Федеральное агентство морского и речного транспорта

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Морской государственный университет им. адм. Г.И. Невельского»

Кафедра высшей математики

А. В. Олесов

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие
для практической и самостоятельной работы
студентов и курсантов всех специальностей

Владивосток
2011

Позиция № 07
в плане издания
учебной литературы
МГУ на 2011 г.

Рецензент Прилепкина Е. Г., канд. физ.-мат. наук

Александр Викторович Олесов

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ
И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-методическое пособие

Лицензия ИД №05693 от 27.08.01
Печатается в авторской редакции

1,8 уч.-изд. л.	Формат $60 \times 84^1/_{16}$
Тираж экз.	Заказ №

Отпечатано в типографии МГУ им. адм. Г.И. Невельского
Владивосток, 59, ул. Верхнепортовая, 50а

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельного изучения основ комбинаторики и теории вероятностей. Теоретический материал излагается в строгой, но доступной пониманию форме. Основные понятия и методы иллюстрируются подробно разобранными примерами. Предлагаемые упражнения предназначены для приобретения навыков решения типовых задач.

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1.1. Основной принцип комбинаторики

Комбинаторика — ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов.

Рассмотрим следующую задачу: из пункта A в пункт B ведут 3 дороги, а из пункта B в пункт C — 2. Сколькими способами можно добраться из пункта A в пункт C?

Очевидно, на каждую из 3-х дорог, ведущих из A в B, приходиться 2 дороги из B в C. Следовательно, ответ дается умножением $3{\cdot}2 = 6$. Пусть в условиях данной задачи из пункта C в пункт D ведут 5 дорог. Аналогично предыдущему заключаем, что из пункта A в пункт D можно добраться $6 \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ способами. Данные рассуждения приводят нас к следующей теореме.

Теорема 1 (основной принцип комбинаторики)**.** *Пусть некоторая работа состоит в последовательном выполнении k действий. Если* 1*-е действие можно выполнить n_1 способами,* 2*-е действие — n_2 способами, ..., k-е действие можно выполнить n_k способами, то вся работа может быть выполнена $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ способами.*

Задача 1. Сколькими способами можно составить очередь из 7 человек?

Р е ш е н и е. *Работа*, заключающаяся в составлении очереди, состоит в последовательном выполнении 7 *действий*: 1-е действие — выбор человека, который будет стоять первым в очереди; 2-е действие — выбор 2-го человека; ...; 7-е действие — выбор последнего человека. 1-е действие можно выполнить 7 способами, так как выбрать можно любого из 7 человек; 2-е действие — 6 способами, так как выбор производится из оставшихся 6 человек; …; 6-е действие – 2 способами; 7-е – 1 способом. По теореме 1 очередь можно составить $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ способами.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать 4 человека на 4 должности из 9 кандидатов на эти должности?

Решение. *Работа*, заключающаяся в заполнении вакансий, состоит в последовательном выполнении 4-х *действий*: 1-е действие — выбор человека на 1-ю должность; 2-е действие — выбор человека на 2-ю должность; …; 4-е — выбор человека на 4-ю должность. 1-е действие можно выполнить 9 способами, так как выбрать можно любого из 9 кандидатов; 2-е действие — 8 способами, так как выбор производится из оставшихся 8 кандидатов; 3-е действие — 7 способами, 4-е — 6 способами. По теореме 1 вакансии можно заполнить $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ способами.

Задача 3. Сколько нечетных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. *Работа*, заключающаяся в составлении числа, состоит в последовательном выполнении 4-х *действий*: 1-е действие — выбор 1-ой цифры числа; 2-е действие — выбор 2-ой цифры числа; …; 4-е — выбор 4-ой цифры числа. 1-е действие можно выполнить 5 способами, так как первой цифрой может быть любая из цифр 1, 2, 3, 4, 5; 2-е действие — 6 способами; 3-е — 6 способами; 4-е действие можно выполнить тремя способами, так как последней цифрой должна быть одна из цифр 1, 3, 5 (числа должны быть нечетными). По теореме 1 общее количество чисел равно $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$.

1.2. Следствия основного принципа комбинаторики

Множеством называется совокупность элементов произвольного рода.

Пустое множество — множество, не содержащее ни одного элемента; обозначение: $\varnothing$.

Если каждый элемент множества B принадлежит множеству A, то B называется *подмножеством* множества A. Пустое множество считается подмножеством любого множества.

Пример. Множество всех отличников в группе (может оказаться пустым) является подмножеством множества всех студентов в группе.

Пример. Множество всех натуральных чисел является подмножеством множества всех целых чисел.

Пример. 3-х элементное множество $\{a,\ b,\ c\}$ имеет следующие подмножества: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, $\{a,\ b,\ c\}$, $\varnothing$.

Перестановками конечного множества называются комбинации, состоящие из всех элементов этого множества и отличающиеся только порядком их расположения.

Пример. Перестановками множества $\{a,\ b,\ c\}$ являются следующие комбинации: $(a,\ b,\ c)$, $(a,\ c,\ b)$, $(b,\ a,\ c)$, $(b,\ c,\ a)$, $(c,\ a,\ b)$, $(c,\ b,\ a)$.

Факториалом называется произведение натуральных чисел от единицы до какого-либо данного натурального числа n, то есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$; обозначается $n!$ (читают n факториал). Нуль факториал полагают равным единице: $0! = 1$.

Из теоремы 1 (см. решение задачи 1) вытекает следующее

Предложение 1. *Число всех возможных перестановок множества из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.*

Задача 4. Сколькими способами можно выбрать k разных красок из имеющихся n красок?

