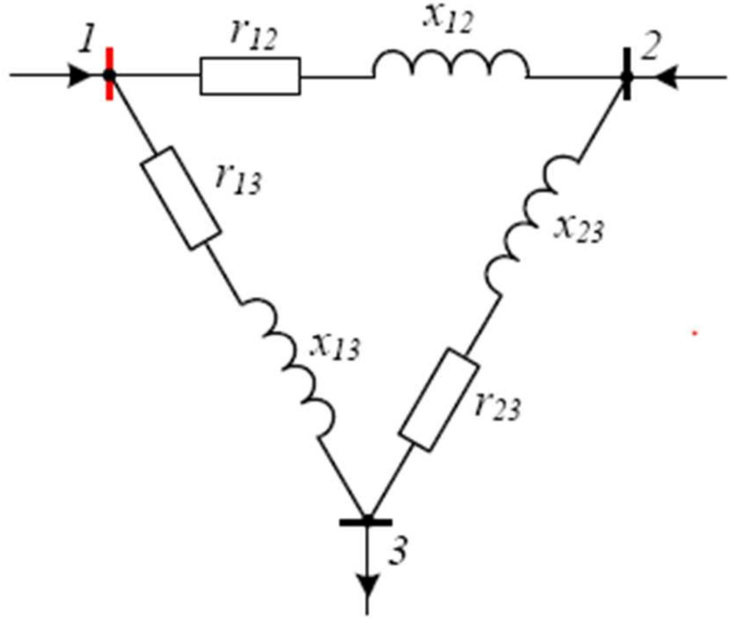
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -6 & 3 \\ 2,5 & 2,5 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 2,5 & 2,5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Решаем эту систему и получаем

$$\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_1'' \\ U_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,128 \\ -1,456 \\ -0,464 \\ 0,672 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \underline{U}_1 = -2,128 - j0,464; \\ \underline{U}_2 = -1,456 + j0,672; \end{cases} \begin{cases} \underline{U}_1 = 2,178e^{-j167,699^\circ}; \\ \underline{U}_2 = 1,604e^{j155,225^\circ}. \end{cases}$$



С помощью такого разложения можно решать и нелинейные уравнения. Тогда в место задающих токов нужно подставить из выражения через потенциалы. Приведем **пример** решения для схемы, с балансирующим узлом . Составим уравнения баланса токов, учитывая, что величина балансирующего узла: $\mathbf{U_3 = U_б}$



$$\begin{pmatrix} Y_{11} & -Y_{21} \\ -Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{13}U_б \\ Y_{23}U_б \end{pmatrix},$$

где $Y = g - jb$, $S = P + jQ$, $I = I_r + jI_i$, $YU_б = gU_б + jbU_б$.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1r} + jI_{1i} \\ I_{2r} + jI_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\overset{*}{S_1}}{\overset{*}{U_1}} \\ \dfrac{\overset{*}{S_2}}{\overset{*}{U_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{P_1U_{1r} + Q_1U_{1i}}{U_{1r}^2 + U_{1i}^2} - \dfrac{P_1U_{1i} - Q_1U_{1r}}{U_{1r}^2 + U_{1i}^2} \\ \dfrac{P_2U_{2r} + Q_2U_{2i}}{U_{2r}^2 + U_{2i}^2} - \dfrac{P_2U_{2i} - Q_2U_{2r}}{U_{2r}^2 + U_{2i}^2} \end{pmatrix}.$$

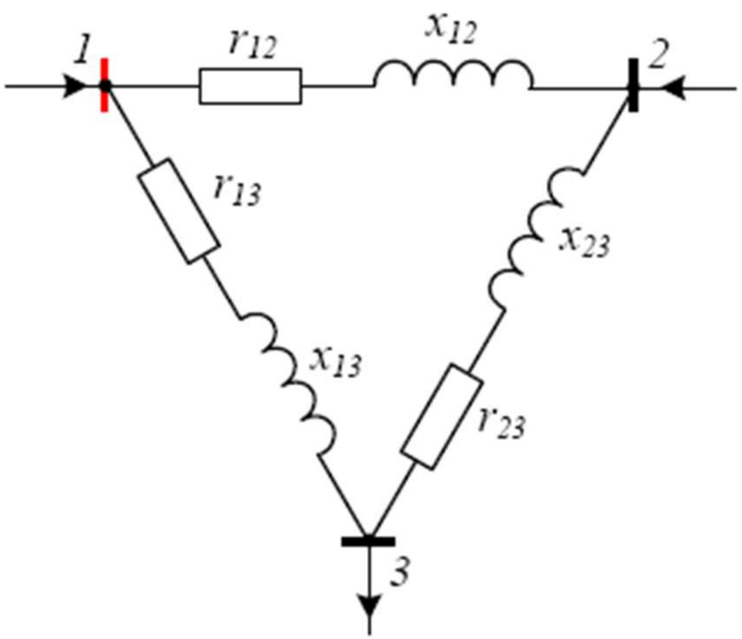
Или подставляя значение токов через потенциалы и мощность, получаем:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & b_{11} & b_{12} \\ g_{21} & g_{22} & b_{21} & b_{22} \\ -b_{11} & -b_{12} & g_{11} & g_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \\ U_{1i} \\ U_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{P_1 U_{1r} + Q_1 U_{1i}}{U_{1r}^2 + U_{1i}^2} \\ \dfrac{P_2 U_{2r} + Q_2 U_{2i}}{U_{2r}^2 + U_{2i}^2} \\ -\dfrac{P_1 U_{1i} - Q_1 U_{1r}}{U_{1r}^2 + U_{1i}^2} \\ -\dfrac{P_2 U_{2i} - Q_2 U_{2r}}{U_{2r}^2 + U_{2i}^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{13} U_б \\ g_{23} U_б \\ -b_{13} U_б \\ -b_{23} U_б \end{pmatrix}.$$

Полученную систему можно решить одним из выше рассмотренных методов итераций.

