

Министерство образования и науки Российской Федерации
Дальневосточный федеральный университет
Инженерная школа

**АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**

Методические указания по выполнению курсовой работы для студентов
электротехнических специальностей и бакалавриата по дисциплине «Теоретические основы
электротехники»
(образовательная программа 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»)

Учебное электронное издание
Учебно-методическое пособие

Составители

Л.В. Глушак, Ю.М. Горбенко, Н.В. Киншт,
А.Н. Шеин, В.С. Яблокова



Владивосток
Дальневосточный федеральный университет
2016

УДК 621.3
ББК 31.21
А64

Составители:

Глушак Лариса Владимировна, к.т.н., доцент;
Горбенко Юрий Михайлович, к.т.н., доцент;
Киншт Николай Владимирович, д.т.н., профессор;
Шеин Александр Николаевич, старший преподаватель;
Яблокова Виктория Сергеевна, к.т.н., доцент.

Кафедра электроэнергетики и электротехники Инженерной школы (Дальневосточный федеральный университет, Владивосток).

Анализ переходных процессов в электрических цепях: учебно-методическое пособие. [Электронный ресурс] / сост. Л.В. Глушак, Ю.М. Горбенко, Н.В. Киншт, А.Н.Шеин, В.С. Яблокова; Инженерная школа ДВФУ. – Электрон. дан. – Владивосток: Дальневост. федерал. ун-т, 2016. [31 с.]. – Acrobat Reader, Foxit Reader либо любой другой их аналог. – Режим доступа:
<http://www.dvfu.ru/schools/engineering/science/scientific-and-educational-publications/manuals/>

Учебно-методическое пособие содержит задания к курсовой работе по анализу переходных процессов в электрических цепях и методические рекомендации по их выполнению для студентов дневной и заочной форм обучения.

Предназначено для студентов специальностей, бакалавриата, изучающих дисциплину «Теоретические основы электротехники. Ч. 2», а также может быть полезно для студентов специальностей, изучающих дисциплину «Основы теории электрических цепей. Ч. 2».

Ключевые слова: электрическая цепь, установившиеся режимы, переходные процессы, методы расчета.

*Публикуется по решению кафедры электротехники и электроэнергетики
Инженерной школы ДВФУ*

Редактор Н.С. Мун
Компьютерная верстка Н.С. Мун
Опубликовано 16.08.2016
Формат PDF
Объем 1,8 МБ [Усл. печ. л. 3,6]

Подготовлено редакционно-издательским отделом Инженерной школы ДВФУ
[Владивосток, Русский остров, кампус ДВФУ, каб. С714]

Дальневосточный федеральный университет
690950, Владивосток, ул. Суханова, 8

© Глушак Л.В., Горбенко Ю.М.,
Киншт Н.В., Шеин А.Н., Яблокова
В.С., сост., 2016
© ФГАОУ ВО «ДВФУ», 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ЗАДАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	5
1.1. Анализ переходных процессов классическим и операторным методом при воздействии в цепи источника постоянного напряжения.....	5
1.2. Анализ переходных процессов при наличии в цепи синусоидального источника и при воздействии на нее импульсного источника.....	5
1.3. Анализ переходных процессов в цепи с нелинейным элементом.....	6
1.4. Анализ переходных процессов в цепи методом переменных состояния.....	6
2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	6
3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	9
3.1. Анализ переходных процессов классическим методом.....	9
3.2. Анализ переходного процесса в заданной цепи операторным методом.....	14
3.3. Анализ переходных процессов при наличии в цепи синусоидального источника напряжения.....	17
3.4. Анализ переходного процесса в заданной электрической цепи при включении ее под действие источника напряжения произвольной формы.....	20
3.5. Анализ переходных процессов в электрической цепи методом сопряжения интервалов при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных элементов.....	22
3.6. Анализ переходного процесса в заданной электрической цепи методом переменных состояния.....	26
Пример формирования уравнений при подготовке к решению задачи по расчету переходных процессов методом переменных состояния.....	27
ЛИТЕРАТУРА.....	31

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей курсовой работы являются выработка и закрепление у студентов умений и навыков в вопросах анализа переходных процессов в линейных и линеаризованных цепях, а также в нелинейных цепях. В процессе выполнения курсовой работы требуется использовать следующие методы анализа переходных процессов: классический, операторный, интеграл Дюамеля, метод переменных состояния, линеаризация на основе кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных элементов.

При защите студент должен показать знание следующих основных положений: возникновение переходных процессов и законы коммутации: переходный, принужденный и свободный процессы; независимые и зависимые начальные условия; начальные условия при некорректных коммутациях; общий путь расчета переходных процессов в линейных электрических цепях; определение корней характеристического уравнения; определение постоянных интегрирования; переходные процессы в RL -цепях, RC -цепях, RLC -цепях; операторное изображение функций, их производных и интегралов; законы Кирхгофа и Ома в операторной форме; переход от изображений к оригиналу с помощью теоремы разложения; методика расчета переходных процессов в электрических цепях операторным методом; переходные характеристики электрической цепи; расчет переходного процесса при воздействии ЭДС произвольной формы на основе интеграла Дюамеля; метод переменных состояния, анализ переходных процессов в нелинейной электрической цепи с одним нелинейным элементом при кусочно-линейной аппроксимации характеристики нелинейного элемента.

1. ЗАДАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

1. 1. Анализ переходных процессов классическим и операторным методом при воздействии в цепи источника постоянного напряжения

1.1.1. Выполнить анализ переходного процесса в исходной схеме варианта классическим методом.

Определить переходную функцию тока или напряжения в соответствии с пунктом 1 задания индивидуального варианта.

Построить график рассчитанной функции.

Если в задании указан апериодический процесс (АП-КИЙ), то значение емкости C взять равным CA , если задан колебательный процесс (КОЛ-НЬИ), то значение емкости принять равным CK .

1.1.2. Выполнить анализ переходного процесса в исходной схеме варианта операторным методом.

Определить переходную функцию тока или напряжения в соответствии с пунктом 2 задания индивидуального варианта.

Построить график рассчитанной функции.

Значение емкости C задать в соответствии с характером переходного процесса CA или CK .

1.2. Анализ переходных процессов при наличии в цепи синусоидального источника и при воздействии на нее импульсного источника

1.2.1. Преобразовать исходную схему варианта, замкнув накоротко один из реактивных элементов в соответствии с пунктом 3 задания индивидуального варианта.

Выполнить анализ переходного процесса в преобразованной схеме при действии источника синусоидального напряжения $U(t) = Um \sin(\omega t + \psi)$, где $Um = E$, $\omega = \Omega MG$, $\psi = FI$, причем E , ΩMG , FI задаются машинной распечаткой варианта.

Определить переходную функцию тока или напряжения в соответствии с пунктом 3 задания варианта.

Построить график рассчитанной функции.

Анализ произвести комбинированным способом, сочетая расчет принужденной составляющей символическим методом (с помощью комплексных чисел) с расчетом свободной составляющей операторным.

В схемах с емкостью значение C взять равным CK .

1.2.2. Преобразовать исходную схему варианта, поместив ключ, работающий на замыкание, в ветвь с источником ЭДС, замкнув накоротко один из реактивных элементов в соответствии с пунктом 4 задания индивидуального варианта.

Выполнить анализ переходного процесса в преобразованной схеме при воздействии на электрическую цепь импульсного напряжения $U(t)$ методом интеграла Дюамеля.

Записать аналитическое выражение для переходной функции тока или напряжения в соответствии с пунктом 4 задания варианта.

Качественно построить график искомой функции.

Форму сигнала $U(t)$ взять из таблицы «Формы импульсных сигналов» (см. ниже) в соответствии с номером рисунка, указанным в машинной распечатке варианта.

В схемах с емкостью значение C взять равным CK .

1.3. Анализ переходных процессов в цепи с нелинейным элементом

Преобразовать исходную схему варианта, поместив ключ, работающий на замыкание, в ветвь с источником ЭДС, замкнув накоротко один из реактивных элементов в соответствии с пунктом 5 задания индивидуального варианта.

Рассчитать переходной процесс в электрической цепи, содержащей нелинейный элемент с заданной характеристикой, методом кусочно-линейной аппроксимации.

Определить переходную функцию тока или напряжения в соответствии с пунктом 5 задания варианта.

Построить график рассчитанной зависимости.

В схемах с емкостью значение C взять равным CK .

1. 4. Анализ переходных процессов в цепи методом переменных состояния

Для схемы и исходных данных пункта 1 задания (классический метод) рассчитать ту же величину методом переменных состояния.

2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Исходные данные (кодировка схемы, параметры элементов, тип коммутации, номер рисунка с видом импульсного сигнала, характеристика нелинейного элемента) даны в машинной распечатке индивидуального варианта. На рис.1 приведен пример вида машинной распечатки одного варианта.

Вариант № ... 27						
Ветвь	Узлы	R	Ключ ЗАМ R2			
№	Нач-Кон	Ом	E1 = 6.0 + 01	В		
1	3 – 2	4.0	L5 = 5.0 – 02	Гн	1. Кол-ый	Опр – IR4
2	2 – 4	5.0	CK6 = 4.22 – 04	Ф	2. Ап-кий	Опр – IL5
3	3 – 4	4.0	CA6 = 2.51 – 03	Ф	3. Зак – С	Опр – UL5
4	2 – 1	6.0	OMG = 1.0 + 02	I/C	4. Зак – L	Опр – IR3
5	3 – 1	3.0	FI = 45	Град	5. Зак – С	Опр – IL5
6	4 – 1	5.0	Для пункта 4 E6 (Т) взять по Рис.21			
Характеристика нелинейного элемента						
ψ, Вб	0.00 + 00	6.15 + 00	1.27 + 01	9.85 + 00	1.33 + 01	1.42 + 01
I, А	0.00 + 00	1.33 + 01	3.14 + 01	2.21 + 01	3.69 + 01	4.61 + 01

