МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»

Т.К.Гадельшин, Г.И.Норицина, В.К.Петров, Д.А.Макаров
Под редакцией В.С.Бондаря

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

РАЗДЕЛ «ДИНАМИКА»

учебно-методическое пособие
для студентов заочной формы обучения по специальностям:
190201.65; 190603.65; 150201.65; 150400.62; 151002.65

МОСКВА 2010

Разработано в соответствии с Государственным образовательным стандартом ВПО 2000 г. для специальностей подготовки:
190201.65 – Автомобиле- и тракторостроение;
190603.65 – Сервис транспортных и технологических машин и оборудования;
150201.65 – Машины и технологии обработки давлением;
150400.62 – Технологические машины и оборудование;
151002.65 – Металлообрабатывающие станки и инструменты;
на основе рабочей программы дисциплины «Теоретическая механика».

Рецензенты: профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ «МАМИ» Л.Г.Сухомлинов

профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ «МАМИ» Ю.М.Темис

Работа подготовлена на кафедре «Теоретическая механика».

Теоретическая механика. Раздел «Динамика». : учебно-методическое пособие. / Т.К.Гадельшин, Г.И.Норицина, В.К.Петров, Д.А.Макаров, под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С. – М.: МГТУ «МАМИ», 2010. – 114 с.

В учебно-методическом пособии приведены общие указания для студентов заочной формы обучения, программа курса «Теоретическая механика» (раздел «Динамика»), порядок изучения курса, вопросы для самопроверки, контрольные задания в виде расчетно-графических работ, краткий обзор раздела «Динамика», а также варианты расчетно-графических работ и порядок их оформления.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика, как одна из важнейших физико-математических наук, играет важную роль в подготовке инженеров любых специальностей.

На основных законах теоретической механики базируются многие общеинженерные дисциплины, такие, как сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и др.

В различных курсах по машиностроительным, технологическим и другим специальностям широко используются положения курса теоретической механики.

На основе теорем и принципов теоретической механики решаются многие инженерные задачи и осуществляется проектирование новых машин, конструкций и сооружений.

Чтобы хорошо усвоить курс теоретической механики, нужно не только глубоко изучить его теоретический материал, но и получить твердые навыки в решении задач. Для этого необходимо самостоятельно решить большое количество задач по всем разделам курса и выполнить ряд специальных расчетно-графических заданий.

Серия из трех учебно-методических пособий разработана для студентов заочной формы обучения всех специальностей с объемом программ 200-250 часов и состоит из трех частей, соответствующих трем основным разделам курса теоретической механики: статики, кинематики и динамики.

В данном учебно-методическом пособии по разделу «Динамика» приведены: программы, краткий теоретический обзор, вопросы для самопроверки, задания на расчетно-графические работы и указания по их выполнению.

ПРОГРАММА КУРСА "ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА"

РАЗДЕЛ «ДИНАМИКА»

Введение в динамику

Предмет динамики. Основные понятия и определения: масса, материальная точка, сила. Законы механики Галилея-Ньютона. Инерциальная система отсчета. Задачи динамики.

Динамика точки

Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки в декартовых координатах. Естественные уравнения движения свободной и несвободной материальной точек. Две основные задачи динамики для материальной точки. Решение первой задачи динамики.

Вторая задача динамики. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки в простейших случаях. Постоянные интегрирования и их определение по начальным условиям. Свободные колебания материальной точки без сопротивления и с сопротивлением пропорциональном скорости. Вынужденные колебания.

Несвободное движение материальной точки. Дифференциальные уравнения движения точки по заданной гладкой неподвижной кривой. Определение закона движения и реакции связи. Дифференциальные уравнения относительного движения. Переносная и кориолисова силы инерции.

Введение в динамику механической системы

Механическая система. Масса системы. Центр масс системы и его координаты. Классификация сил, действующих на механическую систему: силы внутренние и внешние, задаваемые силы и реакции связей. Свойства внутренних сил.

Моменты инерции системы и твердого тела относительно плоскости, оси и полюса. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Примеры вычисления моментов инерции тел в простейших случаях.

Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс

Дифференциальные уравнения движения механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Закон сохранения движения масс.