Решение нелинейных уравнений узловых напряжений в форме баланса мощности. Метод Ньютона

Пусть в рассматриваемой схеме балансирующим узлом является первый узел. Тогда уравнения узловых потенциалов будут иметь вид:



$$\begin{cases} (\underline{Y}_{21}+\underline{Y}_{23})\underline{U}_2-\underline{U}_3\underline{Y}_{23}=\underline{I}_2+U_1\underline{Y}_{21}; \\ -\underline{U}_2\underline{Y}_{32}+(\underline{Y}_{31}+\underline{Y}_{32})\underline{U}_3=\underline{I}_3+U_1\underline{Y}_{31}. \end{cases}$$

Напоминаем, что величина напряжение балансирующего узла является действительной. Перепишем это уравнений через мощности узлов

$$
\begin{cases}
(\underline{Y}_{21}+\underline{Y}_{23})\underline{U}_2-\underline{U}_3\underline{Y}_{23}=\dfrac{\overset{*}{\underline{S}}_2}{\overset{*}{\underline{U}}_2}+U_1\underline{Y}_{21};\\[2ex]
-\underline{U}_2\underline{Y}_{32}+(\underline{Y}_{31}+\underline{Y}_{32})\underline{U}_3=\dfrac{\overset{*}{\underline{S}}_3}{\overset{*}{\underline{U}}_3}+U_1\underline{Y}_{31}.
\end{cases}
$$

Перепишем эти уравнения, освободившись от знаменателя:

$$
\begin{cases}
(\underline{Y}_{21}+\underline{Y}_{23})\underline{U}_2\overset{*}{\underline{U}}_2-\underline{U}_3\overset{*}{\underline{U}}_2\underline{Y}_{23}=\overset{*}{\underline{S}}_2+\overset{*}{\underline{U}}_2U_1\underline{Y}_{21};\\
-\underline{U}_2\overset{*}{\underline{U}}_3\underline{Y}_{32}+(\underline{Y}_{31}+\underline{Y}_{32})\underline{U}_3\overset{*}{\underline{U}}_3=\overset{*}{\underline{S}}_3+\overset{*}{\underline{U}}_3U_1\underline{Y}_{31}.
\end{cases}
$$

Для удобства введем новые обозначения для собственных проводимостей узлов, (собственная проводимость узла

Для i-го узла $\underline{Y}_{ii} = \left(\underline{Y}_{im} + \underline{Y}_{ik}\right)$

$$\begin{cases} -\underline{Y}_{22}\underline{U}_2\overset{*}{\underline{U}}_2 - \underline{U}_3\overset{*}{\underline{U}}_2\underline{Y}_{23} = \overset{*}{\underline{S}}_2 + \overset{*}{\underline{U}}_2 U_1 \underline{Y}_{21}; \\ -\underline{U}_2\overset{*}{\underline{U}}_3\underline{Y}_{32} - \underline{Y}_{33}\underline{U}_3\overset{*}{\underline{U}}_3 = \overset{*}{\underline{S}}_3 + \overset{*}{\underline{U}}_3 U_1 \underline{Y}_{31}. \end{cases}$$

Введем функции небаланса мощностей (невязка)

$$\begin{cases} \underline{W}_{S2} = \overset{*}{\underline{S}}_2 - \underline{Y}_{22}\underline{U}_2\overset{*}{\underline{U}}_2 + \overset{*}{\underline{U}}_2 U_1 \underline{Y}_{21} + \underline{U}_3\overset{*}{\underline{U}}_2\underline{Y}_{23}; \\ \underline{W}_{S3} = \overset{*}{\underline{S}}_3 - \underline{Y}_{33}\underline{U}_3\overset{*}{\underline{U}}_3 + \overset{*}{\underline{U}}_3 U_1 \underline{Y}_{31} + \underline{U}_2\overset{*}{\underline{U}}_3\underline{Y}_{32}. \end{cases}$$

$$\underline{U}_i \overset{*}{\underline{U}}_i = U_i^2, \quad \underline{U}_m \overset{*}{\underline{U}}_k = U_m e^{j\delta_m} U_k e^{-j\delta_k} = U_m U_k e^{-j\delta_{km}}$$

$$\delta_{km} = \delta_k - \delta_m$$

проводимость ветви представляется в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$\underline{Y} = g - jb,$$

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\underline{U}}_k \underline{U}_m \underline{Y}_{km} = U_k U_m e^{-j\delta_{km}} \left(g_{km} - jb_{km}\right) = \\
&= U_k U_m \left[\cos(\delta_{km}) - j\sin(\delta_{km})\right]\left(g_{km} - jb_{km}\right) = \\
&= U_k U_m \left[g_{km}\cos(\delta_{km}) - b_{km}\sin(\delta_{km})\right] - \\
&- jU_k U_m \left[b_{km}\cos(\delta_{km}) + g_{km}\sin(\delta_{km})\right].
\end{aligned}$$

