Министерство транспорта Российской Федерации

Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского

Кафедра высшей математики

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Методические указания
для самостоятельных занятий курсантов и студентов
второго курса всех специальностей

Составила Г. Ф. Карпова

Владивосток

2004

Позиция № 133
в плане издания
учебной литературы
МГУ на 2004 г.

Рецензент В. Г. Непейвода

Составила Галина Фёдоровна Карпова

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Методические указания

Лицензия ИД № 05693 от 27.08.01

Печатается в авторской редакции

2 уч.-изд. л. Формат 60×84/16
Тираж 125 экз. Заказ № 111

Отпечатано в ИПК МГУ им. адм. Г. И. Невельского
Владивосток, 59, ул. Верхнепортовая, 50а

Методическое пособие содержит указания по выполнению типового расчёта по теме: «Случайная величина», разбор типовых примеров, варианты заданий, таблицы, необходимые при решении задач.

Методическое пособие разработано в помощь курсантам и студентам вторых курсов для правильного выполнения типового расчёта.

Основные теоретические положения и их применение к решению типовых задач

1. Распределения и числовые характеристики дискретной случайной величины

Случайной величиной в опыте G называется переменная величина, которая в результате этого опыта принимает одно из возможных своих значений, заранее до опыта не известно, какое именно.

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Случайная величина называется дискретной, если частные значения можно пронумеровать.

Любое правило, устанавливающие связь между возможными значениями СВ X (случайная величина X) и соответствующими вероятностями, называется законом распределения СВ X.

Дискретная случайная величина может быть задана:

1) рядом распределения;
2) функцией распределения (интегральным законом распределения).

Рядом распределения называется совокупность всех частных значений x_i и соответствующих им вероятностей СВ X, то есть двухстрочная таблица следующего вида:

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_i	....
p_i	p_1	p_2	p_3	....	p_i	....

где $x_1 < x_2 < x_i < \ldots,\ p_i = p(x = x_i);\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Ряд распределения можно получить, если знать следующие законы распределения дискретных СВ.

1. Биномиальное распределение

Биномиальным называется распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

$$P(x=k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}, \quad 0<p<1; \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

Закон в виде таблицы:

x	*n*	*n-1*	....	*k*	....	*0*
p	p^n	$np^{n-1}q$	....	$C_n^k P^k q^{n-k}$	....	q^k

2. Распределение Пуассона

Используется при большом числе испытаний по схеме Бернулли и малой вероятности: $p<0{,}1$

$$P(x=k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\ell^{-\lambda}; \quad \lambda = np; \quad k = 0,1,2,\ldots,n.$$

3. Геометрическое распределение

Используется тогда, когда проводимые независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события ***A*** равна ***p***, заканчивается, как только появится событие ***A***

$$P(x=k) = q^{k-1}p; \qquad \begin{gathered} q = 1-p, \\ 0<p<1, \\ k = 1,2,\ldots \end{gathered}$$

4. Гипергеометрическое распределение

$$P(x=k) = \frac{C_n^k C_{n-M}^{n-k}}{C_N^n}; \qquad \begin{gathered} k = 0,1,2,\ldots, \\ \min(M,n). \end{gathered}$$

5. Кроме того, для получения ряда распределения можно пользоваться:

а) классическим определением вероятности: $P = \dfrac{m}{n}$;

б) теоремами сложения и умножения вероятностей:

$$1)\ P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$2)\ P(A\cdot B) = P(B)\cdot P(A/B).$$

в) формулами Муавра-Лапласа:

$$1)\ P(x=m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}; \quad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x)$ - табличная плотность нормального распределения и

$$\varphi(-x) = \varphi(x);$$

$$2)\ \text{если } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \ell^{\frac{t^2}{2}}\,dt \ - \ \text{функция Лапласа,}$$

$$\text{то } (P(m_1 \le X \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\text{где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(\infty) = 1; \quad \Phi(-\infty) = 0; \quad \Phi(-x) = -\Phi(x); \quad \Phi(0) = 0{,}5.$$

Функцией распределения СВ ***X*** называется функция ***F(x)***, равная вероятности ***p (X<x)*** того, что СВ ***X*** примёт значение меньше ***x***.

$$F(x) = p(X<x).$$

Функция ***F(x)*** вычисляется по формуле:

$$F(x) = \sum_{x_i<x} p_i.$$

Где суммирование ведётся по всем значениям ***i***, для которых $x_i<x$.

Числовыми характеристиками дискретных случайных величин являются:

1) Математическое ожидание СВ ***X*** – сумма произведений конкретных значений СВ ***X*** на соответствующие им вероятности.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i.$$

2) Дисперсией СВ **X** называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ **X** от его математического ожидания.

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2.$$

Вычислить дисперсию можно по формуле:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i$$

или

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

3) Средне квадратичное отклонение σ СВ **X** связано с дисперсией соотношением: $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

4) Вероятность попадания СВ **X** на заданный отрезок (α,β) вычисляется по формуле:

$$p(\alpha\le x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Вероятность попадания СВ **X** на заданный интервал равна приращению функции распределения на этом интервале.

2. Непрерывные случайные величины

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые числовые значения в заданном интервале:

Непрерывная СВ **X** задаётся:

1) Функцией распределения (интегральным законом распределения)

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx.$$

2) Плотностью распределения (дифференциальным законом распределения)

$$f(x)=F'(x).$$

Свойства функции распределения:

1) $F(x_1)<F(x_2)$, *если* $x_1<x_2$,

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$,

3) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$,

4) $p(a<x<b)=F(b)-F(a)$.

Свойство плотности распределения:

1) $f(x)\ge 0$,

2) $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$,

3) $p(a\le x\le b)=\int_{a}^{b}f(x)dx$.

Числовые характеристики НСВ *X* вычисляются по следующим формулам:

1) $M(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$,

2) $D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(x)\right)^2 f(x)dx$,

$D(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\left[M(x)\right]^2$,

3) $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}$.

Примеры решения задач

Пример 1.

На не отлаженной технологической линии брак составляет 20% изготовленных изделий. Требуется:

1) Построить ряд и функцию распределения числа бракованных изделий среди пяти изделий, выбранных на удачу; вычислить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой СВ X.
2) Для случайной выборки из 100 изделий найти вероятность того, что в выборках окажутся:

   а) ровно 10 бракованных изделий;

   б) от 0 до 10 бракованных изделий.