Теорема об изменении количества движения

Две меры механического движения; количество движения и кинетическая энергия материальной точки. Импульс силы и его проекции на координатные оси. Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной и конечной формах. Количество движения механической системы и его выражение через массу системы и скорость ее центра масс. Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и конечной формах. Закон сохранения количества движения механической системы.

Теорема об изменении момента количества движения

Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки. Сохранение момента количества движения материальной точки в случае центральной силы. Понятие о секторной скорости. Закон площадей.

Главный момент количества движения или кинетический момент механической системы относительно центра и оси. Кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения. Теорема об изменении кинетического момента механической системы. Закон сохранения кинетического момента механической системы. Теорема об изменении кинетического момента механической системы в относительном движении по отношению к центру масс.

Теорема об изменении кинетической энергии

Элементарная работа силы. Работа силы на конечном перемещении. Мощность. Аналитическое выражение элементарной работы силы. Работа силы тяжести, силы упругости и силы тяготения. Равенство нулю суммы работ внутренних сил в твердом теле. Работа и мощность сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в дифференциальной и конечной формах. Кинетическая энергия механической системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела в различных случаях его движения. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.

Динамика твердого тела

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Физический маятник. (Опытное определение моментов инерции тел). Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

Принцип Даламбера

Сила инерции материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Определение динамических реакций при несвободном движении материальной точки и системы. Приведение сил инерции точек твердого тела к центру: главный вектор и главный момент сил инерции. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Случай, когда ось вращения является главной центральной осью инерции тела. (Понятие о статической и динамической балансировках).

Элементы аналитической механики

Связи и их уравнения. Классификация связей: голономные и неголономные, стационарные и нестационарные, неосвобождающие и освобождающие связи. Возможные и виртуальные перемещения системы. Число степеней свободы системы. Идеальные связи.

Принцип возможных перемещений. Применение принципа возможных перемещений и определение реакций связей в простейших механизмах. Общее уравнение динамики.

Уравнения Лагранжа

Обобщенные координаты и обобщенные скорости. Выражение элементарной работы в обобщенных координатах. Обобщенные силы и их вычисление. Дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа второго рода.

Теория удара

Явление удара. Ударная сила и ударный импульс. Действие ударной силы на материальную точку. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе. Прямой центральный удар тела о неподвижную поверхность; упругий и неупругий удары. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение. Прямой центральный удар двух тел. Теорема Карно.

ПОРЯДОК ИЗУЧЕНИЯ КУРСА

ДИНАМИКА

Изучение теории

Тема 1. Введение в динамику. Основные понятия. Законы динамики. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах. Естественные уравнения движения материальной точки. Естественные уравнения движения материальной точки. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки в простейших случаях [1, §73-82].

Тема 2. Колебательное движение точки. Свободные колебания материальной точки. Затухающие и вынужденные колебания. Примеры [1, §94-96].

Тема 3. Введение в динамику механической системы. Теорема о движении центра масс механической системы. Теорема об изменении количества движения материальной точки и механической система в дифференциальной и конечной формах [1, §100, 101, 106-112].

Тема 4. Введение в динамику механической системы и общие теоремы динамики. Моменты инерции системы и твердого тела относительно оси и полюса. Радиус инерции. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей. Примеры вычисления моментов инерции тел в простейших случаях. Теорема об изменении моментов количества движения материальной точки и механической системы. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. [1, §102-105, 115-118, 128-130].

Тема 5. Общие теоремы динамики. Работа силы. Мощность. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы. Закон сохранения механической энергии [1, §121-125].

Тема 6. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы [1, §133-136].

Тема 7. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение статики и динамики [1, §137-141].

Тема 8. Уравнения Лагранжа второго рода [1, §142-146].

Тема 9. Элементы теории удара [1, §151-157].

Решение задач

Тема 1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки [2, № 27.7, 27.17, 27.22, 27.25, 27.31, 27.32, 27.58].

Тема 2. Колебательные движения точки [2, № 32.1, 32.3,32.4, 32.16, 32.24, 32.26, 32.26, 32.28, 32.52, 32.63, 32.64, 32.69-32.71, 32.78-32.80, 32.85-32.87].

Тема 3. Теорема о движении центра масс механической системы. Теорема об изменении количества движения материальной точки и механической системы [2, № 28.1, 28.3, 28.6, 35.7, 35.10, 35.18, 35.20, 36.9-36.11].