Решение. Рассмотрим *действие*, заключающееся в последовательном выборе 1-ой, 2-ой и т.д., k-й красок. По теореме 1 (см. решение задачи 2) данное действие можно выполнить

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-(k-1))}_{k}$$

способами. Однако, в данной задаче нас не интересует порядок выбора красок. Следовательно, ввиду предложения 1 найденное число превосходит искомое в $k!$ раз. Таким образом, количество способов выбора k красок из n равно

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1)}{k!}.$$

Предложение 2. *Число всех k-элементных подмножеств множества из n элементов (число сочетаний из n элементов по k элементов) равно*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Задача 5. В группе 25 студентов. Из них нужно выбрать 3 делегата на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Число способов равно числу 3-х элементных подмножеств 25-ти элементного множества, т. е.

$$C_{25}^3 = \frac{25!}{3! \cdot 22!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25}{2 \cdot 3} = 23 \cdot 4 \cdot 25 = 2300.$$

Задача 6. Рота состоит из 3-х офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из 1 офицера, 2 сержантов, 20 рядовых?

Решение. Составление отряда состоит в последовательном выполнении 3-х *действий*: 1-е действие — выбор одного офицера из 3-х; 2-е действие — выбор 2-х сержантов из 6-ти; 3-е действие — выбор 20 рядовых из 60-ти. Очевидно, 1-е действие можно выполнить 3 способами; 2-е действие в силу предложения 2 можно выполнить C_6^2 способами; 3-е действие — C_{60}^{20} способами. По теореме 1 отряд можно составить $3 \cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20}$ способами.

Задача 7. Сколько семизначных чисел можно составить располагая в ряд 7 карточек с цифрами 5, 5, 5, 8, 8, 3, 3?

Решение. Составление числа состоит в последовательном выполнении 3-х *действий*: 1-е действие — размещение на 7 свободных для цифр позиций трех карточек с цифрами 5; 2-е действие — размещение на оставшихся 4 свободных позициях двух карточек с цифрами 8; 3-е действие — размещение карточек с цифрами 3 на двух последних позициях. 1-е действие в силу предложения 2 можно выполнить C_7^3 способами; 2-е — C_4^2 способами; 3-е — одним способом. По теореме 1 всего можно составить $C_7^3 C_4^2 = 210$ семизначных чисел.

Задача 8. В комнате n ламп, каждая из которых может быть выключена или включена. Сколькими способами можно установить освещение в комнате?

Р е ш е н и е. Установка освещения в комнате состоит в последовательном выполнении n *действий*: 1-е действие — выбор состояния 1-й лампы (включение или выключение); 2-е действие — выбор состояния 2-й лампы; ...; n-е – выбор состояния n-й лампы; Каждое действие можно выполнить 2-я способами. По теореме 1 освещение в комнате можно установить $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots 2}_{n} = 2^n$ способами.

Совокупность ламп в данной задаче — n элементное множество, а выбор освещения в комнате — выбор определенного подмножества (случаю, когда выключены все лампы, соответствует пустое множество). Таким образом, доказано следующее

Предложение 3. *Число всех подмножеств множества из n элементов равно 2^n.*

Упражнения

1. Определить сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторений.

2. Имеется 6 штаммов бактерий. Для определения скорости их роста необходимо выбрать 3 штамма. Сколькими способами можно это сделать?

3. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

4. На полке 20 учебников, среди которых 12 по естественным наукам, остальные — по гуманитарным. Сколькими способами можно отобрать два учебника а) по естественным наукам; б) по гуманитарным наукам; в) один по естественным наукам, другой по гуманитарным?

5. Сколькими способами можно посадить за круглый стол 5 мужчин и 5 женщин так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

6. На собрании должны выступить 4 человека A, B, C, D. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов, если B не может выступить до того момента, пока не выступит A?

7. В галерее на продажу выставлены 4 картины. Посетитель намерен купить хотя бы одну из них. Сколькими способами он может сделать покупку?

О т в е т ы: **1.** 60. **2.** 20. **3.** 126. **4.** 66; 28; 96. **5.** 240. **6.** 12. **7.** 15.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2.1. События и их классификация

Испытание — это осуществление определенного комплекса условий, при которых производиться наблюдение.

Событием называется всякий факт, который в результате испытания может произойти или не произойти.

Согласно этому определению любое событие должно рассматриваться в контексте определенного испытания. События обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, $\ldots$.

Пример. *Испытание* — бросание монеты; *событие* $A =${выпадение «герба»}.

Пример. *Испытание* — лечение группы больных новым препаратом; *событие* $B =${улучшение более чем у половины больных}.

Событие называют *достоверным*, если оно неизбежно происходит при испытании; обозначается: E.

Событие называют *невозможным*, если при испытании оно не может произойти; обозначается: O.

Пример. При подбрасывании камня событие $A =${камень упадет на землю} — достоверное.

Пример. Из ящика, в котором имеются только белые шары, извлекается один шар. Событие $B =${извлеченный шар черный} — невозможное.

События A и B называются *эквивалентными*, если они происходят или не происходят совместно; обозначение: $A = B$.

Пример. При бросании монеты события $A =${выпадение «герба»} и $B =${не выпадение «решетки»} эквивалентны.

Суммой событий A и B называется событие $C = A + B$, означающее осуществление либо события A, либо события B, либо их обоих.

Пример. Из группы случайным образом выбирается студент и измеряется его рост. Событие $A =${рост студента от 1,7 до 1,8 м.}, событие $B =${рост студента свыше 1,75 м.}. Тогда событие $A + B =${рост студента свыше 1,7 м.}.

Пример. Два стрелка однократно стреляют по мишени. Событие $A = \{$1-й стрелок попадает$\}$, событие $B = \{$2-й стрелок попадает$\}$. Тогда $A + B = \{$хотя бы один стрелок попадает$\}$.

Под *суммой нескольких событий* понимается событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из этих событий.

Произведением событий A и B называется событие $C = AB$, означающее совместное осуществление событий A и B.

Пример. Из ящика случайным образом выбирается деталь. $A = \{$деталь годная$\}$, $B = \{$деталь окрашена$\}$. Тогда событие $AB = \{$деталь годная и окрашена$\}$.

Под *произведением нескольких событий* понимается событие, заключающееся в одновременном осуществлении всех этих событий.