Решение:

1) Условие примера сводится к схеме повторения независимых испытаний в одинаковых условиях и поэтому распределение вероятностей возможных значений СВ X находим по формуле Бернулли:

$$P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

В примере $n=5,\quad m=0,1,2,3,4,5,$ $p=0,2,\quad q=1-p=0,8.$

Находим

$$P_5(0)=C_5^0p^0q^5=0,8^5=0,32768,$$
$$P_5(1)=C_5^1p^1q^4=5\cdot 0,2\cdot 0,8^4=0,4096,$$
$$P_5(2)=C_5^2p^2q^3=\frac{5!}{2!3!}\cdot 0,2^2\cdot 0,8^3=0,2048,$$
$$P_5(3)=C_5^3p^3q^2=\frac{5!}{3!2!}\cdot 0,2^3\cdot 0,8^2=0,0512,$$
$$P_5(4)=C_5^4p^4q=\frac{5!}{4!1!}\cdot 0,2^4\cdot 0,8=0,0064,$$
$$P_5(5)=C_5^5p^5q^0=0,2^5=0,00032.$$

Имеем ряд распределения

X	1	2	3	4	5
P	0,4096	0,2048	0,0512	0,00064	0,00032

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{5}P(X=m)=0.32768+0.4096+0.2048+0.0512+0.0064+0.00032=1$$

Находим функцию распределения

при $x\le 0$, $\quad F(x)=\sum_{x_i<x}P(X=x)=0,$

при $0<x\le 1$, $\quad F(x)=P(X=0)=0,32768,$

при $1<x\le 2$, $\quad F(x)=\sum_{x_i<x}P(X=x_i)=P(X=0)+P(X=1)=$ $=0,32768+0,4096=0,73728,$

при $2<x\le 3$, $\quad F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$ $=0,32768+0,4096+0,2048=0,94208,$

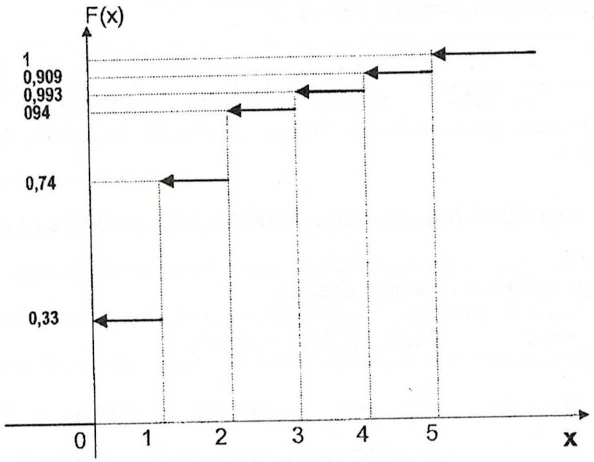
при $3<x\le 4$, $\quad F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$ $=0,32768+0,4096+0,2048+0,0512=0,99328,$

при $4<x\le 5$, $\quad F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+$ $+P(X=3)+P(X=4)=0,32768+0,4096+$ $+0,2048+0,0512+0,0064=0,99968,$

при $x>5$, $\quad F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+$ $+P(X=4)+P(X=5)=0,32768+0,4096+0,2048+$ $+0,0512+0,0064+0,00032=1.$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0.32768, & 0<x\le 1,\\ 0.73728, & 1<x\le 2,\\ 0.94208, & 2<x\le 3,\\ 0.99328, & 3<x\le 4,\\ 0.99968, & 4<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Построим график функции распределения



Как видно, функция распределения ДСВ X разрывная и возрастает скачками.

Найдем математическое ожидание, дисперсию.

$$M(X) = np,$$
$$M(X) = 5 \cdot 0{,}2 = 1,$$
$$D(X) = npq,$$
$$D(X) = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}8,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$
$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}8} = 0{,}9.$$

2) При большом числе испытаний для вычисления вероятностей:

а) $P(X = m)$ следует использовать локальную формулу Муавара-Лапласа

$$P(X = m) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$x = \frac{10 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{\sqrt{16}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5,$$

$$\varphi(-x) = \varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) = 0{,}0175.$$

$$P_{100}(10) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{0{,}0175}{4} = 0{,}0044.$$

б) Используем интегральную теорему Лапласа:

$$P(0 < x \le 10) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

$$x' = \frac{0 - 20}{4} = -5, \quad x'' = \frac{10 - 20}{4} - 2{,}5,$$

$$\Phi(-5) = -\Phi(5) = -0{,}499997, \quad \Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938.$$

$$P(0 \le X \le 10) = -0{,}4938 + 0{,}99997 = 0{,}0617.$$

Пример 2.

В электрическую цепь включено параллельно два элемента, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа за время работы Т первого элемента равно 0,2 и второго элемента 0.3. Требуется записать закон распределения СВ X - числа отказавших элементов за период времени Т.

Решение:

A_1 – событие, состоящее в том, что первый элемент работает исправно;

A_2 – событие, состоящее в том, что второй элемент работает исправно;

$\overline{A}_1$ – событие, состоящее в том, что первый элемент отказал;

$\overline{A}_2$ – событие, состоящее в том, что второй элемент отказал.

Возможны следующие значения СВ X – $X = \{0, 1, 2\}$, т. е. ни один элемент не отказал, отказал один элемент, отказали два элемента.

$$P(X=0) = P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}807 = 0{,}56,$$
$$P(X=1) = P(\overline{A}_1 A_2) + P(A_1 \overline{A}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38,$$
$$P(X=2) = P(\overline{A}_1 \overline{A}_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

Закон распределения в виде ряда распределения

X_i	0	1	2
P_i	0.56	0.06	0.06

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} P(X = X_i) = 0{,}56 + 0{,}38 + 0{,}06 = 1$.

Пример 3.

Экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы, но не более четырех. Вероятность того, что студент ответит на каждый из вопросов экзаменатора, одна и та же равна 0,8. Преподаватель прекращает экзамен, как только студент не знает ответа на вопрос. Найти закон распределения числа заданных вопросов.

Решение.

Возможные значения СВ X – $X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Вероятности найдем, воспользовавшись формулой – $P(X = K) = q^{k-1}p$.

$P(X = 1) = 0.2$ – на первый вопрос студент не знает ответа.

$P(X = 2) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16$ – студент знает ответ на первый вопрос, но не знает на второй.

$P(X = 3) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,128$ – студент знает ответ на первый, второй вопросы, но не знает ответа на третий.

$P(X = 4) = 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,1024$.

Контроль: рассмотрим событие – студент знает все четыре вопроса.

$$P = 0,8^4 = 0,4096; \quad \sum_{i=1}^{4} P_i = 0,2 + 0,16 + 0,128 + 0,1024 + 0,4096 = 1$$

Пример 4

Партия, насчитывающая.100 изделий, содержит 10 дефектных Из всей партии случайным образом отбираются с целью проверки качества 5 изделий. Построить ряд распределения, найти математическое ожидание, дисперсию числа дефектных изделий, содержащихся в выборке.