Рис. 1. Вид машинной распечатки индивидуального варианта задания

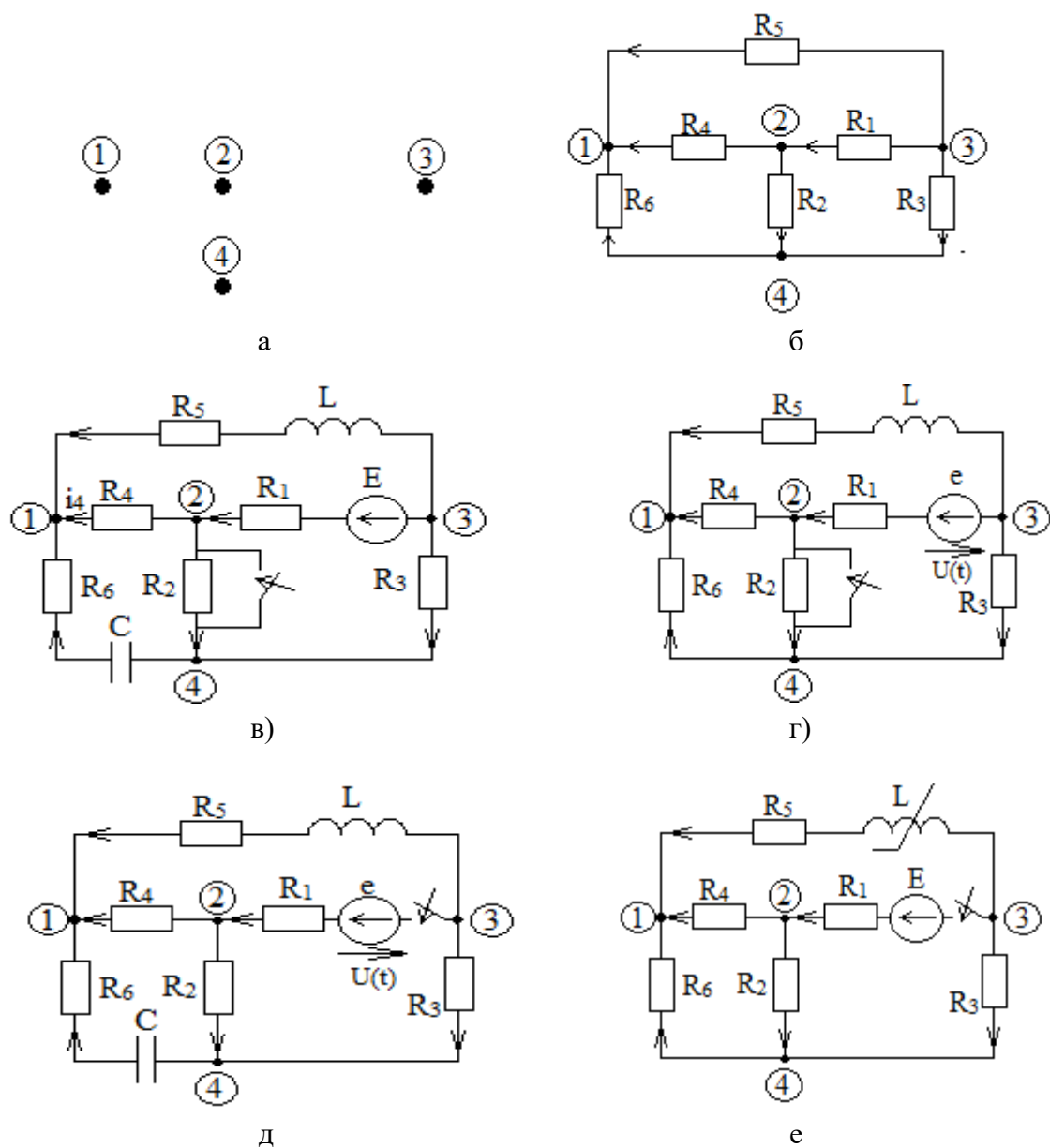


Рис. 2. Построение анализируемых схем

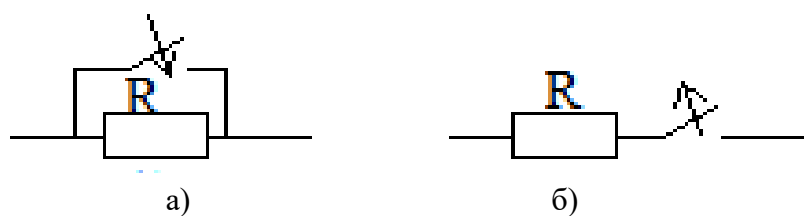
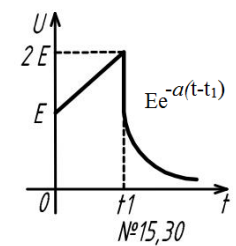
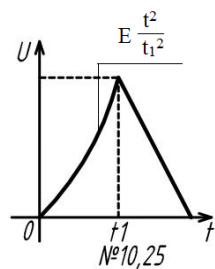
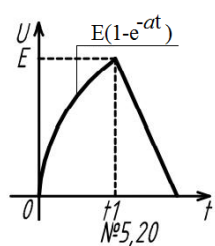
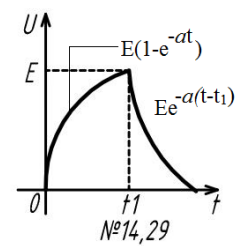
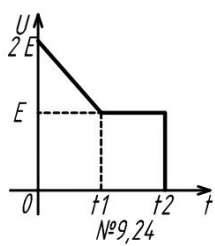
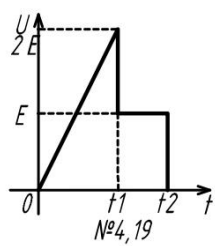
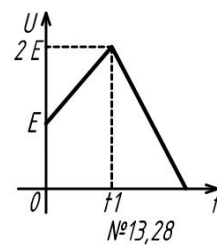
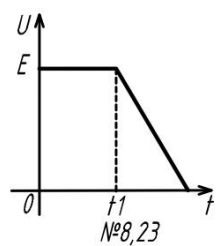
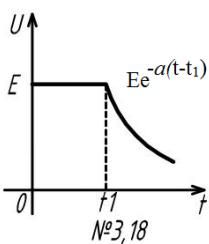
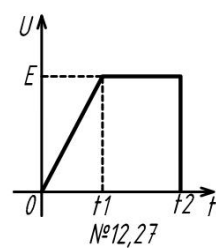
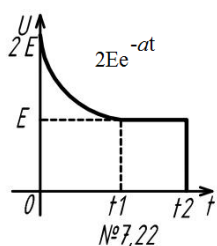
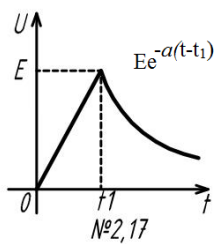
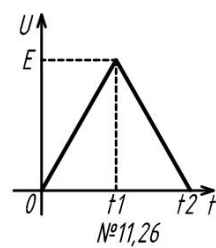
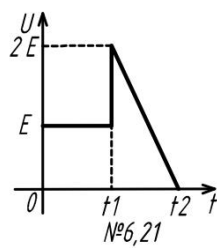
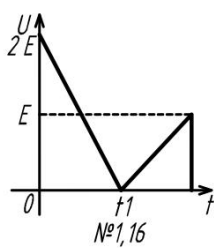


Рис. 3. Схемы расположения ключей:

а – режим «КЛЮЧ ЗАМ.»,
б – режим «КЛЮЧ РАЗМ.»

Формы импульсных сигналов



Анализируемая схема строится по ее кодировке в следующей последовательности. На поле чертежа изобразить четыре узла схемы, обозначив их номерами (рис. 2, а). В соответствии с указанием номеров начальных и конечных узлов ветвей, включить резистивные элементы схемы (рис. 2, б). Одновременно последовательность перечисления узлов обозначает набор условного положительного направления токов ветвей. Например, в ветви 1 условное положительное направление тока от узла 3 к узлу 2. Последовательно с соответствующими сопротивлениями поставить элементы E , L , C , сообразуясь с номерами их ветвей (рис. 2, в). Ключ, работающий на размыкание, поставить последовательно с соответствующим сопротивлением, если в распечатке указан режим ключа «КЛЮЧ РАЗМ.» (рис. 3, б).

Ключ, работающий на замыкание, поставить параллельно с соответствующим сопротивлением, если в распечатке указан режим ключа «КЛЮЧ ЗАМ.» (рис. 3, а).

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1. Анализ переходных процессов классическим методом

3.1.1. Рассчитать независимые начальные условия, вычисляя $i_L(0)$, $U_C(0)$ в установившемся режиме до коммутации. Учесть, что при действии в цепи источника постоянного напряжения индуктивность L имеет нулевое сопротивление (закоротка), а емкость C – бесконечное сопротивление (разрыв).

В примере (исходная схема – см. рис.2, в) схема для расчета $i_L(0)$, $U_C(0)$ при $e(t)=E$ в установившемся режиме до коммутации имеет упрощенный вид (рис. 4). Для этой схемы можно вычислить входное сопротивление по отношению к зажимам источника

$$R = R_1 + \frac{(R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5},$$

ток в ветви с источником $I_1 = \frac{E}{R}$, и значения других величин:

$$U_{23} = E - R_1 I_1, \quad I_L = \frac{-U_{23}}{R_4 + R_5}, \quad I_3 = \frac{U_{23}}{R_2 + R_3}, \quad U_C = R_5 I_L + R_3 I_3.$$

Таким образом, получаем: $i_L(0) = I_L$, $U_C(0) = U_C$. С учетом исходных данных примера (машинная распечатка – см. рис. 1) $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $R_4 = 6$ Ом, $R_5 = 3$ Ом, $R_6 = 5$ Ом, $E = 60$ В имеем независимые начальные условия: $i_L(0) = -3,529$ А, $U_C(0) = 3,529$ В.

Примечание 1. Расчет схемы в установившемся режиме до коммутации при необходимости можно производить любым другим методом (контурных токов, узловых потенциалов и т.п.).