Событие, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A называется *противоположным* событию A; обозначается: $\overline{A}$. На языке алгебры событий это выражается равенствами

$$A + \overline{A} = E, \qquad A\overline{A} = O.$$

Первое равенство означает, что при испытании должно произойти хотя бы одно из событий A или $\overline{A}$, а второе — что события A и $\overline{A}$ не могут произойти вместе.

Несколько событий в данном испытании называются *несовместными*, если никакие два из них не могут произойти вместе.

Говорят, что события E_1, $E_2, \ldots,$ E_n образуют *полную группу*, если они несовместны и в результате испытания одно из них непременно должно произойти, т. е. $E_iE_j = O$ при $i \neq j$, и

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n = E.$$

События называют *равновозможными*, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример. При бросании симметричной игральной кости события $\{$выпадение 1$\}$ и $\{$выпадение 6$\}$ равновозможны.

2.2. Классическое определение вероятности

Пусть дана полная группа равновозможных событий E_1, E_2, $\ldots$, E_n. Назовем эти события *элементарными исходами.*

Далее мы будем рассматривать только те возможные события, которые являются суммой событий из группы E_1, $E_2, \ldots$, E_n.

Те элементарные исходы, при которых событие A наступает, называются *благоприятствующими* событию A. То есть, если

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_m},$$

то E_{i_1}, $E_{i_2}, \ldots$, E_{i_m} — исходы, благоприятствующие событию A.

Вероятностью события A называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу элементарных исходов; обозначение: $P(A)$. Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число исходов, благоприятствующих событию A; n — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Пример. При бросании игральной кости примем за элементарные исходы 6 событий $E_i = \{$выпадение i числа очков$\}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Найдем вероятность события $A = \{$выпавшее число очков делится на 3$\}$. Ему благоприятствуют 2 исхода E_3 и E_6. Следовательно, $P(A) = 2/6 = 1/3$.

Имеют место следующие свойства вероятности события:

1. *Вероятность достоверного события равна единице.*

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. Следовательно, $m = n$, $P(A) = m/n = n/n = 1$.

2. *Вероятность невозможного события равна нулю.*

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. Следовательно, $m = 0$, $P(A) = m/n = 0/n = 0$.

3. *Если A — случайное событие (возможное, но не являющееся достоверным), то* $0 < P(A) < 1$.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов. В этом случае $0 < m < n$, то есть $0 < m/n < 1$.

Из указанных свойств следует, что вероятность любого события удовлетворяет неравенствам $0 \le P(A) \le 1$.

Задача 9. Найти вероятность события $A =$ {выигрыш по лотерейному билету}, если для этого необходимо угадать 5 из 36 чисел.

Р е ш е н и е. Определенный выбор 5 чисел из 36 является элементарным исходом в данном испытании. Очевидно, число n таких исходов равно количеству 5-ти элементных подмножеств 36-ти элементного множества. В силу предложения 2 $n = C_{36}^5$. Только один исход, соответствующий выигрышной комбинации, благоприятствует событию A. Следовательно, $P(A) = 1/C_{36}^5 = 1/376922$.

Задача 10. Набирая номер телефона абонент забыл последние три цифры и, помня лишь что эти цифры различны и одна из них 5, набрал их наудачу. Найти вероятность события $A =$ {набраны нужные цифры}.

Р е ш е н и е. Определенный выбор комбинации 3-х различных цифр, одна из которых 5, является элементарным исходом в данном испытании. Для подсчета количества таких комбинаций воспользуемся теоремой 1. *Работа* в данном случае состоит в последовательном выполнении 3-х *действий*: 1-е действие — выбор позиции для цифры 5; 2-е действие — выбор 1-ой цифры, отличной от 5; 3-е — выбор 2-ой цифры, отличной от 5. 1-е действие можно выполнить 3 способами, так как цифра 5 может следовать либо 1-ой, либо 2-ой, либо 3-ей; 2-е действие можно выполнить 9 способами, так как можно выбрать любую из 10 цифр, кроме 5; 3-е действие — 8 способами, так как можно выбрать любую из 10 цифр, кроме 5 и уже выбранной цифры. По теореме 1 число комбинаций равно $3 \cdot 9 \cdot 8 = 216$. Из них только одна благоприятствует событию A. Следовательно, $P(A) = 1/216$.

Задача 11. В ящике 10 деталей, помеченных номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены шесть деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь №1; б) детали №1 и №2.

Р е ш е н и е. а) Извлечение определенной выборки 6-ти деталей является элементарным исходом в данном испытании. Число таких исходов равно числу сочетаний из 10 по 6, то есть в силу предложения 2 C_{10}^6. Благоприятствующим интересующему нас событию исходам соответствуют выборки 6-ти деталей содержащие деталь №1. Так как остальные пять деталей в таких выборках имеют другие номера, то число этих выборок равно числу выборок 5-ти деталей с номерами от №2 до №10, то есть C_9^5. Таким образом, искомая вероятность равна $P = C_9^5/C_{10}^6 = 0,6$.

б) Благоприятствующим интересующему нас событию исходам соответствуют выборки 6-ти деталей содержащие детали №1 и №2. Число таких выборок равно числу способов, которыми можно извлечь четыре детали из восьми деталей с номерами от №3 до №10, то есть C_8^4. Таким образом, искомая вероятность равна $P = C_8^4/C_{10}^6 = 1/3$.

Задача 12. В цехе работают 8 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

Решение. Общее число элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать 7 человек из 13 работающих в цехе, т. е. $n = C_{13}^7$. Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию — отобраны 4 мужчины и 3 женщины. Воспользуемся теоремой 1. *Работа* в данном случае состоит в последовательном выполнении 2-х *действий*: 1-е действие — выбор 4 мужчин из 8; 2-е действие — выбор 3 женщин из 5. В силу предложения 2 1-е действие можно выполнить C_8^4 способами, а второе — C_5^3 способами. По теореме 1 $m = C_8^4 C_5^3$. Следовательно, $P = C_8^4 C_5^3/C_{13}^7$.

Упражнения

1. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков не более трех?

2. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

3. В ящике 15 деталей, из которых 10 окрашены. Наугад извлечены 5 деталей. Какова вероятность того, что среди них ровно 3 окрашены?

4. Семь карточек, на которых изображены буквы А, А, Б, Б, К, У, Ш, случайно располагают в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БАБУШКА?

Ответы: **1.** $1/12$. **2.** $24/91$. **3.** $\approx 0,4$. **4.** $1/1260$.

2.3. Конечная схема с неравновозможными исходами

Ограниченность классического определения вероятности, в частности, заложена в равновозможности исходов. Действительно, даже небольшое усложнение практической ситуации немедленно войдет в противоречие с равновозможностью, которая может рассматриваться скорее как частный случай более общей ситуации. Рассмотрим, например, стрельбу по круговой мишени. Элементарными исходами здесь являются попадания в то или иное кольцо круговой мишени. Попадение в малый внутренний круг оценивается в 10 очков, в окружающее его кольцо — 9 очков и т. д., непопадание в круговую мишень – нуль очков. Для стрелка определенного класса имеются свои определенные устойчивые шансы (вероятности) p_{10}, $p_9, \ldots$, p_0 выбить за один выстрел то или иное число очков. Эти события, вообще говоря, неравновозможны.

Схема с неравновозможными исходами определяется так. Имеется полная группа возможных событий E_1, $E_2, \ldots$, E_n, называемых *элементарными исходами.* Далее мы будем рассматривать только те возможные события, которые являются суммой событий из данной группы. Каждому исходу E_i ставится в соответствие положительное число p_i (вероятность этого исхода) так, чтобы выполнялось равенство $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Вероятность любого события определяется как сумма вероятностей элементарных исходов благоприятствующих этому событию. То есть, если

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_m}, \quad \text{где} \quad i_l \neq i_s \quad \text{при} \quad l \neq s,$$

то

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_m}.$$

Вероятность невозможного события полагают равной нулю.

Очевидно, что классическое определение вероятности является частным случаем данной схемы, когда $p_i = 1/n$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.4. Вероятность суммы событий

Теорема 2 (сложения вероятностей)**.** *Если события A и B несовместны, то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство. Пусть $E_1,\ E_2, \ldots,\ E_n$ — система элементарных исходов; $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ — их вероятности, и пусть

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_m}, \quad B = E_{j_1} + E_{j_2} + \cdots + E_{j_k}$$

($i_l \neq i_s$ и $j_l \neq j_s$ при $l \neq s$). Так как A и B несовместны, то ни один из исходов, составляющих событие A, не совпадает ни с одним из исходов, составляющих событие B По определению вероятности

$$P(A+B) = P[E_{i_1} + \cdots + E_{i_m} + E_{j_1} + \cdots + E_{j_k}] = \\ = p_{i_1} + \cdots + p_{i_m} + p_{j_1} + \cdots + p_{j_k} = P(A) + P(B).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если события A, B, C несовместны, то*

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Действительно, в силу теоремы 2

$$P[(A+B)+C] = P(A+B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

Очевидно, соответствующее равенство выполняется для любого конечного числа несовместных событий.

Следствие 2. *Если события A, B, C образуют полную группу, то*

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1.$$

Действительно, ввиду следствия 1

$$P(A) + P(B) + P(C) = P(A+B+C) = P(E) = 1.$$

Соответствующее утверждение выполняется для любого конечного числа событий, образующих полную группу. В случае двух событий имеем:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

т. е. сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1. Отсюда вытекает равенство

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}). \tag{1}$$

Задача 13. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность события $A = \{$хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете$\}$.

Решение. Первый способ. Событие A является суммой следующих трех несовместных событий: A_1 — 1 учебник в переплете, A_2 — 2 учебника в переплете, A_3 — 3 учебника в переплете. По аналогии с решением задачи 12 находим, что

$$P(A_1) = \frac{5C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{45}{91}, \quad P(A_2) = \frac{10C_5^2}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}, \quad P(A_3) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}.$$

Воспользовавшись следствием 1, окончательно получаем

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 45/91 + 20/91 + 2/91 = 67/91.$$

Второй способ. Противоположным событию A является событие $\overline{A} = \{$ни один из взятых учебников не имеет переплета$\}$. По классической формуле вероятности находим, что $P(\overline{A}) = C_{10}^3/C_{15}^3 = 24/91$. В силу равенства (1)

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 24/91 = 67/91.$$

Задача 14. Найти вероятность $P(A)$ по данным вероятностям:

$$P(AB) = 0,72, \quad P(A\overline{B}) = 0,18.$$

Решение. Очевидно, $A = AB + A\overline{B}$. Так как события AB и $A\overline{B}$ несовместны, то по теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = 0,72 + 0,18 = 0,9.$$

Следствие 3 (формула сложения вероятностей). *Для любых событий A и B*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{2}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$A = A\overline{B} + AB, \quad B = \overline{A}B + AB, \quad A + B = A\overline{B} + \overline{A}B + AB.$$

События $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, AB несовместны. По теореме сложения

$$P(A) = P(A\overline{B}) + P(AB), \quad P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB),$$
$$P(A+B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB).$$

Из первых двух равенств имеем:

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB), \quad P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB).$$

Подставляя эти выражения в правую часть третьего равенства, окончательно получим

$$P(A+B) = [P(A) - P(AB)] + [P(B) - P(AB)] + P(AB) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB).$$

Упражнения

1. В ящике 5 белых, 6 красных и 3 черных шара. Какова вероятность того, что вынутые два шара окажутся разного цвета?

2. Среди 12 лотерейных билетов 4 выигрышных. Наудачу берут 6 билетов. Какова вероятность того, что хотя бы один из них выигрышный?

Ответы: **1.** 9/13. **2.** 32/33.

2.5. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей

Говорить о вероятности $P(A)$ как о мере возможности осуществления случайного события A имеет смысл только при осуществлении определенного комплекса условий — *испытания*. При изменении условий изменится и вероятность. Так, если к комплексу условий, при котором изучалась вероятность $P(A)$, добавить новое условие, состоящее в появлении события B, то получим другое значение вероятности $P(A/B)$ — *условную вероятность* события A при условии, что произошло событие B.