Тема 4. Теорема об изменении моментов количества движения материальной точки и механической системы. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси [2, № 28.4, 28.8, 37.4, 37.5, 37.51, 37.56, 37.57, 37.58].

Тема 5. Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы [2, № 30.4, 30.14, 30.16, 38.20, 38.27, 38.29].

Тема 6. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы [2, № 31.3, 31.6.31.9, 41.25, 42.6, 42.7].

Тема 7. Принцип возможных перемещений **[2,** № 46.1, 46.3,46.19, 46.21].

Тема 8. Уравнения Лагранжа второго рода [2, № 48.5, 48.6, 48.28, 48.29].

Тема 9. Теория удара [2, № 44.1. 44.5, 44.11, 44.15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Наука, 1974 и последующие издания.

2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М.: Физматгиз, 1973 и последующие издания.

3. Бать К.И. , Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - М.: Физматгиз, 1975, ч 1 и 2 и последующие издания.

4. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1970, Т.1 и последующие издания.

5. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. - М.: Высшая школа, 1983 и последующие издания.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. При каком условии материальная точка при действии на нее нескольких сил будет двигаться прямолинейно и равномерно?

2. В чем состоят две основные задачи динамики точки?

3. Как выражается закон гармонического колебания материальной точки?

4. Зависит ли период гармонического колебания от начальных условий движения материальной точки?

5. Что называется количеством движения материальной точки?

6. Что называется элементарным импульсом силы?

7. Как направлен элементарный импульс силы?

8. В чем заключается теорема о количестве движения материальной точки?

9. Как направлен вектор-момент количества движения относительно данной точки?

10. Какая зависимость существует между моментами количества движения относительно данной точки и относительно оси, проходящей через эту точку?

11. Как выражается теорема о моменте количества движения материальной точки в векторной и координатной формах?

12. В каком случае момент количества движения материальной точки относительно данного центра остается постоянным?

13. Как выражается величина элементарной работы?

14. Как выражается работа силы на конечном пути?

15. В чем состоит теорема о работе равнодействующей?

16. Чему равна работа силы тяжести при перемещении данного тела из одного положения в другое?

17. Что называется кинетической энергией (живой силой) материальной точки?

18. В чем состоит теорема о кинетической энергии материальной точки?

19. В чем состоит закон сохранения механической энергии?

20. Что называется механической системой материальных точек?

21. Какие две классификации сил, действующих на систему, применяются в динамике системы?

22. Что называется количеством движения системы?

23. В чем состоит теорема о количестве движения системы?

24. Почему главный вектор внутренних сил всегда равен нулю?

25. В каком случае количестве движения системы останется постоянным?

26. Какая точка называется центром масс (центром инерции) систе-

мы?

27. Как выражается количество движения системы через количество движения ее центра масс?

28 Твердое тело весом P вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью w . Расстояние центра тяжести этого тела от оси вращения равно h. Чему равно количество движения этого тела?

29. В чем состоит теорема о движении центра масс системы?

30. Какие силы, действующие на систему, не влияют на движение ее центра масс?

31. Что называется кинетическим моментом системы относительно данной точки, данной оси?

32. Как выражается теорема о кинетическом моменте системы в векторной и координатной формах?

33. В каком случае кинетический момент системы относительно данной оси остается постоянным?

34. Как выражается кинетический момент вращающегося твердого тела относительно оси вращения?

35. Что называется моментом инерции твердого тела относительно данной оси и данной точки?

36. Каково физическое значение момента инерции тела относительно данной оси?

37. Что называется радиусом инерции тела относительно данной оси и данной точки?

38. Какая зависимость существует между моментами инерции относительно трех координатных осей и относительно начала координат?

39. В чем состоит теорема о зависимости между моментами инерции тела относительно двух параллельных осей?

40. Что называется кинетической энергией системы?

41. Как выражается кинетическая энергия твердого тела при поступательном и вращательном движении этого тела?

42. В чем состоит теорема о кинетической энергии системы?

43. Входят ли в уравнение, выражающее теорему о кинетической энергии системы, внутренние силы этой системы?

44. В каком случае в уравнение, выражающее теорему о кинетической энергии системы, не входят силы реакции связей?

