**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А.Н. Туполева**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и контрольные задания

Для студентов–заочников института КТЗИ

2004

Учебная дисциплина «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы» представлена в виде 5 частей:

– Случайные события
– Случайные величины
– Системы случайных величин
– Предельные теоремы теории вероятностей
– Основы математической статистики.

По теории вероятностей и математической статистике имеется обширная литература. Среди них можно порекомендовать следующие учебные пособия:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 2000.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1999.
3. Роднищев Н.Е. Курс теории вероятностей и математической статистики. Казань, КГТУ,. 2001.

Рекомендуется следующая схема изучения каждой части:

1) ознакомление с методическими указаниями, цель которых дать общее представление о предмете и его узловых моментах;
2) конспектирование теоретического материала в соответствии с методическими указаниями;
3) параллельная проверка усвоения теоретического материала путем ответов на вопросы самопроверки;
4) решение задач для лучшего уяснения теоретических сведений и приобретения практических навыков в применении теории вероятностей и математической статистики.

СОДЕРЖАНИЕ

Программа курса

"Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы»

1.*Случайные события*

Первоначальные сведения теории вероятностей (2 часа)

Понятие случайного события. Классификация случайных событий. Классическое (теоретическое) определение вероятности случайного события. Статистическое определение вероятности случайного события. Принцип практической невозможности событий с вероятностью, близкой к нулю и принцип практической возможности событий с вероятностью, близкой к единице.

Вероятности суммы и произведения случайных событий. Формулы полной вероятности, Байсса, Бернулли и Пуассона (4 часа)

Сумма несовместных событий. Сумма совместных событий. Вероятность суммы несовместных событий. Вероятность суммы событий, образующих полную группу событий. Зависимые и независимые случайные события. Произведение случайных событий. Вероятность произведения двух независимых событий. Случайные события, независимые в совокупности. Вероятность произведения нескольких случайных событий. Условная вероятность случайного события. Вероятность произведения двух зависимых случайных событий. Вероятность произведения нескольких случайных событий. Вероятность суммы двух совместных событий. Вероятность суммы нескольких совместных событий. Формула полной вероятности. Формула Байесса. Формулы Бернулли и Пуассона о повторении испытаний.

2. Случайные величины

Случайная величина, ее закон распределения и числовые характеристики (2 часа)

Понятие случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Зависимые и независимые случайные величины, корреляционный момент. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины и способы его представления. Законы распределения непрерывной случайной величины. Функция распределения вероятностей. Свойства функции распределения вероятностей. Плотность вероятности. Свойства плотности вероятности. Числовые характеристики случайной величины. Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайных величин. Вероятностный смысл математического ожидания. Свойства математического ожидания. Дисперсия дискретной и непрерывной случайных величин как мера рассеяния значений случайной величины. Свойства дисперсии. Среднее квадратическое отклонение. Начальные и центральные моменты случайных величин.

Нормально распределенные непрерывные случайные величины (4 часа)

Кривая Гаусса. Нормированная нормально распределенная непрерывная случайная величина. Функция Лапласа (интеграл вероятностей). Вероятность заданного отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Оценка отклонения распределения некоторой непрерывной случайной величины от нормального. Коэффициент асимметрии и эксцесса.

3. Система двух случайных величин

Система случайных величин, ее законы распределения и числовые характеристики (4 часа)

Понятие системы случайных величин. Дискретные и непрерывные системы случайных величин. Закон распределения системы двух дискретных случайных величин. Функция распределения системы двух непрерывных случайных величин и ее свойства. Плотность вероятностей системы двух непрерывных случайных величин и ее свойства. Вероятность попадания системы двух непрерывных случайных величин в заданную область. Условные плотности вероятности системы двух непрерывных случайных величин. Зависимые и независимые случайные величины. Условие независимости двух случайных величин. Математическое ожидание суммы случайных величин. Корреляционный момент и коэффициент корреляции системы двух случайных величин. Коррелированные и некоррелированные случайные величины. Корреляционная и нормированная корреляционная матрица. Дисперсия суммы случайных величин. Условные математические ожидания и дисперсии системы двух случайных величин. Линии регрессии системы двух случайных величин.

4. Предельные теоремы теории вероятностей (2 часа)

Сущность закона больших чисел. Неравенство Чебышева его теоретическое и практическое значение. Теорема Чебышева и ее значение для практики. Теорема Бернулли и ее практическое значение. Формулировка центральной предельной теоремы Ляпунова.

5.Основы математической статистики

Точечное оценивание параметров распределений случайных величин (2 часа)

Эмпирические распределения и статистическая оценка параметров распределения. Полигон и гистограмма. Эмпирическая функция распределения. Критерии оптимальности точечного оценивания параметров: состоятельность, несмещенность, эффективность, достаточность.

Интервальное оценивание параметров распределений случайных величин (4 часа)

Понятие доверительного интервала и доверительной вероятности. Доверительные интервалы математического ожидания и дисперсии.

Первичная обработка результатов измерений случайной величины (4 часа)

Построение случайной выборки измерений и простого статистического ряда. Построение вариационного ряда. Порядковые статистики. Систематические и случайные ошибки измерений. Грубые ошибки измерений. Методы исключения грубых ошибок. Оценка математического ожидания случайной величины. Оценка дисперсии наблюдаемой случайной величины. Оценка вероятности случайного события. Оценка функции и плотности распределения случайной величины.

Законы распределения и характеристики случайных процессов (4 часа)

Основные понятия, определения случайных процессов (СП). Вероятностные характеристики случайного процесса: функции и плотность распределения. Числовые характеристики СП: математическое ожидание, дисперсия, ковариационная и корреляционная функции.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Первоначальные сведения теории вероятностей

Вентцель Е. С. Гл. 1; гл. 2, §1 – 3,5.

Гмурман В. Е. Гл. 1.

Роднищев Н.Е. Гл. 1.

При изучении этого раздела требуется усвоить следующие понятия: случайное событие, невозможное событие, достоверное событие, совместные и несовместные события, полная группа событий, противоположные события, вероятность – количественная характеристика возможности появления случайного события. Классическое определение вероятности случайного события, статистическое определение вероятности события. Обратить внимание на то, что теория вероятностей – наука о вероятностных неслучайных закономерностях, наблюдаемых в массовых явлениях и испытаниях, а также на то, что относительная частота (статистическая вероятность) события обладает свойством устойчивости при большом числе испытаний.

Статистическое определение вероятности – более общее определение, чем классическое, поскольку оно позволяет определять вероятности таких случайных событий, которые нельзя определить по классической схеме. Но следует иметь в виду, что для определения относительной частоты случайного события требуется фактическое проведение испытаний и, как правило, достаточно большого объема.

Следует также обратить внимание на два принципа теории вероятностей, на которых основывается практическое применение этой науки: принцип практической невозможности событий с малой вероятностью и принцип практической достоверности событий с вероятностью весьма близкой к единице.

Путем решения достаточно большого числа задач на вычисление вероятности события по классической схеме, закрепить полученные знания.

Вопросы для самопроверки: Роднищев Н.Е. стр. 18.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое случайное событие?
2. Перечислите и дайте определение основных видов событий.
3. Что такое элементарный исход испытаний?
4. Привести формулу пояснить её содержание для определения вероятности по классической и статистической схеме.
5. Дать пример, когда вероятность события невозможно найти по классической схеме.
6. В чём состоит смысл принципов практической невозможности события с малой вероятностью и практической достоверности событий с вероятностью очень близкой к единице?

Вероятности суммы и произведения случайных событий. Формула полной вероятности, Байесса, Бернулли и Пуассона.

Венцель Е. С. Гл.3, Гл.4.

Гмурман В. Е. Гл.2, гл.3, гл.4. гл.5 §1.

Роднищев Н.Е. Гл. 2.

При проработке данного раздела, прежде всего, необходимо твердо уяснить такие понятия как сумма и произведение событий. Следует иметь в виду, что формулы для определения вероятностей суммы и произведения событий являются основными для дальнейшего изложения теории вероятностей. Они позволяют по известным вероятностям одних событий вычислить вероятность других событий. По указанной литературе изучить выводы формул для вероятности суммы несовместных и совместных событий, для вероятности произведения независимых и зависимых событий. Путем решения ряда задач приобрести навыки по применению формул для суммы и произведения событий.

Важным для практических приложений теории вероятностей являются формула полной вероятности и формула Байесса, а также формула Бернулли и Пуассона для повторных независимых испытаний, которые получаются с использованием предыдущих результатов. Следует уяснить круг задач, требующих применения указанных формул.

Вопросы для самопроверки: Роднищев Н.Е. стр. 34.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое сумма случайных событий и как она определяется в случаях совместных и несовместных событий?

2. Чему равна вероятность суммы несовместных и совместных событий?

3. Как определяется вероятность суммы событий, образующих полную группу событий?

4. Пояснить что такое условная вероятность события? Какие события называются независимыми?

5. Приведите формулы для вероятности независимых и зависимых событий.

6. Как определяется вероятность появления хотя бы одного из совокупности событий?

7. Что позволяет определять формула полной вероятности?

8. Какой смысл имеет условная вероятность, определяемая по формуле Байесса?

9. Приведите формулы Бернулли и Пуассона о повторении независимых испытаний и что они позволяют определить?

Примеры решения задач к части 1

Задача 1. В лаборатории работают 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам в случайном порядке отобраны три человека. Определить вероятность того, что отобранные лица окажутся мужчинами.

Решение. Для нахождения искомой вероятности следует воспользоваться формулой, дающей классическое определение вероятности случайного события А: P(A) = m/n, где n – число всех возможных элементарных исходов (совокупность единственно возможных и равновозможных исходов), m – число тех элементарных исходов, которые благоприятствуют событию А (m<n).

В данной задаче величина n может быть представлена как количество групп, которые можно составить из общего количества 10 человек по 3 человека в группе. В комбинаторике это число находиться как число сочетаний из 10 различных элементов группами по 3 элемента каждой: $n = C_{10}^{3}$.

Очевидно, что $m = C_7^3$, т. е. столько можно образовать из 7 мужчин групп по 3 мужчины в каждой. Таким образом, $P(A) = C_7^3 / C_{10}^3$.

Задача 2. Коэффициент использования рабочего времени двух автоматических станков соответственно равен 0,9 и 0,95. Считая, что остановки в работе каждого станка возникают случайно и независимо друг от друга, определить относительное время: а) совместной работы двух станков, б) работы только одного станка, в) простоя обоих станков.

Решение. Коэффициент использования рабочего времени – это отношение времени непосредственной работы станка ко всему рабочему времени (например, сменному). Оно совпадает с определением вероятности события, что станок в данный момент работает. Относительное время, которое необходимо определить, это также вероятности соответствующих событий.

Введем следующие события: A_1, A_2 - работа соответственно первого и второго станка, $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ - простой соответственно первого и второго станка (события, противоположные соответственно событиям A_1, A_2), $A_а$ - совместная работа двух станков, $A_б$ - работа только одного станка, $A_в$ - простой обоих станков.

По условию задачи имеем $P(A_1) = 0{,}9$; $P(A_2)=0{,}95$; $P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=0{,}1$; $P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=0{,}05$.

а) Совместная работа станков – это работа и первого и второго станка вместе: $A_а = A_1 A_2$. Поскольку события A_1, A_2 – независимые, вероятность произведения событий равняется произведению событий A_1, A_2:

$$P(A_а) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}9 \bullet 0{,}95 = 0{,}855.$$

б) Работа одного из станков имеет место тогда, когда первый станок работает, и второй не работает, или первый не работает и второй работает. Таким образом, событие $A_б$ можно определить так: $A_б = A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2$. Учитывая, что события $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$ - несовместные, а каждая пара событий $A_1, \overline{A}_2$ и $\overline{A}_1, A_2$ независимые, запишем

$$P(A_б) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0.9 \cdot 0.05 + 0.95 \cdot 0.1 = 0.14.$$

в) Простой обоих станков – это простой и первого и второго станков: $A_в = \overline{A}_1\overline{A}_2$. События $\overline{A}_1, \overline{A}_2$ - независимые. Искомая вероятность

$$P(A_в) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 0.1 \cdot 0.05 = 0.005.$$

Задача 3. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что за смену не будет изготовлено ни одной бракованной детали, равна 0,9. Определить вероятность того, что за три смены не будет изготовлено ни одной бракованной детали.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3 - события, состоящие в том, что соответственно за первую, вторую и третью смены не будет изготовлено ни одной бракованной детали. Очевидно, что искомое событие A является произведением событий A_1, A_2, A_3: $A = A_1A_2A_3$, так как событие A наступает при условии наступления и A_1, и A_2, и A_3. Отметим, что события A_1, A_2, A_3– независимые, ибо вероятности наступления каждого из этих событий равны 0,9 и не зависят от того, имели место два других события или нет. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей отдельных событий.

Следовательно,

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.9^3 = 0.729.$$

Задача 4. Рабочий обслуживает три станка, работающие независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,92, для второго станка такая вероятность равна 0,9 и для третьего – 0,85. Какова вероятность того, что в течение часа хотя бы один станок не потребует внимания рабочего?

Решение. Обозначим через A событие, выражающее то, что в течение часа хотя бы один станок не потребует внимания рабочего, а через A_1, A_2, A_3 обозначим, соответственно, события, заключающиеся в том, что первый, второй и третий станки в течение часа не потребует внимания рабочего. Так как все три станка работают независимо друг от друга и могут потребовать внимания рабочего одновременно, то события A_1, A_2, A_3 являются независимыми, но совместными событиями. Согласно обозначениям имеем $A = A_1 + A_2 + A_3$ и

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3).$$

В данной задаче определение искомой вероятности $P(A)$ целесообразно осуществить по формуле $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3)$, где $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$ - события, состоящие в том, что соответственно первый, второй и третий станки потребуют внимания рабочего. Из независимости событий A_1, A_2, A_3 следует независимость событий $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$. С учётом сказанного вероятность произведения событий $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$ запишется так: $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$. По условию задачи $P(A_1) = 0{,}92;$ $P(A_2) = 0{,}9;$ $P(A_3) = 0{,}95;$. Вероятности соответствующих противоположных событий будут: $P(\overline{A}_1) = 0{,}08;$ $P(\overline{A}_2) = 0{,}1;$ $P(\overline{A}_3) = 0{,}15$. В результате вычислений находим $P(A) = 1 - 0{,}08 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 = 0{,}9988$.