Пример. *Испытание* — бросание симметричной игральной кости;

$$A = \{\text{выпадение } 6\}; \qquad B = \{\text{выпадение четного числа очков}\}.$$

Тогда $P(A/B)$ — вероятность события A в *новом испытании*, заключающемся в бросании игральной кости до тех пор, пока не выпадет четное число очков.

Выведем формулу условной вероятности. Пусть $E_1,\ E_2,\ \ldots,$ E_n — группа элементарных исходов; $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ — их вероятности, и пусть

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_m}, \quad B = E_{j_1} + E_{j_2} + \cdots + E_{j_k}.$$

Обозначим $E_{\mu_1},\ E_{\mu_2}, \ldots,\ E_{\mu_l}$ — элементарные исходы, благоприятствующие как событию A, так и событию B, т. е. общие для обоих сумм слагаемые. Иначе говоря,

$$AB = E_{\mu_1} + E_{\mu_2} + \cdots + E_{\mu_l}.$$

По определению вероятности

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_m}, \quad P(B) = p_{j_1} + p_{j_2} + \cdots + p_{j_k},$$

$$P(AB) = p_{\mu_1} + p_{\mu_2} + \cdots + p_{\mu_l}.$$

В *новом испытании*, включающем осуществление события B, исходы $E_{j_1},\ E_{j_2}, \ldots,\ E_{j_k}$, составлявшие событие B, образуют полную группу. Чтобы обеспечить равенство суммы вероятностей данных элементарных исходов единице, введем новые их вероятности по формуле $P_i = p_{j_i}/P(B)$. Действительно, в этом случае

$$\sum_{i=1}^{k} P_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_{j_i}}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{j_i}}{P(B)} = 1.$$

Очевидно, среди исходов $E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}$ только исходы $E_{\mu_1}, \ldots, E_{\mu_l}$ благоприятствуют событию A. Следовательно,

$$P(A/B) = \sum_{i=1}^{l} \frac{p_{\mu_i}}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{l} p_{\mu_i}}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично, $P(B/A) = P(AB)/P(A)$. Выражая $P(AB)$, приходим к следующей теореме.

Теорема 3 (умножения вероятностей)**.** *Для любых событий A и B*

$$P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A).$$

Следствие 4. *Для любых событий A, B, C*

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Действительно,

$$P(ABC) = P[(AB)C] = P(AB)P(C/AB) = P(A)P(B/A)P(C/AB).$$

Говорят, что событие A *не зависит* от события B, если наступление B не влияет на вероятность наступления A, то есть

$$P(A) = P(A/B).$$

В силу теоремы 3 это равенство эквивалентно формуле

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{3}$$

Симметричность этой формулы относительно A и B означает, что если A не зависит от B, то и B не зависит от A. Формула (3) называется теоремой умножения для *независимых событий.*

Пример. В опыте с игральной костью пусть $A = \{$выпадение числа очков, делящегося на три$\}$, $B = \{$выпадение четного числа очков$\}$. Очевидно, $AB = \{$выпадение 6$\}$. Тогда

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = P(A).$$

Следовательно, события A и B независимы.

Пример. При одновременном бросании монеты и игральной кости примем за элементарные исходы следующие 12 событий:

$$E_1 = \{\text{выпадение «герба» и } 1\}, \ldots, E_6 = \{\text{выпадение «герба» и } 6\},$$

$$E_7 = \{\text{выпадение «решки» и } 1\}, \ldots, E_{12} = \{\text{выпадение «решки» и } 6\}.$$

Положим $A = \{$выпадение «герба»$\}$, $B = \{$выпадение 6-ти очков$\}$. Очевидно,

$$A = E_1 + E_2 + \cdots + E_6, \quad B = E_6 + E_{12}, \quad AB = E_6.$$

Равенство

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/12}{2/12} = \frac{1}{2} = \frac{6}{12} = P(A)$$

означает независимость событий A и B.

Задача 15. По ведомостям о расходе запасных частей было установлено, что при ремонте автомобильных двигателей деталь A была заменена в среднем в 36% случаев, деталь B — в 42% случаев, а обе эти детали одновременно заменялись в среднем в 30% случаев. Связаны ли между собой выход из строя детали A и детали B?

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что деталь A вышла из строя и подлежит замене; B — вышла из строя и подлежит замене деталь B. Условие задачи дает основание для следующей оценки вероятностей событий A, B и AB : $P(A) = 0,36$, $P(B) = 0,42$, $P(AB) = 0,3$. По формуле условной вероятности получаем

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,3}{0,42} \approx 0,71 \neq P(A) = 0,36.$$

Это означает, что замена детали А при условии, что заменяется деталь В, происходит почти вдвое чаще, чем безусловная замена этой детали, что свидетельствует о наличии связи между выходом из строя деталей A и B.

Несколько событий $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_k$, называются *независимыми*, если каждое из них не зависит от произведения любой совокупности других.

Для независимых событий

$$P(A_1 A_2 \ldots A_k) = P(A_1)P(A_2) \cdot \ldots P(A_k), \tag{4}$$

что следует из (3). Из независимости событий следует их попарная независимость. Обратное не верно.

Следствие 5. *Если события $A,\ B,\ C$ независимы, то события A и $B + C$ также независимы.*

Действительно,

$$P[(B + C)/A] = P(B/A) + P(C/A) - P(BC/A) =$$
$$= P(B) + P(C) - P(BC) = P(B + C).$$

Здесь первое и последнее равенства выполняются по формуле (2) сложения вероятностей.

Легко видеть, что если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. Следовательно, если в группе независимых событий $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_k$ несколько событий заменить на их противоположные, то в полученной новой группе события будут также независимы.

Задача 16. Два стрелка однократно стреляют по мишени. Вероятности попадания 1-го стрелка равна p_1, а 2-го — p_2. Найти вероятность того, что только один из стрелков попадает в мишень.