Решение:

Возможные значения СВ X – $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5,\}$.

Вероятность того, что в выборке окажется ровно $k = 1, 2, 3, 4, 5$ дефектных изделий, равна $P(X = K) = \dfrac{C_M^K \cdot C_M^{n-K}}{C_N^n}$.

В результате расчетов получим:

$$P(X = 0) = \frac{C_{10}^0 \cdot C_{90}^5}{C_{100}^5} = 0,5837523,$$

$$P(X = 1) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{90}^4}{C_{100}^5} = 0,3393909,$$

$$P(X = 2) = \frac{C_{10}^2 \cdot C_{90}^3}{C_{100}^5} = 0,0702188,$$

$$P(X = 3) = \frac{C_{10}^3 \cdot C_{100}^2}{C_{100}^5} = 0,0063835,$$

$$P(X = 4) = \frac{C_{10}^4 \cdot C_{90}^1}{C_{100}^5} = 0,0000251,$$

$$P(X = 5) = \frac{C_{10}^5 \cdot C_{90}^0}{C_{100}^5} = 0,0000033.$$

Составим ряд распределения

X_i	0	1	2	3	4	5
P_i	0,5837523	0,3393909	0,0702188	0,006385	0,0000251	0,0000033

Контроль: $\sum_{i=1}^{5} P_i \approx 0,583 + 0,340 + 0,070 + 0,007 \approx 1$.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} X_i P_i \approx 0,583 + 1 \cdot 0,340 + 0,070 \cdot 2 + 0,007 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \approx 0,5,$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{6} X_i^2 P - [M(X_i)]^2 \approx 1 \cdot 0,34 + 4 \cdot 0,07 + 9 \cdot 0,007 + 0,25 =$$

$$= 0,34 + 0,28 + 0,063 - 0,25 \approx 0,433.$$

Пример 5.

Вероятность обрыва нити на каждом из веретен ткацкого станка в течение времени ***T*** равна ***P***. Требуется построить ряд распределения числа обрывов в течение одного часа нити у веретен, если известно что $P = 0,18$

Решение:

Используем формулу Пуассона, по которой вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t следующая:

$$P_t(K) = \frac{(\lambda t)^K \cdot e^{-\lambda t}}{K!},$$

где $\lambda = np$ – среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Решение:

$$P_t(K) = \frac{(\lambda t)^K \cdot e^{-\lambda t}}{K!},$$

$$P = 0{,}18,\ t = 1,\quad \lambda = 5 \cdot 0{,}18 = 0{,}9.$$

$$P_5(1) = (0{,}9 \cdot 1)^1 \cdot \frac{e^{-0{,}9 \cdot 1}}{1!} \approx 0{,}3659,$$

$$P_5(2) = (0{,}9 \cdot 1)^2 \cdot \frac{e^{-0{,}9 \cdot 1}}{2!} \approx 0{,}16466,$$

$$P_5(3) = (0{,}9 \cdot 1)^3 \cdot \frac{e^{-0{,}9 \cdot 1}}{3!} \approx 0{,}0443979,$$

$$P_5(4) = (0{,}9 \cdot 1)^4 \cdot \frac{e^{-0{,}9 \cdot 1}}{4!} \approx 0{,}00111,$$

$$P_5(5) = (0{,}9 \cdot 1)^5 \cdot \frac{e^{-0{,}9 \cdot 1}}{5!} \approx 0{,}0002,$$

$$P_5(0) = (0{,}9 \cdot 1)^0 \cdot \frac{e^{-0{,}9 \cdot 1}}{0!} \approx 0{,}240655.$$

Ряд _ расходится

0	1	2	3	4	5
0,24065	0,3659	0,1646	0,044939	0,00111	0,0002

Контроль: $\sum P_i = 1$

Пример 6.

Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x) = \frac{B}{2 \cdot (1 + x^2)},\ \text{при}\ (-\infty < x < \infty)$$

1. Определить значение коэффициента B и построить график $f(x)$

2. Написать функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3. Найти вероятность попадания СВ X в отрезок (3; 1).

Решение:

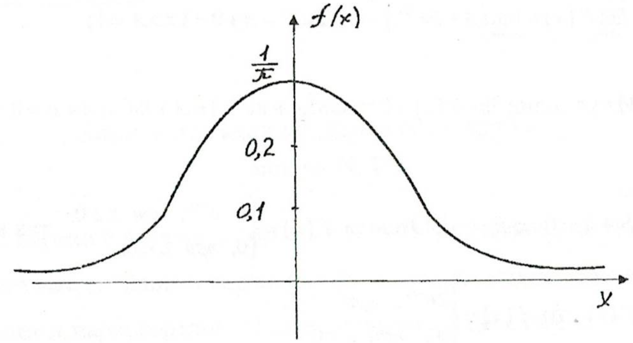
1. Найдем значение коэффициента B из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\frac{1}{2} B \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} B \cdot arctgx\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2} B \cdot \left(arctg(\infty) - arctg(-\infty)\right) = \frac{1}{2} B \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{B\pi}{2},$$

т.е. $\frac{B\pi}{2} = 1,\ B\pi = 2,\ B = \frac{2}{\pi}$, а $f(x) = \frac{1}{\pi \cdot (1+x^2)}$.

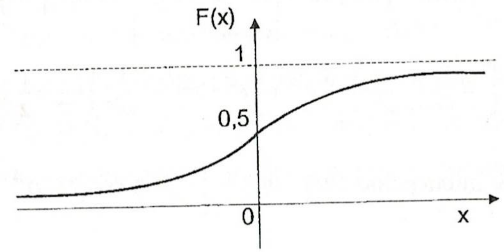
Строим график функции.



2. Найдем $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} arctgx\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + arctgx\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx$$

Строим график функции



3. $P\left(\sqrt{3} \le x \le 1\right) = \int\limits_{\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{\pi\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(arctg1 - arctg\sqrt{3}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{12}$

Пример 7

Непрерывная СВ ***X*** задана функцией распределения

$$F\left(x\right) = \begin{cases} A + BC^{-2x}, & при \;\; x \ge 0 \\ 0\,, & при \;\; x < 0. \end{cases}$$

Требуется найти постоянные параметры ***A*** и ***B***, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение СВ ***X***.

Решение

Для нахождения параметров ***A*** и ***B*** пользуемся свойством функции распределения – $\lim\limits_{x \to \infty} F\left(x\right) = 1$.