Задача 5. В цехе три типа станков-автоматов производят одни и те же детали. Станков первого типа 5 штук, второго типа – 3, третьего типа – 2. Производительность станков одинаковая, а качество работы различное. Известно, что станки первого типа производят 94% деталей отличного качества, второго типа – 90% и третьего типа – 85%. Все произведенные в цехе детали в нерассортированном виде помещены в общий ящик.

Определить вероятность того, что случайно взятая деталь из ящика окажется отличного качества.

Решение. Задачи такого типа решаются с использованием формулы полной вероятности. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно взятая деталь окажется отличного качества. Чтобы событие A могло произойти, необходимо, чтобы произошло одно из событий H_1, H_2, H_3, где H_1 – случайное событие, состоящее в том, что случайно взятая деталь была изготовлена на станке первого типа, H_2 – деталь была изготовлена на станке второго типа, H_3 – деталь была изготовлена на станке третьего типа.

Учитывая количественное соотношение станков разных типов в общем количестве десяти станков и то, что производительность станков каждого типа одинаковая, легко найти вероятность случайных событий H_1, H_2, H_3: $P(H_1) = 5/10$, $P(H_2) = 3/10$, $P(H_3) = 2/10$. Поскольку события H_1, H_2, H_3 являются полной группой событий, то сумма их вероятностей равна единице. По условию задачи находятся условные вероятности $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, $P(A/H_3)$, т.е. вероятности извлечения детали отличного качества из набора деталей, изготовленных соответственно первым, вторым и третьим типом станков: $P(A/H_1) = 0{,}94$; $P(A/H_2) = 0{,}9$; $P(A/H_3) = 0{,}85$.

По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)$$

определяем: $P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}94 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}85 = 0{,}91$.

Задача 6. Повторяя условия предыдущей задачи, заключительный вопрос сформулируем иначе. Случайно извлеченная из ящика деталь *оказалась деталью отличного качества*. Какова вероятность, что эта деталь была изготовлена станком первого, второго, третьего типа.

Решение. Задачи такого типа решаются с использованием формулы Бейесса. Искомые вероятности определяются как условные вероятности событий H_1, H_2, H_3 *при условии*, что событие A – извлечение детали отличного качества *произошло*.

Формулы Байесса применительно к данной задаче запишутся в виде:

$$P(H_1/A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1)/P(A); \; P(H_2/A) = P(H_2) \cdot P(A/H_2)/P(A);$$

$$P(H_3/A) = P(H_3)P(A/H_3)/P(A),$$

где P(A) – вероятность события A, рассмотренная в предыдущей задаче и равная 0.91. В результате находим: $P(H_1/A) = 0{,}5*0{,}94/0{,}91 = 0{,}516$; $P(H_2/A) = 0{,}3*0{,}9/0{,}91 = 0{,}297$ $P(H_1/A) = 0{,}2*0{,}85/0{,}91 = 0{,}187$.

В заключение отметим, что условные события H_1 / A,H_2 / A, H_3 / A являются несовместными и образуют полную группу событий. Поэтому сумма найденных условных вероятностей равна единице.

Задачи к части
1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Партия из 100 деталей проверяются контролером, который наугад отбирает 10 деталей и проверяет их качество. Если среди выбранных контролером 10 изделий ни одного бракованного, то вся партия принимается. Какова вероятность того, что партия из 100 деталей, содержащая 10 бракованных, будет принята контролером?

Ответ: C_{90}^{10}/C_{100}^{10} = 0.331.

2. В ящике N деталей, из которых M стандартных. Найти вероятность того, что из K наугад извлеченных деталей не будет ни одной стандартной (K<N-M).

Ответ: $C_{N-M}^{K}\,/C_{N}^{K}$

3. В ящике N деталей, из которых M стандартных. Найти вероятность того, что из K наугад извлеченных деталей будет хотя бы одна стандартная (K<N-M).

Ответ: 1-(C_{N-N}^{K}/C_{N}^{K}).

4. Для контроля продукции из трех партий взята одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 1/3 деталей бракованных, а в двух других все стандартные?

Ответ: 1/9.

5. В ящике 30 изделий, из которых 20 первого сорта, 5- второго, 5- бракованных. Найти вероятность извлечения стандартного изделия?

Ответ: 5/6.

6. Вероятность того, что в течении одной смены возникнет неполадка станка, равна 0,05. Какова вероятность того, что не произойдет ни одной неполадки за три смены?

Ответ: 0.857.

7. На двух автоматических станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в два раза больше, чем второго, и что вероятность изготовления детали высшего качества на первом равна 0.98, а на втором 0.94. Изготовленные за смену на обоих станках нерассортированные детали отправлены на склад. Определить вероятность того, что наугад взятая со склада деталь изготовлена на первом станке и окажется высшего качества.

Ответ: 0.633.

8. Вероятность безотказной работы блока, входящего в систему, в течение заданного времени составляет 0.8. Для повышения надежности устанавливают такой же резервный блок. Требуется найти, какой станет вероятность безотказной работы блока с учетом резервного (двух резервных).

Ответ: 0.96; 0.992.

9. Три электрические лампочки включены в цепь последовательно. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в цепи превысит номинальное, равна 0.6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Ответ: 0.936.

10. Работа прибора прекратилась вследствие выхода из строя одной лампы из общего числа N. Отыскание одной лампы производится путем поочередной замены каждой лампы новой. Определить вероятность того, что придется проверять, N ламп, если вероятность выхода из строя каждой лампы p.

Ответ: $(1-p)^{N-1}p$.

11. В цехе три типа автоматических станков производят одни и те же детали. Производительность их одинакова, но качество работы различное. Известно, что станки первого типа производят 94% отличного качества, второго

типа 90%, третьего типа-85%. Все произведенные в цехе за смену детали нерассортированными отправлены на склад. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь не будет отличного качества, если станков первого типа 5, второго типа 3, третьего типа 2.

Ответ: 0.09.

12. Вероятность удовлетворить стандарту для изделий некоторого производства равна 0.9. Предлагается упрощенная система проверки на стандартность, дающая положительный результат с вероятностью 0.95 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изделий, не удовлетворяющих стандарту, с вероятностью 0.15. Найти вероятность того, что изделие, признанное при упрощенной проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.

Ответ:0.98.

13. На телевизионном заводе на 40% телевизоров ставятся импортные кинескопы, а на 60%-отечественные. Вероятность того, что телевизор с импортным кинескопом не выйдет из строя из-за отказа кинескопа в течение гарантийного срока равна 0.98, а аналогичная вероятность для телевизоров с отечественным кинескопом равна 0.82. Купленный телевизор не вышел из строя из-за отказа кинескопа в течение гарантийного срока. Какова вероятность того, что это был телевизор с импортным кинескопом?

Ответа: 98/221.

14. На телевизионном заводе на 40% телевизоров ставятся импортные кинескопы, а на 60%-отечественные. Вероятность того, что телевизор с импортным кинескопом не выйдет из строя из-за отказа кинескопа в течение гарантийного срока равна 0.98, а аналогичная вероятность для телевизоров с отечественным кинескопом равна 0.82. Купленный телевизор не вышел из строя из-за отказа кинескопа в течение гарантийного срока. Какова вероятность того, что это был телевизор с отечественным кинескопом?

Ответ: 123/221.

15. Некоторый аэропорт в среднем 15% осенних дней закрыт. Какова вероятность того, что на одной неделе осени аэропорт будет закрыт а) два дня б) три дня в) не более 4-х дней?

Ответ: а) 0.21; б) 0.062; в)

$$p_{7,1} + p_{7,2} + p_{7,3} + p_{7,4} \quad (p = 13.65/91).$$

16. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0.95. Какова вероятность того, что среди 10 деталей не более одной стандартной?

Ответ: 0.914.

17. Станок-автомат изготавливает детали, каждое из которых с вероятностью 0.01 имеет дефект. Каков должен быть объем случайной выборки (с возращением), чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одну дефектную деталь была не менее 0.95?

Ответ: n>=300.

18. Предприятие отправило 5000 доброкачественных изделий автотранспортом. Вероятность повреждения изделия в пути 0.0002. Найти вероятность того, что в пункт назначения прибудет 3 поврежденных изделия из 5000.

Ответ: 0.06.

19. Из партии деталей, среди которых *N* стандартных и *M* бракованных, для контроля случайно взято *S* штук. При контроле оказалось, что первые К деталей из *S* оказались стандартными. Определить вероятность того, что следующая деталь будет стандартной.

Ответ: $(N\text{-}K)/(N+M\text{-}K)$.

20. В трех ящиках находятся однотипные изделия: в первом 10 изделий, из них 3 бракованных, во втором 15 изделий, из них 5 бракованных, в

третьем 20 изделий, из них 6 бракованных. Случайно извлекается одно изделие и оно оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие было извлечено из второго ящика.

Ответ: 5/14.

21. Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружение бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованные,
а в двух других – все доброкачественные?

Ответ:2/9.

22. Участок электрической цепи, представляет собой последовательное соединение одного элемента с двумя другими, которые сами соединены параллельно. Вероятность выхода из строя каждого элемента за определенное время равна 0.2. Какова вероятность разрыва цепи за указанное время?

Ответ:0,232.

23. В ящик, содержащий 3 одинаковые по внешнему виду детали, брошена стандартная деталь. Найти вероятность того, что будет извлечена стандартная деталь, если вероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.

Ответ: 0,625.

24. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку поступающей информации, располагает двумя вычислительными установками. Известно, что каждая из них имеет вероятность отказа 0,2 за некоторое время. Определить вероятность: а)того, что откажет одно из них, а второе будет исправно; б) безотказной работы каждого из устройств.

Ответ: а)0,32 б)0,64

25.На сборку агрегата поступают детали из трех автоматов. Первый автомат делает 20%, а второй 30% и третий 50% всех деталей, которые поступают на сборку. Первый автомат делает 0,2% брака, второй 0,3% и третий 0,1%. Найти вероятность того, что на сборку поступила бракованная деталь.
Ответ: 0,0018.

26. Рабочие на станке штампуют детали. Вероятность того, что в дневную смену не будет выпущено ни одной нестандартной детали, составляет 0,9, в вечернюю смену- 0,85, в ночную-0,8.Определить вероятность того, что за три смены не будет выпущено ни одной нестандартной детали.

Ответ: 0,612.

27. Имеется две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наугад из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наугад изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

Ответ: 13/132.

28. На складе имеются приборы, изготовленные тремя заводами: 20% приборов изготовлены заводом №., 50%- заводом №2, 30%- заводом №3. Вероятности того, что в течение года прибору потребуется ремонт для продукции каждого завода соответственно 0,2; 0,1; 0,3. Взятый со склада прибор не имел заводской маркировки и потребовал ремонта в течение года. Каким заводом вероятнее всего был изготовлен этот прибор? Какова вероятность?

Ответ: №3, 0,5.

29. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных первым заводом, И 4 детали, изготовленные вторым заводом. Случайно взяты две дета-

ли. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется изготовленной первым заводом.

Ответ: 0,968.

30. В партии из 50 изделий 5 бракованных. Из партии выбираются наугад 6 изделий. Определить вероятность того, что среди этих 6 изделий 2 окажутся бракованными.

Ответ: $C_5^2 C_{45}^4 / C_{50}^6$.

31. Имеется две партии изделий по 122 и 8 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Два изделия, взятые наугад, переложены во вторую партию, после чего выбирается наугад изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

Ответ: 7\60.

32. В двух ящиках находятся детали: в первом 10 (из них 3 стандартные), во втором – 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика случайно вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Ответ: 0,12

33. При приемке партии из 80 изделий, среди которых 6 бракованных, проверяется 40 случайно выбранных изделий. Определить вероятность того, что партия будет принята, если условиями приема допускается бракованных изделий не более двух среди проверенных.

Ответ: $(C_{74}^{40} C_6^6 + C_{74}^{39} C_6^1 + C_{74}^{38} C_6^2) / C_{80}^{40}$ =0,337.

34. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно равна 0,1. Найти вероятность того, что а) из трех проверяемых изделий только одно окажется стандартным, б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверяемое изделие.

Ответ: а) 0,243; б) 0,0729.

35. При приемке партии изделий подвергается проверке половина случайно отобранных изделий. Условия приемки – наличие брака в выборке не свыше 2%. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

Ответ: $(C_5^2 C_{95}^{48} / C_{100}^{50})$.

36. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% первого сорта. Найти вероятность того, что случайно извлеченное изделие окажется изделием первого сорта.

Ответ: 0,817.

37. В ремонтной мастерской по статистическим данным в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца, 3 – из-за неисправности привода, 2 – из-за несвоевременной подачи заготовки. Остальные остановки станка происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

Ответ: 0,25.

38. В цехе 10 станков. Вероятность быть включенным для каждого станка равна 0,9. Найти вероятность того, что 5 станков будут работать одновременно.

Ответ: 0,0015.

39. При изготовлении деталей производится три технологические операции. Процент появления брака при каждой из них соответственно равен 0,2%; 0,3%; 0,1%. Определить вероятность получения детали высшего качества, если высшим качеством изготовляется 25% стандартных деталей.

Ответ: 0,2485.

40. На предприятии на 60% стиральных машин ставится импортный двигатель, а на остальные – двигатель собственного производства. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока импортного двигателя 0,98, а двигателя собственного производства – 0,85. Найти вероятность того, что случайно выбранная при покупке стиральная машина не выйдет из строя в течение гарантийного срока из-за отказа двигателя.

Ответ: 0,928.

Часть 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Случайная величина, её закон распределения и числовые характеристики.

Вентцель Е.С. Гл. 2, § 4, гл..5, § 1- 8.

Гмурман В.Е. Гл. 6, §1-3, гл. 7, §1-4, гл.8

Родникщев Н.Е. Гл.3.

