

Задача Д4

Применение принципа Даламбера в динамике сложных систем

На неподвижно закрепленной однородной балке 4 установлен ступенчатый барабан 3, который вращается под действием силы F или пары сил с моментом M и приводит в движение грузы 1 и 2 (рис. Д4.0–Д4.9, табл. Д4). Радиусы ступеней барабана R и r , массы тел m_1, m_2, m_3, m_4, ρ – радиус инерции барабана.

Определить угловое ускорение барабана 3, реакции связей в точках A и B и натяжение нитей.

Указания. Задача Д4 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. К действующим на систему силам надо присоединить силы инерции. Учте, что для поступательно движущегося тела система сил инерции приводится к силе $F^И = ma_c$, а для тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии – к паре с моментом $M^И = J_z \cdot \varepsilon$. В этих формулах

m – масса тела,

a_c – ускорение центра масс тела,

J_z – момент инерции тела относительно оси вращения,

ε – угловое ускорение.

Направление $\vec{F}^И$ противоположно направлению \vec{a}_c ; направление $M^И$ противоположно направлению ε .

Таблица Д4

№	m_1 кг	m_2 кг	m_3 кг	m_4 кг	F Н	M Нм	R м	r м	ρ м	ℓ м
0	200	100	50	300	100	200	0,6	0,3	0,4	1
1	40	60	100	220	1000	1000	0,6	0,4	0,5	2
2	50	40	120	240	1100	1100	0,3	0,1	0,2	0,8
3	60	30	20	100	800	800	0,5	0,3	0,4	1
4	80	20	30	90	600	600	0,4	0,2	0,3	0,9
5	100	50	40	100	500	500	0,3	0,1	0,15	0,5
6	100	40	50	80	400	400	0,7	0,35	0,5	1,2
7	120	60	50	90	300	300	0,5	0,25	0,3	1
8	90	70	50	100	900	900	0,4	0,2	0,3	1,1
9	300	100	60	200	200	200	0,8	0,4	0,5	1,5

Пример Д4. Механическая система состоит из грузов 1 и 2 и ступенчатого барабана 3, закрепленного на однородной балке 4.

Грузы висят на нитях, намотанных на ступени барабана с радиусом R и r и радиусом инерции относительно оси вращения ρ . (рис. Д4.10). Балка имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B опирается на гладкую наклонную плоскость. Система движется под действием силы F и сил тяжести грузов.

Дано: $m_1 = 10\text{кг}$, $m_2 = 20\text{кг}$, $m_3 = 60\text{кг}$, $m_4 = 100\text{кг}$,
 $F = 400\text{Н}$, $\alpha = 45^\circ$, $\ell = 1\text{м}$, $\rho = 0,4\text{м}$, $R = 0,5\text{м}$, $r = 0,3\text{м}$

Определить: угловое ускорение барабана; реакции в точках A и B для показанного на рисунке положения силы F ; натяжения нитей.