Разделим уравнения баланса на действительную и мнимую части, учитывая, что $\overset{*}{\underline{S}}_i = P_i - jQ_i$

$$\begin{cases} w_{P2} = P_2 - g_{22}U_2^2 + U_2U_1\left(g_{21}\cos(\delta_{21}) - b_{21}\sin(\delta_{21})\right) + \\ +U_2U_3\left(g_{23}\cos(\delta_{23}) - b_{23}\sin(\delta_{23})\right); \\ w_{P3} = P_3 - g_{33}U_3^2 + U_3U_1\left(g_{31}\cos(\delta_{31}) - b_{31}\sin(\delta_{31})\right) + \\ +U_3U_2\left(g_{32}\cos(\delta_{32}) - b_{23}\sin(\delta_{32})\right); \\ w_{Q2} = Q_2 - b_{22}U_2^2 + U_2U_1\left(b_{21}\cos(\delta_{21}) + g_{21}\sin(\delta_{21})\right) + \\ +U_2U_3\left(b_{23}\cos(\delta_{23}) + g_{23}\sin(\delta_{23})\right); \\ w_{Q3} = Q_3 - b_{33}U_3^2 + U_3U_1\left(b_{31}\cos(\delta_{31}) + g_{31}\sin(\delta_{31})\right) + \\ +U_3U_2\left(b_{32}\cos(\delta_{32}) - g_{23}\sin(\delta_{32})\right). \end{cases}$$

Мы получили четыре нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными. Чтобы найти корни этой системы уравнений будем использовать метод ньютона. Запишем итерационное уравнение Ньютона для поиска корней

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(x) = \begin{pmatrix} w_{P2} \\ w_{P3} \\ w_{Q2} \\ w_{Q3} \end{pmatrix}, \ \partial\mathbf{f}(x)/\partial\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_2} \\ \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_3} \\ \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_2} \\ \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_3} \end{pmatrix}.$$

Сначала мы должны найти производные от каждой функции по каждой переменной, то есть

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_{P2}}{\partial U_2}, \dfrac{\partial w_{P2}}{\partial U_3}, \dfrac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_2}, \dfrac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_3} \quad \dfrac{\partial w_{P3}}{\partial U_2}, \dfrac{\partial w_{P3}}{\partial U_3}, \dfrac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_2}, \dfrac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_3}; \\ \dfrac{\partial w_{Q2}}{\partial U_2}, \dfrac{\partial w_{Q2}}{\partial U_3}, \dfrac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_2}, \dfrac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_3} \quad \dfrac{\partial w_{Q3}}{\partial U_2}, \dfrac{\partial w_{Q3}}{\partial U_3}, \dfrac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_2}, \dfrac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_3}. \end{cases}$$

В результате получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_3} \\ \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial U_3} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{P2}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{P3}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{Q2}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{Q3}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta \delta_2 \\ \Delta \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2^{(1)} - U_2^{(0)} \\ U_3^{(1)} - U_3^{(0)} \\ \delta_2^{(1)} - \delta_2^{(0)} \\ \delta_3^{(1)} - \delta_3^{(0)} \end{pmatrix}$ поправки к переменным.

Теперь комплексное уравнение баланса токов можно записать в виде действительной системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & b_{11} & b_{12} \\ g_{21} & g_{22} & b_{21} & b_{22} \\ -b_{11} & -b_{12} & g_{11} & g_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1r} \\ U_{2r} \\ U_{1i} \\ U_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1r} \\ I_{2r} \\ I_{1i} \\ I_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{13}U_{б} \\ g_{23}U_{б} \\ -b_{13}U_{б} \\ -b_{23}U \end{pmatrix},$$

Технология решения системы уравнений такова. Подставляем везде, где встречаются переменные $U_2, \delta_2, U_3, \delta_3$ в уравнении их стартовые (нулевые) приближения $U_2^{(0)}, U_3^{(0)}, \delta_2^{(0)}, \delta_3^{(0)}$. Затем определяется вектор-поправка $\begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \end{pmatrix}$, решая уравнение

$$\begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial w_{P2}}{\partial U_2} & \dfrac{\partial w_{P2}}{\partial U_3} & \dfrac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_2} & \dfrac{\partial w_{P2}}{\partial \delta_3} \\ \dfrac{\partial w_{P3}}{\partial U_2} & \dfrac{\partial w_{P3}}{\partial U_3} & \dfrac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_2} & \dfrac{\partial w_{P3}}{\partial \delta_3} \\ \dfrac{\partial w_{Q2}}{\partial U_2} & \dfrac{\partial w_{Q2}}{\partial U_3} & \dfrac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_2} & \dfrac{\partial w_{Q2}}{\partial \delta_3} \\ \dfrac{\partial w_{Q3}}{\partial U_2} & \dfrac{\partial w_{Q3}}{\partial U_3} & \dfrac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_2} & \dfrac{\partial w_{Q3}}{\partial \delta_3} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_{P2}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{P3}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{Q2}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \\ w_{Q3}(U_2, U_3, \delta_2, \delta_3) \end{pmatrix}.$$

Если порядок матрицы высокий для решения уравнений используют методы Гаусса, простой итерации или Зейделя. Затем найденные поправки используем для определения следующих стартовых значений

$$\begin{pmatrix} U_2^{(1)} \\ U_3^{(1)} \\ \delta_2^{(1)} \\ \delta_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2^{(0)} \\ U_3^{(0)} \\ \delta_2^{(0)} \\ \delta_3^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \\ \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \end{pmatrix}.$$

Далее этот процесс повторяется до тех пор, пока максимальная из поправок не будет меньше наперёд заданного малого числа

Пример.