Р е ш е н и е. Положим $A = \{$1-й стрелок попадает$\}$, $B = \{$2-й стрелок попадает$\}$. Рассмотрим несовместные события

$$A\overline{B} = \{\text{1-й стрелок попадает, 2-й — промахивается}\},$$
$$\overline{A}B = \{\text{1-й стрелок промахивается, 2-й — попадает}\}.$$

Сумма $A\overline{B}+\overline{A}B$ означает попадание только одним стрелком. Имеет место следующая цепочка равенств

$$P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) =$$
$$= P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2,$$

где первое равенство выполняется по теореме сложения, второе — по теореме умножения для независимых событий, третье — в силу формулы (1).

Задача 17. Вероятность выхода станка из строя в течение одного рабочего дня равна p. Найти вероятность события $A=${за 5 дней станок ни разу не выйдет из строя}.

Р е ш е н и е. Рассмотрим независимые события $A_i=${в i -й день станок не выходит из строя}, $i=1,\,2,\ldots,\,5$. В силу (1)

$$P(A_i)=1-p.$$

Так как $A=A_1A_2\ldots A_5$, то по формуле (4)

$$P(A)=P(A_1A_2\ldots A_5)=(1-p)\cdot\ldots(1-p)=(1-p)^5.$$

Задача 18. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Р е ш е н и е. Будем считать, что шары вынимали поочередно. Рассмотрим события $A=${1-й вынутый шар белый}, $B=${2-й вынутый шар белый}. Очевидно, $P(A)=6/14$. Если 1-й вынутый шар белый, то вероятность того, что 2-й шар белый по классической формуле вероятности равна $P(B/A)=5/13$. Остается воспользоваться теоремой умножения вероятностей:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=\frac{6}{14}\frac{5}{13}=\frac{51}{91}.$$

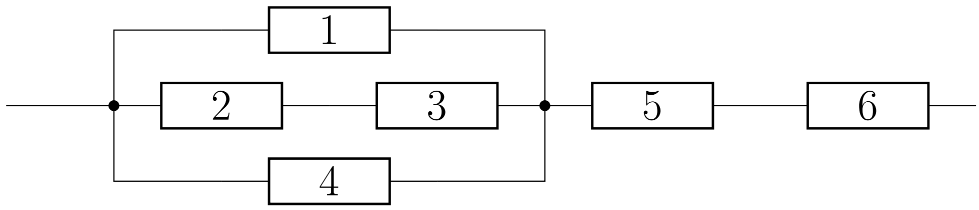
Задача 19. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятности попадания в цель для первого, второго и третьего соответственно равны 0,75, 0,8, и 0,9. Определить вероятность события $B=${в цель попадет хотя бы один стрелок}.

Р е ш е н и е. Пусть $A_1=${1-й стрелок попадает}, $A_2=${2-й стрелок попадает}, $A_3=${3-й стрелок попадает}. Противоположным событию B является событие $\overline{B}=${не попадает ни один стрелок}. Очевидно, $\overline{B}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. В силу (3) и (1)

$$P(\overline{B})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=$$
$$=[1-P(A_1)][1-P(A_2)][1-P(A_3)]=0,25\cdot 0,2\cdot 0,1=0,005.$$

Таким образом, $P(B)=1-P(\overline{B})=1-0,005=0,995.$

Задача 20. На рисунке изображена цепь элементов, соединенных последовательно и параллельно.



Вероятность отказа i -го элемента равна p_i, $i=1,2,\ldots,6$. Известно, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Рассчитать вероятность отказа цепи (не идет ток).

Решение. Положим $A=\{$цепь откажет$\}$,

$$A_i=\{\text{отказ } i \text{ -го элемента}\}, \quad i=1,\ldots,6;$$

Противоположное A событие $\overline{A}=\{$цепь будет работать$\}$ означает, что будут работать элементы 5 и 6, а также 1-*й узел цепи* цепи, состоящий из элементов 1–4, то есть

$$\overline{A}=\overline{B}\,\overline{A_5}\,\overline{A_6}, \quad \text{где} \quad B=\{\text{отказ 1-го узла цепи}\}.$$

Отказ 1-го узла цепи означает отказ обоих элементов 1 и 4, а также отказ хотя бы одного из элементов 2 или 3, то есть

$$B=A_1A_4(A_2+A_3).$$

Ввиду следствия 5 и формулы (4)

$$P(B)=P(A_1)P(A_4)P(A_2+A_3).$$

По формуле сложения вероятностей (2)

$$P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)-P(A_2A_3)=p_2+p_3-p_2p_3.$$

Следовательно, $P(B)=p_1p_4(p_2+p_3-p_2p_3)$, и по формуле (1)

$$P(\overline{B})=1-p_1p_4(p_2+p_3-p_2p_3).$$

По формуле (4)

$$P(\overline{A}) = P(\overline{B})P(\overline{A_5})P(\overline{A_6}) =$$
$$= [1 - p_1p_4(p_2 + p_3 - p_2p_3)](1 - p_5)(1 - p_6)$$

Таким образом,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - [1 - p_1p_4(p_2 + p_3 - p_2p_3)](1 - p_5)(1 - p_6) =$$
$$= p_5 + p_6 - p_5p_6 + p_1p_4(p_2 + p_3 - p_2p_3)(1 - p_5)(1 - p_6).$$

Упражнения

1. Три станка работают независимо. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, для второго и третьего станков эти вероятности соответственно равны 0,2 и 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены хотя бы один станок выйдет из строя.

2. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

3. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Определить вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой — черный.

4. В урне 9 белых шаров и один черный. Поочередно вынули три шара. Какова вероятность, что все шары белые?

5. В первом ящике 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во втором соответственно 10, 8 и 6. Из каждого ящика наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

6. Вероятность того, что в течение дня произойдет неполадка станка, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течении четырех дней не произойдет ни одной неполадки?

7. Стрелок трижды стреляет по одной мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что произойдет только одно попадание.