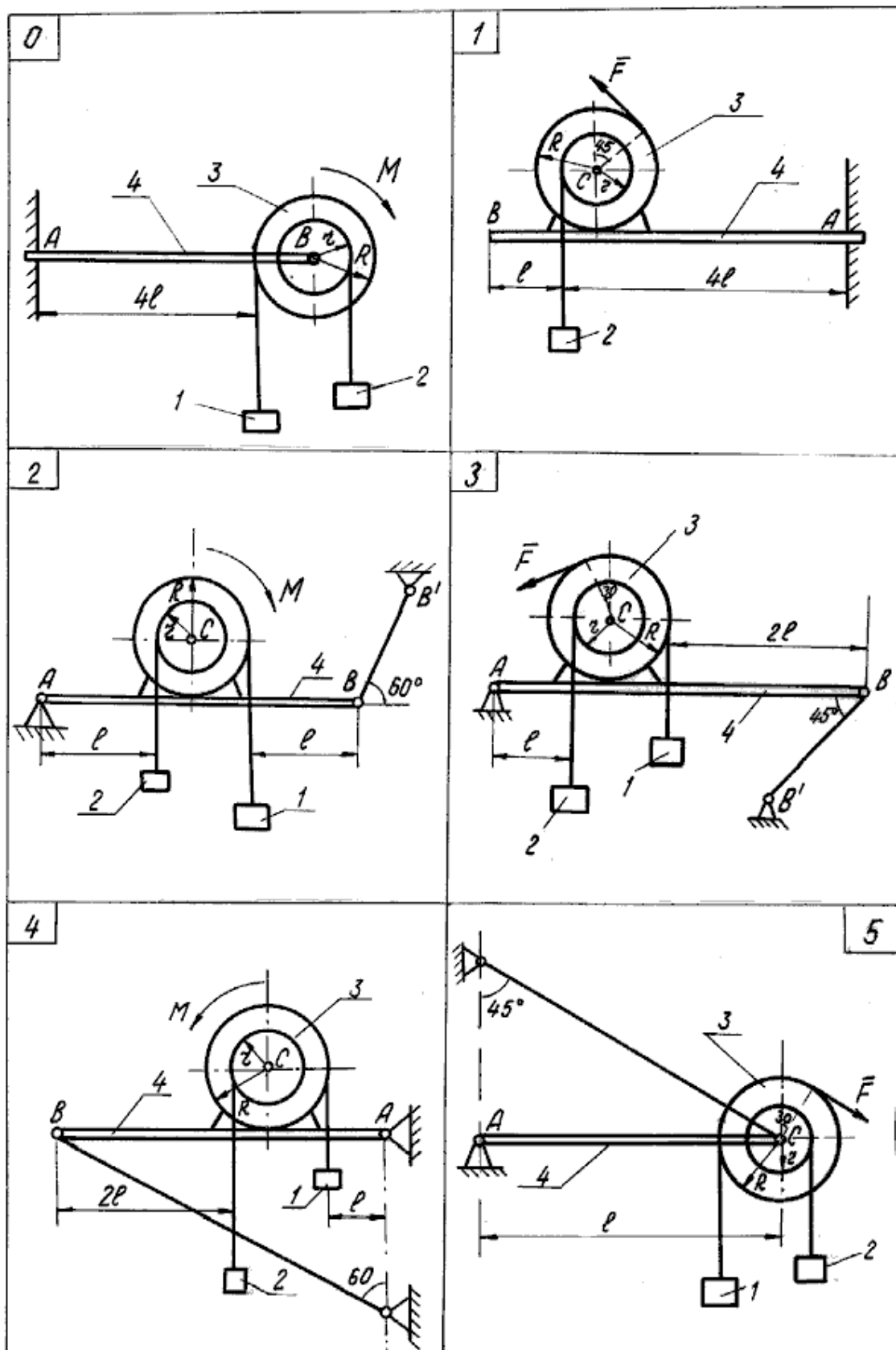


Рис. Д4.0–Д4.5

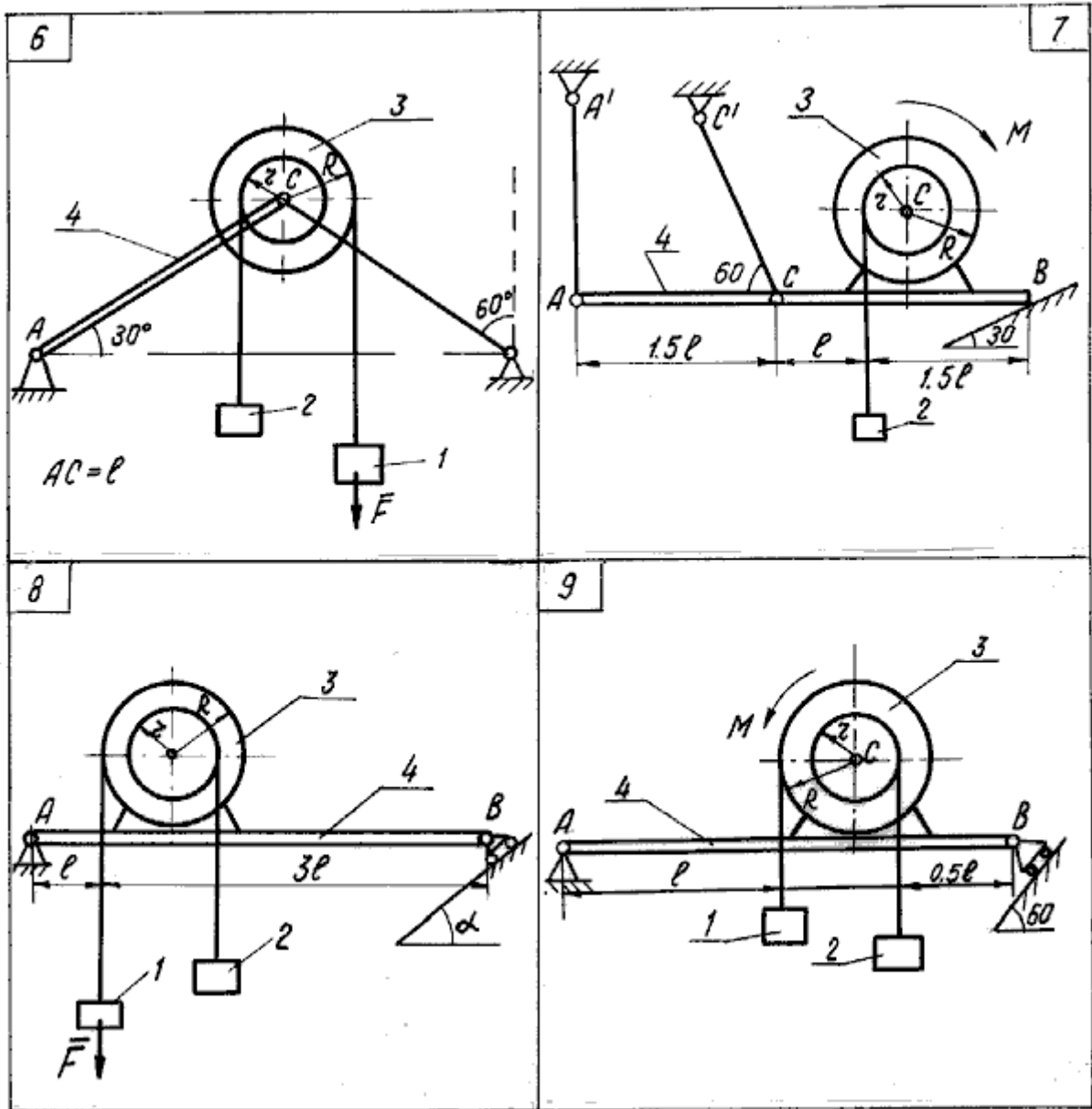


Рис. Д4.6–Д4.9

Решение: Расчленим систему и рассмотрим сначала движение барабана с грузами (рис. Д4.11). Введем координатные оси Sx . Изобразим силы: активные – силы тяжести $m_1 \bar{g}$, $m_2 \bar{g}$, $m_3 \bar{g}$ и заданную силу \bar{F} ; реакции связей – составляющие реакции шарнира \bar{X}_c, \bar{Y}_c . Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции. Задавшись направлением углового ускорения ε , изображаем на чертеже силы инерции $F_1^{\text{и}}$ и $F_2^{\text{и}}$ и момент сил инерции $M^{\text{и}}$, величины которых равны:

$$F_1^{\text{и}} = m_1 a_1; \quad F_2^{\text{и}} = m_2 a_2; \quad M^{\text{и}} = m_3 r^2 \varepsilon. \quad (1)$$

Выразим ускорения грузов через угловое ускорение барабана:

$$a_1 = \varepsilon r, \quad a_2 = \varepsilon R. \quad (2)$$

Согласно принципу Даламбера, внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил уравнение равновесия:

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = 0; \quad -FR - m_1gr + m_2gR - F_1^u r - F_2^u R - M^u = 0 \quad (3)$$

Подставив в уравнение (3) соответствующие величины из равенств (1) и (2), найдем угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{-FR - m_1gr + m_2gR}{m_1r^2 + m_2R^2 + m_3\rho^2} = 17,33c^{-1}$$