45. Как выражается элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, через момент этой си-

лы относительно оси вращения?

46. Как направлена и чему равна по величине сила инерции материальной точки?

47. Как направлена (по движению или против движения) сила инерции вагона на прямолинейном участке пути при торможении?

48. В чем состоит принцип Даламбера для материальной точки?

49. В чем состоит принцип Даламбера для системы?

50. Как доказать, что главный вектор сил инерции материальных точек механической системы равен по величине и противоположен по направлению главному вектору внешних сил этой системы?

51. Как пишутся в общем виде дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела?

52. Что называется центробежным моментом инерции твердого тела?

53. Какие оси называются главными осями инерции тела в данной точке?

54. Как направлены три главные оси инерции в какой-нибудь точке круглого однородного диска?

55. При каких условиях координатная ось Oz является одной из главных осей инерции тела в начале координат O?

56. Как математически выражаются связи, наложенные на систему?

57. Какие связи называются стационарными, нестационарными?

58. Как выражается (сформулируйте) определение обобщенных координат системы?

59. Что называется числом степеней свободы механической системы?

60. Какое перемещение системы называется возможным?

61. Какие связи называются идеальными?

62. В чем состоит принцип возможных перемещений?

63. Что называется обобщенной силой?

64. Каково аналитическое выражение обобщенной силы?

65. Чему равна обобщенная сила в случае твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, если обобщенной координатой является угол поворота этого тела?

66. Как пишется общее уравнение динамики системы?

67. Как пишутся в общем виде дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах (уравнения Лангранжа)?

68. Что называется обобщенной скоростью?

69. Какой вид имеет уравнение Лагранжа, соответствующее обобщенной координате q_1, если эта координата не входит в выражение ни кинетической, ни потенциальной энергии системы?

70. В чем состоит характерная особенность явления удара?

71. Каково перемещение материальной точки за время действия на нее ударной силы?

72. Материальная точка массы $m = 2кг$ движется со скоростью $v = 1м/сек$. В результате действия на эту точку ударной силы ее скорость становится равной $u = 5м/сек$, причем вектор $\bar{v}$ составляет с векторов $\bar{u}$ угол в $60^{\mathbf{0}}$. Какова величина ударного импульса?

73. В каком случае при действии на материальную точку ударной силы момент количества движения этой точки относительно данной оси остается неизменным?

74. Что называется коэффициентом восстановления?

75. Как можно из опыта найти коэффициент восстановления?

76. Шарик массой $m = 0{,}01кг$, движущийся со скоростью, равной $2м/сек$, ударяется о неподвижную поверхность. Чему равна величина скорости, с которой шарик отскочит от этой поверхности, если удар прямой вполне упругий? Какова в этом случае величина ударного импульса?

77. В каком случае при прямом ударе двух шаров эти шары после удара остановятся?

78. В каком случае при прямом ударе двух шаров эти шары после удара обмениваются скоростями?

79. Чему равно изменение угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, при действии на это тело ударной силы?

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ В ВИДЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Содержание заданий, выбор вариантов, порядок выполнения работ, пояснения к тексту задач.

В рамках раздела «Динамика» студенты должны выполнить девять контрольных заданий в виде расчетно-графических работ.

Номер варианта определяется по двум последним цифрам номера зачетной книжки в соответствии с таблицей А. Номер варианта находится на пересечении строки, соответствующей предпоследней цифре номера зачетной книжки, и столбца, соответствующего последней цифре номера зачетной книжки.

Таблица А.

		Последняя цифра номера зачетной книжки									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Предпоследняя цифра Номера зачетной книжки	0	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	3	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	4	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	5	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	6	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	7	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	8	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	9	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Порядок оформления работ подробно описан в конце учебно-методического пособия.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, и будут возвращаться для доработки.

К работе, представляемой на повторную проверку, должна обязательно прилагаться незачтенная работа.

На экзамене необходимо представить зачтенные по данному разделу курса работы, в которых все отмеченные рецензентом погрешности должны быть исправлены.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайте внимание только на относящиеся к Вашему варианту, т. е. номеру Вашего рисунка или Вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи после изложения ее текста под рубрикой "Пример выполнения задания". Там же могут даваться некоторые пояснения, касающиеся построения чертежа для отдельных вариантов задачи.