Определить потенциалы узлов для приведенной схемы, если **балансирующим узлом** является **третий узел.**

Заданы:

- полные мощности в первом и во втором узлах,
- потенциал балансирующего узла.

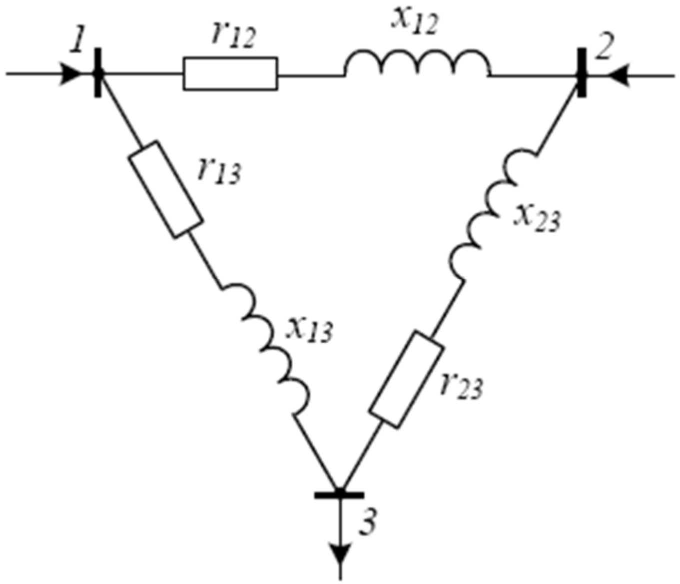
Для расчета будем использовать уравнения напряжений в форме баланса мощностей.

Для решения нелинейного уравнения будем использовать **метод Ньютона**

Дано

$Z_{12} := 10 + 20$ $\quad Z_{13} := 15 + 30$ $\quad Z_{23} := 10 + 25$

$U_b := 150$ $\quad P_1 := 28.8$ $\quad Q_1 := 17.3$ $\quad P_2 := -46.2$ $\quad Q_2 := 23$



Формируем элементы матрицы проводимости

$$Y_{11} := \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{13}} \qquad Y_{12} := \frac{1}{Z_{12}} \qquad Y_{13} := \frac{1}{Z_{13}}$$

$$Y_{22} := \frac{1}{Z_{12}} + \frac{1}{Z_{23}} \qquad Y_{23} := \frac{1}{Z_{23}} \qquad Y_{21} := Y_{12}$$

$$\left(g_{11}\ g_{12}\ g_{21}\ g_{22}\ g_{13}\ g_{23}\right) := \mathrm{Re}\left(\left(Y_{11}\ Y_{12}\ Y_{21}\ Y_{22}\ Y_{13}\ Y_{23}\right)\right)$$

$$\left(b_{11}\ b_{12}\ b_{21}\ b_{22}\ b_{13}\ b_{23}\right) := -\mathrm{Im}\left(\left(Y_{11}\ Y_{12}\ Y_{21}\ Y_{22}\ Y_{13}\ Y_{23}\right)\right)$$

Формируем функции небаланса мощности – невязку

$$W_{p1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) := P_1 - g_{11}\cdot u_1^2 + u_1\cdot u_2\cdot\left(g_{12}\cdot\cos(\phi_2-\phi_1) + b_{12}\cdot\sin(\phi_2-\phi_1)\right) + u_1\cdot U_b\cdot\left(\cos(\phi_1)\cdot g_{13} - b_{13}\cdot\sin(\phi_1)\right)$$

$$W_{q1}(u_1,u_2,\varphi_1,\varphi_2) := Q_1 - b_{11}\cdot u_1^2 - u_1\cdot u_2\cdot\left(-b_{12}\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1) + g_{12}\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1)\right) + u_1\cdot U_b\cdot\left(\sin(\varphi_1)\cdot g_{13} + \cos(\varphi_1)\cdot b_{13}\right)$$

$$W_{p2}(u_1,u_2,\varphi_1,\varphi_2) := P_2 - g_{22}\cdot u_2^2 + u_1\cdot u_2\cdot\left(g_{12}\cdot\cos(\varphi_1-\varphi_2) + b_{21}\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right) + u_2\cdot U_b\cdot\left(\cos(\varphi_2)\cdot g_{23} - b_{23}\cdot\sin(\varphi_2)\right)$$

$$W_{q2}(u_1,u_2,\varphi_1,\varphi_2) := Q_2 - b_{22}\cdot u_2^2 - u_1\cdot u_2\cdot\left(-b_{21}\cdot\cos(\varphi_1-\varphi_2) + g_{21}\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right) + u_2\cdot U_b\cdot\left(\sin(\varphi_2)\cdot g_{23} + \cos(\varphi_2)\cdot b_{23}\right)$$