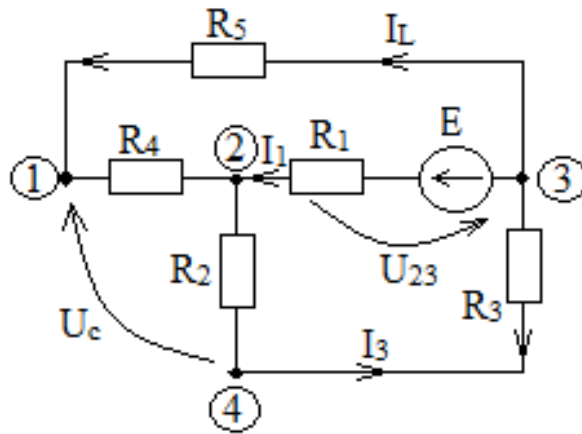


Рис. 4. Схема для расчета докоммутационного режима

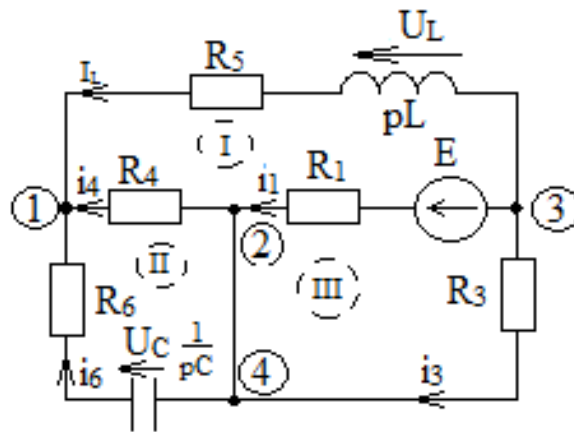


Рис. 5. Схема для определения корней характеристического уравнения

3.1.2. Найти корни характеристического уравнения.

Схема после коммутации имеет вид как на рис. 5, причем индуктивное сопротивление формально принято равным pL , а емкостное – равным $1/(pC)$. Для получения характеристического уравнения достаточно составить выражение входного сопротивления $Z_{BX}(p)$ по отношению к разрыву произвольной ветви и приравнять его нулю: $Z_{BX}(p) = 0$ (источник напряжения при этом необходимо закоротить). По отношению к разрыву в ветви с индуктивностью имеем:

$$Z_{BX}(p) = R_5 + pL + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_4 (R_6 + \frac{1}{pC})}{R_4 + R_6 + \frac{1}{pC}} = 0.$$

Положив $L = 5 \cdot 10^{-2}$ Гн, $C = CK = 4,22 \cdot 10^{-4}$ Ф, получаем характеристическое уравнение

$$p^2 + 370p + 4.379 \cdot 10^4 = 0.$$

Его корни составляют $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega = -185 \pm j114.7$.

Примечание 2. Характеристическое уравнение можно также составить, приравняв к нулю определитель матрицы контурных сопротивлений или матрицы узловых проводимостей, при условии, что сопротивление каждого индуктивного элемента принято равным pL , а емкостного – равным $1/(pC)$.

3.1.3. Записать решение в общем виде.

Пусть в рассматриваемом примере необходимо определить $i_4(t)$, как указано в п.1 машинной распечатки задания (см. рис. 1). В самом общем виде решение $i_4(t)$ следует искать как сумму принужденной и свободной составляющих

$$i_4(t) = i_{4пр}(t) + i_{4св}(t).$$

Рассматриваемая схема – второго порядка, поэтому свободная составляющая имеет два слагаемых: $i_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$,

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования. Для случая комплексных сопряженных корней $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$ решению $i_{св}(t)$ целесообразно придать другую форму

$$i_{св}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi),$$

где A, ψ – постоянные интегрирования..

Таким образом, для обсуждаемого примера имеем

$$i_4(t) = i_{4пр}(t) + A e^{-185t} \sin(14.7t + \psi).$$

Примечание 3. Если корни p_1 и p_2 равны:

$$p_1 = p_2 = -\alpha,$$

то решение $i_{4св}(t)$ можно искать в виде $i_{4св}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\alpha t}$.

3.1.4. Рассчитать принужденную составляющую.

Принужденная составляющая $i_{4пр}(t)$ – это ток, который установится в ветви по завершении переходного процесса (теоретически при $t \rightarrow \infty$).

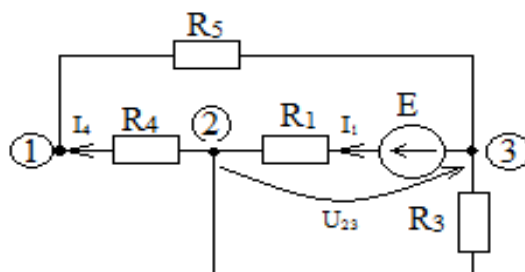


Рис. 6. Схема для расчета принужденной составляющей

В цепи действует источник постоянного напряжения, поэтому $i_{4пр}(t) = I_4$ – постоянный ток; падение напряжения на индуктивностях и ток в емкостях – нулевые. Расчетная схема представлена на рис. 6, ее анализ проводится в последовательности:

$$R = R_1 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}, \quad U_{23} = E - R_1 I_1, \quad I_4 = \frac{U_{23}}{R_4 + R_5}, \quad I_1 = \frac{E}{R}.$$

С учетом численных значений получаем $i_{4пр}(t) = 2.121 \text{ A}$.

3.1.5. Рассчитать зависимые начальные условия – искомую функцию и ее производную к моменту коммутации $t = 0 +$.

В анализируемом примере это $i_4(0)$, $i'_4(0)$. Для схемы после коммутации запишем систему независимых уравнений, составленных по закону Кирхгофа:

$$i_4 + i_6 + i_L = 0 \text{ (для узла 1),}$$

$$i_1 + i_3 + i_L = 0 \text{ (для узла 3),}$$

$$\begin{aligned}
R_5 i_L - R_4 i_4 - R_1 i_1 + U_L &= -E \text{ (для узла I),} \\
R_4 i_4 - R_6 i_6 - U_c &= 0 \text{ (для узла II),} \\
R_1 i_1 - R_3 i_3 &= E \text{ (для узла III)}
\end{aligned} \tag{I}$$

Система (1) справедлива для интервала времени $[0+, \infty]$. Рассмотрим ее в момент $t = 0 +$ и, учтя, что $i_L(0)$ и $U_c(0)$ известны, перенесем их вправо и найдем начальные значения остальных величин. Для этого разобьем систему (1) на отдельные подсистемы:

$$\begin{aligned}
i_4(0) + i_6(0) &= -i_L(0), \\
R_4 i_4(0) - R_6 i_6(0) &= U_c(0), \\
i_1(0) + i_3(0) &= -i_L(0), \\
R_1 i_1(0) - R_3 i_3(0) &= E, \\
U_L(0) &= -E - R_5 i_L(0) + R_1 i_1(0) + R_4 i_4(0).
\end{aligned}$$

В результате получаем $i_4(0) = 1,925 \text{ A}$, $i_6(0) = 1,604 \text{ A}$, $i_1(0) = 9,265 \text{ A}$, $i_3(0) = -5,736 \text{ A}$, $U_L(0) = -0,806 \text{ В}$.

Для вычисления производной $i'_4(0)$ продифференцируем в системе (1) левые и правые части уравнений и, учитывая, что $\frac{dE}{dt} = 0$, получим:

$$\begin{aligned}
i'_4 + i'_6 + i'_L &= 0, \\
i'_1 + i'_3 + i'_L &= 0, \\
R_5 i'_L - R_4 i'_4 - R_1 i'_1 + U'_L &= 0, \\
R_4 i'_4 - R_6 i'_6 - U'_c &= 0, \\
R_1 i'_1 - R_3 i'_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

Примем во внимание, что $i_c = C \frac{dU_c}{dt}$, $U_L = L \frac{di_L}{dt}$, откуда имеем:

$$U'_c = \frac{dU_c}{dt} = \frac{i_c}{C}, \quad i'_L = L \frac{di_L}{dt} = \frac{U_L}{L}.$$

С учетом начальных значений $i_c(0) = i_6(0)$ и $U_L(0)$ для обсуждаемого примера получаем

$$\begin{aligned}
U'_c(0) &= \frac{i_6(0)}{C} = \frac{1.604}{4.22 \cdot 10^{-4}} = 3801 \frac{\text{В}}{\text{с}}, \\
i'_L(0) &= \frac{U_L(0)}{L} = \frac{-0.806}{5 \cdot 10^{-2}} = -16.11 \frac{\text{А}}{\text{с}}.
\end{aligned}$$

Систему (2) также рассмотрим в момент $t = 0 +$, подставив в нее известные величины $U'_c(0)$, $i'_L(0)$. Чтобы вычислить $i'_4(0)$, в данном случае достаточно рассмотреть при $t = 0 +$ только первое и четвертое уравнения системы (2), связывающие искомые $i'_4(0)$, $i'_6(0)$:

$$\begin{aligned}
i'_4(0) + i'_6(0) &= -i'_L(0), \\
R_4 i'_4(0) - R_6 i'_6(0) &= U'_c(0).
\end{aligned}$$

В результате получаем $i'_4(0) = 352,8 \frac{\text{А}}{\text{с}}$.

Примечание 4. Чтобы вычислить зависимые начальные значения функций, можно воспользоваться послекоммутационной схемой электрической цепи для момента $t = 0 +$ (рис. 7).

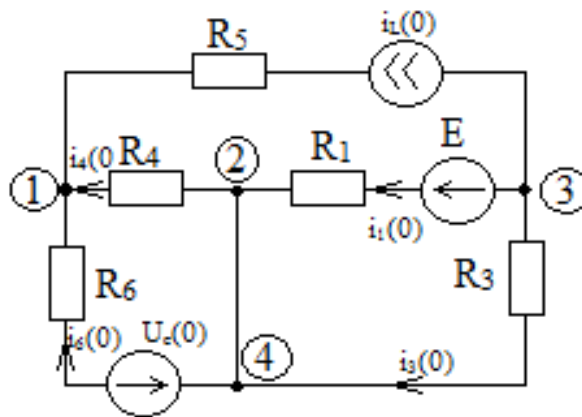


Рис. 7. Схема для вычисления начальных значений функций токов и напряжений

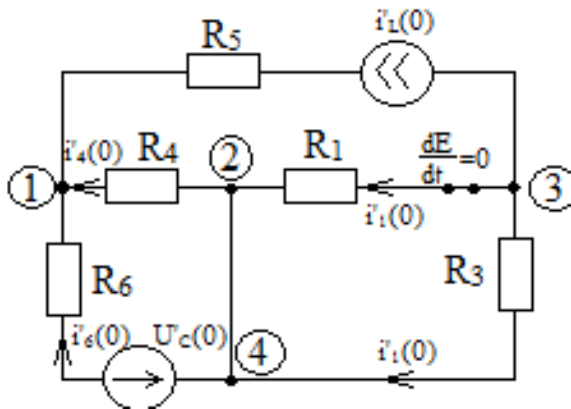


Рис. 8. Схема для вычисления начальных значений производных токов и напряжений

В этой схеме индуктивность эквивалентно замещена источником тока $i_L(0)$, емкость – источником напряжения $[-U_c(0)]$ (или, что то же, источником напряжения $U_c(0)$, направленным против ранее выбранного условного положительного направления тока в емкости). В результате расчет сводится к анализу резистивной схемы. В данном примере (рис. 7) по методу узловых потенциалов имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6}\right) \varphi_1 - 0 \cdot \varphi_3 &= i_L(0) - \frac{U_c(0)}{R_6}, \\ 0 \cdot \varphi_4 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) \varphi_3 &= -i_L(0) - \frac{E}{R_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь за базисный принят узел (2, 4) и, кроме того, учтено, что $G_{13} = G_{31} = 0$, т.к. внутреннее сопротивление идеального источника тока равно бесконечности и, следовательно, проводимость ветки, связывающей узлы 1 и 3, равна нулю. Вычислив потенциалы, находим все токи и напряжения при $t = 0 +$, в том числе $i_4(0) = \frac{-\varphi_1}{\varphi_4}$. Эту схему можно использовать для определения $i'_4(0)$. Для этого вместо источников в ней

должны действовать их произвольные: $\frac{dE}{dt}(t=0) = 0$, $i'_L(0)$, $U'_C(0)$, и тогда в ветвях вместо токов и напряжений будут иметь место их производные (см. рис. 8). Значения $i'_L(0)$, $U'_C(0)$ найдём из предыдущих вычислений:

$$i'_L(0) = \frac{U_L(0)}{L} = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 - R_5 i_L(0)}{L},$$

$$U'_C(0) = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_L(0) - i_4(0)}{C}.$$

3.1.6. Определить постоянные интегрирования.