ДИНАМИКА

Краткий обзор

Введение.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Динамика представляет собой наиболее общий раздел механики, имеющий особое значение для решения многих практических задач в различных областях техники.

Исходной научной базой динамики является система законов классической механики или законов Ньютона.

Первый закон (закон инерции). Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят ее изменить это состояние.

Согласно этому закону, чтобы изменить скорость материальной точки, необходимо приложить к ней силу. Первый закон Ньютона постулирует также существование *инерциальных систем отсчета*, то есть тех, которые не имеют ускорений.

Второй закон (закон зависимости между массой точки, ее ускорением и силой). Произведение массы точки на ее ускорение равно силе, действующей на точку.

Его можно записать в виде:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

В такой форме второй закон Ньютона называют *основным законом динамики* точки. Можно сказать, что динамика, как наука, представляет собой результаты, которые с помощью математических преобразований получены из второго закона Ньютона.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Этот закон позволяет изучать динамику конкретного тела или тел, выделив их, заменяя действие других тел силами.

Из этих законов вытекают два важных принципа.

<u>Принцип независимости действия сил</u>. При одновременном действии

на точку нескольких сил, каждая из них сообщает точке такое же ускорение, какое она сообщала бы, действуя одна.

Отсюда следует, что если на материальную точку действует несколько сил одновременно, то точка получит такое же ускорение, какое она получила бы под действием одной силы, равной сумме всех этих сил (равнодействующей).

Если к материальной точке массы m приложены силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2 ..., \overline{F}_n$, то согласно этому принципу основной закон динамики можно записать в виде:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Принцип относительности классической механики. Законы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Смысл этого принципа в том, что поступательное движение системы отсчета, при котором все ее точки движутся прямолинейно и равномерно, не вызывает ускорений тел в этой системе отсчета.

1. Динамика материальной точки.

1.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Движение материальной точки по отношению к инерциальной системе отсчета описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^a + \sum_{k=1}^{l} \vec{R}_k \,, \tag{1.1}$$

где m – масса точки, $\vec{a}$ - ее ускорение, в правой части равенства – геометрическая сумма всех сил, приложенных к точке. Причины возникновения каждой из сил могут быть различными. Здесь мы будем различать силы активные $\vec{F}_j^a$ и силы реакций связей $\vec{R}_k$.

Активные силы могут зависеть от времени t, а так же от положения и скорости точки. К активным силам относятся, например, силы тяжести, упругости, вязкого трения, аэрогидродинамического сопротивления и т.п..

Силы реакций связей действуют на несвободную материальную точку, когда ее движение ограничено механическими связями. Эти силы можно определить лишь в процессе решения задачи динамики.

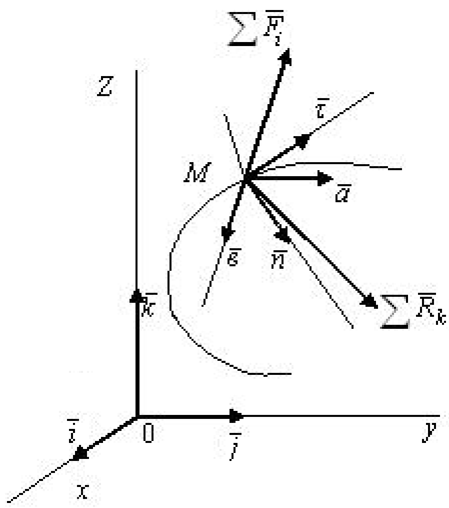


Рис. 1

Выберем декартовы оси инерциальной системы отсчёта $Oxyz$ (рис 1) и, проецируя на них обе части векторного равенства (1.1), получим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum_{j=1}^{n}F_{jx}^{a}+\sum_{k=1}^{l}R_{kx}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum_{j=1}^{n}F_{jy}^{a}+\sum_{k=1}^{l}R_{ky} \qquad (1.2)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum_{j=1}^{n}F_{jz}^{a}+\sum_{k=1}^{l}R_{kz}\,.$$

Эти три уравнения называются дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых координатах.

Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси координат образованных единичными векторами $\overset{\bf r}{t}$, $\overset{\bf r}{n}$, $\overset{\bf r}{b}$ имеют вид:

$$m\frac{dV}{dt}=\sum_{j=1}^{n}F_{jt}^{a}+\sum_{k=1}^{l}R_{kt}$$

$$\frac{mV^2}{r}=\sum_{j=1}^{n}F_{jn}^{a}+\sum_{k=1}^{l}R_{kn} \qquad (1.3)$$

$$0=\sum_{j=1}^{n}F_{jb}^{a}+\sum_{k=1}^{l}R_{kb}\,.$$

Здесь учтено, что $a_t=\frac{dV}{dt}$, $\quad a_n=\frac{V^2}{r}$, $\quad a_b=0$.

1.2. Первая и вторая задачи динамики.

В уравнения движения неизвестные могут входить, как в левые, так и в правые части. В зависимости от этого, задачи динамики делятся на два типа, которые рассмотрены ниже.

Первая задача динамики. Задан закон движения и активные силы, необходимо найти силы реакций связей.

Эта задача решается довольно просто, поскольку сводится к дифференцированию уравнений движения.

Вторая задача динамики. Заданы активные силы, известны связи, начальное положение точки и ее начальная скорость. Необходимо найти закон движения точки и реакции связей.

Вторая задача динамики более сложная, поскольку сводится к интегрированию, то есть к решению дифференциальных уравнений. Эту задачу рекомендуется решать последовательно в несколько этапов, перечисленных ниже:

1. Изображают предполагаемую траекторию движения, на которой показывают материальную точку.
2. Изображают силы, приложенные к точке.
3. Записывают второй закон Ньютона в векторной форме.
4. Выбирают удобную систему координат.
5. Записывают уравнения движения точки в проекциях либо на оси декартовой системы координат, либо на оси естественного трехгранника.
6. К полученным дифференциальным уравнениям добавляют начальные условия: значения координат и проекций скорости точки в начальный момент времени (они берутся из условия задачи с учетом введенной системы координат).
7. Поставленную задачу решают численно или аналитически методами, известными из курса высшей математики. Для этого дифференциальные уравнения нужно проинтегрировать.

1.3. Дифференциальные уравнения гармонических колебаний.

Рассмотрим задачу о движении груза массы m, подвешенной на вертикально расположенной пружине жесткости C. Массой пружины пренебрегаем. На рис. 2а показана недеформированная пружина без груза; на рис. 2б показана пружина и груз в положении равновесия. При этом

$$\vec{P} + \vec{F}_{упр} = 0 \tag{1.4}$$

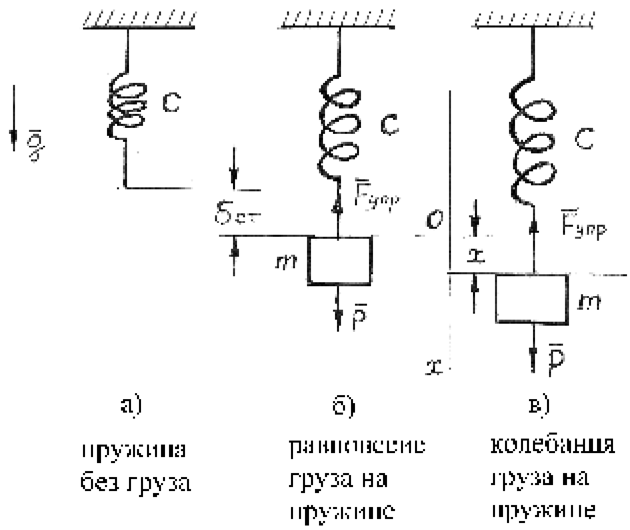


Рис. 2

Проецируя на ось *x*, получим:

$$mg - Cd_{ст} = 0 \tag{1.5}$$

Откуда статическое удлинение пружины в положении равновесия груза равно:

$$d_{ст} = \frac{mg}{C} \tag{1.6}$$

На рис 2в показано положения груза в произвольный момент его движения. Начало отсчета на оси *x* выбрано в положении равновесия груза. Заметим, что колебательные движения происходят всегда около устойчивого положения равновесия, при отклонении от которого механическая система стремится к нему возвратиться.