Формируем матрицу Якоби – Якобиан

$$D(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1}W_{p1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial u_2}W_{p1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_1}W_{p1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_2}W_{p1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \\ \frac{\partial}{\partial u_1}W_{p2}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial u_2}W_{p2}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_1}W_{p2}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_2}W_{p2}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \\ \frac{\partial}{\partial u_1}W_{q1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial u_2}W_{q1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_1}W_{q1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_2}W_{q1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \\ \frac{\partial}{\partial u_1}W_{q2}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial u_2}W_{q2}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_1}W_{q1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) & \frac{\partial}{\partial \phi_2}W_{q1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \end{pmatrix}$$

$$W(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) := \begin{pmatrix} W_{p1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \\ W_{p2}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \\ W_{q1}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \\ W_{q2}(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \end{pmatrix}$$

Приведем три итерации

$$U := \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} := U$$ задаем произвольные стартовые значения

1) итерация:

$$\Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) := D(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)^{-1} \cdot W(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \qquad \overrightarrow{\left|\Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2)\right|} = \begin{pmatrix} 2.852593 \\ 4.630306 \\ 0.00781 \\ 0.013428 \end{pmatrix}$$

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} - \Delta(u_1, u_2, \phi_1, \phi_2) \qquad U = \begin{pmatrix} 153.3576 \\ 151.4866 \\ -0.0072 \\ -0.0296 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} := U$$

2) итерация

$$\Delta(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) := D(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2)^{-1}\cdot W(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \qquad \overrightarrow{\left|\Delta(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2)\right|} = \begin{pmatrix} 0.45034 \\ 0.77534 \\ 0.0015 \\ 0.00213 \end{pmatrix}$$

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} - \Delta(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \qquad U = \begin{pmatrix} 153.8079 \\ 152.262 \\ -0.0087 \\ -0.0317 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} := U$$

3) итерация

$$\Delta(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) := D(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2)^{-1}\cdot W(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \qquad \overrightarrow{\left|\Delta(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2)\right|} = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.107 \\ 1.867\times 10^{-4} \\ 2.884\times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$U := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \Delta(u_1,u_2,\phi_1,\phi_2) \qquad U = \begin{pmatrix} 153.8711 \\ 152.3695 \\ -0.0089 \\ -0.032 \end{pmatrix}$$

Приведем программу расчета в среде MathCAD

$$\max(U) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{length}(U) \\ u_m \leftarrow U_0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad u_m \leftarrow U_i \text{ if } u_m < U_i \\ u_m \end{array} \right.$$

Вспомогательная программа вычисления максимальной компоненты вектора

$$\text{balans\_W}(U,\varepsilon) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..100 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ f1 \\ f2 \end{pmatrix} \leftarrow U \\ \Delta(u1,u2,f1,f2) \leftarrow D(u1,u2,f1,f2)^{-1}\, W(u1,u2,f1,f2) \\ \varepsilon 1 \leftarrow \overrightarrow{\left|\Delta(u1,u2,f1,f2)\right|} \\ U \leftarrow \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ f1 \\ f2 \end{pmatrix} - \Delta(u1,u2,f1,f2) \\ \text{if } \varepsilon \ge \max(\varepsilon 1) \\ \quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow i+1 \\ \text{break} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ f1 \\ f2 \\ k \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\varepsilon := 10^{-3} \qquad U := \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{balans\_W}(U,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 153.75353 \\ 152.1695 \\ -0.00858 \\ -0.03148 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Задание :

Рассчитать напряжения в узлах сети переменного тока

2. Рассчитать токи в ветвях.

3. Рассчитать потоки мощности в начале и в конце каждой ветви.

4. Рассчитать потери мощности в ветвях схемы.

5. Сделать проверку результатов по балансу мощностей.