Обратимся к общему виду искомого решения колебательного процесса и его производной:

$$i_4(t) = i_{4np} + Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \psi).$$

$$i'_4(t) = 0 + Ae^{-\alpha t} [-\alpha \sin(\omega_0 t + \psi) + \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi)].$$

и подставим в них $t = 0$, $i_4(0)$, $i'_4(0)$:

$$i_4(0) = i_{4np}(0) + A \sin \varphi.$$

$$i'_4(0) = -\alpha A \sin \psi + \omega_0 A \cos \psi.$$

В численном выражении для рассматриваемого примера имеем:

$$A \sin \psi = -0.802,$$

$$-185 \cdot A \sin \psi + 114.5 \cdot A \cos \psi = 352.8.$$

Отсюда $A \cos \psi = -1.785$, $\tan \psi = A \sin \psi / A \cos \psi = -0.449$,

$$\psi = -24.18^\circ, \quad A = 1.957.$$

3.1.7. Записать численный ответ.

В примере искомая функция имеет вид

$$i_4(t) = 2.727 + 1.957e^{-185t} \sin(114.5t - 24.18^\circ), \quad A.$$

Примечание 5. Для апериодического переходного процесса постоянные интегрирования A_1 , A_2 находят из решения системы

$$A_1 + A_2 = i(0) - i_{np}(0),$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = i'(0) - i'_{np}(0).$$

3.2. Анализ переходного процесса в заданной цепи операторным методом

3.2.1. Составить расчетную операторную схему для электрической цепи в послекоммутационный период: в ней индуктивность L заменить сопротивлением pL , емкость – сопротивлением $\frac{1}{pC}$, источник постоянного напряжения E – изображением E/p . Кроме того, для учета ненулевых начальных условий в схему вводятся источники напряжения: $Li_L(0)$ последовательно с индуктивностью, $U_C(0)/p$ последовательно с емкостью (напряжение $U_C(0)/p$ противоположно условному положительному направлению тока в емкости). В обсуждаемом примере операторная схема представлена на рис. 9.

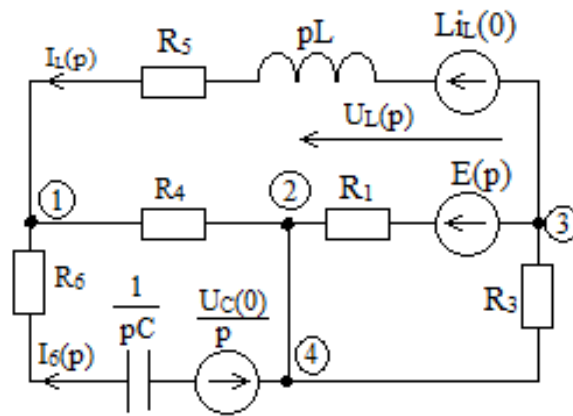


Рис. 9. Операторная схема замещения электрической цепи

В этом разделе курсовой работы следует изменить значение емкости в соответствии с п.2 распечатки задания.

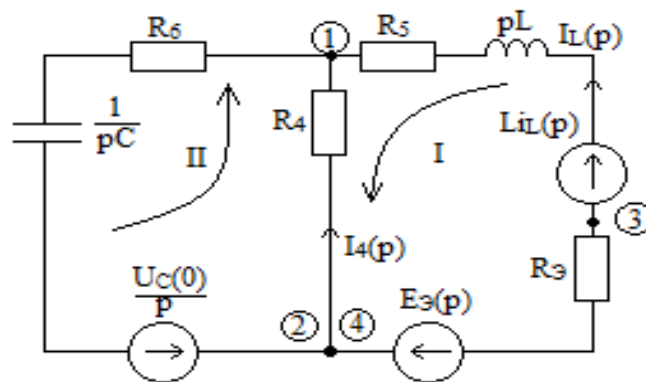


Рис. 10. Преобразованная операторная схема

Примечание 6. Так как постоянные токи и напряжения в докоммутационной цепи не зависят от параметров L и C , то $i_L(0)$ и $U_C(0)$ остаются теми же, что и в предыдущем разделе. Для анализируемого примера $i_L(0) = -3,529$ А, $U_C(0) = 3,529$ В.

3.2.2. Получить изображение искомой функции – тока или напряжения.

В демонстрируемом примере требуется определить ток $i_L(t)$. Для нахождения его операторного изображения $I_L(p) = i_L(t)$ воспользуемся методом контурных токов, для чего предварительно упростим схему (рис. 10). В преобразованной схеме

$$R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}, \quad E_3(p) = \frac{E R_3}{p(R_1 + R_3)}.$$

Для контурных токов $I_{11}(p)$, $I_{22}(p)$ имеем уравнения:

$$\begin{aligned} (R_5 + R_4 + R_3 + pL)I_{11}(p) - R_4 I_{22}(p) &= Li_L(0) - E_3/p, \\ -R_4 I_{11}(p) + [R_4 + R_6 + 1/pC]I_{22}(p) &= U_C(0)/p. \end{aligned}$$

Их решение относительно $I_{11}(p)$ имеет вид

$$I_{11}(p) = I_L(p) = \frac{-(3.529p^2 + 689.1p + 21730)}{p(p^2 + 190.7p + 7967)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

3.2.3. Найти оригинал тока $i_L(t)$ по теореме разложения

$$i_L(t) = \sum_{k=0}^2 \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

где $p_k (k = 0, 1, 2)$ - корни $F_2(p)$; $F_2'(p) = \frac{dF_2}{dp} (p=p_k)$

Найдем корни $F_2(p)$:

$$F_2(p) = p(p^2 + 190.7p + 7967) = 0,$$

для чего отделим корни квадратного трехчлена, стоящего в скобках

$$p^2 + 190.7p + 7967 = 0$$

$$p_1 = -61.8, \quad p_2 = -128.8.$$

К ним следует добавить ещё нулевой корень $p_0 = 0$.

Вычислим $F_1(p_k)$:

$$F_1(p_0) = F_1(0) = -21730, \quad F_1(p_1) = F_1(-61.8) = 8291.1$$

$$F_1(p_2) = F_1(-128.8) = 8481.9.$$

Для вычисления $F_2'(p_k)$ целесообразно представить $F_2(p)$ в виде

$$F_2(p) = (p - p_0)(p - p_1)(p - p_2) = (p - 0)(p - 61.8)(p + 128.8).$$

Тогда

$$\begin{aligned} F_2'(p) &= (p - p_1)(p - p_2) + (p - p_0)(p - p_2) + (p - p_0)(p - p_1) = \\ &= (p + 61.8)(p + 128.8) + p(p + 128.8) + p(p + 61.8), \end{aligned}$$

следовательно,

$$F_2'(p_0) = F_2'(0) = 61.8 \cdot 128.8 = 7967,$$

$$F_2'(p_1) = F_2'(-61.8) = -61.8(-61.8 + 128.8) = -4140.6,$$

$$F_2'(p_2) = F_2'(-128.8) = -128.8(-128.8 + 61.8) = 8629.6.$$

Окончательно получаем искомую функцию

$$i_L(t) = -2.727 - 1.78e^{-61.8t} + 0.98e^{-128.8t}, \text{ A.}$$

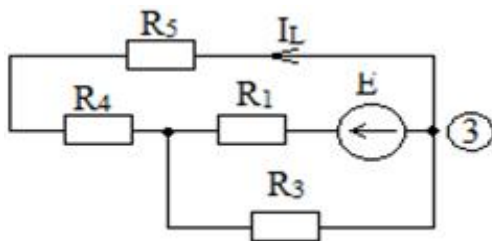


Рис. 11. Послекоммутационная схема анализа установившегося режима постоянного тока

Примечание 7. Вычислять установившееся (принужденное) значение искомой величины с помощью теоремы разложения нерационально (в особенности это справедливо в отношении установившегося синусоидального режима.) Действительно, для рассматриваемого случая постоянного тока имеем (см. схему на рис. 11):

$$I_L = \frac{-E}{R_1 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}} = \frac{-60}{4 + \frac{4(6+3)}{4+6+3}} = -2.727 \text{ A.}$$

Примечание 8. Если найдено $I_L(p)$, то для определения $U_L(p)$, следует вычислить $U_L(p) = pLI(p) - Li_L(0)$, и затем по теореме разложения непосредственно найти $U_L(t)$.