В любой произвольный момент движения груза выполняется второй закон Ньютона:

$$m\bar{a} = \vec{P} + \vec{F}_{упр} \tag{1.7}$$

Проецируя его на ось *x*, получим:

$$m\ddot{x} = mg - C(d_{ст} + x) \tag{1.8}$$

С учетом (1.5) отсюда имеем:

$$m\ddot{x} = -Cx \tag{1.9}$$

Перенесем *Cx* в правую часть(1.9) и разделим на *m*

$$\ddot{x} + k^2 x = 0; \qquad (k^2 = \frac{c}{m}) \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний.

Его общее решение имеет вид:

$$x(t) = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt \qquad (1.11)$$

Или

$$x(t) = A\sin(kt + j\,), \qquad (1.12)$$

Где C_1 и C_2 или A и j - произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

1.4 Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки.

Пусть материальная точка M совершает сложное движение. $Oxyz$ - система координат абсолютного движения, а $Ox_1y_1z_1$ - система координат относительного движения (рис 3).

Получим дифференциальное уравнение относительного движения. Из второго закона Ньютона:

$$m\vec{a}_{абс} = \vec{F}\,. \qquad (1.13)$$

Здесь $\vec{a}_{абс}$ - абсолютное ускорение точки M, а $\vec{F}$ сумма всех сил, действующих на точку.

Точка находится в сложном движении, поэтому ее абсолютное ускорение определяется теоремой Кориолиса:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор} \quad - \qquad (1.14)$$

С учетом (1.14) уравнение (1.13) запишется в виде:

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} - m\vec{a}_{пер} - m\vec{a}_{кор}$$

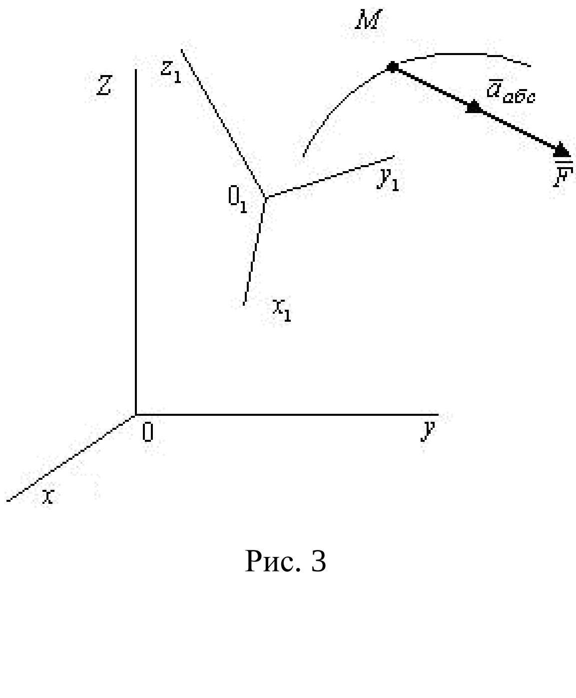


Рис. 3

Два последних слагаемых в этом уравнении имеют размерность сил. Назовем их переносной $\vec{\Phi}^{ин}_{пер}$ и кориолисовой $\vec{\Phi}^{ин}_{кор}$ силами инерции

$$\vec{\Phi}^{ин}_{пер} = -m\vec{a}_{пер} \qquad\qquad \vec{\Phi}^{ин}_{кор} = -m\vec{a}_{кор} ,$$

тогда

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} + \vec{\Phi}^{ин}_{пер} + \vec{\Phi}^{ин}_{кор} . \tag{1.15}$$

Переносная $\vec{\Phi}^{ин}_{пер}$ и кориолисова $\vec{\Phi}^{ин}_{кор}$ силы инерции являются векторами, равными по модулю произведению массы точки на соответствующее ускорение, но направленными противоположно этим ускорениям.

<u>Примечание</u>: силы инерции $\vec{\Phi}^{ин}_{пер}$ и $\vec{\Phi}^{ин}_{кор}$ вполне реальны. Они появляются из-за наличия переносного движения. Их не следует путать с силами инерции $\vec{F}^{ин}$, рассматриваемыми ниже в разделе 3.1 «Принцип Даламбера», поскольку «даламберовы» силы инерции имеют фиктивный характер.