Понятие случайной величины – одно из основных в теории вероятностей. Во всех практических задачах, в которых применяются методы теории вероятностей, случайная величина – необходимый элемент исследования. Следует четко уяснить определение дискретных и непрерывных случайных величин и уметь приводить примеры этих типов случайных величин из производственной и экономической области. Далее необходимо усвоить понятие закона распределения вероятностей как полной, исчерпывающей характеристики случайной величины и его представление для дискретных случайных величин в форме таблицы распределения и многоугольника распределения, и для непрерывных случайных величин в виде функции распределения и плотности вероятностей.

Большое практическое значение в теории вероятностей имеют так называемые числовые характеристики случайных величин, которые, в отличие от закона распределения вероятностей, являются частными характеристиками, определяющими те или иные важные свойства случайной величины. Среди этих числовых характеристик наиболее существенные – математическое ожидание и дисперсия, которые являются частными случаями начальных и центральных моментов случайной величины. Изучая этот раздел, уяснить какие свойства случайной величины отражают её математическое ожидание и дисперсия.

Строго говоря, для определения математического ожидания и дисперсии изучаемых случайных величин необходимо знание закона распределения, но практически их можно находить опытным путем при проведении серии испытаний, что обосновывается в разделе предельных теорем, рассматриваемых в дальнейшем.

Следующими важным понятиями теории вероятностей являются понятия зависимости случайных величин. Необходимые и достаточные условия независимости случайных величин будут изучены в разделе «Системы случайных величин». Здесь же, опираясь на определение независимости случайных величин как независимость закона распределения вероятностей каждой из них от того, какие возможные значения принимают другие случайные величины, познакомиться с выводом формул для математического ожидания и дисперсии суммы независимых случайных величин.

Вопросы для самопроверки: Родницев Н.Е. стр. 54.

Вопросы для самопроверки.

1. Сформировать определение дискретной и непрерывной случайной величины и привести примеры той и другой величины.
2. Какие формы представления законы распределения у дискретной величины?
3. Дать определение функции распределения непрерывной случайной величины и привести основные свойства.
4. Дать определение плотности вероятностей непрерывной случайной величины и указать основные свойства этой функции.
5. Как определяется вероятность попадания в заданный интервал случайной величины (дискретной и непрерывной)?
6. Указать связь, которая существует между функцией распределения и плотностью вероятностей.
7. Дать определение числовой характеристики – математического ожидания дискретной и непрерывной случайной величины.
8. Каков геометрический и вероятностный смысл математического ожидания?

9. Привести свойства математического ожидания.
10. Дать определение числовой характеристики – дисперсии дискретной и непрерывной случайной величины.
11. Для характеристики какого свойства случайной величины используется дисперсия (среднее квадратичное отклонение)?
12. Привести свойства дисперсии.
13. Что такое мода и медиана случайной величины?
14. Что называется начальным моментом и центральным моментом случайной величины?
15. Дать определение коэффициента асимметрии и эксцесса.
16. Охарактеризовать непрерывную случайную величину с равномерным распределением.
17. Дать определение зависимых и независимых случайных величин.
18. Проделать вывод формул для математического ожидания и дисперсии суммы независимых случайных величин.

Нормально распределенные непрерывные случайные величины.

Вентцель Е. С. Гл. 6.
Гмурман В. Е. Гл. 12.
Родницев Н.Е. Гл.4.

Среди распределений непрерывных случайных величин центральное место занимает нормальный закон распределения (закон Гаусса). Этот закон распределения наиболее широко распространен в тех случаях, когда случайная величина является ре зультатом действия большого числа различных факторов, причем каждый фактор в отдельности на случайную величину влияет незначительно. Так случайными величинами, имеющими нормальное распределение, могут быть: отклонение действительных размеров деталей, выпускаемых станком-автоматом, ошибки измерения и т.п. Основная особенность нормального распределения, которая выделяет его из других распределений, заключается в том, что оно является предельным законом распределения, к которому приближаются другие распределения. В дальнейшем будет рассмотрена так называемая центральная предельная теорема теории вероятностей, в которой доказывается, что при достаточно большом числе независимых случайных величин, подчиненных некоторым законам распределения, их сумма будет иметь закон распределения сколь угодно близкий к нормальному.

При изучении этого раздела обратить внимание на ряд формул, имеющих большое практическое значение: на формулу для вероятности попадания нормально распределенной случайной величины на заданный интервал, на формулу для вероятности отклонения случайной величины от своего математического ожидания, по абсолютной величине не превышающего заданного значения.

Вопросы для самопроверки: Роднищев Н.Е. стр. 70.

Вопросы для самопроверки.

1. Какое распределение непрерывной случайной величины называется нормальным распределением?
2. Изобразить график плотности распределения вероятности нормального распределения и пояснить: как будет изменяться форма этого графика при изменении математического ожидания и среднего квадратичного отклонения?
3. Написать и пояснить формулу для определения вероятности попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал. Что называется функцией Лапласа или интегралом вероятности, и каковы ее свойства?

4. Записать формулу для вероятности отклонения нормльно распределенной случайной величины от своего математического ожидания, по абсолютной величине не превышающего заданного значения.

5. В чем заключается правило «трех сигм»?

6. Чем объясняется широкое распространение на практике нормального распределения?

Примеры решения задач к части
2.СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Задача 1. Испытывается устройство, состоящее из двух независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов таковы: 0,2; 0,1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного числа отказавших приборов.

Решение. Случайная величина X – число отказавших приборов – в данной задаче может принимать случайно значения: 0, 1, 2 соответствующими веро ятностями. Определим эти вероятности. Значение X, равное нулю, соответствует случаю, когда не откажет ни первый, ни второй прибор. Очевидно, $P(X=1)=0.8\cdot 0.9=0.72$. Значение X, равное 1, отвечает случаю, когда первый прибор откажет, а второй нет, или второй прибор откажет, а первый нет. В этом случае $P(X=1)=0.2\cdot 0.9+0.1\cdot 0.8=0.26$. Наконец, значение X, равное 2, соответствует случаю, когда откажут оба прибора совместно. Естественно, что $P(X=2)=0.2\cdot 0.1=0.02$. Легко убедится, что $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$.

Математическое ожидание случайной дискретной величины X определяется по формуле

$$M[X]=0\cdot 0.72+1\cdot 0.26+2\cdot 0.02=0.3.$$

Для вычисления дисперсии удобно воспользоваться формулой $D[X]=M[X^2]-M^2[X]$. В результате вычислений получим

$$D[X]=0\cdot 0.72+1\cdot 0.26+4\cdot 0.02-0.3^2=0.25.$$

Задача 2. Изделия независимо испытываются на надежность. вероятность для каждого изделия выйти из строя *p*. Испытания заканчиваются после первого же изделия, не выдержавшего испытания. Найти формулу для ряда распределения, определить математическое ожидание случайного числа испытаний.

Решение. Отметим, что в данной задаче испытания заканчиваются на i-м изделии (i=1,2,3,…), если первые i-1 изделия пройдут испытания, а i-е выйдет из строя.

Обозначим X - случайное число испытаний. Очевидно, что для ряда распределения можно записать следующую аналитическую формулу

$$P(X=i)=(1-p)^{i-1}p,\ i=1,2,3,...$$

особенностью данной задачи является то, что i – число испытаний - представляет бесконечное счетное множество значений, причем вероятность $P(X=i)$ при неограниченном росте i стремится к нулю. В силу свойства ряда распределения сумма всех вероятностей $P(X=i)$ должна равняться единице, т.е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(X=i)=p\sum\limits_{i=1}^{\infty}(1-p)^{i-1}=1$. Убедимся в этом.

Ряд $\sum\limits_{i-1}^{\infty}(1-p)^{i-1}$ представляет собой бесконечную убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем 1-p и поэтому $\sum\limits_{i-1}^{\infty}(1-p)^{i-1}=1/(1-(1-p))=1/p$. Следовательно, $\sum\limits_{i-1}^{\infty}P(X=i)=1$.

В соответствии с общей формулой, математическое ожидание дискретной случайной величины X запишется следующим образом

$$M[X]=\sum_{i=1}^{\infty}iP(X=i)=p\sum_{i=1}^{\infty}i(1-p)^{i-1}.$$

Вычислим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}$. Для удобства введем величину $q = 1\text{-}p$. Тогда последний ряд запишется в виде $\sum\limits_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}$, для вычисления которого воспользуемся следующим приемом.

Рассмотрим ряд, представляющий бесконечную убывающую геометрическую прогрессию: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = 1 + q + q^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-q}$. Продифференцировав последнее по q, будем иметь $\dfrac{d}{dq}\sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$. Левая часть этого равенства представляет ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} iq^{i-1}$. Возвращаясь к величине p, можем записать $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1} = \dfrac{1}{p^2}$. Таким образом, $M[X] = \dfrac{1}{p}$.

Задача 3. Цилиндрические валики, изготовляемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превышает 3 мкм. Случайные отклонения диаметра валика от проектного подчиняются нормальному распределению с параметрами $m = 0$, $\sigma = 1{,}6$ мкм. Сколько процентов стандартных валиков будет изготовлять автомат?

Решение. Обозначим через X – случайные отклонения диаметра валика от проектного размера. Равенство математического ожидания нулю ($m = 0$) означает, что случайные отклонения будут группироваться около проектного размера (систематическая ошибка отклонения отсутствует).

Для определения вероятности события $|X - m_x| < 2$ мкм воспользуемся формулой теории вероятностей

$$P(|X - m_x| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)dt$ - функция Лапласа (интеграл вероятности), δ – допустимое отклонение по абсолютной величине X от своего математического ожидания (в данной задаче δ = 2 мкм, m = 0), σ – среднее квадратичное отклонение X.

Искомая вероятность P(|X| < 2 мкм) = 2Ф(2/1,6) = 2Ф(1,25). По таблице функции Лапласа находим P(|X| < 2) = 0,789 = 78,9%.

Задача 4. Высотомер самолета имеет случайную и систематическую ошибки. Систематическая ошибка равна 20м. Случайная ошибка распределена нормально. Какое среднее квадратичное отклонение должна иметь случайная ошибка высотомера, чтобы с вероятностью 0.9 ошибка измерения высоты была меньше 100м.

Решение. Обозначим H_{ucm} - истинная высота полета самолета, H – случайная величина – показание высотомера. По условию задачи задано, что вероятность события

$$H_{ucm}-100<H<H_{ucm}+100$$

равна 0,9.

Для решения задачи воспользуемся формулой теории вероятностей для вероятности попадания случайной величины в заданный интервал

$$P(a<H<b)=\Phi\left(\frac{b-m_H}{\sigma_H}\right)-\Phi\left(\frac{a-m_H}{\sigma_H}\right),$$

где Ф(t), как и в предыдущей задаче, функция Лапласа. В данной задаче $a=H_{ucm}$-100 м, $b= H_{ucm}$+100 м. В результате можно записать

$$0.9=\Phi\left(\frac{H_{ucm}+100-m_H}{\sigma_H}\right)-\Phi\left(\frac{H_{ucm}-100-m_H}{\sigma_H}\right).$$

Систематическая ошибка представляет собой неслучайную величину m_H - $H_{ист}$, которая по условию задачи равна 20м. С учетом этого приходи к следующему уравнению относительно σ_H:

$$0.9=\Phi\left(\frac{100-20}{\sigma_H}\right)-\Phi\left(\frac{-100-20}{\sigma_H}\right).$$

Учитывая, что функция Лапласа – нечетная функция ($\Phi(-t)=-\Phi(t)$), окончательно запишем $0{,}9=\Phi(80/\sigma_н)+\Phi(120/\sigma_н)$. Последнее уравнение является трансцендентным, решение которого можно найти приближенно путем проб: $\sigma_н \approx 58$ м.

Задачи к части
2.СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Из партии в 25 изделий, среди которых 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить таблицу распределения дискретной случайной величины X - числа бракованных изделий, и определить математическое ожидание этой случайной величины.

Ответ: 0,72.

2. Из партии в 25 изделий, среди которых 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить таблицу распреде ления дискретной случайной величины X – числа стандартных изделий, содержащихся в выборке из трех изделий, и определить математическое ожидание этой случайной величины.

3. При установившимся первым сортом и 1/3 – вторым. Построить таблицу распределения случайной величины X – числа изделий первого сорта среди 5 изделий, отобранных случайным образом. Вычислить математическое ожидание и дисперсию рассматриваемой случайной величины.

Ответ: $m_x = 3{,}33$: $D_x = 1{,}11$.

4. Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятность отказа каждого прибора соответственно равны p_1, p_2, p_3. Доказать, что математическое ожидание числа отказавших приборов равна $p_1 + p_2 + p_3$.

5. Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованные агрегаты вероятностью p. Переналадка линии производится сразу после первого бракованного агрегата. Найти среднее число всех агрегатов, изготовленных между двумя переналадками линии.

Ответ: $1/p$.

6.Партия из 100 изделий содержит 10 бракованных. Из этой партии извлекается случайным образом 5 изделий. Изобразить таблицу распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных изделий в выборке и определить ее математическое ожидание.

Ответ: 0.5.

7. Известно, что в партии из 100 изделий содержится 10 нестандартных. Из партии извлекается случайная выборка из 5 изделий. Построить таблицу распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей в выборке и определить ее математическое ожидание.

Ответ: 4,5.

8. Определить математическое ожидание числа приборов, давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергнется один прибор, а вероятность его отказа p.

Ответ: p.

9. В партии из 10 деталей имеется одна бракованная. Чтобы ее обнаружить, выбирают в случайном порядке одну деталь за другой и каждую проверяют. Пусть X – число проверенных деталей, включая бракованную. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X.

Ответ: 5,5; 8,25.

10. Независимые испытания аппаратуры повторяются до тех пор, пока она не дает отказ. Вероятность отказа аппаратуры от испытания к испытанию меняется и равна p. Найти математическое ожидание случайного числа безотказных испытаний аппаратуры.

Ответ: $(1-p)/p$.

11. Испытывается агрегат, состоящий из четырех независимо работающих элементов, вероятность отказа которых следующие: 0,3; 0,4; 0,5; 0,6. Вычислить математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Ответ 1,8; 0,94.