Примечание 9. Рассмотрим особенности нахождения оригинала при комплексно-сопряженных корнях. Пусть, например, требуется определить зависимость $i_4(t)$ (схема – см. рис. 2, в) при $C=CK$. В соответствии с оперативной схемой (рис. 9) составляем уравнение в операторной форме по методу узловых напряжений, приняв за базисный узел 2, 4:

$$\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6 + \frac{1}{pC}} + \frac{1}{R_3 + R_5 + pL} \right) U_{10}(p) = -\frac{U_C(0)/p}{R_6 + \frac{1}{pC}} + \frac{Li_L(0) - E_3/p}{R_5 + R_3 + pL}.$$

Определяем искомый операторный ток $I_4(p) = \frac{-U_0}{R_4}$. После учета численных значений параметров и начальных условий имеем

$$I_4(p) = \frac{1.059p^2 + 585.77p + 71090}{p(0.55p^2 + 203.483p + 260.66)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}$$

Вычисляем корни многочлена $F_2(p)$:

$$p_0 = 0, \quad p_{1,2} = -185 \pm j114.7.$$

Корню $p_0 = 0$ соответствует принужденная составляющая

$$i_{\text{пр}} = \frac{71090}{26066} = 2.727.$$

Оригинал свободной составляющей находится по формуле

$$\begin{aligned} i_{4 \text{ CB}}(t) &= 2\text{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right] = \\ &= 2\text{Re} \left[\frac{1.059(-185 + j114.7)^2 + 585.773(-185 + j114.7) + 71090}{1.65(-185 + j114.7)^2 + 406.966(-185 + j114.7) + 26066} e^{(-185 + j114.7)t} \right] = \\ &= 2\text{Re} [(-0.402 - j0.890)e^{(-185 + j114.7)t}] = 2\text{Re} [0.9770e^{j245.69^\circ} e^{(-185 + j114.7)t}] = \\ &= 1.954e^{-185t} \cos(114.7t + 245.69^\circ). \end{aligned}$$

Получаем искомую функцию

$$i_4(t) = 2.727 + 1.954e^{-185t} \sin(114.7t - 24.31^\circ), \quad A.$$

3.3. Анализ переходных процессов при наличии в цепи синусоидального источника напряжения

Способ построения расчетной схемы указан в задании. Здесь в качестве примера найдем ток $i_2(t)$ в схеме (рис. 12), для которой задано: $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 6 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$, $R_5 = 2 \text{ Ом}$, $R_6 = 3 \text{ Ом}$, $L = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$, $U(t) = 60 \sin(100t + 45^\circ) \text{ В}$, в процессе коммутации ветвь с резистором R_5 размыкается.

За основу решения возьмем операторный метод, однако воспользуемся им только для определения составляющих свободного режима.

3.3.1. Определить принужденную составляющую искомой функции. В рассматриваемом примере найдём установившийся ток $i_{2\text{пр}}(t) = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{i2})$. Эту

задачу удобно решить символическим методом на основе послекоммутационной схемы (рис. 14). Выполняя анализ, имеем

$$i_{2mnp} = i_{Lmnp} = \frac{\dot{E}_m}{\left[R_2 + R_4 + j\omega L + \frac{R_6(R_3 + R_1)}{R_6 + R_3 + R_1} \right]} = \frac{60e^{j45^\circ}}{\left[(6 + 4 + j5) + \frac{3(3 + 5)}{3 + 3 + 5} \right]} = 4.556e^{j22.68^\circ}, \quad \text{А.}$$

Следовательно, искомый ток $i_{2np}(t) = i_{Lnp}(t) = 4.556 \sin(100t + 22.68^\circ)$, и его начальное значение $i_{Lnp}(0) = 4.556 \sin 22.68^\circ = 1.757 \text{ А}$.

3.3.2. Вычислить начальное значение тока и индуктивности $i_L(0)$, для чего проанализировать установившийся синусоидальный режим в докоммутационной схеме.

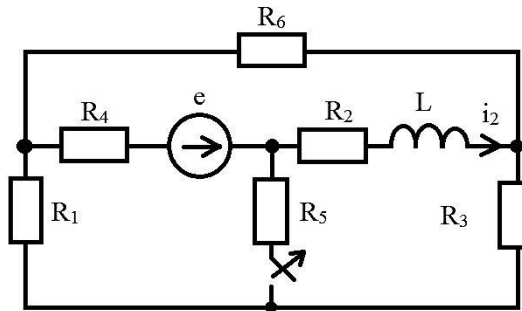


Рис. 12. Схема к анализу переходного процесса $i_2(t)$

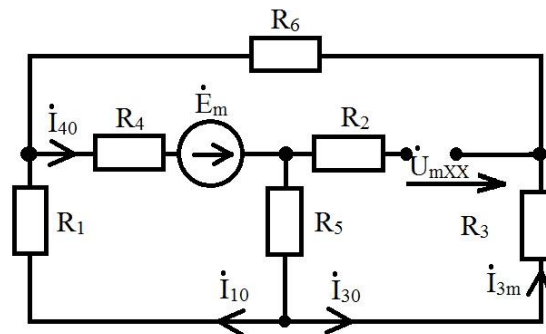


Рис. 13. Схема к расчету напряжения \dot{U}_{mxx}

Найдем \dot{I}_{Lm} по методу эквивалентного генератора

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{\dot{U}_{mxx}}{\underline{Z}_r + j\omega L},$$

где \dot{U}_{mxx} – напряжение на разомкнутых зажимах индуктивности (рис.13);

\underline{Z}_r – входное сопротивление цепи по отношению к этим зажимам.

Из анализа схемы получаем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mxx} &= R_3 \dot{I}_{30} + R_5 \dot{I}_{40} \\ \dot{I}_{40} &= \frac{\dot{E}_m}{\left[R_4 + \frac{R_1(R_3 + R_6)}{R_1 + R_3 + R_6} \right]}, \\ \dot{I}_{30} &= \dot{I}_{40} + \frac{R_1}{R_1 + R_3 + R_6}. \end{aligned}$$

Для нахождения \underline{z}_r необходимо «треугольник» $R_1 - R_4 - R_5$ преобразовать в «звезду» и получить три сопротивления:

$$R' = R_6 + \left[\frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4 + R_5} \right], \quad R'' = R_3 + \left[\frac{R_1 R_5}{R_1 + R_4 + R_5} \right], \quad R''' = R_2 + \left[\frac{R_4 R_5}{R_1 + R_4 + R_5} \right].$$

В результате имеем $\underline{z}_r = R''' + \frac{R' R''}{R' + R''}$.

Учитывая численные значения заданных величин, получаем:

$\dot{U}_{mxx} = 23.125 e^{j45^\circ} \text{ В}$, $\underline{z}_r = 8.885 \text{ Ом}$, $X_L = \omega L = 5 \text{ Ом}$, откуда

$$\dot{I}_{Lm} = \frac{23.125 e^{j45^\circ}}{8.885 + j5} = 2.268 e^{j15.63^\circ}, \text{ что соответствует } i_L(t) = 2.268 \sin(100 + 15.63^\circ) \text{ А.}$$

Таким образом $i_L(0) = 2.268 \sin 15.63^\circ = 0.611 \text{ А}$.

3.3.3. Определить свободную составляющую для независимого начального условия

$$i_{Lcb}(0) = i_L(0) - i_{Lnp}(0) = 0,611 - 1,757 = -1,146 \text{ А.}$$

3.3.4. Построить операторную схему для расчета изображения свободной составляющей (рис. 15). В ней последовательно с индуктивностью включен источник напряжения $Li_{Lcb}(0)$. Заданный источник $U(t)$ (точнее, его изображение) в такой схеме не учитывается, и место его включения закорачивается.

Примечание 10. Если в цепи имеется емкость, то при построении расчетной операторной схемы последовательность с ней включается в источниках $[-UC_{cb}(0)/p]$. Вообще при наличии нескольких индуктивностей и емкостей последовательно с каждым из таких элементов включается соответствующий источник.

Источник тока при условии, если он задан, также исключается, и ветвь, в которой он действовал, размыкается.

3.3.5. Найти изображение искомой функции, для чего решить задачу анализа операторной схемы для свободных составляющих любым из методов.

В примере (рис.15) получаем

$$I_{2cb}(p) = \frac{Li_{Lcb}(0)}{R_2 + R_4 + pL + \frac{R_6(R_1 + R_3)}{R_6 + R_3 + R_1}} = -\frac{1.146}{p + 243.63}.$$

3.3.6. Перейти от изображения к его оригиналу

$$i_{2cb}(t) = -1.146 e^{-243.63t} \text{ А.}$$

3.3.7. Составить полное выражение искомой функции

$$i_2(t) = i_{2np}(t) + i_{2cb}(t) = 4,556 \sin(100t + 22.68^\circ) - 1.146 e^{-243.63t} \text{ А.}$$

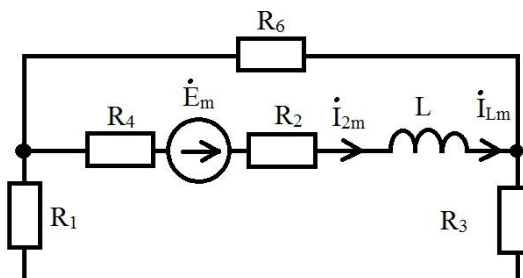


Рис. 14. Схема к расчету принужденных составляющих

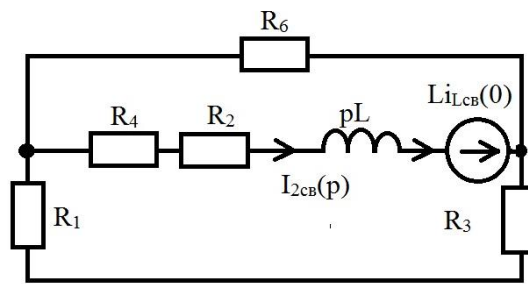


Рис.15. Операторная схема для расчета свободных составляющих

3.4. Анализ переходного процесса в заданной электрической цепи при включении ее под действие источника напряжения произвольной формы

Эта часть курсовой работы решается на основании интеграла Дюамеля. Порядок построения расчетной схемы приведен в задании (п. 1.2.2). Ниже для примера рассмотрим переходный процесс в схеме рис. 16 при включении ее под действие импульса $U(t)$, вид которого приведен на рис.17. Пусть заданы параметры: $C = 2$ мкф, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 2$ Ом, $R_6 = 3$ Ом. Требуется определить входной ток $i_4(t)$.