а) $\lim\limits_{x \to \infty} F\left(x\right) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(A + Be^{-2x}\right) = A + Be^{-\infty} = A + 0 = 1 \Rightarrow A = 1$;

б) Из условия $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} F\left(x\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}}\left(A + Be^{-2x}\right) = A + Be^{0} = A + B = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B + 1 = 0 \Rightarrow B = -1$ Отсюда $F\left(x\right) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & при \;\; x \ge 0, \\ 0, & при \;\; x < 0. \end{cases}$, так как

$f\left(x\right) = F'\left(x\right)$, то $f\left(x\right) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & при \;\; x \ge 0, \\ 0\,, & при \;\; x < 0. \end{cases}$

Найдем $\quad M\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, f\left(x\right) dx$.

$$M\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{0} x0dx + \int\limits_{0}^{\infty} 2xe^{-2x}dx = \begin{Bmatrix} x = u,\, dx = du, \\ 2e^{-2x}dx = dv, \\ v = -e^{-2x} \end{Bmatrix} = -xe^{-2x}\Big|_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} e^{-2x}dx = -\infty \cdot e^{-\infty} + 0 \cdot e^{0} -$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x \to \infty}\left(-\frac{x}{e^{2x}}\right) - \frac{1}{2}e^{-\infty} + \frac{1}{2}e^{0} = \lim_{x \to \infty}\left(-\frac{1}{2e^{2x}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Найдём дисперсию *D(x)*. $D(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - \left[M\left(x\right)\right]^2$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f\left(x\right) dx = \int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \begin{Bmatrix} 1)\; x^2 = u,\, 2xdx = du, & 2)\; x = u,\, dx = du, \\ e^{-2x}dx = dv, & 2e^{-2x}dx = dv, \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x}; & v = -e^{-2x}. \end{Bmatrix} =$$

$$= \left(-x^2e^{-2x} - xe^{-2x}\right)\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{x \to \infty}\left(-x^2e^{-2x} - xe^{-2x}\right) - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\lim_{x \to \infty} e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{0} = 0 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad D\left(x\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \quad \sigma\left(x\right) = \sqrt{D\left(x\right)} = \frac{1}{2}.$$

Приложение 1. Таблица значений функций $\varphi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}$.

Приложение 2. Таблица значений функций $\Phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{\frac{z^2}{2}} dz$.

Варианты задач типового расчета (ТР)

Задача № 1

1. 1. В партии 6 деталей 1 сорта и 4 детали второго сорта. Наудачу одна за другой, без возвращения в партию, отбираются детали до тех пор, пока деталь не окажется первосортной. Найти закон распределения, математическое ожидание, дисперсию числа отобранных при этом деталей второго сорта. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что деталей второго сорта будет отобрано не менее двух.

1. 2. На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из которых разрешает либо запрещает движение с вероятностью 0, 8. Составить закон распределения числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Найти ***M (x)*** ***,D (x).*** Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что автомобиль пройдет не менее трех светофоров до первой остановки.

1. 3. В партии из десяти изделий имеется одно бракованное, чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынутое изделие проверяют. Найти закон распределения, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа проверенных изделий; построить функцию распределения; определить вероятность того, что будет проверено не меньше шести изделий.

1. 4. Вероятность изготовления детали с заданными точностными характеристиками из стандартной заготовки равна ***P***. Требуется:

1) Построить ряд и функцию распределения числа бракованных изделий среди четырех, изготовленных рабочим, для которого ***P*= 0,7**, вычислить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой случайной величины.

2) Оценить вероятность того, что среди 100 изготовленных деталей на станке- автомате, для которого ***P***=0,97, окажется не более двух бракованных.

1. 5. Из урны, содержащей три белых и пять черных шаров, извлекают наугад три шара. Построить закон распределения числа черных шаров в выборке. Найти функцию распределения случайной величины ***X***. Найти числовые характеристики ***M(x), D(x), σ(x)***. Определить вероятность того, что число черных шаров не превысит двух.

1. 6. В поступившей на сборку партии находится 7 деталей первого сорта и 4 детали второго сорта. Наудачу одно за другим без возврата в партию отбираются детали до тех пор, пока не появится деталь первого сорта. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отобранных при этом деталей второго сорта. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что число отобранных деталей второго сорта не менее двух.

1. 7. Вероятность попадания в цель из орудия при первом выстреле равна 0,1; при втором – 0,4; при третьем – 0,7. Предпологается произвести три выстрела. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в цель. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что число попаданий не менее трех.

1. 8. За смену в среднем ***P*** процентов автоматической линии, состоящих из *n* однотипных станков, требуют наладки:

1) построить ряд и функцию распределения числа станков, требующих наладки в течение

смены, если ***P*** = 40% и ***n*** = 4. Вычислить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой СВ.

2) Оценить вероятность того, что наладок будет не менее 4 и не более 6, если ***n*=*50*; *P*** = 4%.

1. 9. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея запас из четырех патронов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Построить закон распределения боезапаса, оставшегося неизрасходованным. Найти $M(x), D(x), \sigma(x)$, построить $F(x)$. Определить вероятность того, что число выстрелов до первого попадания будет не более трех.

1. 10. Имеется 4 заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления стандартной детали из каждой заготовки равна 0. 2. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа заготовок, оставшихся при изготовлении одной стандартной детали. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что число отказавших элементов будет не более двух.

1.11. Испытываемая аппаратура содержит 4 элемента. Отказы элементов за некоторое время ***T*** независимы, а их вероятности равны соответственно 0,05; 0,1; 0,15; 0,2. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа отказавших за время ***T*** элементов. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что число отказавших элементов будет не более двух.

1. 12. В конверте 18 карточек, среди которых 7 разыскиваемых. Наудачу отбирают 3 карточки. Найти закон распределения, математическое ожидание

и дисперсию числа разыскиваемых карточек среди отобранных. Ответ дать с точностью до 0,001. Построить функцию распределения, определить вероятность того, что среди отобранных хотя бы одна разыскиваемая карточка.

1. 13. Устройство состоит из трех элементов. Отказы элементов за некоторое время T независимы, а их вероятности равны соответственно 0,1; 0,2; 0,25.Найти закон распределения, математическое число отказавших за время T элементов. Найти $M(x), D(x), \sigma(x)$, построить функцию распределения. Определить вероятность того, что число отказавших элементов будет не менее двух.

1. 14. В среднем 91 знак из 100 передаются по каналу связи без искажений. Требуется:

1) Построить ряд и функцию распределения числа искаженных (неправильных) знаков в сообщении, состоящем из 4 знаков, вычислить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой СВ X.

2) Оценить вероятность того, что в сообщении, состоящем из 100 знаков, будет ровно 6 неизвестных знаков.

1. 15. В партии из 100 изделий находятся 2 бракованные детали. Из партии наудачу отбирают 10 деталей, найти закон распределения, математическое ожидание, дисперсию числа бракованных деталей среди отобранных. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что среди отобранных деталей будет хотя бы одна бракованная.