12. Производятся независимые испытания N изделий на надежность, причем вероятность выдержать испытания для каждого изделия одинакова и равна p. Записать выражение для ряда распределения случайного числа изделий, выдержавших испытания, и найти его математическое ожидание.

Указание: использовать формулу Бернулли.

13. Испытываются независимо N агрегатов на надежность. Вероятность не выдержать испытания у каждого изделия одинакова и равна p. Записать выражение для ряда распределения случайного числа агрегатов, которые прошли испытание на надежность, и найти его математическое ожидание.

Указание: использовать формулу Бернулли.

14. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и среднее квадратичное отклонение 50 м. Какова вероятность того, что нормально распределенная ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5м?

Ответ: P=0,0793.

15. Какой ширины должно быть поле допуска, чтобы с вероятностью не более 0,0027 получалась деталь с контролируемым размером вне поля допуска, если случайные отклонения размера от середины допуска подчиняются нормальному распределению с параметрами m = 0, σ = 5 мкм?

Ответ: не менее 30 мкм.

16. Коробки с шоколадом упаковываются автоматом. Их средняя масса равна 1,06 кг. Найти среднее квадратичное отклонение, если 5% коробок имеет массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок имеет нормальное распределение.

Ответ: 0,0306 кг.

17. Случайные ошибки измерения двумя измерительными приборами подчинены нормальному закону с $m_{1.2}$=0_и_$\sigma_2 = 2$ мкм. Определить вероятность того, что из двух независимых измерений в каждом

из них ошибки измерения по абсолютной величине не превышают 1,5 мкм.

Ответ: 0,4644.

18. Дальность до объекта определяется дальномером, средняя квадратичная ошибка которого $\sigma_2 = 10$, систематическая ошибка +5 м. Ошибка измерения имеет нормальное распределение. Найти вероятность того, что измеренное значение не отклонится от истинного более чем на 15 м.

Ответ: 0,1813.

19. Дальность до объекта определяется дальномером, средняя квадратичная ошибка которого $\sigma_2 = 10$, систематическая ошибка +5 м. Ошибка измерения имеет нормальное распределение. Найти вероятность того, что измеренное значение не превзойдёт истинное более чем на 15 м.

Ответ: 0,8414.

20. Дальность до объекта определяется дальномером, средняя квадратичная ошибка которого $\sigma_2 = 10$, систематическая ошибка +5 м. Ошибка измерения имеет нормальное распределение. Найти вероятность того, что измеренное значение превысит истинное более чем на 20 м.

Ответ: 0,0668.

21. Изделие считается высшего качества, если отклонение его размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине 3,45 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинала подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением 3 мм. Систематические ошибки отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества, если изготовлено 4 изделия.

Ответ: 3 изделия.

22. Систематическая ошибка удержания высоты самолётом +20 м, а случайная нормально распределённая ошибка характеризуется средним квадратичным отклонением, равным 50 м. Для полёта самолёта отведён коридор высотой 100 м. Какова вероятность, что самолёт будет лететь выше, коридора, если самолёту задана высота, соответствующая середине коридора.

Ответ: 0,0548.

23. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, а случайная нормально распределенная ошибка характеризуется средним квадратичным отклонением, равным 50 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 2×100 м. Какова вероятность, что самолет будет лететь ниже коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора.

Ответ: 0,0082.

24. Систематическая ошибка удержания высоты самолетом +20 м, а случайная нормально распределенная ошибка характеризуется средним квадратичным отклонением, равным 50 м. Для полета самолета отведен коридор высотой 2×100 м. Какова вероятность, что самолет будет лететь внутри коридора, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора.

Ответ: 0,9452.

25. На производственном участке за одну смену изготавливается 100 изделий, содержащих 10% брака. Вся эта партия принимается, если годными оказываются выбранные случайным образом 4 изделия. В противном случае вся партия бракуется. Найти математическое ожидание числа забракованных партий изделий, изготовленных в течение трех смен.

Ответ: 0,00015.

26. На производственном участке за одну смену изготавливается 100 изделий, содержащих 10% брака. Вся эта партия принимается, если годными оказываются выбранные случайным образом 4 изделия. В противном случае вся партия бракуется. Найти математическое ожидание числа незабракованных партий изделий, изготовленных в течение трех смен.

Ответ: 0,99985.

27. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует наладки, равны соответственно: 0,85; 0,9; 0,95. Построить ряд распределения и найти математическое ожидание числа станков, которые потребуют наладки в течение часа.

Ответ: 0,3.

28. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует наладки, равны соответственно: 0,85; 0,9; 0,95. Построить ряд распределения и найти математическое ожидание числа станков, которые не потребуют наладки в течение часа.

Ответ: 2,7.

29. Случайная величина X - эксцентриситет цилиндрической детали подчиняется закону Релея: $P(X < x) = 1 - exp(-x^2 / 2\sigma^2_x), x > 0$. Найти плотность вероятности случайной величины X и изобразить ее график.

Ответ: $(x/\sigma^2_x)exp(-x^2/2\sigma^2_x)$

30. Ошибка измерения диаметра цилиндрической детали подчиняется нормальному закону, причем математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение равны соответственно 5мкм и 10 мкм. Определить вероятность того, что значение диаметра будет отклоняться по абсолютной величине от истинного не более чем на 15мкм.

Ответ: 0,8187.

31. Случайные ошибки измерения тремя измерительными приборами подчиняются нормальному закону с параметрами: $m_1, = 0$, $\sigma_1, = 1$ мкм, $m_2 = 0$, $\sigma_2 = 2$ мкм, $m_3 = 0$, $\sigma_3 =3$мкм. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений хотя бы в одном из них ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 1,5мкм.

Ответ: 0,965.

32. Случайные ошибки измерения подчиняются нормальному закону распределения с параметрами: $m=0$, $\sigma=1$ мкм. Найти вероятность того, что из двух независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсолютной величине 1,28мкм.

Ответ: 0,96.

33. Агрегаты испытываются независимо на надежность. Известно, что вероятность не выдержать испытания у каждого агрегата одинаковая и равна p. Испытания прекращаются после первого же агрегата, не выдержав-

шего испытания. Определить математическое ожидание случайного числа агрегатов, выдержавших испытания.

Ответ: (1 - p)/p.

34. Изделия последовательно и независимо испытываются на надежность. Вероятность выдержать испытания у каждого изделия одинаковая и равна *p*. После первого же изделия, не выдержавшего испытания, они прекращаются. Определить математическое ожидание числа проведенных испытаний.

Ответ: 1/(1 - p).

35. Проводится испытание агрегата, состоящего из двух независимо работающих блоков, вероятности отказа которых соответственно: 0,05; 0,04. Определить математическое ожидание и дисперсию числа блоков, выдержавших испытание.

Ответ: 1,91; 0,7.

36. Испытывается устройство, состоящее из трех независимо работающих блоков. Вероятности отказа блоков следующие: 0,3; 0,4; 0,5. Определить математическое ожидание и дисперсию случайного числа отказавших блоков.

Ответ: 1,2; 0,7.

37. Проводится испытание системы, состоящей из трех независимо работающих элементов. Вероятности отказа этих элементов таковы: 0,3; 0,4; 0,5. Найти математическое ожидание и дисперсию числа элементов, выдержавших испытание.

Ответ: 1,8; 0,7.

38. Проводится испытание системы с четырьмя независимо функционирующими блоками, вероятности отказа которых 0.3; 0,4; 0,5; 0,6. Определить математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины - числа блоков, выдержавших испытание.

Ответ: 2,2; 0,94.

39. Проводятся независимые испытания трех агрегатов, вероятности отказа которых соответственно равны: p_1, p_2, p_3. Определить математическое ожидание числа агрегатов, выдержавших испытания.

Ответ: $3 - p_1 - p_2 - p_3$.

40. Агрегаты испытываются независимо при перегрузочных режимах. Вероятность для каждого агрегата успешно пройти испытания равна 4/5. Испытания останавливаются после первого же агрегата, не выдержавшего испытание. Определить математическое ожидание случайного числа проведенных испытаний.

Ответ: 1,25.

Часть 3. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Система случайных величин, её законы распределения и числовые характеристики

Вентцель Е.С.Гл. 8,§ 1-6,гл. 9,§ 1,3.

Гнурман В.Е.Гл. 14,§ 1-9, 11-19.

При изучении сложных явлений рассматриваются совместно две, три и большее число случайных величин, образующих комплекс, систему случайных величин. Здесь важно обратить внимание на то, что при исследовании характеристик системы случайных величин недостаточно изучить по отдельности характеристики каждой случайной величины, входящей в систему. Полными, исчерпывающими характеристиками системы случайных величин являются многомерные законы распределения. В случае системы дискретных величин - это многомерные таблицы распределения, а в случае непрерывных случайных величин – многомерная функция распределения или плотность вероятностей, которые являются обобщением соответствующих одномерных законов распределения случайной величины. Поскольку для систем с более, чем двумя случайными величинами отсутствуют простые геометрические представления законов распределения, то в основном при их изучении ограничиваются случаем систем с двумя случайными величинами.

При рассмотрении системы случайных величин важное значение имеют понятия зависимости и независимости случайных величин, входящих в систему. Эти понятия обобщают понятия зависимых и независимых событий. Изучающему данный раздел следует четко уяснить принципиальное отличие зависимости случайных величин, называемой вероятностной, от зависимости величин, рассматриваемой в математическом анализе, которая имеет характер жесткой зависимости между величинами. Вероятностная зависимость является общим видом зависимости величин.

При исследовании взаимосвязи двух случайных величин используются понятия условных законов распределения.

Для оценки степени зависимости случайных величин используется числовая характеристика – корелляционный момент, который при отсутствии связи между случайными величинами равен нулю, а с увеличением степени связи его значение возрастает.

Следует усвоить характерные для системы двух величин такие числовые характеристики, как условные математические ожидания и дисперсии, а так же связанные с этими характеристиками понятия линий регрессии.

Далее необходимо рассмотреть нормально распределенную систему двух непрерывных случайных величин, как частный, но имеющий большое практическое применение, случай систем случайных величин. Обратить внимание на выражение плотности вероятности системы, условия независимости двух случайных величин, на выражение условных плотностей вероятностей, условных математических ожиданий и дисперсий.

Между прочим, с использованием новой числовой характеристики – корреляционного момента – удается получить формулы для дисперсии суммы зависимых случайных величин, являющихся обобщением ранее рассмотренной формулы.

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется системой случайных величин? Привести примеры системы случайных величин.
2. Дать определение функции распределения системы двух случайных величин и указать её свойства.
3. Дать определение плотности вероятностей системы двух случайных величин и перечислить свойства этой функции.
4. Как находится вероятность попадания системы случайных величин в заданную область?

5. Как выражается плотность вероятностей каждой случайной величины, входящей в систему через плотность вероятностей системы?

6. Дать определение условных плотностей вероятностей системы случайных величин и указать, как они связаны с плотностями распределения системы и каждой случайной величины, входящей в систему.

7. Какие две величины называются независимыми? зависимыми?

8. Запишите необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин.

9. Что называется корреляционным моментом? коэффициентом корреляции двух случайных величин? Указать область изменения значений коэффициентов корреляции.

10. Определить понятия условных математических ожиданий и дисперсии системы двух случайных величин.

11. Что такое линии регрессии системы двух случайных величин?

12. Чему равен коэффициент корреляции системы двух случайных величин?

13. Какие случайные величины называются некоррелированными?

14. Следует ли в общем случае из некоррелированности независимость случайных величин?

15. Какие числовые характеристики могут охарактеризовать систему нескольких случайных величин.

16. Что называют корреляционной и нормированной корреляционной матрицей системы нескольких случайных величин?

17. Записать выражение плотности вероятностей нормально распределенной системы двух непрерывных случайных величин..

18. Какое простое условие независимости двух случайных величин будет у нормально распределенной системы?

19. Привести формулу для вероятности попадания в заданный прямоугольник со сторонами, параллельным осям координат, для нормально распределенной системы.

20. Записать для условных плотностей вероятности, математических ожиданий и дисперсий, для нормально распределенной системы.

21. Рассмотреть линии регрессии нормально распределенной системы и проанализировать их характер расположения в зависимости от величины коэффициента корреляции.

22. Что такое эллипсы рассеивания для нормально распределенной системы?

23. Привести формулу для дисперсии суммы зависимых случайных величин.

Примеры решения задач к части 3.СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Задача 1. Задана двумерная функция распределения $F(x,y)$ двумерной случайной величины (X,Y)

$$F(x,y)=\begin{cases} Sin\,x \cdot Sin\,y, & 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2 \\ 0, & \ldots \end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$.

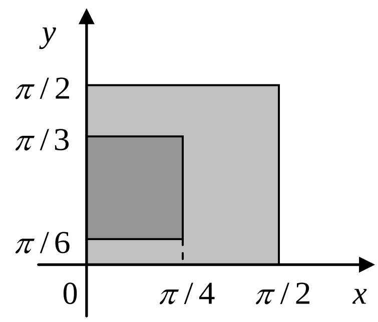
Решение. Определим вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x_1=0$, $x_2=\pi/4$, $y_1=\pi/6$, $y_2=\pi/3$ по формуле

$$P(x_1 < X < x_2,\ y_1 < Y < y_2)=$$

$$=(F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2))-(F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1))=$$

$$\left(Sin\frac{\pi}{4}\cdot Sin\frac{\pi}{3}-Sin\,0\cdot Sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-(Sin\frac{\pi}{4}\cdot Sin\frac{\pi}{6}-Sin\,0\cdot Sin\frac{\pi}{6})=$$



$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)==-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-0\cdot\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=0{,}26\,.$$

Задача 2. Двумерная дискретная случайная величина (X,Y) описывается законом распределения вероятностей, заданного таблицей

$X \backslash Y$	y_1	y_2
x_1	$p_{11}=0{,}10$	$p_{12}=0{,}15$
x_2	$p_{21}=0{,}15$	$p_{22}=0{,}25$
x_3	$p_{31}=0{,}20$	$p_{32}=0{,}15$

Определить закон распределения случайных величин X и Y, условный закон распределения X при условии, что $Y=y_1$ и условный закон распределения Y при условии, что $X=x_2$.