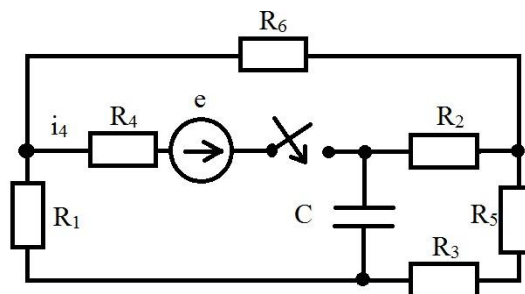


Рис. 16. Схема у расчету методом интеграла Дюамеля

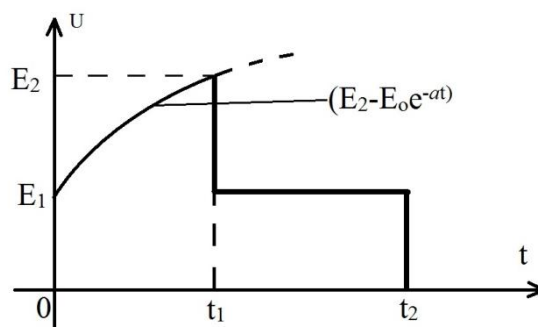


Рис. 17. Вид переходного напряжения

3.4.1. Прежде всего следует найти переходную функцию (переходную проводимость) $k(t) = y(t)$, для чего найдем ток $i_4^o(t)$ от включения заданной цепи под действие единичного постоянного источника напряжения $U(t) = E = 18 \text{ В}$ при нулевых начальных условиях.

Задачу решим операторным методом, для чего составим расчетную схему (рис. 18). С учетом численных значений ее параметров имеем

$$I_4(p) = \frac{9.077p + 50000}{p(60.54p + 6154000)}.$$

Переходя к оригиналу, получаем

$$y(t) = i_4^o(t) = 0.081 + 0.089e^{-10275t}.$$

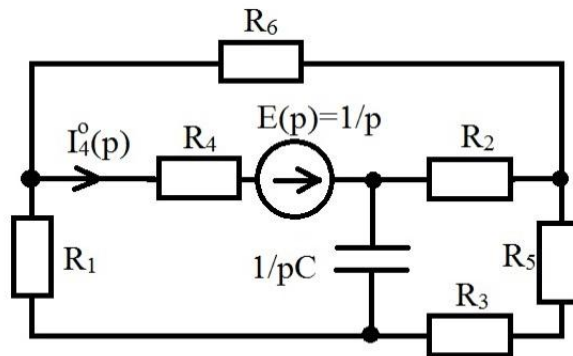


Рис. 18. Операторная схема к расчету переходной функции

3.4.2. Применяя интеграл Дюамеля, сформулировать выражение искомой функции для различных интервалов задания входного импульса. Аналитическую запись формы входного импульса можно представить в виде

$$\begin{aligned} e(t) &= E_2 - E_0 e^{-\alpha t}, & 0 \leq t < t_1 \\ e(t) &= E_1, & t_1 \leq t < t_2 \\ e(t) &= 0, & t_2 \leq t < \infty \end{aligned}$$

Для каждого из указанных интервалов получить отдельные решения. В основу их формирования положить общее выражение

$$i_4(t) = U(0)y(t) + \int_0^{t_1} U'(\tau)y(t-\tau)d\tau,$$

где $U(0)$ – начальное значение $U(t)$, $U'(\tau) = \frac{dU}{dt}(t=\tau)$.

Так для интервала $0 \leq t < t_1$ имеем

$$U(0) = E_1, \quad U'(\tau) = \alpha E_0 e^{-\alpha \tau},$$

$$y(t-\tau) = 0.081 + 0.069e^{-10275(t-\tau)}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} i_4(t) &= U(0)y(t) + \int_0^{t_1} U'(\tau)y(t-\tau)d\tau = \\ &= E_1(0.081 + 0.069e^{-10275t}) + \int_0^{t_1} \alpha E_0 e^{-\alpha \tau} [0.081 + 0.069e^{-10275(t-\tau)}] d\tau. \end{aligned}$$

При составлении выражения $i_4(t)$ для второго интервала следует учесть, что аналитические выражения $U(t)$ в пределах первого и второго интервалов не совпадают, поэтому определенный интеграл Дюамеля следует предоставить в виде суммы

$$\int_0^{t_1} U'(\tau)y(t-\tau)d\tau + \int_{t_1}^t U'(\tau)y(t-\tau)d\tau,$$

но так как для $t_1 \leq t < t_2$, то второе слагаемое равно нулю.

Кроме того, в момент $t = t_1$ имеет место однообразное значение входного напряжения, что следует учесть слагаемым $[(E_2 - E_0 e^{-\alpha t_1}) - E_1]y(t - t_1)$. Таким образом, для $t_1 \leq t < t_2$ имеем

$i_4(t) = U(0)y(t) + \int_0^{t_1} U'(\tau)y(t-\tau)d\tau - [(E_2 - E_0 e^{-\alpha t_1}) - E_1]y(t - t_1)$. Аналогично рассуждая, получим напряжения для $t \geq t_2$

$$i_4(t) = U(0)y(t) + \int_0^{t_1} U'(\tau)y(t-\tau)d\tau - [(E_2 - E_0 e^{-\alpha t_1})y(t - t_1) - E_1 y(t - t_2)].$$

При необходимости каждое из выражений может быть развернуто более детально.

3.5. Анализ переходных процессов в электрической цепи методом сопряжения интервалов при кусочно-линейной аппроксимации характеристик нелинейных элементов

В курсовой работе имеется инструкция для составления схемы этого раздела. Здесь в качестве примера рассмотрена схема с одним нелинейным элементом – емкостью C (рис. 19). Ее кулонвольтная характеристика приведена на рис. 22. Определим напряжение $U_{C2}(t)$ при условии, что $E = 40$ В, $R_1 = 0,3$ Ом, $R_2 = 0,2$ Ом, $R_3 = 0,5$ Ом, $R_4 = 0,4$ Ом, $R_5 = 0,2$ Ом, $R_6 = 0,5$ Ом.

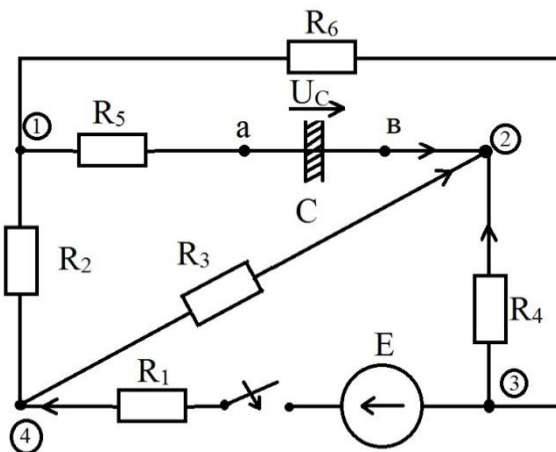


Рис. 19. Исходная схема с нелинейной емкостью

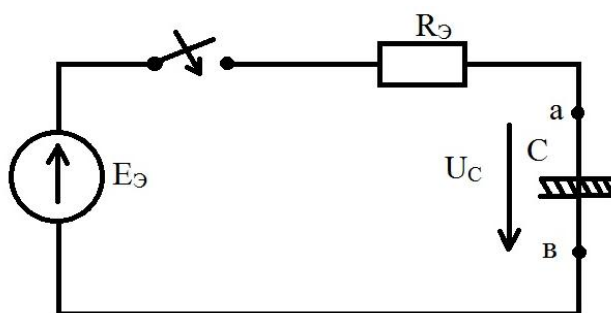


Рис. 20. Преобразованная схема с нелинейной емкостью

3.5.1. Учитывая, что электрическая цепь первого порядка и что нелинейным является единственный энергоемкий элемент (в данном случае – емкость), заменить всю резистивную часть цепи с источником по отношению к зажимам *ав* емкости эквивалентным источником E_3 с внутренним сопротивлением R_3 (рис. 20).

В соответствии с теоремой об активном двухполюснике вычисляем R_3 как входное сопротивление схемы по отношению к зажимам *ав*.

$$R_3 = R_5 + R_{34} + \frac{(R_6 + R_{14})(R_2 + R_{13})}{R_6 + R_{14} + R_2 + R_{13}},$$

где $R_{13} = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}$, $R_{14} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}$, $R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4}$
(преобразование «треугольника» $R_1 - R_3 - R_4$ в звезду).

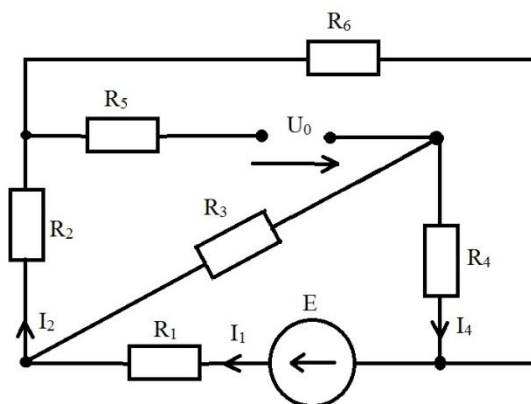


Рис. 21. Схема к расчету E_3

Напряжение эквивалентного генератора находим как напряжение на зажимах разомкнутой ветви *ав* (рис. 21):

$$E_3 = U_0 = E - R_4 I_4 - R_1 I_1 - R_2 I_2,$$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_n}, \quad R_n = \frac{(R_3 + R_4)(R_2 + R_6)}{R_3 + R_4 + R_2 + R_6},$$

$$U_n = R_n I_1, \quad I_4 = \frac{U_n}{R_3 + R_4} \quad I_2 = I_1 - I_4.$$

С учетом численных значений: $E_3 = 6.1$ В, $R_3 = 0.58$ Ом.

3.5.2. Заданную характеристику нелинейного элемента аппроксимировать двумя отрезками.

На рис. 22 приведена кулонвольтная характеристика емкости и ее кусочно-линейная аппроксимация прямыми $0 - a$ и $a - b$. Точка « b » должна быть выбрана из таких соображений, чтобы аппроксимирующая функция перекрывала весь диапазон возможных изменений независимой переменной U . Здесь целесообразно выбрать напряжение равным или немного меньшим, чем E_3 . В целом для выбора положений точек a и b , строго говоря, следует решить экстремальную задачу обеспечения минимума площади между заданной нелинейной характеристикой и ее кусочно-линейным представлением. Учитывая учебный характер курсовой работы, предлагается положение точки a определить «на глаз».