1.16. Среди 12 лампочек имеется 4 дефектных. Лампочки ввинчиваются в патрон, и включается ток. При включении тока дефектная лампочка сразу перегорает, после чего заменяется новой. Эта процедура повторяется до тех пор, пока лампочка не будет гореть. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа испробованных лампочек. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что будет испробовано более трех лампочек.

1.17. Баскетболист бросает мяч в корзину до первого попадания, но делает не более 6 бросков. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа бросков, если вероятность попадания в корзину равна 0,6 при каждом броске. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что число бросков будет не менее четырех.

1. 18. На конвейере задействовано n независимо работающих роботов, каждый из которых имеет надежность (вероятность безотказной работы за время T), равную P. Требуется:

1) Построить ряд и функцию распределения числа отказавших роботов среди четырех, закрепленных за механиком, если $P = 0,75$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой СВ.

2) Оценить вероятность того. что за время T откажет не менее трех роботов, если $n =120$, а $P =0,95$.

1.19. Вероятность попадания в цель из орудия при первом выстреле равна 0,2, при втором выстреле – 0,4, при третьем – 0,8. Стрельба по цели ведется до первого попадания, но не свыше четырех выстрелов. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных снарядов. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что число израсходованных снарядов будет не менее трех.

1. 20. В некотором цехе брак составляет P процентов изготовленных изделий. Требуется:

1) Построить ряд и функцию распределения числа бракованных изделий среди четырех изделий, выбранных наудачу, если $P = 10\%$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой СВ X

2) Для случайной выборки в 1000 изделий и $P = 0,2\%$ оценить вероятность того, что в выборке окажется ровно 5 бракованных изделий.

1. 21. В урне 4 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу один за другим без возвращения извлекают шары до тех пор, пока не появится черный шар. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию

числа появившихся при извлечении белых шаров. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что число белых шаров будет не менее трех.

1. 22. В партии из пяти изделий одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынутое проверяют. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию проверенных изделий. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что хотя бы три изделия будут проверены.

1. 23. На некотором предприятии ***k*** рабочих из общего числа рабочих не имеют среднего образования. Требуется:

1) Построить ряд и функцию распределения числа рабочих, не имеющих среднего образования. среди 6 человек, отобранных на удачу, если на предприятии ***n***= 10000 и ***k***-=250. вычислить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой СВ ***X***

2) Для предприятия, у которого ***n***= 10000 и ***k***= 400, оценить вероятность того, что среди наудачу отобранных 100 рабочих окажется не более 5, не имеющих среднего образования.

1. 24. В партии из 21 детали 7 деталей второго сорта, остальные перво-го. Отобраны случайным образом 4 детали. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа деталей второго сорта. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что в выборку попадет хотя бы одна деталь второго сорта.

1. 25. Имеется 4 заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления стандартной детали из одной заготовки равна 0,2. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа использованных заготовок при изготовлении заданной детали. Построить функцию распределения. Определить вероятность того, что использованных заготовок будет не более трех.

Задача № 2

В вариантах 2.1. – 2.25 дискретная СВ ***X*** может принимать только два значения:x_1 и x_2, причем, $x_1 < x_2$.. Известны вероятность ***P***, возможного значения, математическое ожидание ***M(x)*** и дисперсия ***D(x).*** Найти: 1) Закон распределения этой случайной величины; 2) Функцию распределения СВ ***X***; 3) Построить график ***F(x)*** ,

Исходные данные

№	P_i	*M(x)*	*D(x)*
1.	2	3	4
2.1.	0,1	3,9	0,09
2.2.	0,3	3,7	0,21
2.3.	0,5	3,5	0,25
2.4.	0,7	3,3	0,21
2.5.	0,9	3,1	0,09
2.6.	0,9	2,2	0,36
2.7.	0,8	3,2	0,16
2.8.	0,6	3,4	0,24
2.9.	0,2	3,8	0,16
2.10.	0,4	3,6	0,24
2.11.	0,1	5,5	2,25
2.12.	0,2	5,8	5,76
2.13.	0,3	6,6	13,44
2.14.	0,4	4,4	3,84
2.15.	0,5	4,0	4,0
2.16.	0,6	4,0	6,0
2.17.	0,7	3,8	7,56
2.18.	0,8	3,4	7,84
2.19.	0,9	2,8	5,76
220.	0,1	3,9	0,09
2.21.	0,9	3,1	0,09
2.22.	0,7	3,3	0,21
2.23.	0,5	3,5	0,25
2.24.	0,3	3,7	0,21
2.25.	0,6	3,4	0,24

Задача № 3

В вариантах 3.1. – 3.25. СВ X задана плотностью распределения, которая имеет вид: $f(x)=\gamma\cdot e^{ax^2+bx+c}$

Найти:

1) Значение коэффициента γ;

2) ***M (x), D (x), G (x);***

3) Функцию распределения ***F (x);***

4) Построить графики ***f(x), F(x).***

5) Вычислить вероятность попадания СВ X в интервал $(\alpha;\ \beta)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	-2	-2	-2	-4	-3	-4	-3	-3	-2	-3	-2	-2	-2
b	8	$\frac{4}{3}$	-8	6	3	-6	-3	-4	$-\frac{4}{3}$	4	8	$-\frac{4}{3}$	-8
c	-2	$-\frac{2}{3}$	2	2	-2	-2	2	2	$\frac{2}{3}$	-2	0	0	0
α	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$
β	3	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	3	$\frac{2}{3}$	-1

№	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
a	-4	-3	-4	-3	-3	-2	-3	-2	-4	-2	-4	-3
b	6	3	-6	-3	-4	$-\frac{4}{3}$	4	8	6	-8	-6	3
c	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1	-1	-1
α	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
β	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	3	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$

Задача № 4

В вариантах 4.1 – 4.25. непрерывная случайная величина X задана функцией распределения ***F(x).***

Найти:

1) Плотность вероятности ***f(x);***
2) Математическое ожидание ***M(x)***, дисперсию ***D(x)***, среднеквадратическое отклонение ***σ(x)***;
3) Построить графики интегральной и дифференциальной функции ***f(x),.F(x)***

№	Функция распределения
4.1	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ x^3, & при\ \ 0<x\le 1,\\ 1, & при\ \ x>1.\end{cases}$
4.2	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ 3x^2+2x, & при\ \ 0<x\le \frac{1}{3},\\ 1, & при\ \ x>\frac{1}{3}.\end{cases}$
4.3	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 2,\\ \frac{1}{2}x-1, & при\ \ 2<x\le 4,\\ 1, & при\ \ x>4.\end{cases}$
4.4	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \frac{x^2}{9}, & при\ \ 0<x\le 3,\\ 1, & при\ \ x>3.\end{cases}$
4.5	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \frac{x^2}{4}, & при\ \ 0<x\le 2,\\ 1, & при\ \ x>2.\end{cases}$