8. Для того, чтобы разрушить мост, нужно попадание не менее двух бомб. Независимо сбросили три бомбы с вероятностями попадания 0,1, 0,3 и 0,4. Какова вероятность, что мост разрушен?

9. Из трех орущий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из 1-го орудия равна 0,7, из второго — 0,6, а из третьего — 0,3. Найти вероятность того, что: а) три снаряда попадут в цель; б) только два снаряда попадут в цель; в) хотя бы один снаряд попадет в цель; г) только один снаряд попадет в цель.

Ответы: **1.** 0,496. **2.** 0,8. **3.** 11/18. **4.** 7/10. **5.** 186/578. **6.** $\approx 0,88$. **7.** 0,288. **8.** 0,166. **9.** 0,336; 0,452; 0,976; 0,188.

2.6. Формула полной вероятности и формула Байеса

Теорема 4 (формула полной вероятности)**.** *Для любой полной группы возможных событий* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *(гипотез) и для любого события* A *имеет место равенство*

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$A = AE = A(H_1 + H_2 + \cdots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \cdots + AH_n.$$

Так как события $H_1, \ldots, H_n$ несовместны, то несовместны и события $AH_1, \ldots, AH_n$. В силу теорем сложения и умножения

$$P(A) = P(AH_1 + \cdots + AH_n) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Теорема доказана.

Задача 21. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Стрелок наугад берёт винтовку. Найти вероятность события $A = \{$мишень будет поражена$\}$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующие гипотезы: $H_1 =\{$выбрана винтовка с оптическим прицелом$\}$, $H_2 =\{$выбрана винтовка без оптического прицела$\}$. Очевидно, $P(H_1) = 3/5$, $P(H_2) = 2/5$, $P(A/H_1) = 0,95$, $P(A/H_2) = 0,7$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2) = \frac{3}{5}\cdot 0,95+\frac{2}{5}\cdot 0,7 = 0,85.$$

Задача 22. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй — 5 белых и 10 черных. Из 1-ой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар. Используя формулу полной вероятности определить вероятность того, что вынутый шар — белый.

Р е ш е н и е. П е р в ы й с п о с о б. После того, как из 1-ой урны переложили во вторую один шар, во 2-ой урне оказалось две совокупности шаров: 1) 5 белых и 10 черных шаров, первоначально находившихся в этой урне; 2) один шар, переложенный из 1-ой урны. Рассмотрим следующие гипотезы: $H_1 =\{$вынутый из 2-ой урны шар первоначально находился во 2-ой урне$\}$, $H_2 =\{$вынутый из 2-ой урны шар первоначально находился во 1-ой урне$\}$. Очевидно, $P(H_1) = 15/16$ и $P(H_2) = 1/16$. Вероятность вынуть белый шар из первой совокупности равна $P(A/H_1) = 5/15$, а из второй — $P(A/H_2) = 3/10$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{15}{16}\frac{5}{15} + \frac{1}{16}\frac{3}{10} = \frac{53}{160}.$$

В т о р о й с п о с о б. Рассмотрим следующие гипотезы: $H_1 =\{$из 1-ой урны был вынут белый шар$\}$, $H_2 =\{$из 1-ой урны был вынут черный шар$\}$. Очевидно, $P(H_1) = 3/10$ и $P(H_2) = 7/10$. Вероятность появления белого шара из 2-ой урны при условии, что из 1-ой урны туда был переложен белый шар равна $P(A/H_1) = 6/16$. Вероятность появления белого шара из 2-ой урны при условии, что из 1-ой урны туда был переложен черный шар равна $P(A/H_2) = 5/16$. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) = \frac{3}{10}\frac{6}{16} + \frac{7}{10}\frac{5}{16} = \frac{53}{160}.$$

Теорема 5 (формула Байеса)**.** *В условиях теоремы* 4 *для любой гипотезы* H_l

$$P(H_l/A) = \frac{P(H_l)P(A/H_l)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}.$$

Действительно, по теореме умножения

$$P(A)P(H_l/A) = P(H_l)P(A/H_l), \quad \text{т. е.} \quad P(H_l/A) = \frac{P(H_l)P(A/H_l)}{P(A)}.$$

Остается заменить $P(A)$ по формуле полной вероятности.

Задача 23. Завод производит изделия на трех поточных линиях. На первой линии производится 20% изделий от всего объема их производства; на второй — 30%; на третьей – 50%. Первая линия производит годных изделий в среднем 95%; вторая – 98%; третья – 97%. Наугад берется изделие. Требуется определить: а) вероятность того, что это изделие бракованное; б) вероятность того, что это изделие сделано на 2-ой линии при условии что оно оказалось бракованным.

Решение. Рассмотрим гипотезы H_1, H_2, H_3, состоящие том, что наугад взятое изделие произведено на первой, второй и третьей линиях соответственно. По условиям задачи эти события образуют полную группу событий и

$$P(H_1) = 0,2, \quad P(H_2) = 0,3, \quad P(H_3) = 0,5.$$

Обозначим через A событие, состоящее в том, что наугад взятое изделие, оказалось бракованным. Согласно условиям задачи

$$P(A/H_1) = 0,05, \quad P(A/H_2) = 0,02, \quad P(A/H_3) = 0,03.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \\ = 0,2 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,5 \cdot 0,03 = 0,031,$$

т. е. вероятность того, что наугад взятое изделие окажется бракованным, равна 3,1%.

Пусть наугад взятое изделие оказалось бракованным. По формуле Байеса вероятность того, что оно сделано на 2-ой линии равна

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,3 \cdot 0,02}{0,031} = \frac{6}{31} = 0,194.$$

Задача 24. Три орудия одновременно и независимо производят залп по цели. Вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,5$. Цель поражена двумя снарядами. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание.