Решение. Для определения безусловных законов распределения случайных величин X и Y воспользуемся формулой $p_j=\sum_{i=1}^{m}p_{ij}$, тогда

$$P(X=x_1)=\sum_{j=1}^{2}p_{1j}=[illegible],$$

$$P(X=x_2)=\sum_{j=1}^{2}p_{2j}=[illegible],$$

$$P(X=x_3)=\sum_{j=1}^{2}p_{3j}=[illegible].$$

Для величины Y аналогично получим

$$P(Y=y_1)=\sum_{i=1}^{3}p_{i1}=[illegible],$$

$$P(Y=y_2)=\sum_{i=1}^{3}p_{i2}=[illegible].$$

Условный закон распределения X при условии, что $Y=y_1$, определяется совокупностью условных вероятностей

$$P(X=x_i/Y=y_1)=\frac{P(X=x_i,Y=y_1)}{P(Y=y_1)}=[illegible],$$

$$P(x_2|y_1)=\frac{P(x_2,y_1)}{P(y_1)}=\frac{[illegible]}{[illegible]},$$

$$P(x_3|y_1)=\frac{P(x_3,y_1)}{P(y_1)}=\frac{[illegible]}{[illegible]}.$$

Условный закон распределения Y при условии, что $X = x_2$.определяется совокупностью условных вероятностей

$$P(y_1|x_2)=\frac{P(x_2,y_1)}{P(x_2)}=\frac{[illegible]}{[illegible]},$$

$$P(y_2|x_2)=\frac{P(x_2,y_2)}{P(x_2)}=\frac{[illegible]}{[illegible]},$$

Нетрудно видеть, что как безусловные, так и условные распределения вероятностей удовлетворяют условию нормировки, т.е. вероятности в сумме равны единице.

Задачи к части
3. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1-5. Система двух дискретных случайных величин (X,Y) задана двумерной таблицей распределения:

Y \ X	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}

Определить законы распределения дискретных случайных величин X,Y системы (X,Y). Найти математическое ожидание, дисперсию случайных величин X,Y и корреляционный момент системы (X,Y).

Исходные данные к задачам:

№№ задачи	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{12}	p_{22}	p_{32}
1	0,1	0,2	0,3	0,15	0,2	0,05
2	0,25	0,1	0,2	0,25	0,15	0,05
3	0,1	0,3	0,05	0,2	0,05	0,3
4	0,3	0,005	0,3	0,15	0,1	0,1
5	0,1	0,2	0,25	0,05	0,25	0,15

6-10. Система двух дискретных случайных величин (X,Y) задана двумерной таблицей распределения:

X / Y	x_1	x_2
y_1	p_{11}	p_{21}
y_2	p_{12}	p_{22}
y_3	p_{13}	p_{23}

Определить законы распределения дискретных случайных величин X,Y системы (X,Y). Найти математическое ожидание, дисперсию случайных величин X,Y и корреляционный момент системы (X,Y).

Исходные данные к задачам:

№№задачи	p_{11}	p_{21}	p_{12}	p_{22}	p_{13}	p_{23}
6	0.1	0.15	0.2	0.25	0.25	0.05
7	0.25	0.25	0.1	0.15	0.2	0.05
8	0.1	0.2	0.3	0.05	0.05	0.3
9	0.3	0.05	0.3	0.15	0.1	0.1
10	0.2	0.1	0.05	0.25	0.25	0.15

11-15. Система двух дискретных случайных величин (X,Y) задана двумерной таблицей распределения:

X / Y	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}

Определить условный закон распределения дискретной случайной величины X при условии, что дискретная случайная величина Y приняла значения y_1.

Наити условные математическое ожидание M[X/Y=y_1] и дисперсию D[X/Y=y_1].

Исходные данные к задачам:

№№задачи	p_{11}	p_{21}	p_{31}	p_{12}	p_{22}	p_{32}
11	0.1	0.2	0.3	0.15	0.2	0.05
12	0.25	0.1	0.2	0.25	0.15	0.05
13	0.1	0.3	0.05	0.2	0.05	0.3
14	0.3	0.05	0.3	0.15	0.1	0.1
15	0.1	0.2	0.25	0.05	0.25	0.15

16-20. Система двух дискретных случайных величин (X,Y) задана двумерной таблицей распределения

Y \ X	x_1	x_2
y_1	p_{11}	p_{21}
y_2	p_{12}	p_{22}
y_3	p_{13}	p_{23}

Определить условный закон распределения дискретной случайной величины X при условии, что дискретная случайная величина Y приняла значение y_2. Найти условные математическое ожидание $M[X/Y=y_2]$ и дисперсию $D[X/Y=y_2]$.

Исходные данные к задачам:

№№ задачи	p_{11}	p_{21}	p_{12}	p_{22}	p_{13}	p_{23}
16	0,1	0,15	0,2	0,25	0,25	**0,05**
17	0,25	0,25	0,1	0,2	0,2	**0,05**
18	0,1	0,2	0,3	0,05	0,05	**0,3**
19	0,3	0,05	0,3	0,15	0,1	**0,1**
20	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,25**	**0,25**	**0,15**

21-25. Вычислить вероятность попадания двумерной непрерывной случайной величины (X,Y) с нормальным распределением в прямоугольник, ограниченный прямыми: $x = x_1,\ x = x_2,\ y = y_1,\ y = y_2$. Случайные величины X,Y независимы и имеют математические ожидания $m_x,\ m_y$ и средние квадратичные отклонения $\sigma_x,\ \sigma_y$:

№№ задачи	x_1	x_2	y_1	y_2	m_x	m_y	σ_x	σ_y
21	1	2	2	3	1,5	2,5	0,5	1
22	2	3	1	2	0,9	1,5	0,6	2
23	1,5	2	2	3	1	2	0,8	1
24	2	4	0	3	1	2	0,5	0,8
25	3	5	3	5	0,5	4	0,8	0,5

26-30. Найти вероятность попадания двумерной непрерывной случайной величины (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми: $x = x_1,\ x = x_2,\quad y = y_1,\ y = y_2$. Плотность вероятности $f(x,y)$ системы (X,Y) внутри прямоугольника постоянная.

Исходные данные к задачам:

№ задачи	x_1	x_2	y_1	y_2
26	0,5	2	1	5
27	0,2	2,5	1	4
28	-1	1,5	0	3
29	-0,5	2	1	5
30	-1	1,5	0,5	2,5

31-35. Известны математические ожидания m_x, m_y, средние квадратичные отклонения σ_x, σ_y и матрица К корреляционных моментов системы (X,Y). Записи выражение плотности вероятности внутри $f(x,y)$ системы (X,Y).

Исходные данные к задачам:

№ задачи	31	32	33	34	35
m_x	26	20	30	45	25
m_y	12	8	10	14	15
К	256 -90 -90 169	120 10 10 90	100 20 20 50	150 -20 -20 60	75 15 15 60

36-40. Система непрерывных случайных величин (X,Y) имеет постоянную плотность вероятностей $f(x,y)$ в заданной области. Являются ли случайные величины X,Y независимыми? Если нет, то определить условные математические ожидания случайных величин X,Y.

Исходные данные к задачам:

№ задачи	Вид области
36	Внутренность треугольника с вершинами в точках (0,0), (1,0), (0,1)
37	Внутренность квадрата с вершинами в точках (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)
38	Внутренность прямоугольника с вершинами в точках (0,0),(2,0),(0,1),(2,1)
39	Внутренность четверти единичного круга с центром в точке (0,0)
40	Внутренность половины единичного круга с центром в точке (0,0)

41 – 45 . Для двух дискретных независимых случайных величин *X*, *Y* заданы законы распределения:

X	x_1	x_2
P	p_1	P_2

Найти двумерный закон распределения системы (*X*, *Y*), определить корреляционный момент системы (*X*, *Y*).

Исходные данные к задачам 41 – 45:

№ задачи	x_1	x_2	p_1	p_2	y_1	y_2	q_1	q_2
41	1	2	0,1	0,9	-1	1	0,3	0,7
42	3	4	0,2	0,8	0	2	0,2	0,8
43	5	6	0,3	0,7	1	2	0,1	0,9
44	0	2	0,4	0,6	3	4	0,4	0,6
45	-1	1	0,25	0,75	2	3	0,5	0,5

Часть 4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вентцель Г. С. Гл. 13, § 1 - 3, 5, 6 - 8.

Гмурман В. Е. Гл. 9, гл. 12, § 8.

Родниищев Н.Е. Гл. 5.

При проведении испытаний малого объема такие характеристики случайных явлений, как относительная частота, средняя арифметическая результатов наблюдения и другие характеристики будут заметно меняться от одной серии испытаний к другой, т.е. не будут стабильными, устойчивыми. Однако если в этих сериях число испытаний очень велико, то указанные характеристики становятся стабильными, почти не изменяющимися. Это свойство нестабильности или стабильности характеристик случайных явлений в зависимости от числа испытаний в теории вероятности называется законом больших чисел.

Простейшей формой закона больших чисел является теорема Бернулли, которая утверждает, что при большом числе испытаний с вероятностью, близкой к единице относительная частота появления случайного события будет мало отличаться от вероятности этого события. Утверждение этой теоремы обосновывает общий, так называемый статистический метод определения вероятности случайного события как относительной частоты события при достаточно большом числе испытаний.

Более общая форма закона больших чисел выражается теоремой Чебышева. Она утверждает, что при достаточно большом числе независимых испытаний с вероятностью близкой к единице среднее арифметическое из наблюдавшихся значений случайной величины будет мало отличаться от математического ожидания этой величины. Утверждение этой теоремы обосновывает статистический метод определения математического ожидания, как среднего арифметического наблюдавшихся значений случайной величины при достаточно большом числе независимых испытаний.

Теоремы Бернулли и Чебышева, которые математически формулируются в терминах теории пределов, относят к так называемым предельным теоремам теории вероятностей. При доказательстве этих теорем используется неравенство Чебышева. Следует иметь в виду, что доказательство теоремы Бернулли целесообразно проводить после доказательства теоремы Чебышева.

В заключение этой части следует ознакомиться еще с одним типом предельных теорем теории вероятностей - центральной предельной теоремой (теоремой Ляпунова). Чтобы лучше уяснить смысл центральной предельной теоремы, следует обратить внимание, что в теоремах Бернулли и Чебышева законы распределения величин не рассматривались. В центральной предельной теореме устанавливается вид предельного закона распределения и указываются условия, при выполнении которых этот закон будет нормальным. Теорема Ляпунова объясняет, почему в реальных задачах производства, экономики и в других областях случайные величины имеют распределение, близкое к нормальному.

Вопросы для самопроверки: Роднищев Н.Е. стр. 81.

Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит смысл закона больших чисел.
2. Как записывается неравенство Чебышева и какое теоретическое и практическое значение оно имеет.
3. Сформулировать теорему Чебышева.
4. Какое значение имеет теорема Чебышева для практики.
5. Сформулировать теорему Бернулли.
6. Какое практическое значение для практики имеет теорема Бернулли.
7. Сформулировать теорему Ляпунова.
8. В чем состоит смысл теоремы Ляпунова.

Примеры решения задач к части
4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Задача 1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что непрерывная случайная величина отклонится по абсолютной величине от своего математического ожидания больше, чем на три средних квадратичных отклонений. Сравнить полученный результат с результатом, вытекающим из правила “трех сигм”.

Решение. Для решения задачи используем неравенство Чебышева в форме

$P(|X - m_x| > \varepsilon) < D_x / \varepsilon^2$.

По условию задачи $\varepsilon = 3\sigma_x = 3\sqrt{D_x}$. Используя это, неравенство Чебышева представим в виде

$P(|X - m_x| < 3\sigma_x) < 1/9 = 0{,}111$.

В соответствии с правилом “трех сигм” для непрерывных нормально распределенных случайных величин

$P(|X - m_x| < 3\sigma_x) = 0{,}0028$.

Следовательно, неравенство Чебышева в данном случае дает завышенное значение вероятности выхода случайной величины X за трехсигмовый диапазон.

Задача 2. Сколько следует независимо проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,96, можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты годных изделий от вероятности быть детали годной, равной 0,98, не превысит 0,02.

Решение. Обозначим искомое число независимых проверок величиной N. Далее, введем дискретную случайную величину X_i – число годных деталей при проверке i–й детали. Очевидно, закон распределения X_i будет следующий:

X_i	0	1
P	0,02	0,98

Относительная частота годных деталей при проверке N деталей равна

$$X=(X_1+X_2+\ldots+X_N)/N.$$

Используя формулы для математического ожидания и дисперсии средней арифметической N независимых дискретных случайных величин, найдем

$$m_x=m_{x_i}=p,\ D_x=D_{x_i}/N=p(1-p)/N,$$

где p=0,98 – вероятность быть детали годной. В данной задаче вероятность быть детали годной равна математическому ожиданию X.

Для решения задачи используем неравенство Чебышева, записанное для случайной величины X, в форме

$$P(|X-m_x|<\varepsilon)>1-D_x/\varepsilon^2.$$

По условию задачи ε=0,02. В результате получим

$$P(|X-m_x|<0{,}02)>1-(0{,}98*0{,}02)/0{,}02^2*N.$$

Следовательно, 1-(0,98*0,02)/0,02^2 *N>0,96, откуда находим N>1225.

Задача 3. Вероятность того. Что каждое изделие будет высшего качества 0,3. Оценить вероятность того, что в 10000 испытаниях изделий на качество отклонение относительной частоты изделий высшего качества от вероятности быть изделию высшего качества по абсолютной величине не превзойдет 0,01.

Решение. Как и в предыдущей задаче рассмотрим относительную частоту $X=(X_1+X_2+\ldots+X_{10000})$ /10000 изделий высшего качества. По формулам предыдущей задачи находим: m_x=0,03, D_x =0,3*0,7/10000=0,000021. Искомая вероятность находится с помощью неравенства Чебышева, записанного для случайной величины X:$P(|X-m_x|<\varepsilon)>1-D_x/\varepsilon^2$.По условию чи ε=0,01. Следовательно, $P(|X-m_x|<0{,}01)>1-(0{,}3*0{,}7)/10000*0{,}01^2=0{,}79$.