4.6	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 1,\\ \frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}, & при\ \ 1<x\le 2,\\ 1, & при\ \ x>2.\end{cases}$
4.7	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ x^2, & при\ \ 0<x\le 1,\\ 1, & при\ \ x>1.\end{cases}$
4.8	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le -1,\\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4}, & при\ \ -1<x\le \frac{1}{3},\\ 1, & при\ \ x>\frac{1}{3}.\end{cases}$
4.9	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \frac{1}{4}x(x-1), & при\ \ 0\le x\le 2,\\ 1, & при\ \ x>2.\end{cases}$
4.10	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le -\frac{\pi}{2},\\ \cos x, & при\ \ -\frac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 1, & при\ \ x>0.\end{cases}$
4.11	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ 2\sin x, & при\ \ 0<x\le \frac{\pi}{6},\\ 1, & при\ \ x>\frac{\pi}{6}.\end{cases}$
4.12	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le \frac{3}{4}\pi,\\ \cos 2x, & при\ \ \frac{3}{4}\pi<x\le \pi,\\ 1, & при\ \ x>\pi.\end{cases}$
4.13	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ 1-\cos x, & при\ \ 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 1, & при\ \ x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$
4.14	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le \frac{\pi}{2},\\ 1-\sin x, & при\ \ \frac{\pi}{2}<x\le \pi,\\ 1, & при\ \ x>\pi.\end{cases}$
4.15	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 2\pi,\\ \sin x, & при\ \ 2\pi<x\le \frac{5}{2}\pi,\\ 1, & при\ \ x>\frac{5}{2}\pi.\end{cases}$
4.16	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 2,\\ 0{,}5x-1, & при\ \ 2<x\le 4,\\ 1, & при\ \ x>4.\end{cases}$
4.17	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \frac{x^2}{16}, & при\ \ 0<x\le 4,\\ 1, & при\ \ x>4.\end{cases}$
4.18	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \frac{x^2}{25}, & при\ \ 0<x\le 5,\\ 1, & при\ \ x>5.\end{cases}$
4.19	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \frac{x^2}{36}, & при\ \ 0<x\le 6,\\ 1, & при\ \ x>6.\end{cases}$

4.20	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \dfrac{x}{7}, & при\ \ 0<x\le 7,\\ 1, & при\ \ x>7.\end{cases}$
4.21	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le -2,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & при\ \ -2<x\le 2,\\ 1, & при\ \ x>2.\end{cases}$
4.22	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 2,\\ (x-2)^2, & при\ \ 2<x\le 2,\\ 1, & при\ \ x>3.\end{cases}$
4.23	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 1,\\ x, & при\ \ 0<x\le 1,\\ 1, & при\ \ x>1.\end{cases}$
4.24	$F(x)=\begin{cases}e^{-x}, & при\ \ x\le 0,\\ 1, & при\ \ x>0.\end{cases}$
4.25	$F(x)=\begin{cases}0, & при\ \ x\le 0,\\ \dfrac{x}{4}, & при\ \ 0<x\le 0,\\ 1, & при\ \ x>4.\end{cases}$

Задача № 5

Дан закон распределения двумерной случайной величины ***(X, Y)***.

Найти: 1. Закон распределения составляющих ***X*** и ***Y***.

2. Вычислить математические ожидания ***M (X), M (Y)*** и средние квадратические отклонения ***G(X), G(Y)*** составляющих.

3. Условный закон распределения ***X***, при условии ***Y=y_j*** и условное математическое ожидание ***M(X/Y = y_j)***.

4. Условный закон распределения ***Y***, при условии ***X= x_i*** и условное математическое ожидание ***M(Y/X = x_i)***.

5. Корреляционный момент μ_{xy} и коэффициент корреляции r_{xy}.

6. Уравнение прямой регрессии.

7. Изобразить геометрически данные корреляционной таблицы и прямую регрессии.

8. Сделать вывод о наличии корреляционной зависимости и её типе.

Варианты заданий

5.1.

Y/X	15	20	25	30	35	40
30	0,06	0,03				
40		0,05	0,04			
50			0,08	0,4	0,02	
60			0,05	0,07	0,06	
70				0,04	0,07	0,03

5.2.

Y/X	20	25	30	35	40	45
25	0,02	0,04				
35		0,06	0,03			
45			0,06	0,045	0,04	
55			0,02	0,08	0,06	
65				0,04	0,07	0,03

5.3.

Y/X	25	30	35	40	45	50
35	0,04	0,02				
45		0,05	0,03			
55			0,05	0,45	0,05	
65			0,02	0,08	0,07	
75				0,04	0,07	0,03

5.4.

Y/X	10	15	20	25	30	35
45	0,03	0,047				
55		0,06	0,05			
65			0,05	0,35	0,05	
75			0,02	0,06	0,15	
85				0,04	0,07	0,03

5.5.

Y/X	50	60	70	80	90
10	0,02	0,02			
15	0,02	0,04	0,02		
20		0,05	0,07		
25		0,06	0,2	0,1	
30		0,04	0,1	0,1	
35			0,04	0,06	0,06

5.6.

Y/X	4	9	14	19	24	29
10	0,02	0,03				
20		0,07	0,03			
30			0,02	0,5	0,02	
40			0,01	0,1	0,06	
50				0,04	0,07	0,03

5.7.

Y/X	10	15	20	25	25	35
20	0,02	0,06				
30		0,04	0,04			
40			0,07	0,35	0,08	
50			0,02	0,1	0,08	
60				0,05	0,06	0,03

5.8.