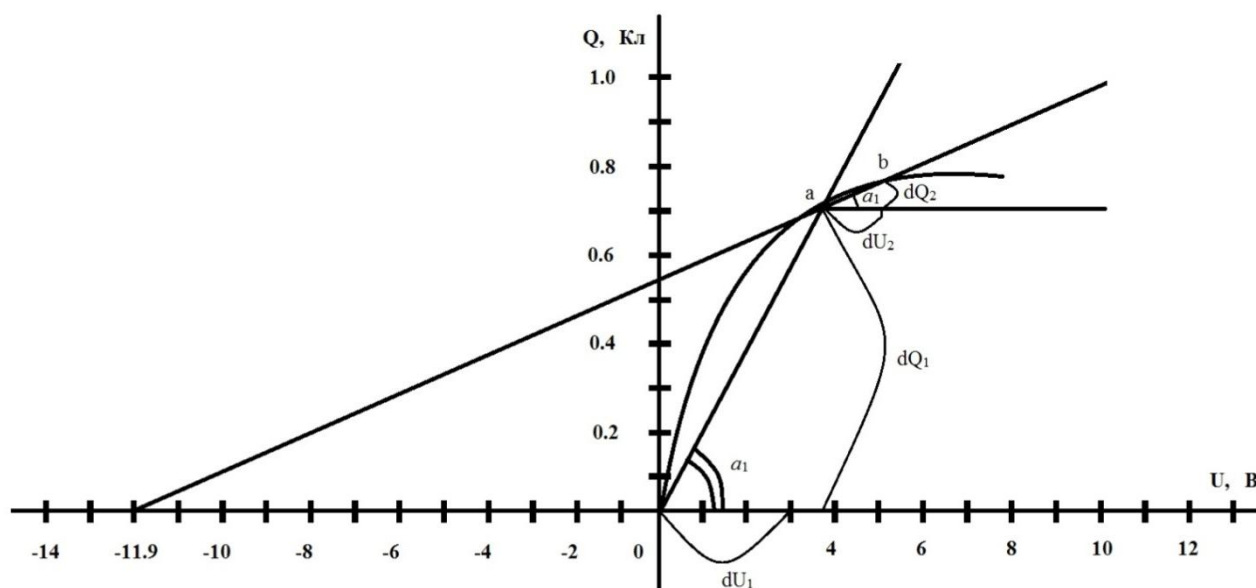


Рис. 22. Характеристика нелинейного элемента и ее кусочно-линейная аппроксимация

3.5.3. Определить последовательность рассмотрения отрезков прямых в соответствии с перемещением рабочей точки по характеристике нелинейного элемента.

В анализируемом примере искомое напряжение U_C изменяется при переходном процессе от нуля до E_3 , и, следовательно, необходимо рассматривать сначала отрезок $0 - a$, затем $a - b$.

3.5.4. Для каждого линейного участка нелинейной характеристики рассчитать переходной процесс и определить моменты перехода с одного отрезка характеристики на другой.

В примере для отрезка $0 - a$ нелинейный емкостный элемент заменим линейным с параметром

$$C_1 = m_C \operatorname{tg} \alpha_1 = m_C \frac{\Delta Q_1}{\Delta U_1} = 0.21 \text{ Ф},$$

где $m_C = m_Q / m_U$ – масштабный коэффициент.

Получаем задачу анализа переходного процесса в последовательной RC-схеме при включении ее на постоянное напряжение E_3 с нулевыми начальными условиями

$$U_{C_1}(t) = E_3 [1 - e^{-(1/R_3 C_1)t}] = 6.1 - 6.1e^{-7.88t} \text{ В},$$

Момент t_1 перехода характеристики с отрезка $0 - a$ на отрезок $a - b$ находим из условия $U_C(t_1) = 3.2 \text{ В}$

$$t_1 = \frac{\ln [(3.2 - 6.1)/(-6.1)]}{-7.88} = 9.44 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$$

Расчет зависимости $U_C(t)$ для отрезка $a - b$, не проходящего через начало координат, проводится при замене нелинейной емкости последовательно соединенными линейной емкостью C_2 и источником ЭДС E_2 , причем

$$C_2 = m_c \operatorname{tg} \alpha_2 = m_c \frac{\Delta Q_2}{\Delta U_2} = 4.48 \cdot 10^{-2} \text{ Ф}, \quad E_2 = 11.9 \text{ В.}$$

Здесь необходимо решить задачу анализа переходного процесса в последовательной RC -схеме при включении ее на постоянное напряжение $E_3 + E_2$ и при начальных условиях

$$U_{C_2}(\tau = 0) = U_{C_1}(t_1) = 3.2 \text{ В.}$$

где τ – время, отсчитываемое от момента t_1 т.е. $t = t_1 + \tau$.

В результате решения указанной задачи получаем

$$U_{C_2}(t) = 18 - 14.8e^{-38.49(t-t_1)}.$$

Таким образом, искомое напряжение U_C меняется по закону:

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_{C_1}(t) = 6.1(1 - e^{-7.88t}) & \text{при } 0 \leq t \leq 9.44 \cdot 10^{-2} \text{ с} \\ U_{C_2}(t) = 18 - 14.8e^{-38.49(t-9.44 \cdot 10^{-2})} & \text{при } t > 9.44 \cdot 10^{-2} \text{ с} \end{array} \right.$$

Примечание 11. При отрицательном E_3 необходимо построить ветвь характеристики для отрицательных значений Q и U_C как зеркальное отображение ветви для положительных значений Q и U_C .

Примечание 12. Вебер-амперную характеристику нелинейной индуктивности также аппроксимировать с помощью двух линейных участков, причем тому участку, который не проходит через начало координат, поставить в соответствие линейную индуктивность, шунтированную источником тока (рис. 23).

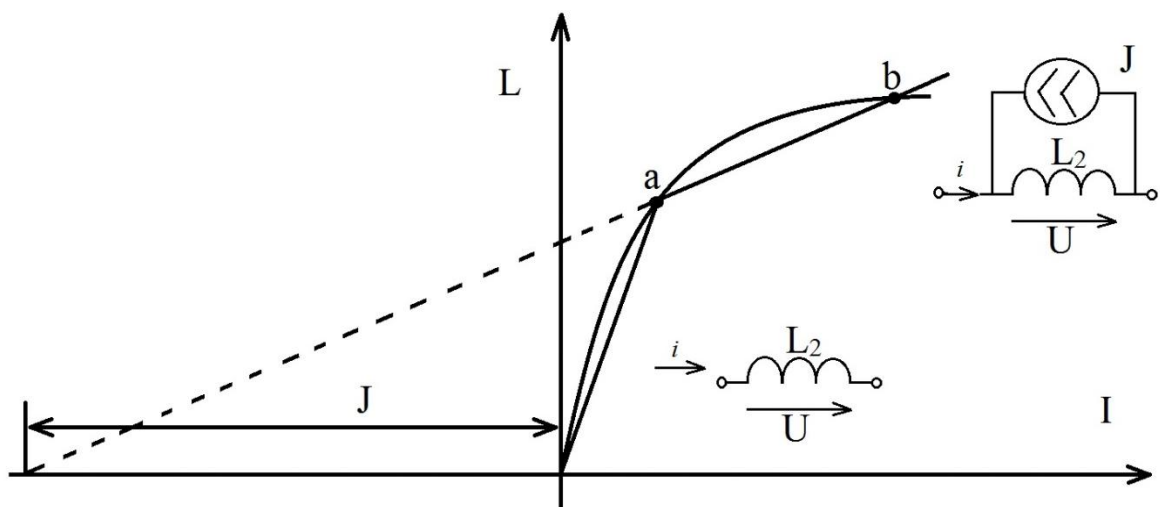


Рис. 23. Характеристика нелинейной индуктивности

Примечание 13. Здесь, в простейшем примере, рассмотрен монотонный (возрастающий) характер изменения искомой величины, так что потребовалось только один раз в момент времени t_l сопрягать два решения.

В более общем случае задача может существенно усложниться за счет:

- увеличения числа L и C – элементов, линейных и нелинейных (сюда же следует отнести случаи появления нелинейных резисторов);
- введения большего чем двух участков кусочно-линейной аппроксимации;
- действия в цепи нескольких источников, постоянных и переменных, импульсных и периодических.

При этом переходный процесс за весь рассматриваемый промежуток времени разбивается на интервалы, заключенные между двумя соседними переходами с одного линейного участка на другой. Каждый такой переход сопровождается определением момента его наступления и сопряжением нового решения с предыдущим.

Процесс сопряжения состоит в отыскании постоянных интегрирования нового решения на основе физических условий неизменности напряжений на емкости и токов в индуктивностях на границе двух соседних временных интервалов.

3.6. Анализ переходного процесса в заданной электрической цепи методом переменных состояния

При расчете переходного процесса методом переменных состояния рекомендуется следующий порядок:

1. Выбрать переменные состояния. В предложенных для расчета схемах это напряжения на емкостных элементах u_C и токи в индуктивных катушках i_L .
2. Составить систему дифференциальных уравнений для первых производных от переменных состояния.

Для этого описать послекоммутационную схему с помощью законов Кирхгофа и решить ее относительно первых производных от переменных состояния $\frac{du_C}{dt}$ и $\frac{di_L}{dt}$ в зависимости от переменных u_C , i_L и источников ЭДС (в предлагаемых схемах источник ЭДС – единственный).

В матричной форме эта система дифференциальных уравнений 1-го порядка будет иметь вид:

$$\dot{X} = AX + BV, \quad (4)$$

где \dot{X} – столбец производных $\frac{du_C}{dt}$, $\frac{di_L}{dt}$;

X – вектор - столбец переменных состояния.

В цепях 2-го порядка:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}.$$

A – квадратная матрица порядка n , определяемая топологией электрической цепи и параметрами ее элементов. В цепях второго порядка эта матрица имеет порядок 2×2 .

Матрица B – прямоугольная матрица порядка $n \times p$, где n – порядок цепи.

Матрица V – столбец $p \times 1$ – определяется источниками ЭДС и источниками токов схемы и называется *вектором входных величин*.

3. Составить систему алгебраических уравнений для искомых переменных, которые называются *выходными*. Это токи в любых ветвях схемы (кроме тока i_L) и напряжения на любых элементах схемы (кроме напряжения u_C). Полученные алгебраические уравнения устанавливают связи между выходными переменными, с одной стороны, и переменными состояния и источниками напряжения и тока схемы – с другой. В матричной форме эта система алгебраических уравнений имеет вид

$$Y = CX + DV,$$

где Y – вектор выходных величин; C, D – матрицы, определяемые топологией электрической цепи, параметрами ее элементов и количеством искомых переменных.