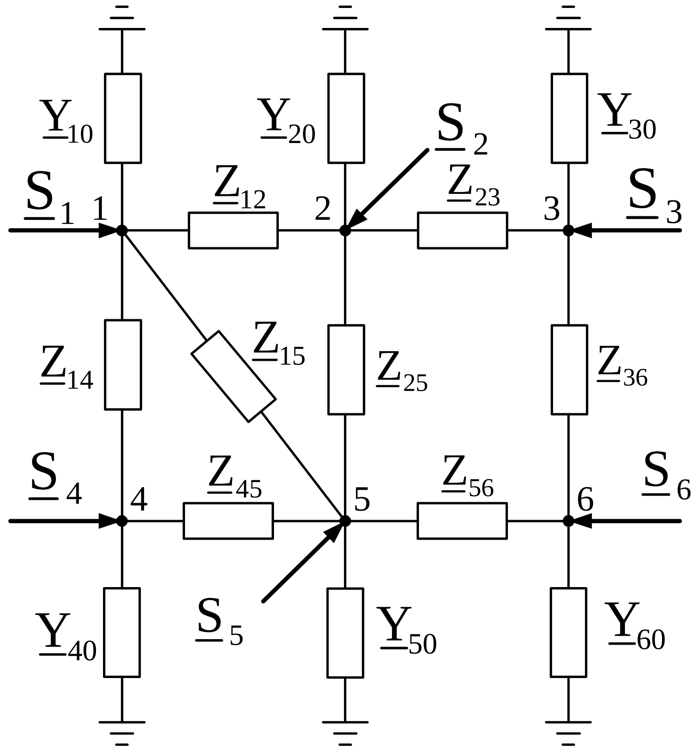


Таблица 1

№	Сопротивления ветвей, Ом							
	$\underline{Z}_{12}$	$\underline{Z}_{23}$	$\underline{Z}_{14}$	$\underline{Z}_{15}$	$\underline{Z}_{25}$	$\underline{Z}_{36}$	$\underline{Z}_{45}$	$\underline{Z}_{56}$
1	10+j200	2+j5	0.1+j0.02	20+j120	4+j12	∞	10+j10	∞
2	0.1+j0.3	30+j120	∞	5+j4	1+j6	9+j25	∞	9+j25
3	4+j12	0.1+j0.02	10+j130	9+j25	5+j4	4+j8	10+j20	10+j20
4	12+j20	∞	0.3+j0.1	2+j15	2+j5	∞	6+j30	4+j8
5	5+j4	1+j6	10+j5	∞	∞	5+j4	1+j6	5+j4
6	∞	9+j25	4+j12	1+j6	0.1+j0.1	2+j12	12+j20	10+j5
7	4+j8	2+j5	10+j5	∞	4+j8	1+j2	10+j100	10+j5
8	10+j10	2+j9	5+j4	2+j9	10+j5	5+j4	∞	∞
9	20+j120	10+j20	∞	∞	4+j12	4+j8	1+j6	1+j2
10	0.1+j0.02	50+j120	2+j9	∞	11+j12	2+j7	10+j5	2+j50
11	4+j8	∞	40+j100	2+j9	9+j25	∞	11+j12	5+j4
12	10+j5	2+j9	∞	20+j120	10+j20	4+j12	∞	12+j20

Таблица 2

№	Проводимости ветвей, См					
	$\underline{Y}_{10}$	$\underline{Y}_{20}$	$\underline{Y}_{30}$	$\underline{Y}_{40}$	$\underline{Y}_{50}$	$\underline{Y}_{60}$
1	0	0.02+j0.08	0.06+j0.1	0.2+j1.5	0.04+j0.1	0
2	0.07+j0.5	0	1+j10	0	0.03+j0.09	0.04+j0.1
3	0	0.03+j0.09	0	0	0	0.08+j0.8
4	0.02+j0.05	0.04+j0.1	0	0	0.01+j0.09	0.02+j0.05
5	2+j15	0.08+j0.08	0	0.01+j0.09	0	0
6	0	0	0.04+j0.1	0.02+j0.05	0.04+j0.1	0
7	0	0.08+j0.8	0.3+j1.7	0	0	0
8	0.03+j0.09	0	0	0.03+j0.09	0.01+j0.09	0.06+j0.1
9	0.01+j0.09	3+j17	0	0	0.06+j0.1	0.02+j0.05
10	0.06+j0.1	0	0	0	0.08+j0.8	0.07+j0.01
11	0.07+j0.01	0.06+j0.1	0	3+j20	0	0.03+j0.09
12	0.01+j0.09	0.07+j0.01	0.04+j0.1	0	0.01+j0.09	0

Таблица 3

	Напряжение базисного узла $U_Б$ = 110 кВ						
№	Базисный узел	Задающие мощности, МВА					
		$\underline{S}_1$	$\underline{S}_2$	$\underline{S}_3$	$\underline{S}_4$	$\underline{S}_5$	$\underline{S}_6$
1	1	12-j13	0	0	20 +j45	10-j40	0
2	2	12 – j20	0	0	20+j90	2+j30	0
3	3	10+j65	20+j100	0	0	20 – j30	0
4	4	90+j90	0	0	15+j50	20+j10	0
5	5	0	30+j55	10 – j60	0	0	45+j10
6	6	2+j25	0	0	2+j60	20 – j70	0
7	1	30 – j9	12 +j80	0	0	40–j30	0
8	2	0	50-j50	10+j20	0	62+j20	0
9	3	35-j100	0	0	20+j100	35+j50	0
10	4	35-j100	30-j50	0	0	4+j20	0
11	5	0	20+j75	40–j30	0	10+j20	0
12	6	30+j55	0	0	2+j3	30-j50	0

Minerr(var1, var2, ...)

- Возвращает значения переменных var1, var2, ..., наиболее удовлетворяющие системе уравнений и ограничениям в блоке решения. Возвращает скаляр, если задан один аргумент, иначе возвращает вектор решений. Если решение не сходится, возвращаются результаты последней итерации.

$ORIGIN := 1$

$U_1 := 0$ $\quad$ $Y_{11} := Y_{10} + Y_{14} + Y_1 = 0.048 - 0.128i$

$U_5 := U_4$ $\quad$ $Y_{55} := Y_1 + Y_2 + Y_{45} = 0.119 - 0.119i$

Given

$$\overline{S_1} - \left(Y_{11} \cdot U_1 \cdot \overline{U_1}\right) + \left(Y_{14} \cdot U_4 \cdot \overline{U_1}\right) + \left(Y_1 \cdot U_5 \cdot \overline{U_1}\right) = 0$$

$$\overline{S_5} - \left(Y_{55} \cdot U_5 \cdot \overline{U_5}\right) + \left(Y_{45} \cdot U_4 \cdot \overline{U_5}\right) + \left(Y_1 \cdot U_1 \cdot \overline{U_5}\right) = 0$$