Y/X	5	10	15	20	25	30
15	0,04	0,02				
20		0,06	0,04			
25			0,06	0,45	0,02	
30			0,02	0,08	0,06	
35				0,04	0,07	0,04

5.9

Y/X	3	8	13	18	23	28
18	0,01	0,05				
28		0,05	0,03			
28			0,09	0,4	0,02	
48			0,04	0,11	0,06	
58				0,04	0,07	0,03

5.10

Y/X	10	14	18	22	26	30
6	0,04	0,02				
12		0,08	0,02			
18			0,05	0,4	0,05	
24			0,02	0,08	0,07	
30				0,04	0,07	0,08

5.11

Y/X	7	12	17	22	27	32
8	0,02	0,04				
12		0,03	0,07			
16			0,05	0,3	0,1	
20			0,07	0,1	0,08	
24				0,05	0,06	0,03

5.12

Y/X	3	8	13	18	23	28
10	0,02	0,04				
20		0,06	0,02			
30			0,03	0,5	0,02	
40			0,01	0,1	0,06	
50				0,04	0,07	0,03

5.13

Y/X	11	16	21	26	31	36
20	0,02	0,04				
30		0,06	0,03			
40			0,06	0,45	0,04	
50			0,02	0,08	0,06	
60				0,04	0,07	0,03

5.14

Y/X	4	9	14	19	24	29
7	0,03	0,03				
17		0,05	0,04			
27			0,4	0,02	0,08	
37			0,05	0,1	0,06	
47				0,04	0,07	0,03

5.15

Y/X	5	10	15	20	25	30
120	0,04	0,02				
22		0,05	0,03			
32			0,05	0,45	0,05	
42			0,02	0,08	0,07	
52				0,04	0,07	0,03

5.16

Y/X	7	12	17	22	27	32
5	0,03	0,02				
15		0,03	0,07			
25			0,02	0,5	0,02	
35			0,01	0,1	0,06	
45				0,04	0,07	0,03

5.17

Y/X	15	20	25	30	35	40
20	0,06	0,02				
30		0,04	0,04			
40			0,08	0,35	0,07	
50			0,02	0,1	0,08	
60				0,05	0,06	0,03

5.18

Y/X	8	13	18	23	28	33
10	0,02	0,04				
15		0,04	0,06			
20			0,02	0,45	0,06	
25			0,02	0,08	0,06	
30				0,04	0,07	0,04

5.19

Y/X	18	28	38	48	58	68
3	0,05	0,01				
8		0,03	0,05			
13			0,02	0,4	0,09	
18			0,06	0,11	0,04	
23				0,04	0,07	0,03

5.20

Y/X	6	12	18	24	30	36
10	0.02	0.04				
14		0.02	0.06			
18			0.05	0.4	0.05	
22			0.07	0.08	0.02	
26				0.04	0.07	0.08

5.21

Y/X	8	12	16	20	24	28
7	0.04	0.02				
12		0.07	0.03			
17			0.1	0.3	0.05	
22			0.07	0.1	0.08	
27				0.03	0.06	0.05

5.22

Y/X	10	20	30	40	50	60
3	0.04	0.02				
8		0.02	0.06			
13			0.03	0.5	0.02	
18			0.01	0.1	0.06	
23				0.04	0.07	0.03

5.23

Y/X	20	30	40	50	60	70
11	0.04	0.02				
16		0.03	0.06			
21			0.04	0.45	0.06	
26			0.02	0.08	0.06	
31				0.04	0.07	0.03

5.24

Y/X	7	17	27	37	47	57
4	0.03	0.03				
9		0.04	0.05			
14			0.08	0.4	0.02	
19			0.05	0.1	0.06	
24				0.03	0.07	0.04

5.25

Y/X	12	22	32	42	52	62
5	0.02	0.04				
10		0.03	0.05			
15			0.05	0.45	0.05	
20			0.07	0.08	0.02	
25				0.04	0.07	0.03

Методика выполнения задания № 5

Дан закон распределения двумерной случайной величины ***(X,Y)***.

Найти:

1. Ряды распределения составляющих X и Y.
2. Математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$.
3. Средние квадратические отклонения $G(X)$, $G(Y)$.
4. Условные ряды распределения Y при условии $X=x$ и при $Y=y$.
5. Условные математические ожидания $M(X/Y=y)$ и $M(Y/X=x)$.
6. Построить графики функций регрессии Y на X и X на Y.
7. Корреляционный момент μ_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}.
8. Уравнения прямых регрессии.
9. Изобразить геометрически прямые регрессии.
10. Сделать вывод о наличии корреляционной зависимости и её типе.

Корреляционная таблица

Y/X	5	15	25	35	45	55	65
4	0,4		0,04				
8		0,02	0,08				
12		0,08	0,06	0,2			
16		0,04		0,04	0,06	0,12	
20					0,1	0,08	
24						0,02	0,02

Решение.

1. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений *X*.

Закон распределения СВ *X*

X	5	15	25	35	45	55	65	$\sum$
P	0,04	0,14	0,18	0,24	0,16	0,22	0,02	1,0

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений *Y*.

Закон распределения СВ *Y*

Y	4	8	12	16	20	24	$\sum$
P	0,08	0,1	0,34	0,26	0,18	0,04	1,0

2. Найдём математические ожидания ***M(X)*** и ***M(Y)***.

$$M(X)=5\cdot 0,04+15\cdot 0,14+25\cdot 0,18+35\cdot 0,24+45\cdot 0,16+55\cdot 0,22+$$
$$+65\cdot 0,22=35,8,$$

$$M(Y)=4\cdot 0,08+6\cdot 0,1+12\cdot 0,34+16\cdot 0,26+20\cdot 0,18+24\cdot 0,04=13,92\,.$$

3. Найдём среднеквадратические отклонения.

$$\sigma(X)=\sqrt{5^2\cdot 0,04+15^2\cdot 0,14+25^2\cdot 0,18+35^2\cdot 0,24^2+45^2\cdot 0,16+55^2\cdot 0,22+65^2\cdot 0,02}$$
$$-(35,8)^2\approx 15,2$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{4^2\cdot 0,08+6^2\cdot 0,1+12^2\cdot 0,34+16^2\cdot 0,26+20^2\cdot 0,18+24^2\cdot 0,04}$$
$$-(13,92)^2\approx 4,96.$$

4 Запишем условные законы распределения составляющих ***Y*** и ***X***.

$$Y:P\left(y_j/x_i\right)=\frac{P\left(x_i,y_i\right)}{P\left(y_j\right)}\;;\qquad X:P\left(x_i/y_j\right)=\frac{P\left(x_i,y_j\right)}{P\left(x_i\right)}$$

X	5	15	25	35	45	55	65
$P\left(X/_{Y}=4\right)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0

X	5	15	25	35	45	55	65
$P\left(X/_{Y}=8\right)$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	0	0	0

X	5	15	25	35	45	55	65
$P\left(X/_{Y}=12\right)$	0	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{10}{17}$	0	0	0

X	5	15	25	35	45	55	65
$P\left(X/_{Y}=16\right)$	0	$\frac{2}{13}$	0	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{6}{13}$	0

X	5	15	25	35	45	55	65
$P\left(X/_{Y}=20\right)$	0	0	0	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	0

X	5	15	25	35	45	55	65
$P\left(X/_{Y}=24\right)$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	4	8	12	16	20	24
$P\left(X/_{Y}=5\right)$	1	0	0	0	0	0

Y	4	8	12	16	20	24
$P\left(X/_{Y}=15\right)$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0

Y	4	8	12	16	20	24
$P\left(X/_{Y}=25\right)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	0	0	0