Часть 5. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

Гмурман В. Е. Гл. 15 § 8.

Роднищев Н.Е. Гл. 6.

Математическая статистика занимается построением и исследованием математических методов оценивания статистических закономерностей природы по изменению их характеристик.

Как видно из определения, необходимо изучить методы математической статистики и на основе этих методов научиться решать практические задачи.

Для того, чтобы точно определить, что такое статистические закономерности, обратимся к примерам. При наблюдении окружающего мира мы обнаружим, что он абсолютно многолик. Например, если мы взглянем из окна на деревья, на первый взгляд, ничего особенного в них нет. Однако, если приглядеться внимательнее, можно заметить, что все деревья разные (даже если они одного вида). Более того, ни один листок на одном и том же дереве не повторяет в точности другой листок. Аналогично, ни один цветок не повторяет в точности другой цветок того же вида, ни одна снежинка не является точной копией другой снежинки... Все это можно проверить на практике, которая, как известно, является критерием истинности.

Если обратиться к самой высшей форме материи, созданной природой, – к человеку, здесь мы также видим, что каждый человек неповторим и индивидуален: индивидуален внешне и индивидуален его внутренний духовный мир.

Однако мы настолько привыкаем к этой замечательной стороне окружающей нас реальности, что порой перестаем замечать всего окружающего нас многообразия, оперируя сложившимися образами. Например, мы можем точно определить, что это лист березы, а навстречу нам идет человек. Что позволяет нам это делать? Наблюдаемые объекты, например, листья березы, рассматриваемые в своей массе (но не по одиночке), имеют общие характеристики: средний размер, цвет окраски, определенную форму и т.д.

Рассмотренные примеры поясняют следующие выводы:

В массовом повторении и взаимодействии случайных явлений могут наблюдаться устойчивые эффекты усреднения.

Они состоят в том, что те или иные характеристики достаточно большого числа повторений или взаимодействий случайных явлений почти всегда лишь мало отклоняются от некоторых усредненных состояний.

Вот эти усредненные состояния и есть статистические закономерности **.**

Таким образом, статистическими закономерностями называют закономерности, которые более или менее устойчиво проявляются при массовых повторениях случайных явлений.

Построения математической статистики базируются на принципах (постулатах) – основополагающих предложениях опытного характера. Можно выделить два основных принципа математической статистики: *принцип вероятности* (описание наблюдений и статистических закономерностей методами теории вероятностей и случайных процессов) и *принцип оптимальности* (оптимальность принимаемых решений). На основе принципов строятся математические модели наблюдений и статистических закономерностей. При помощи принципов формулируются цели и критерии статистического вывода. Таким образом, метод математической статистики состоит в математическом моделировании наблюдений и исследовании статистических закономерностей на основе априорных принципов, критерием истинности которых является практика.

Для исследования статистических закономерностей в математической статистике разработаны методы оценивания статистических закономерностей.

Существуют следующие основные формы построения оценок статистических закономерностей.

1. Построение точечной оценки статистической закономерности – это определение приближенного значения (состояния) статистической закономерности по результатам измерения ее характеристик.
2. Доверительное (интервальное) оценивание статистической закономерности – это построение случайного интервала или области по результатам измерений, которые практически достоверно содержат (накрывают) оцениваемую закономерность.

Задание к части 5
ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1) Провести измерения практически значимой случайной величины (СВ) X и получить выборку измерений x^n.
2) Объем выборки в соответствии с вариантом задания выбрать из таблицы 1. Номер варианта задания совпадает с порядковым номером студента в списке группы.
3) Задать уровень значимости α по следующему правилу: для каждого четного порядкового номера студента в списке группы α=0,01; для каждого нечетного – α=0,05.
4) Выполнить теоретическое обоснование работы.
5) Провести первичную статистическую обработку полученных данных и представить результаты в виде формул, таблиц и графиков.

При построении границ интервалов учитывать следующее правило: если последняя цифра номера группы – число четное, то правая граница каждого интервала должна быть включена в интервал; если последняя цифра номера группы – число нечетное, то левая граница каждого интервала должна быть включена в интервал.

Таблица 1

№ варианта	Объем в ыборки	№ вари-анта	Объем выборки	№ варианта	Объем выбор-ки
1	48	11	33	21	50
2	43	12	40	22	48
3	50	13	37	23	42
4	47	14	38	24	41
5	49	15	39	25	46
6	45	16	36	26	34
7	35	17	34	27	49
8	47	18	44	28	35
9	44	19	41	29	31
10	42	20	32	30	40

Первичную обработку результатов измерений (исходной выборки) (пункт 5 задания по теме 5) провести в соответствии со следующим алгоритмом:

1) на основе выборки измерений построить вариационный ряд;
2) на основе выборки измерений построить точечные и интервальные оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины;
3) на основе вариационного ряда построить ступенчатую оценку функции распределения случайной величины – статистическую (эмпирическую) функцию распределения;
4) построить статистический ряд;
5) на основе статистического ряда построить вторую оценку функции распределения случайной величины – кумулятивную ломаную;
6) на основе статистического ряда построить первую оценку плотности распределения случайной величины – гистограмму.
7) на основе статистического ряда построить вторую оценку плотности распределения случайной величины – полигон частот.

Построение вариационного ряда

На практике вариационный ряд представляет собой неубывающую последовательность вариантов ($x_{(1)},...,x_{(n)}$) – последовательность элементов выборки измерений, расположенных в порядке неубывания.

Первый элемент выборки $x_{(1)}$ называется минимальным и обозначать его x_{min}, последний элемент выборки $x_{(n)}$ будем называть максимальным и обозначать x_{max}. Разность между максимальным и минимальным элементами выборки x_{max} - x_{min} называют размахом выборки и обозначают r.

Построение статистических оценок математического ожидания и дисперсии.

Статистические оценки основных числовых характеристик случайных величин (математического ожидания и дисперсии) подразделяются на два вида: точечные и интервальные.

Напомним определения математического ожидания и дисперсии для дискретных случайных величин.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины M[X] называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины x_i на вероятности p_i этих значений:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Другое обозначение математического ожидания случайной величины – m.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$D[X] = M[(X-m)^2]$$

Согласно этому определению, дисперсия дискретной случайной величины может быть найдена по формуле:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 \, p_i .$$

Рассмотрим построение точечных оценок математического ожидания и дисперсии.

Построение точечных оценок

Математическим ожиданием случайной величины M[X] называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины x_i на вероятности p_i этих значений:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины:

$$D[X] = M[(X-m)^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i .$$

Дисперсия характеризует рассеяние значений случайной величины около ее математического ожидания (среднего значения).

Реализация точечной оценки математического ожидания называется выборочным средним и определяется по формуле:

$$\tilde{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Для дисперсии реализацией точечной оценки служит выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

и исправленная выборочная дисперсия

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 ,$$

которая является несмещенной и состоятельной точечной оценкой дисперсии.

Построение интервальных оценок

Интервальной называют оценку, которая определяется как интервал с двумя концами (в общем случае случайными), накрывающий оцениваемый параметр.

Доверительным называется интервал со случайными концами, который с доверительной вероятностью (надежностью) β содержит (или накрывает) неизвестный оцениваемый параметр. Поскольку концы интервала представляют собой случайные величины, то их называют *доверительными границами.*

Интервальная оценка математического ожидания случайной величины

Интервальной оценкой математического ожидания СВ называется случайный интервал вида:

$$I_\alpha(m_x) = \left(\bar{x} - \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha ; \bar{x} + \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha \right).$$

Границы доверительного интервала для $\tilde{m}_x$:

$$\tilde{m}_1 = \bar{x} - \frac{\tilde{\sigma} \cdot t_\alpha}{\sqrt{n-1}}$$

$$\tilde{m}_2 = \bar{x} + \frac{\tilde{\sigma} \cdot t_\alpha}{\sqrt{n-1}}$$

Реализация доверительного интервала для математического ожидания имеет вид:

$$i_\alpha(m_x) = \left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha ; \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha \right)$$

Для нахождения интервальной оценки математического ожидания необходимо вычислить реализацию точечной оценки среднего квадратического отклонения (реализацию стандартного отклонения):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \, .$$

Из таблиц распределения Стьюдента по значениям n и α находим значение t_α, как решение уравнения:

$$P\left(\left|T_{n-1}\right| < t_\alpha\right) = \beta$$

$$T_{n-1} = \frac{N(0;1)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\chi^2_{n-1}}}$$

β -вероятность практически достоверного события

t_β -граница практически достоверных значений дроби Стьюдента T_{n-1}

Интервальная оценка дисперсии случайной величины

Интервальной оценкой дисперсии служит интервал $I_D = (\tilde{\sigma}^2{}_1,\ \tilde{\sigma}^2{}_2)$,

где $\tilde{\sigma}^2{}_1 = (n\tilde{\sigma}^2{}_x)/t_1$, $\tilde{\sigma}^2{}_2 = (n\tilde{\sigma}^2{}_x)/t_2$, t_1, t_2 находят из таблиц χ^2 – распределения по входам α_1, α_2 и $(n$-1).

Вероятности α_1 и α_2 вычисляют по формулам:

$$\alpha_1=(1+\beta)/2,$$

$$\alpha_2=(1-\beta)/2.$$

Здесь β – доверительная вероятность, $\alpha = 1–\beta$.

Таким образом, интервальная оценка дисперсии – это случайный интервал вида:

$$I_\alpha\left(D_x\right) = \left(\frac{n\tilde{\sigma}^2}{t_1},\ \frac{n\tilde{\sigma}^2}{t_2}\right).$$

Реализация интервальной оценки дисперсии – это интервал

$$i_\alpha\left(D_x\right) = \left(\frac{ns^2}{t_1},\ \frac{ns^2}{t_2}\right).$$

Построение статистического ряда

Для построения статистического ряда определяют отрезок числовой оси, содержащий все элементы выборки $x^n=(x_1,\ldots,x_n)$, т.е. интервал $(x_{\min}, x_{\max})$.

Затем необходимо провести разбиение элементов выборки на группы (выполнить процедуру группировки выборки), то есть интервал (x_{min}, x_{max}) разбить на полуинтервалы (разряды). Для этого необходимо разделить точками x^1, x^2,…,x^q действительную ось на q непересекающихся разрядов (x^j, x^{j+1}), j=1,q, одинаковой длины.

Количество разрядов вычисляем по формуле: $q=\sqrt{n}$, q=5-20, а длину разряда вычисляем по формуле:

$$l = r/q.$$

Причем $x_{min} = x^0$, $x_{max} = x^q$.

После этого для каждого из разрядов находят представителей разрядов, т.е. устанавливают координаты средних точек разрядов $\bar{x}_j$:

$$\bar{x}_j = \frac{x^{j-1} + x^j}{2}.$$

Затем находят число элементов выборки n_j (абсолютная частота разряда), попадающих в j-ый разряд. Наконец, вычисляется относительная частота разряда p^*_j :

$$p^*_j=n_j/n \qquad (j=1,q).$$

Ряд относительных частот p^*_j, (j=1,q) называется статистическим рядом.

Статистический ряд необходим для упорядочивания информации и строится в виде таблицы.

Статистические оценки закона распределения случайной величины

Построение статистических оценок функции распределения

Эмпирической (статистической) функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X<x$.

Статистическая функция распределения $F^*(x)$ рассчитывается по формуле:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

где n_x - число вариантов (значений) вариационного ряда, расположенных левее текущего значения x включительно,

n – объем выборки.

Из теоремы Бернулли следует, что при неограниченном увеличении n относительная частота события $X < x$, т.е. $F^*(x_i)$ стремится по вероятности к $F(x)$ этого события, так как $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|p^* - p| < \varepsilon\} = 1$.

Отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенной оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности. Это подтверждается тем, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$:

- значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0,1];
- $F^*(x)$- неубывающая функция;
- если x_1 - наименьшая варианта, то $F^*(x)=0$ при $x < x_1$;
- если x_k - наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при $x >= x_k$.

Пример графика статистической функции распределения представлен на рис.1.

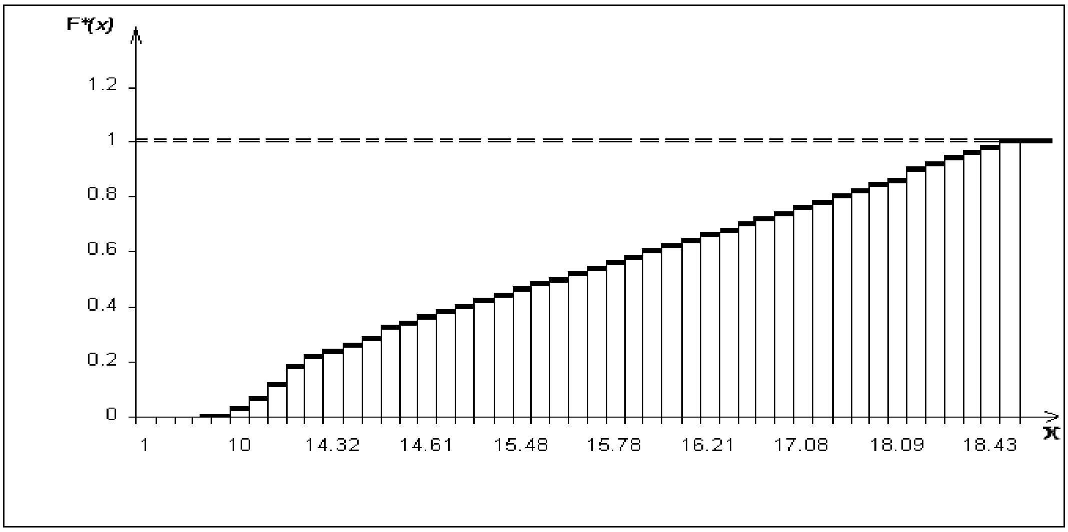


Рис.1. Статистическая функция распределения.

Второй оценкой функции распределения является кумулятивная ломаная.