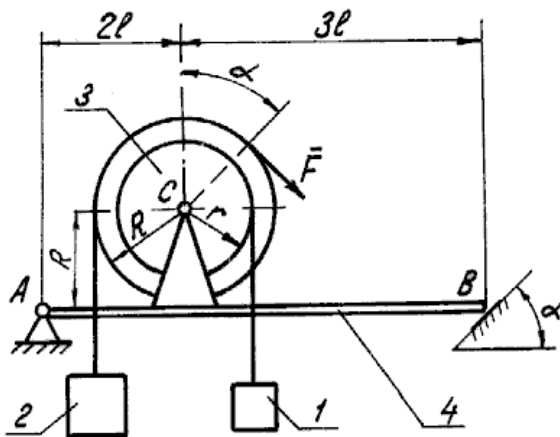


Рис. Д4.10

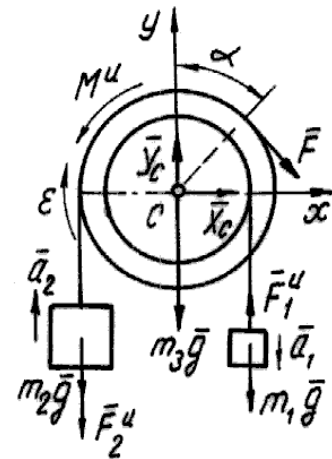


Рис. Д4.11

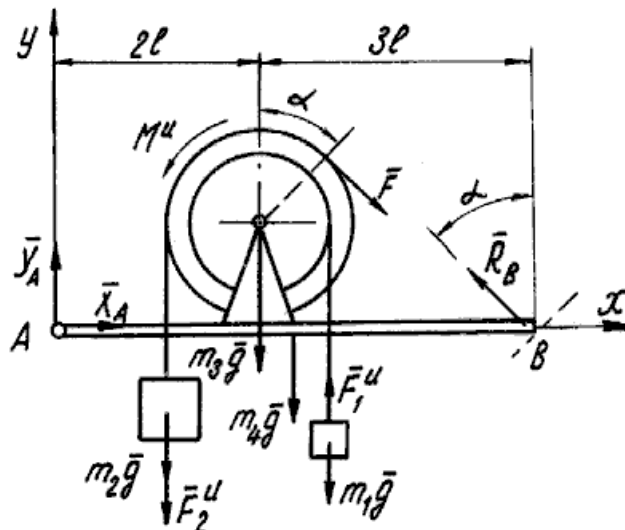


Рис. Д4.12

Рассмотрим барабан с грузами и балку как одну систему (рис. Д4.12). Введем координатные оси A_{xy} , изобразим силы: активные – $m_1\bar{g}, m_2\bar{g}, m_3\bar{g}, \bar{F}$; составляющие реакции шарнира \bar{X}_A, \bar{Y}_A и реакцию наклонной плоскости \bar{R}_B .

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции \bar{F}_1^u, \bar{F}_2^u и момент сил инерции M^u .

Согласно принципу Даламбера, составим для этой плоской системы сил уравнения равновесия:

$$\sum F_x = 0; \quad X_A - F \cos \alpha - R_B \sin \alpha = 0;$$

$$\sum F_y = 0; \quad Y_A - m_2 g + F_2^H - m_3 g + F \sin \alpha - m_1 g - F_1^H - m_4 g + R_B \cos \alpha = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{F}_k) = 0;$$

$$R_B \cdot \cos \alpha 5\ell - F \cos \alpha (R + R \cos \alpha) - F \sin \alpha (2\ell + R \sin \alpha) + F_1^H (2\ell + r) - \\ - m_1 g (2\ell + r) - m_1 g \cdot 2,5\ell - m_4 g \cdot 2,5\ell - m_3 g \cdot 2\ell - \\ - (m_2 g + F_2^H)(2\ell - R) + M^H = 0.$$

Решая эти уравнения с учетом равенств (1), (2) и найденного значения $\varepsilon = 17,33 \text{ рад/с}^2$, получим:

$$R_B = 1290 \text{ Н}, \quad X_A = 1195 \text{ Н}, \quad Y_A = 548 \text{ Н}.$$