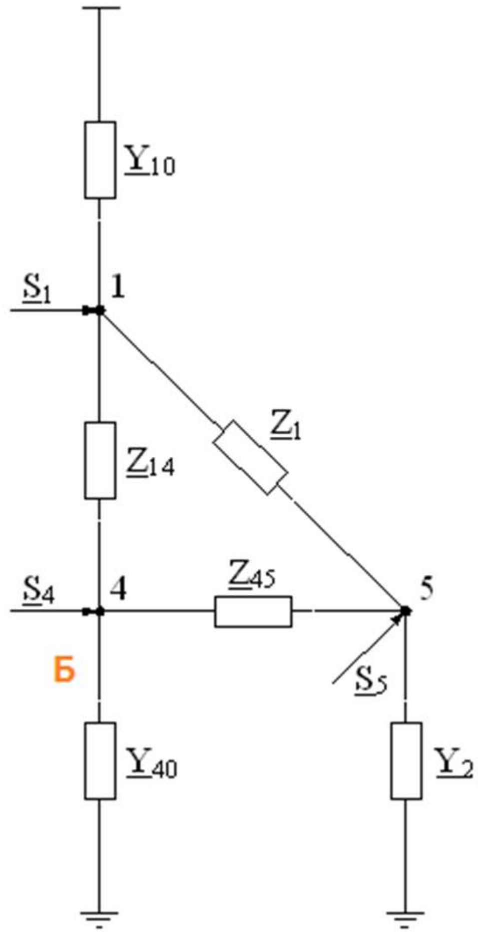
$$\begin{pmatrix} U_{.1} \\ U_{.5} \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}\left(U_{.1}, U_{.5}\right)$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.295 - 0.098i \\ 58.628 - 48.594i \end{pmatrix}$$

$$I_{14} := \frac{(U_1 - U_4)}{\sqrt{3}} \cdot Y_{14} = -0.578 + 2.878i \qquad I_{10} := \frac{U_1}{\sqrt{3}} \cdot Y_{10} = 0.041 + 0.327i$$

$$I_1 := \frac{(U_1 - U_5)}{\sqrt{3}} \cdot Y_1 = 3.889 + 5.915i \qquad I_{40} := \frac{U_4}{\sqrt{3}} \cdot Y_{40} = 3.175 + 44.456i$$

$$I_{45} := \frac{(U_4 - U_5)}{\sqrt{3}} \cdot Y_{45} = 3.071 - 2.659i \qquad I_2 := \frac{U_5}{\sqrt{3}} \cdot Y_2 = 6.923 + 2.795i$$



Ïðîâåðêà

$$S_1 - \sqrt{3} \cdot U_1 \cdot \overline{\left(I_{10} + I_1 + I_{14}\right)} = -0 + 0i \qquad \sqrt{3} \cdot U_1 \cdot \overline{\left(I_{10} + I_1 + I_{14}\right)} = 35 - 100i$$

$$S_1 = 35 - 100i$$

$$S_5 - \sqrt{3} \cdot U_5 \cdot \overline{\left(I_2 - I_1 - I_{45}\right)} = -0 + 0i \qquad \sqrt{3} \cdot U_5 \cdot \overline{\left(I_2 - I_1 - I_{45}\right)} = 35 + 50i$$

$$S_5 = 35 + 50i$$

Метод Зейделя для решения нелинейных систем уравнений

Имеем систему нелинейных уравнений в неявной форме:

$$\begin{gathered} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \ldots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Придадим системе (3.1) итерационный вид:

$$\begin{gathered} x_1 = f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \\ x_2 = f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \\ \ldots \\ x_n = f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \end{gathered} \qquad (3.3)$$

В итерационных процессах одна и та же переменная может одновременно находиться в левой и правой частях равенства. Основная сложность состоит в обеспечении итерационному процессу (3.3) условий сходимости:

$$1 \geq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|, \ \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \qquad (3.4)$$

Процесс итерирования выражений (3.3) осуществляется по следующей схеме:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \\
x_2^{(k+1)} &= f_1\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right), \\
&\ldots \\
x_n^{(k+1)} &= f_1\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}\right).
\end{aligned}
\qquad (3.5)
$$

и продолжается до выполнения заданной погрешности

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \le \varepsilon, \ \left(i = 1, 2, \ldots, n\right). \qquad (3.6)$$

Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений

Имеем нелинейную систему

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,, \\
&f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,, \\
&\ldots \\
&f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\,.
\end{aligned}
\qquad (3.20)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Delta x_n + f_1 = 0\,,\\
&\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\Delta x_n + f_2 = 0\,,\\
&\ldots\\
&\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Delta x_n + f_n = 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

В этой системе значения производных $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и функции f_i вычисляются по данным вектора x_i в k-м приближении. В результате имеем обычную числовую линейную систему относительно поправок Δx_i.

Придадим линейной системе (3.21) привычную для неё форму: перенесем столбец свободных членов f_i в правую часть равенства и запишем её в матричном виде

$$f'(x)\Delta x = -f(x), \tag{3.22}$$

где

$$f'(x) = W = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

матрица частных производных функций f_i по независимым переменным x_i - называется матрицей *Якоби*, а её определитель – *якобианом*,

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$$ - вектор поправок, $$-f(x) = \begin{pmatrix} -f_1(x) \\ -f_2(x) \\ \dots \\ -f_n(x) \end{pmatrix}$$ - вектор столбец невязок.