При достаточно больших объемах выборки измерений (наблюдений) повторение ступенчатой оценки F(x) становится неудобным.*

В этом случае, для построения оценки функции распределения, удобнее использовать данные статистического ряда, а именно:

$$F^{**}(x^0) = 0$$

$$F^{**}(x^1) = p_1^*$$

$$F^{**}(x^2) = p_1^* + p_2^*$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$

$$F^{**}(x^q) = p_1^* + p_2^* + \ldots + p_q^* = \sum_{j=1}^{q} p_j^*$$

где $\sum_{j=1}^{q} p_j^* = 1$.

Используя эти формулы, можно построить ломаную $F^{**}(x)$, проходящую через точки $(x^j, F^{**}(x^j))$, $j=\overline{0,q}$ и принять ее в качестве графика оценки функции распределения. Ее называют кумулятивной ломаной.

Пример расчетов приведен в табл.2.

Таблица 2

Номер интервала	1	2	3	4	5	6
Границы интервалов	[14,01;14.74)	[14.74;15.58)	[15.58;16.32)	[16.32;17.93)	[17.93;18.71)	[18.71;19.55]
Относительная частота интервалов $p_j^* = \frac{n_j}{n}$	0.18	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16
F**(x)	0.18	0.34	0.48	0.64	0.84	1

Значения $F^{**}(x)$ для примера, приведенного в табл. 2, вычисляются по формуле:

$$F^{**}(x^0) = 0$$
$$F^{**}(x^1) = p_1^*$$

$F^{**}(x^2) = p_1^* + p_2^*.$
$F^{**}(x^3) = p_1^* + p_2^* + p_3^*$
……………………………
$F^{**}(x^6) = p_1^* + p_2^* + \ldots + p_6^* = 1$

График кумулятивной ломаной представлен на рис.2.

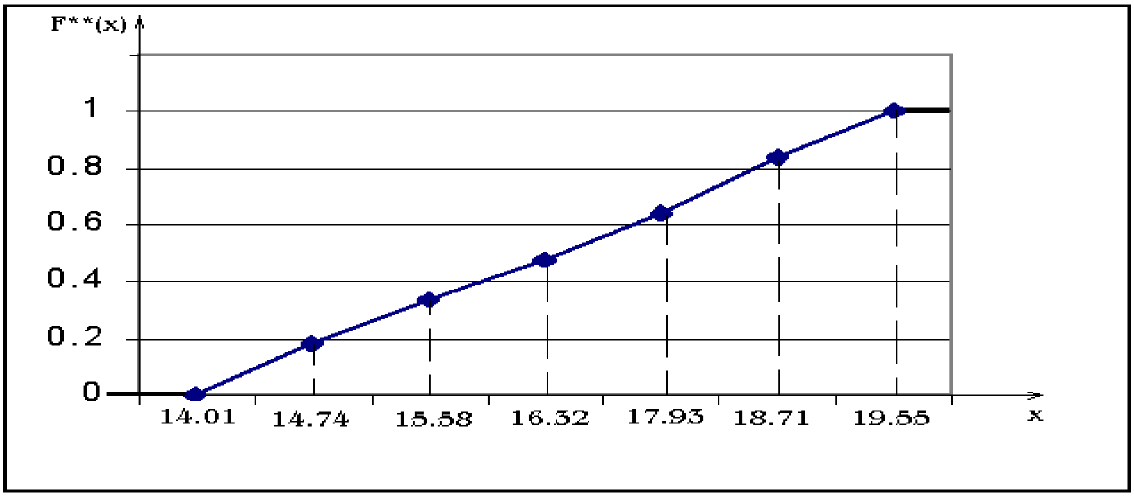


Рис.2. Кумулятивная ломаная

5) Построение статистических оценок плотности распределения f(x): гистограммы f*(x) и полигона частот f**(x).

Статистической оценкой (статистическим аналогом) плотности распределения является полигон частот и гистограмма.

Гистограммой называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат интервалы длиною $l_j = x^j - x^{j-1}$, а высота равна отношению p_j^* / l_j (плотность относительной частоты).

Учитывая свойство плотности распределения можно записать:

$$P(x^{j-1} \le X < x^j) = f(\tilde{o}_j) * l_j \quad , \qquad (j = \overline{1,q}),$$

где l_j – длина j-го интервала (разряда), $f(\tilde{o}_j)$- средняя на интервале I_j плотность распределения $f(x)$, вычисляемая в точке $\tilde{o}_j$ (средняя точка разряда).

Заменяя $P(x^{j-1} \le X < x^j)$ относительной частотой p^*_j статистического ряда, получим следующее выражение для приближенного значения f^*_j плотности распределения на разряде:

$$f^{*}_{j} = p^{*}_{j} / l_{j},$$

здесь $p^{*}{}_{j} = \dfrac{n_j}{n}$ – относительная частота разряда, l_j – длина разряда, f^{*}_{j} – плотность относительной частоты разряда, j – номер разряда ($j = \overline{1,q}$).

Таким образом, гистограмма относительных частот строится следующим образом: на оси *Ox* отложим длины разрядов и на них, как на основаниях, построим прямоугольники, имеющие площадь p^{*}_{j} и высоту равную f^{*}_{j} (см. рис.3.).

Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот:

$$\sum_{j=1}^{q} p_j^{*} = \sum_{j=1}^{q} \frac{n_j}{n} = 1$$

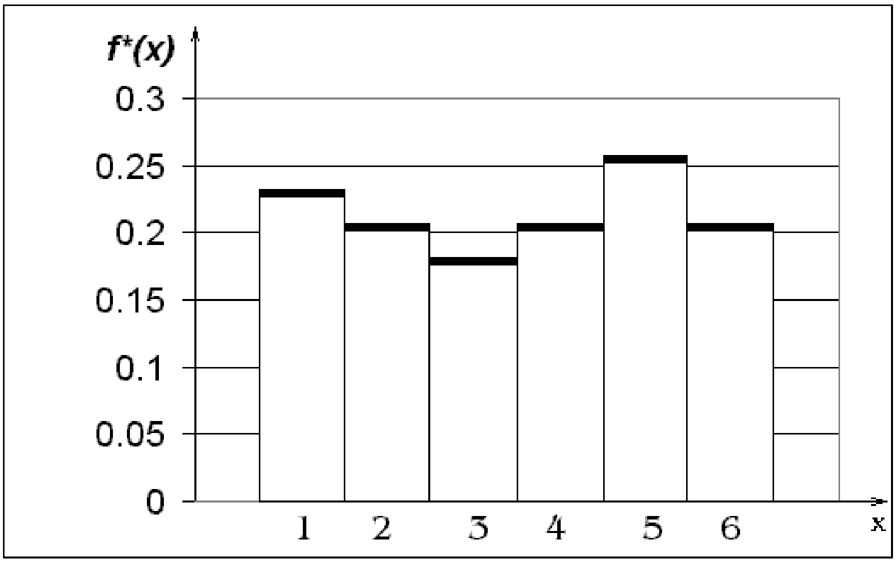


Рис.3. Гистограмма – оценка плотности распределения, построенная по относительным частотам.

Сглаженную гистограмму относительных частот в виде ломаной линии называют полигоном относительных частот $f^{**}(x)$. Полигон относительных частот является вторым способом оценки $f(x)$. Она строится по точкам ($\bar{x}_j$, f^{*}_{j}), ($j = \overline{1,q}$) (см. рис.4).

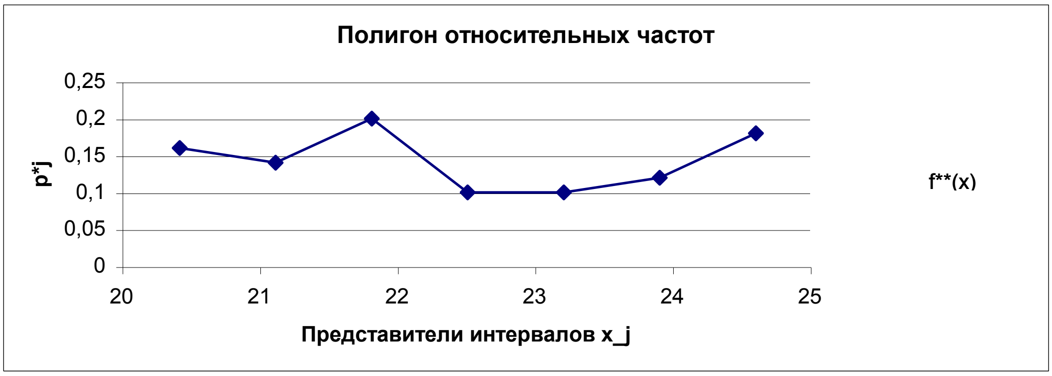


Рис.4. Полигон относительных частот

Рекомендуемая литература

Основная

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 2000.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М., Наука, 1999.

3. Кожевников Ю.В. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Машиностроение, 2002.

4. Роднищев Н.Е. Курс теории вероятностей и математической статистики. Казань, КГТУ,. 2001.

5. Кожевников Ю.В. Введение в математическую статистику. Компьютерный учебник. Казань, КГТУ, 1996.

6. Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М., Высшая школа, 1984.

7. Задачник по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. Свешникова А.А. М., Наука, 1970.

8. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. М., Наука, 1983.

9. Нужина Т.С. Элементы теории случайных процессов. Казань, КАИ, 1980.

Дополнительная

1. Боровков А.А. Курс теории вероятностей. М., Наука,1972.

2. Боровков А.А. Математическая статистика. М., Наука,1984.

3. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М., Наука,1975

Приложения

Приложение 1 (Исключение грубых ошибок)

	A	B	C	D	E	F
1	14.01	16.63			7.5076	0.0144
2	14.05	16.87			7.29	0.0144
3	14.24	16.88			6.3001	0.0169
4	14.32	17.08			5.9049	0.1089
5	14.42	17.48			5.4289	0.5329
6	14.52	17.85			4.9729	1.21
7	14.55	17.9			4.84	1.3225
8	14.58	18.02			4.7089	1.6129
9	14.61	18.09			4.5796	1.7956
10	14.98	18.21			3.1329	2.1316
11	14.98	18.29			3.1329	2.3716
12	15.15	18.33			2.56	2.4964
13	15.34	18.38			1.9881	2.6569
14	15.48	18.43			1.6129	2.8224
15	15.49	18.58			1.5876	3.3489
16	15.49	18.61			1.5876	3.4596
17	15.56	18.62			1.4161	3.4969
18	15.71	18.81			1.0816	4.2436
19	15.78	19.01			0.9409	5.1076
20	15.86	19.01			0.7921	5.1076
21	15.93	19.06			0.6724	5.3361
22	15.99	19.24			0.5776	6.2001
23	16.16	19.25			0.3481	6.25
24	16.21	19.45			0.2916	7.29
25	16.45	19.55			0.09	7.84
					СТЕПЕНЬ(A1-16.75;2)	СТЕПЕНЬ(B1-16.75;2)
		150.1331				
	Xcp=	16.7498		ta(при a=0,05) =	2.987	
	S=	1.750412				
		Xmin=	14.01			
		Xmax=	19.55			
		Xmin>Xcp-St_a				
		14.01>16.75-1.750412*2,987				
		14.01>11.5227				
		Xmin не является грубой ошибкой				
		Xmax$<$Xcp+St_a				
		19.55<16.75+1.750412*2.987				
		19.55<21.9773				
		Xmax- не является грубой ошибкой				

Приложение 2

Построение статистического ряда

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9		**Статистическая таблица**							
10									
11	№Интервала	1	2	3	4	5	6		
12	Интервалы	14.01-14.74	14.74-15.58	15.58-16.32	16.32-17.93	17.93-18.71	18.71-19.55		
13	Xср	14.375	15.16	15.95	17.125	18.32	19.13		
14	Ni	9	8	7	8	10	8		
15	Pi*=Ni/N	0.18	0.16	0.14	0.16	0.2	0.16	B14/50	
16	Pi*/h	0.229711087	0.204187633	0.17866418	0.204187633	0.25523454	0.20418763	B15/0.783593	
17									
18									
19									
20	14.01	14.98	15.93	17.85	18.61		Максимум	19.55	
21	14.05	15.15	15.99	17.9	18.62		Минимум	14.01	
22	14.24	15.34	16.16	18.02	18.81				
23	14.32	15.48	16.21	18.09	19.01		h	0.783593	
24	14.42	15.49	16.45	18.21	19.01				
25	14.52	15.49	16.63	18.29	19.06				
26	14.55	15.56	16.87	18.33	19.24				
27	14.58	15.71	16.88	18.38	19.25				
28	14.61	15.78	17.08	18.43	19.45				
29	14.98	15.86	17.48	18.58	19.55				

Приложение 3

(Точечные и интервальные оценки математического ожидания и дисперсии).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Xi ср	14.375	15.16	15.95	17.125	18.32	19.13			
2	Pi*	0.18	0.16	0.14	0.16	0.2	0.16			
3	Xi ср x Pi*	2.5875	2.4256	2.233	2.74	3.664	3.0608	B1*B2		
4										
5	m^ =	16.7109	СУММ(B3:K3)							
6										
7	Xi ср - m^	-2.3359	-1.5509	-0.7609	0.4141	1.6091	2.4191	B1-B5		
8	Ni	9	8	7	8	10	8			
9		49.10786	19.24233	4.052782	1.37183	25.89203	46.81636	B7^2*B8		
10										
11	D* =	2.989453	1/49*СУММ(B9:G9)			S* =	1.729003	КОРЕНЬ(B11)		
12	D=	2.929664	1/50*СУММ(B9:G9)			S=	1.711626	КОРЕНЬ(B12)		
13										
14										
15		16.71	-	0.496861	<	$Ja(m_x)$	<	16.71	+	0.496861
16				16.21314	<	$Ja(m_x)$	<	17.20686		
17				B5-2,032*G11/КОРЕНЬ(50)				B5+2,032*G11/КОРЕНЬ(50)		
18										
19		2.989453	-	1.227248	<	$Ja(D_x)$	<	1.227248	+	2.989453
20				1.762205	<	Ja(Dx)	<	4.216701		
21				B11-B11*КОРЕНЬ(2/49)*2,032				B11+B11*КОРЕНЬ(2/49)*2,032		