Решение. Введем следующие события: $A =${два орудия попали в цель}; $H_1 =${1-е орудие попало в цель}; $H_2 =${1-е орудие не попало в цель}. По условию $P(H_1) = 0,4$. По формуле вероятности противоположного события $P(H_2) = 1 - 0,4 = 0,6$. Найдем $P(A/H_1)$, т. е. условную вероятность того, что в цель попало ровно два снаряда при условии, что первое орудие попало в цель. $P(A/H_1)$ равна вероятности попадания только одного из орудий 2 или 3. Данное событие означает либо попадание вторым орудием и промах третьим, либо промах вторым и попадание третьим орудием. Обозначим q_2 и q_3 — вероятности промаха 2-м и 3-м орудиями соответственно. По теоремам сложения и умножения (см. решение задачи 16)

$$P(A/H_1) = p_2q_3 + q_2p_3 = 0,3 \cdot 0,5 + 0,7 \cdot 0,5 = 0,5.$$

Найдем $P(A/H_2)$, т. е. условную вероятность того, что в цель попало ровно два снаряда при условии, что первое орудие не попало. $P(A/H_2)$ равна вероятности совместного попадания 2-м и 3-м орудиями. По теореме умножения для независимых событий

$$P(A/H_2) = p_2p_3 = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15.$$

По формуле Байеса искомая вероятность того, что первое орудие дало попадание при условии, что попало ровно два снаряда равна

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} =$$
$$= \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,15} = \frac{20}{29}.$$

Задача 25. Задача 2. Два охотника одновременно и независимо стреляют в кабана. Известно, что первый попадает с вероятностью $p_1 = 0,8$, а второй — $p_2 = 0,4$. Кабан убит, и в нем обнаружена одна пуля. Как делить кабана?

Решение. Делить кабана следует пропорционально условным вероятностям попадания каждого при условии, что в кабане имеется одна пуля. Дело в том, что при неограниченном (хотя бы и мысленном) повторении описанной ситуации частота, с которой будет добиваться успеха каждый из стрелков, будет сближаться с соответствующей условной вероятностью. Пусть $A =$ {в кабане имеется одна пуля}. Рассмотрим следующую полную группу событий: $H_1 =$ {не попал ни 1-й стрелок, ни 2-ой}, $H_2 =$ {попал 1-й, не попал 2-ой}, $H_3 =$ {не попал 1-й, попал 2-ой}, $H_4 =$ {попал 1-й, попал 2-ой}. Очевидно,

$$P(A/H_1) = 0, \quad P(A/H_2) = 1, \quad P(A/H_3) = 1, \quad P(A/H_4) = 0.$$

По теореме умножения для независимых событий

$$P(H_2) = p_1(1 - p_2) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48,$$
$$P(H_3) = (1 - p_1)p_2 = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08.$$

Вероятности $P(H_1)$ и $P(H_4)$ вычислять нет смысла, так как при любых их значениях слагаемые $P(H_1)P(A/H_1)$ и $P(H_4)P(A/H_4)$, фигурирующие в формуле Байеса, равны нулю. По формуле Байеса вероятность того, что обнаруженная пуля принадлежит первому стрелку равна

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(A/H_i)} = \frac{0,48 \cdot 1}{0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7}.$$

Следовательно, вероятность того, что обнаруженная пуля принадлежит второму стрелку равна $1 - 6/7 = 1/7$. Таким образом, первому следует отдать 6 долей из 7, а второму — одну.

Упражнения

1. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

2. В первой урне 1 белый и 2 черных шара, во второй — 100 белых и 100 черных шаров. Из второй урны наудачу извлечен шар и переложен в первую урну, после чего из первой урны извлечен один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар ранее находился во второй урне, если известно, что он белый?

3. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом, равна 0,95; для винтовки без прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом без него?

4. Завод выпускает видеомагнитофоны с гарантийным сроком эксплуатации один год. Известно, что 20% продукции будет эксплуатироваться в Заполярье, 75% - в местности с умеренным климатом, 5% - в пустыне. Известны также вероятности безотказной работы видеомагнитофонов в каждом регионе в течение гарантийного срока: 0,9 - в Заполярье; 0.99 - в местности с умеренным климатом; 0,8 - в пустыне. Необходимо определить какой процент изделий следует выпустить дополнительно к плану для замены отказавших в течение гарантийного срока. При этом считается, что при замене изделий последние не отказывают.

5. Пусть на завод-изготовитель поступила рекламация на отказавший видеомагнитофон, условия эксплуатации которого были оговорены в предыдущей задаче. Необходимо определить, в каком регионе вероятнее всего он эксплуатировался.

6. В одном из телевизионных шоу ведущий предлагает игроку выбрать один из стоящих перед ним 3-х ларцов, предупреждая, что только в одном из ларцов заключен ценный приз (скажем, ключи от автомобиля). После того как игрок произвел выбор, ведущий открывает один из оставшихся ларцов и, демонстрируя, что в нем ничего нет, предлагает игроку еще раз подумать и, если захочется, изменить свое решение — выбрать оставшийся ларец, вместо того, который был выбран первоначально. Имеет ли смысл игроку менять свое решение а) в случае если выбор ведущим одного из ларцов для демонстрации его содержимого был случаен; б) если ведущий, зная где лежит приз, всегда открывает для всеобщего обозрения ларец, приза не содержащий.

Ответы: **1.** 0,5. **2.** 1/3. **3.** без оптического прицела: $\frac{24}{43} > \frac{19}{43}$. **4.** 3,75%. **5.** в Заполярье с вероятностью 0,5333. **6.** а) нет нужды менять свой выбор; б) выгоднее изменить свой выбор.

Список литературы

1. Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И.Ядренко. – М.: Наука, 1977. – 80 с.
2. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А.Н. Бородин. – 3-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2002. – 256 с.
3. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика / В.А.Колемаев, О.В.Староверов, В.Б.Турундаевский. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
4. Самойленко Н.И. Теория вероятностей / Н.И.Самойленко, А.И. Кузнецов, А.Б.Костенко. – Х.: НТМТ, - 2009. – 200 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е.Гмурман. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.
6. Краснов М.Л. Вся высшая математика, Т.5 / М.Л.Краснов, А.И. Киселев, Г.И.Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин, С.К. Соболев. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 296 с.

Оглавление