Для того чтобы описать послекоммутационную схему с помощью законов Кирхгофа и выразить производные $\frac{du_C}{dt}$ и $\frac{di_L}{dt}$ через переменные состояния и значения напряжений источников напряжения и токов источников тока, удобно начинать анализ с построения нормального дерева заданной электрической схемы. *Нормальное дерево* – это дерево, построенное с соблюдением определенного приоритета ветвей, включаемых в его состав, а именно: ветви с источниками напряжения; ветви с емкостными элементами; ветви с резистивными элементами. Заметим, что речь идет о цепях, не содержащих емкостных сечений и индуктивных контуров.

Пример формирования уравнений при подготовке к решению задачи по расчету переходных процессов методом переменных состояния

Пусть для цепи (рис. 24) известны параметры $L = 0,1$ Гн, $C = 10^3$ мкФ, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $U = 100$ В. Необходимо определить закон изменения в переходном процессе функции $i_2(t)$.

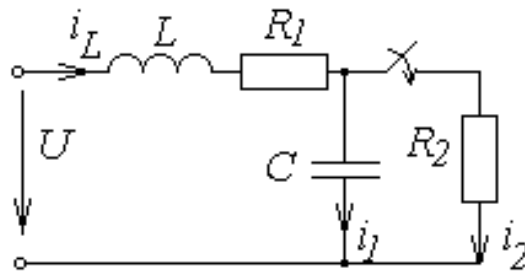


Рис. 24. Схема к примеру по расчету переходных процессов методом переменных состояния

Построим нормальное дерево (рис. 25). Заметим, что при его построении учитываются все узлы графа, в том числе и устранимые. Обозначим ветви дерева сплошными линиями, а хорды – пунктирными.

Отметим на графе основные сечения (разрезы), перечислив их в порядке приоритетов ветвей дерева.

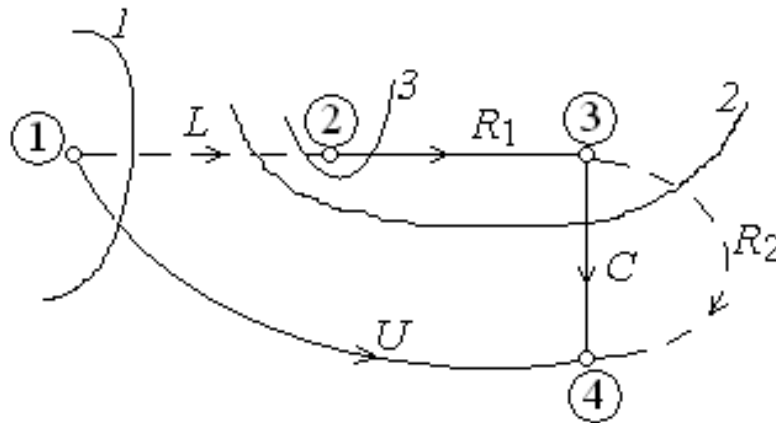


Рис. 25. Граф схемы рис. 24

Для основных разрезов составим систему уравнений по первому закону Кирхгофа, а для основных контуров – по второму.

$$i_C + i_{R2} - i_L = 0, \quad (5)$$

$$-i_L + i_{R1} = 0, \quad (6)$$

$$i_L + i_U = 0, \quad (7)$$

$$u_L + u_{R1} + u_C - U = 0, \quad (8)$$

$$u_{R2} - u_C = 0. \quad (9)$$

Из этих уравнений выбираем два уравнения (5) и (8), содержащие ток i_C и напряжение u_L :

$$i_C = -i_{R2} + i_L,$$

$$u_L = -u_C - u_{R1} + U.$$

Далее с помощью оставшихся уравнений системы выражаем токи и напряжения правой части этих двух уравнений через переменные состояния. Таким образом, получаем следующую систему уравнений:

$$C \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R_2} u_C + i_L,$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -u_C - R_1 i_L + U.$$

Следовательно,

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [U].$$

Здесь векторы и матрицы следующие:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{V} = [U].$$

Если искомой величиной является функция $i_2(t)$, то $[\mathbf{Y}] = [i_2(t)]$. В соответствии с математической формулировкой задачи вектор \mathbf{Y} также должен быть выражен через переменные состояния. Эти связи находятся из анализа той же системы уравнений (5)... (9).

Для данного примера $i_{R2} = \frac{1}{R_2} u_C$. Поэтому матрицы \mathbf{C} и \mathbf{B} принимают вид

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [0].$$

Решение такой системы можно получить численным методом с помощью, например, пакета MathCad.

Для этого выполним операции перемножения и суммирования в правой части уравнения (4) и подставим численные значения параметров схемы. Получаем в системе (4) справа матрицу-столбец. Присвоим значения этого столбца матрице, которую обозначим как $D(t, x)$.

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} -100x_1 + 1000x_2 \\ -10x_1 - 100x_2 + 1000 \end{pmatrix},$$

где x_1 и x_2 – элементы вектора X .

Для решения этой системы дифференциальных уравнений выберем *метод Рунге – Кутты с переменным шагом*. Для этого в пакете MathCad выбираем окна в следующем порядке: **ФУНКЦИИ – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ – Rkadapt**.

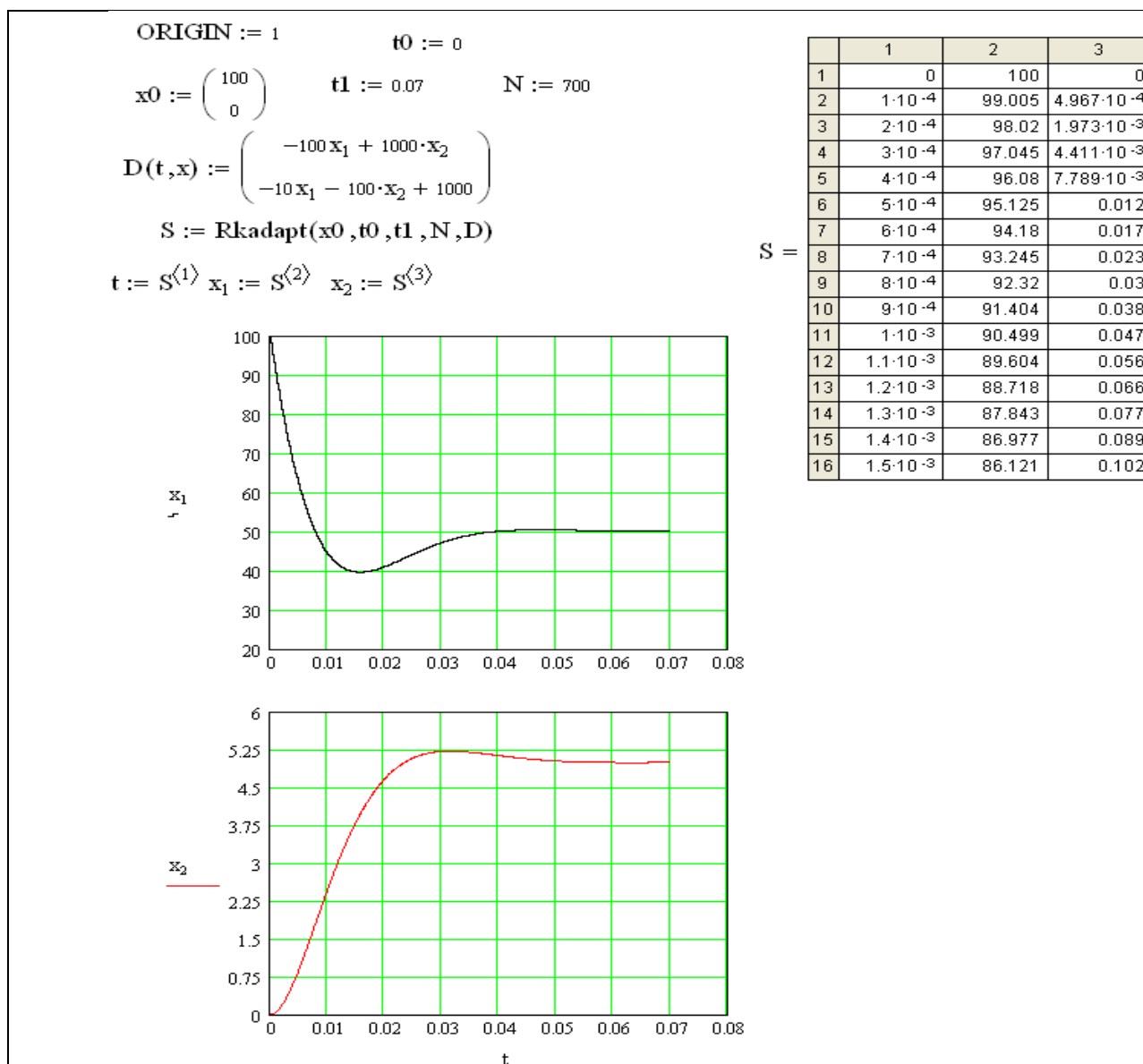


Рис. 26. Общий вид окна при решении задачи с использованием метода переменных состояния в пакете MathCad

Для того чтобы воспользоваться этой функцией MathCad, необходимо задать вектор независимых начальных условий, который обозначим как $x0$, указать начало $t0$ и конец $t1$ времени интегрирования, а также количество точек N , для которых проводится решение.

$$x0 := \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t0 := 0 \quad t1 := 0.01 \quad N := 500 .$$

Вектор – результат решения системы дифференциальных уравнений обозначим S (solving). Тогда ввод команды для решения будет выглядеть следующим образом:

$$S := Rkadapt(x0, t0, t1, N, D) .$$

Выделим из матрицы решения S независимую переменную t и функции x_1 и x_2 , учитывая, что аргумент расположен в первом столбце, а функции x_1 и x_2 в последующих столбцах. Так, для рассматриваемой схемы

$$t := S^{(1)} \quad x_1 := S^{(2)} \quad x_2 := S^{(3)}$$

(здесь счет элементов матриц начинается с единицы).

Для того чтобы решить алгебраическую часть общей системы уравнений, надо искомую функцию выразить через полученные в результате интегрирования переменные состояния. Тогда искомый ток i_{R2} найдем как

$$i_{R2} := 0.1 * x_1 .$$

На рис. 26 представлен примерный вид окна пакета MathCad.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники: Ч. 1. СПб.: Лань, 2009. 592 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. 12-е изд. М.: Юрайт, 2014. 701 с.
3. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В. и др. Основы теории цепей. 5-е изд. М.: Энергоатомиздат, 2006. 528 с.
4. Теоретические основы электротехники: учебник. В 3 т. Т. 1. 5-е изд. / К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин. СПб.: Питер, 2009. 512 с.