Приложение 4

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

X	Φ (X)	X	Φ (x)	X	Φ (X)	X	Φ (x)
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Таблица значений функции $\Phi(x)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$

X	Ф (X)	X	Ф (x)	X	Ф (X)	X	Ф (x)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Приложение 5

Критические точки распределения Хи–квадрат

n\Q	0,995	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,005
1	3,9271E-05	0,00015709	0,0009821	0,003932	3,841455	5,023903	6,634891	7,8794
2	0,01002467	0,02010041	0,0506357	0,102586	5,991476	7,377779	9,210351	10,59653
3	0,07172345	0,11483162	0,2157949	0,351846	7,814725	9,348404	11,34488	12,83807
4	0,20698363	0,29710681	0,484419	0,710724	9,487728	11,14326	13,2767	14,86017
5	0,41175081	0,55429691	0,8312089	1,145477	11,07048	12,83249	15,08632	16,74965
6	0,67573335	0,87208326	1,2373419	1,63538	12,59158	14,44935	16,81187	18,54751
7	0,98925088	1,23903171	1,689864	2,167349	14,06713	16,01277	18,47532	20,27774
8	1,34440274	1,64650617	2,1797247	2,732633	15,50731	17,53454	20,09016	21,95486
9	1,73491138	2,08788942	2,7003887	3,325115	16,91896	19,02278	21,66605	23,58927
10	2,15584538	2,55819883	3,2469635	3,940295	18,30703	20,4832	23,20929	25,18805
11	2,60320192	3,05349572	3,8157424	4,574809	19,67515	21,92002	24,72502	26,75686
12	3,073785	3,57055135	4,4037775	5,226028	21,02606	23,33666	26,21696	28,29966
13	3,56504197	4,10689964	5,0087376	5,891861	22,36203	24,73558	27,68818	29,81932
14	4,07465883	4,66041549	5,6287238	6,570632	23,68478	26,11893	29,14116	31,31943
15	4,60087406	5,22935591	6,2621229	7,260935	24,9958	27,48836	30,57795	32,80149
16	5,14216425	5,81219685	6,9076641	7,961639	26,29622	28,84532	31,99986	34,26705
17	5,69727365	6,40774196	7,5641786	8,671754	27,5871	30,19098	33,4087	35,71838
18	6,26476587	7,01490342	8,2307372	9,390448	28,86932	31,52641	34,80524	37,15639
19	6,84392333	7,63269763	8,9065144	10,11701	30,14351	32,85234	36,19077	38,58212
20	7,43381136	8,26036838	9,5907725	10,8508	31,41042	34,16958	37,56627	39,99686
21	8,03360214	8,89717245	10,282907	11,59132	32,67056	35,47886	38,93223	41,40094
22	8,64268062	9,54249443	10,98233	12,33801	33,92446	36,78068	40,28945	42,79566
23	9,26038309	10,1956888	11,688534	13,09051	35,17246	38,07561	41,63833	44,18139
24	9,88619866	10,8563494	12,401146	13,84842	36,41503	39,36406	42,97978	45,55836
25	10,5196471	11,5239511	13,119707	14,6114	37,65249	40,6465	44,31401	46,92797
26	11,1602178	12,1981769	13,843881	15,37916	38,88513	41,92314	45,64164	48,28978
27	11,807655	12,8784685	14,573373	16,15139	40,11327	43,19452	46,96284	49,64504
28	12,4612811	13,5646661	15,307854	16,92788	41,33715	44,46079	48,27817	50,99356
29	13,1210666	14,2564062	16,047051	17,70838	42,55695	45,72228	49,58783	52,3355
30	13,7866817	14,9534644	16,790756	18,49267	43,77295	46,97922	50,89218	53,67187
31	14,4577359	15,6554669	17,538716	19,28056	44,98534	48,23192	52,19135	55,00248
32	15,1340182	16,3622034	18,290791	20,07191	46,19424	49,48044	53,48566	56,32799
33	15,8151796	17,0734802	19,046663	20,86652	47,3999	50,7251	54,77545	57,64831
34	16,5012991	17,7891043	19,806237	21,66428	48,60236	51,96602	56,06085	58,96371
35	17,1917287	18,5088696	20,56938	22,46501	49,80183	53,20331	57,34199	60,27459
36	17,8867503	19,232627	21,335873	23,26862	50,99848	54,43726	58,61915	61,58107
37	18,5858845	19,960267	22,105616	24,07494	52,19229	55,66798	59,89256	62,88317
38	19,2888188	20,691410 4	22,878489	24,88389	53,38351	56,89549	61,16202	64,18123
39	19,9958261	21,4261387	23,6543	25,69538	54,57224	58,12005	62,42809	65,47532
40	20,7065768	22,164012	24,433058	26,5093	55,75849	59,34168	63,69077	66,76605
41	21,4207505	22,905558	25,214518	27,32556	56,9424	60,56055	64,94998	68,05263
42	22,138381	23,650141	25,998657	28,14405	58,12403	61,77672	66,20629	69,33604

n\Q	0,995	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,005
43	22,8595681	24,3975687	26,785369	28,96471	59,30352	62,99031	67,45929	70,61573
44	23,5836204	25,1480117	27,574543	29,7875	60,4809	64,20141	68,70964	71,89234
45	24,310982	25,9012003	28,366177	30,61226	61,65622	65,41013	69,9569	73,16604
46	25,0413006	26,657186	29,160024	31,439	62,82961	66,61647	71,2015	74,43671
47	25,7745002	27,4158207	29,95616	32,26761	64,00113	67,82064	72,44317	75,70385
48	26,5106735	28,1769725	30,754499	33,09807	65,17076	69,02257	73,68256	76,96892
49	27,2493695	28,9405947	31,55493	33,93029	66,33865	70,22236	74,91939	78,23055
50	27,9908247	29,7067253	32,357385	34,76424	67,50481	71,42019	76,1538	79,48984
51	28,7347386	30,4750107	33,161795	35,59986	68,66932	72,61603	77,38601	80,74645
52	29,4810772	31,2456863	33,968133	36,43708	69,83216	73,80992	78,61563	82,00062
53	30,2300184	32,0185478	34,776303	37,27589	70,99343	75,0019	79,84336	83,25251
54	30,9811231	32,79343	35,586332	38,1162	72,15321	76,19206	81,06878	84,50176
55	31,7348945	33,5705164	36,398113	38,95805	73,31148	77,38044	82,29198	85,74906
56	32,4906266	34,3495447	37,211566	39,80127	74,46829	78,56713	83,51355	86,99398
57	33,2482311	35,1305593	38,026716	40,64592	75,62372	79,75218	84,73265	88,23656
58	34,008467	35,9135101	38,843521	41,49198	76,77778	80,9356	85,95015	89,47699
59	34,7703768	36,6981753	39,661852	42,3393	77,93049	82,11737	87,16583	90,71533
60	35,5343972	37,4847956	40,481707	43,18797	79,08195	83,29771	88,37943	91,95181
61	36,3004603	38,2731954	41,303169	44,0379	80,23209	84,4764	89,59122	93,18622
62	37,0683273	39,0632584	42,125992	44,88904	81,38098	85,6537	90,8015	94,41853
63	37,838301	39,8550871	42,950306	45,74135	82,52872	86,82963	92,00989	95,64919
64	38,6097353	40,64851	43,775944	46,5949	83,67524	88,00398	93,2167	96,87794
65	39,3832265	41,4435539	44,60297	47,44957	84,82064	89,17716	94,422	98,10492
66	40,1582883	42,2402456	45,431374	48,30538	85,96494	90,34883	95,62559	99,33027
67	40,9348768	43,0383564	46,260996	49,16225	87,10804	91,51933	96,82768	100,5538
68	41,7135681	43,8380387	47,091943	50,02026	88,25017	92,68849	98,02832	101,7757
69	42,4934268	44,63917	47,924119	50,87924	89,39119	93,85648	99,22741	102,9961
70	43,275305	45,4417001	48,757536	51,73926	90,53126	95,02315	100,4251	104,2148
71	44,0584365	46,2456399	49,592165	52,6003	91,67026	96,18873	101,6214	105,4323
72	44,8432	47,0510202	50,42794	53,46232	92,80827	97,35298	102,8163	106,6473
73	45,6291399	47,8577291	51,264784	54,3253	93,94533	98,51621	104,0098	107,8619
74	46,4168393	48,6656643	52,102819	55,18922	95,08146	99,67838	105,2019	109,0742
75	47,206144	49,4751216	52,941919	56,05405	96,21666	100,8393	106,3929	110,2854
76	47,9963545	50,2855258	53,782086	56,91982	97,35097	101,9992	107,5824	111,4954
77	48,7884731	51,09731	54,623321	57,78646	98,48438	103,1581	108,7709	112,7037
78	49,5814052	51,91041	55,465608	58,65393	99,61696	104,3159	109,9582	113,9107
79	50,3759668	52,7247814	56,308873	59,52228	100,7486	105,4727	111,144	115,1163
80	51,1719331	53,5399831	57,153152	60,39146	101,8795	106,6285	112,3288	116,3209
81	51,9690425	54,3566813	57,998401	61,2615	103,0095	107,7834	113,5123	117,524
82	52,7671934	55,1742752	58,844652	62,1323	104,1387	108,9373	114,6948	118,7261
83	53,5668681	55,9930085	59,691733	63,00389	105,2672	110,0902	115,8762	119,927
84	54,3677646	56,812925	60,539833	63,87624	106,3949	111,2422	117,0566	121,1262
85	55,1695015	57,633909	61,388768	64,74937	107,5217	112,3933	118,2356	122,3244
86	55,9725781	58,4558827	62,238633	65,62326	108,6479	113,5436	119,4137	123,5218
87	56,7770135	59,2790577	63,089365	66,49788	109,7733	114,6929	120,5909	124,7176
88	57,5824596	60,1029492	63,940935	67,37323	110,898	115,8415	121,7672	125,9123

n\Q	0,995	0,99	0,975	0,95	0,05	0,025	0,01	0,005
89	58,3887624	60,9279888	64,79339	68,24927	112,022	116,989	122,9422	127,106
90	59,196327	61,754018 6	65,646592	69,12602	113,1452	118,1359	124,1162	128,2987
91	60,0048848	62,580973 3	66,500685	70,00347	114,2679	119,282	125,2893	129,4902
92	60,8145966	63,4089173	67,355569	70,88159	115,3898	120,427	126,4616	130,6812
93	61,6251739	64,2379969	68,211247	71,76032	116,511	121,5714	127,633	131,8705
94	62,4368531	65,0676084	69,067619	72,63976	117,6317	122,7152	128,8032	133,0589
95	63,2495125	65,8982568	69,924857	73,51982	118,7516	123,858	129,9725	134,2466
96	64,0633447	66,73003 4	70,782786	74,40057	119,8709	125,0001	131,1411	135,4327
97	64,8777974	67,5623439	71,641536	75,28184	120,9897	126,1414	132,3089	136,6188
98	65,6934824	68,3957129	72,500907	76,16378	122,1077	127,2821	133,4756	137,803
99	66,5099065	69,2298558	73,361103	77,04631	123,2252	128,4219	134,6415	138,9869
100	67,3275332	70,0649951	74,221882	77,92944	124,3421	129,5613	135,8069	140,1697

Приложение 6

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы *k*	Уровень значимости а (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,В6
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
И	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,!4
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
28	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 7

К исключению грубых ошибок измерений

n\Q	0,001	0,01	0,025	0,05	0,1
3	1,414	1,414	1,414	1,412	1,406
4	1,731	1,723	1,710	1,689	1,645
5	1,990	1,955	1,917	1,869	1,791
6	2,203	2,130	2,067	1,996	1,894
7	2,377	2,265	2,182	2,093	1,974
8	2,521	2,374	2,273	2,172	2,041
9	2,643	2,464	2,349	2,238	2,097
10	2,747	2,540	2,414	2,294	2,146
11	2,837	2,606	2,470	2,343	2,190
12	2,915	2,663	2,519	2,387	2,229
13	2,984	2,713	2,563	2,426	2,264
14	3,046	2,759	2,602	2,461	2,297
15	3,102	2,800	2,638	2,494	2,327
16	3,152	2,837	2,670	2,523	2,354
17	3,198	2,871	2,701	2,551	2,380
18	3,240	2,903	2,728	2,577	2,404
19	3,278	2,932	2,754	2,601	2,426
20	3,314	2,959	2,779	2,623	2,447
21	3,347	2,984	2,801	2,644	2,467
22	3,378	3,008	2,823	2,664	2,486
23	3,407	3,030	2,823	2,683	2,504
24	3,434	3,051	2,862	2,701	2,521
25	3,459	3,071	2,880	2,718	2,537
26	3,483	3,089	2,897	2,734	2,553
27	3,506	3,107	2,913	2,749	2,568
28	3,528	3,124	2,929	2,764	2,582
29	3,548	3,140	2,944	2,778	2,596
30	3,567	3,156	2,958	2,792	2,609
31	3,586	3,171	2,972	2,805	2,622
32	3,603	3,185	2,985	2,818	2,634
33	3,620	3,199	2,998	2,830	2,646
34	3,636	3,212	3,010	2,842	2,657
35	3,652	3,224	3,022	2,853	2,668
36	3,667	3,236	3,033	2,864	2,679
37	3,681	3,248	3,044	2,874	2,689
38	3,695	3,256	3,055	2,885	2,699
39	3,708	3,270	3,065	2,894	2,709
40	3,720	3,281	3,075	2,904	2,718
41	3,733	3,291	3,084	2,319	2,727
42	3,745	3,301	3,094	2,922	2,736
43	3,756	3,310	3,103	2,931	2,745
44	3,767	3,320	3,112	2,940	2,753
45	3,778	3,329	3,120	2,948	2,762
46	3,788	3,338	3,129	2,956	2,770
47	3,798	3,346	3,137	2,964	2,778
48	3,808	3,354	3,145	2,972	2,785
49	3,818	3,363	3,152	2,980	2,793
50	3,827	3,370	3,160	2,987	2,800