Решая систему (3.22), находим вектор поправок $\Delta x_i^{(k)}$, что позволяет уточнить вектор решения

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)} \ (i = 1, 2, \dots, n). \tag{3.24}$$

Таким образом, метод Ньютона сводится к многократному решению линейной системы (3.22). Для этого можно использовать ранее изложенные методы: Крамера, обратной матрицы, Гаусса, Зейделя и др.

$$\Delta x = -W^{-1}(x) \cdot f(x) \tag{3.25}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}\left(x^{(k)}\right) \cdot f\left(x^{(k)}\right). \tag{3.26}$$

Завершение итерационного процесса можно осуществлять по условию

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| = \left|\Delta x_i^{(k)}\right| \leq \varepsilon \;\; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.27}$$

В практическом плане можно рекомендовать такую последовательность действий:

- решаемую систему уравнений представить в форме (3.20);

- ориентируясь на физический смысл решаемой задачи и ожидаемого решения задать вектор начальных приближений $x_i^{(0)}$ и погрешность расчета ε;

- сформировать линеаризованную систему в форме (3.21) или (3.22) и сориентироваться на метод её решения;

- осуществить итерационный процесс, находя поправки Δx_i решением (3.21) ил (3.22) и уточняя вектор решения согласно (3.24).

На сходимость итерационного процесса указывает вектор невязок: в ходе итерации он должен уменьшаясь по модулю стремиться к нулю в точке решения согласно (3.20).

Пример 3.4. Методом Ньютона найти вещественное решение системы

$$f_1(x,y) = 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \tag{3.28}$$

$$f_2(x,y) = xy^3 - y - 4 = 0,$$

при начальном приближении:

$x^{(0)} = 2; y^{(0)} = 1.$

Решение. Запишем линеаризованную систему в форме (3.22)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\Delta y = -f_1(x,y), \qquad (3.29)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\Delta y = -f_2(x,y).$$

Раскрывая в (3.29) содержание частных производных, имеем

$$6x^2\Delta x - 2y\Delta y = -f_1(x,y), \qquad (3.30)$$

$$y^3\Delta x + \left(3xy^2 - 1\right)\Delta y = -f_2(x,y).$$

Основная матрица системы (3.30) и является матрицей Якоби

$$W(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.31)$$

В решении линейной системы (3.30) ориентируемся на формулу Крамера (2.5).

Рассчитываем первое приближение искомых решений ($k = 0$).

1. Невязки функций по (3.28):

$$f_1(2;1) = 14; \; f_2(2;1) = -3$$

весьма велики, что свидетельствует о достаточно грубом начальном приближении.

2. Определитель матрицы Якоби (якобиан)

$$W(2;1) = \Delta = \begin{vmatrix} 24 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 122$$

достаточно велик, что свидетельствует о хорошей обусловленности матрицы (высокой сходимости процесса итерации).

3. Поправки Δx, Δy по формуле Крамера (2.5):

$$\Delta x^{(0)} = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1}{122}\begin{vmatrix} -14 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{64}{122} = -0.5246;$$

$$\Delta y^{(0)} = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{122}\begin{vmatrix} 24 & -14 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{86}{122} = 0.7049.$$

4. Уточнение значения x, y по (3.24):

$$x^{(1)} = 2 - 0.5246 = 1.4754;$$

$$y^{(1)} = 1 + 0.7049 = 1.7049.$$

Рассчитываем второе приближение искомых переменных ($k = 1$):
- невязки функций:

$$f_1(1.4754;1.7049) \approx 2.51;$$
$$f_2(1.4754;1.7049) \approx 1.61$$

убывают по модулю (было $f_1 = 14$; $f_2 = -3$), что свидетельствует о высокой сходимости процесса;
- определитель матрицы Якоби

$$W(1.4754;1.7049) = \begin{vmatrix} 13.06 & -3.41 \\ 4.95 & 11.86 \end{vmatrix} \approx 171;$$

- поправки Δx , Δy :

$$\Delta x^{(1)} = \frac{1}{171}\begin{vmatrix} -2.51 & -3.41 \\ -1.61 & 11.86 \end{vmatrix} = -0.2062;$$

$$\Delta y^{(1)} = \frac{1}{171}\begin{vmatrix} 13.06 & -2.51 \\ 4.95 & -1.61 \end{vmatrix} = -0.050;$$

- уточненные значения x, y:

$$x^{(2)} = 1.4754 - 0.2062 = 1.269;$$

$$y^{(2)} = 1.7049 - 0.05 = 1.655.$$

Продолжая эти расчеты, получаем:

при $k = 2$

$$x^{(3)} = 1.269 - 0.034 = 1.235,$$

$$y^{(3)} = 1.655 + 0.006 = 1.661,$$

при $k = 3$

$$x^{(4)} = 1.235 - 0.00072 = 1.2343,$$

$$y^{(4)} = 1.661 + 0.00052 = 1.6615.$$

Результаты этой итерации можно принять за приближенное решение, при этом погрешность равна $\varepsilon = 0.00072$.

В процессе проведенных итераций определитель матрицы Якоби принимал значения: 122; 171; 106; 99,6. После двух первых итераций его значение стабилизируется, что позволяет с целью уменьшения объема вычислений применять *модифицированный метод Ньютона*.