	4	8	12	16	20	24
$P\left(X/_{Y}=35\right)$	0	0	$\frac{10}{12}$	$\frac{2}{12}$	0	0

Y	4	8	12	16	20	24
$P\left(X/_{Y}=45\right)$	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	0

Y	4	8	12	16	20	24
$P\left(X/_{Y}=55\right)$	0	0	0	$\frac{6}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{1}{11}$

Y	4	8	12	16	20	24
$P\left(X/_{Y}=65\right)$	0	0	0	0	0	1

5 Найдём условные математические ожидания.

$$M(X/Y=4)=5\cdot\frac{1}{2}+25\cdot\frac{1}{2}=15;\quad M(X/Y=8)=15\cdot\frac{1}{2}+25\cdot\frac{4}{5}=23;$$

$$M(X/Y=12)=\frac{15\cdot4+25\cdot3+35\cdot10}{17}=28{,}5;$$

$$M(X/Y=16)=\frac{15\cdot2+35\cdot4+45\cdot3+55\cdot6}{13}=45;$$

$$M(X/Y=20)=\frac{45\cdot5+55\cdot4}{9}=49{,}5;\quad M(X/Y=24)=\frac{55+65}{2}=60;$$

$$M(Y/X=5)=4;\quad M(Y/X=15)=\frac{8+12\cdot4+16\cdot2}{7}=12{,}6;$$

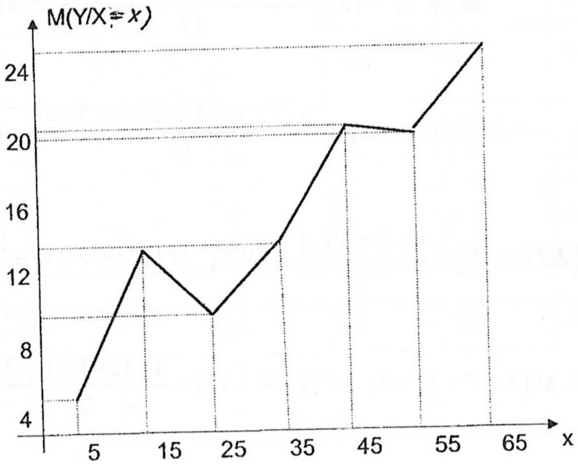
$$M(Y/X=25)=\frac{4\cdot2+8\cdot4+12\cdot3}{9}=8{,}44;$$

$$M(Y/X=35)=\frac{12\cdot10+16\cdot2}{12}=12{,}6;\quad M(Y/X=45)=\frac{16\cdot3+20\cdot5}{8}=18{,}5;$$

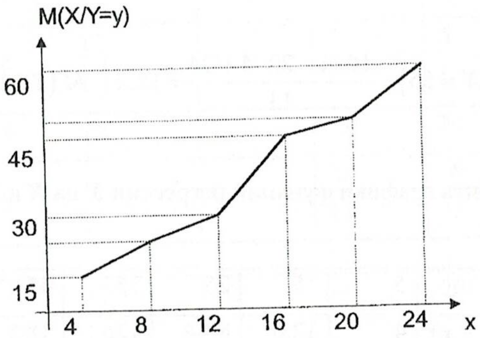
$$M(Y/X=55)=\frac{16\cdot6+20\cdot4+24}{11}=18{,}2;\quad M(Y/X=65)=2{,}4$$

6. Построить графики функций регрессии ***У*** на ***X*** и ***X*** на ***У***

X	5	15	25	35	45	55	65
$M(Y/X=x)$	4	12,6	8,44	126	18.5	18.2	24



Y	4	8	12	16	20	24
$M\left(X/Y=y\right)$	15	23	28,5	45	49,5	60



Можно сделать вывод, что между ***M(Y/X)*** и ***X***, ***M(X/Y)*** и ***Y*** существует некоторая линейная зависимость. Тесноту линейной связи определим коэффициентом корреляции r_{xy}. И чем ближе его значение к единице, тем теснее линейная связь.

7. Вычислим коэффициент корреляции и корреляционный момент.

$$r_{xy}=\frac{M(XY)-M(X)\cdot M(Y)}{G(X)\cdot G(Y)}.$$

Для нахождения ***M(XY)*** составим вспомогательную таблицу.

X	Y	XY	P_{XY}	XY_{XY}
5	4	20	0,04	0,8
1	8	120	0,02	2,4
15	12	180	0,08	14,4
15	16	240	0,04	9,6
25	4	100	0,04	4
25	8	200	0,08	16
25	12	300	0,06	18
35	12	400	0,2	80
35	16	560	0,04	22,4
45	16	720	0,06	43,2
45	20	900	0,1	90
55	16	880	0,12	105,6
55	20	1100	0,08	88
55	24	1320	0,02	26,4
65	24	1560	0,02	31,2
				$\sum$=552 $=M(XY)$

Корреляционный момент

$$\mu_{XY}=552-35{,}8\cdot 13{,}92=552-497{,}74=54{,}26$$

$$r_{xy}=\frac{54{,}26}{15{,}2\cdot 4{,}96}=\frac{54{,}26}{75{,}39}\approx 0{,}76$$

Найдём уравнения прямых регрессии:

$$y - M(X) = r_{xy} \cdot \frac{G(Y)}{G(X)} \cdot (x - M(X))$$

$$x - M(X) = r_{xy} \cdot \frac{G(X)}{G(Y)} \cdot (y - M(Y))$$

$y - 13,92 = 076 \cdot \frac{4,96}{15,2}(x - 35,8)$,

$y = 0.25x + 4.97$ – прямая линия регрессии ***Y*** на ***X***.

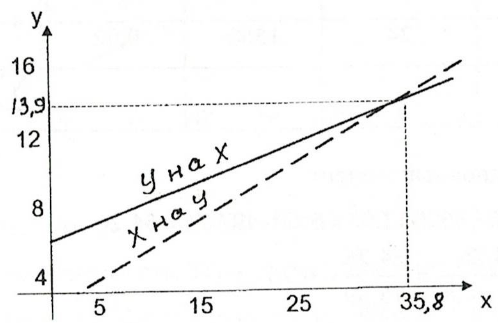
$x - 35,8 = 0,76 \cdot \frac{15,2}{4,96} \cdot (y - 13,92)$,

$x = 2.36y + 2.95$ – прямая линия регрессии ***X*** на ***Y***.

9. Построим линии регрессии.

Х	У
35,8	13,92
0	4,97

У	Х
13,92	35,8
0	2,42



Вывод: между ***Y*** и ***X*** существует тесная линейная связь.

Список литературы

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистики. М.: Высшая школа, 1977.

2 Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987.

3. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. № 4.: Высшая школа, 1971.

4. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистики и теории случайных функций. Под ред. А. Л. Свешникова. М.: Наука, 1970.

Оглавление