Векторное уравнение (1.15) спроецируем на оси относительной системы координат и получим три скалярных дифференциальных уравнения относительного движения материальной точки:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F_x + \Phi^{ин}_{пер_X} + \Phi^{ин}_{кор_X} \\ m\ddot{y}_1 = F_y + \Phi^{ин}_{пер_Y} + \Phi^{ин}_{кор_Y} \\ m\ddot{z}_1 = F_z + \Phi^{ин}_{пер_Z} + \Phi^{ин}_{кор_Z} \end{cases} \tag{1.16}$$

Чтобы эти уравнения проинтегрировать, движение относительной системы координат должно быть известно.

2.Динамика системы материальных точек.

2.1 Основные понятия и определения.

Система материальных точек – это такая совокупность материальных точек, при которой точки системы каким-то образом связаны друг с другом и не могут перемещаться независимо друг от друга.

Внешние и внутренние силы. Любая сила, действующая на точку механической системы, обязательно является либо активной силой, либо реакцией связи. Однако всю совокупность сил, действующих на точки системы, можно еще разделить на два класса иначе: на внешние силы $\overline{F}^{e}$ и внутренние силы $\overline{F}^{i}$ (индексы *e* и *i* – от латинских слов *externus* – внешний и *internus* – внутренний). Внешними называют силы, действующие на точки системы со стороны точек и тел, не входящих в состав рассматриваемой системы. Внутренними называются силы, действующие между точками и телами рассматриваемой системы.

Это разделение зависит от того, какие материальные точки и тела включены для изучения в рассматриваемую механическую систему. Если расширить состав системы, включив в нее дополнительно точки и тела, то некоторые силы, которые для прежней системы были внешними, для расширенной системы могут стать внутренними.

Свойства внутренних сил. Если рассмотреть две произвольные точки механической системы, то, в соответствии с с третьим законом Ньютона (законом равенства действия и противодействия), они действуют друг на друга с силами, равными по ведичне и противоположными по направлению, следовательно геометрическая сумма этих сил равна нулю. Рассматривая таким образом попарно все точки механической системы, получаем следующие важные свойства внутренних сил:

- геометрическая сумма всех внутренних сил системы равна нулю.
- сумма моментов всех внутренних сил системы относительно произвольного центра равена нулю.

Массой системы *M* называется арифметическая сумма масс m_k всех точек и тел, образующих систему:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{2.1}$$

Центром масс (центром инерции) механической системы называется геометрическая точка *C*, радиус-вектор $\vec{r}_c$ и координаты которой x_c, y_c, z_c определяются формулами:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M}, \qquad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}, \qquad x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}, \qquad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}, \tag{2.2}$$

где $\vec{r}_k$ - радиусы-векторы, а x_k, y_k, z_k - координаты точек (или центров масс тел), образующих систему. Для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают, в других случаях - это разные геометрические точки.

Наряду с инерциальной системой отсчета в динамике часто рассматривают одновременно неинерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно. Ее оси координат *Cx*y*z* (оси Кёнига)* выбирают так, чтобы начало отсчета *C* постоянно совпадало с центром масс механической системы. В·соответствии с определением центр масс неподвижен в осях Кёнига и находится в начале координат.

Движение механической системы зависит не только от массы системы, но и от того, как эта масса распределена внутри системы. Охарактеризовать это распределение позволяют *моменты инерции*.

Моментом инерции системы относительно оси z называется скалярная величина I_z равная сумме произведений масс m_k всех точек системы на квадраты их расстояний h_k до оси z:

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 \ . \tag{2.3}$$

Если механической системой является твердое тело то, для нахождения I_z тело разбивают на n элементарных частиц и вычисляют предел суммы (2.3), устремляя n к бесконечности, т.е. задачу сводят к интегрированию. В системе координат $Oxyz$ можно воспользоваться формулой:

$$I_z = \iiint\limits_V r\left(x^2 + y^2\right) dV \ , \tag{2.4}$$

где $r(x, y, z)$ - плотность, а V - объем, занимаемый телом.

Момент инерции однородного цилиндра (как частный случай - диска) массы m радиуса R относительно оси, совпадающей с осью цилиндра, подсчитывается по формуле:

$$I_z = \frac{mR^2}{2} \ . \tag{2.5}$$

Момент инерции полого тонкостенного цилиндра (как частный случай - кольца) определяется как

$$I_z = mR^2 \ . \tag{2.5}$$

При вычислении моментов инерции относительно оси бывает удобно воспользоваться следующей теоремой:

Теорема Гюйгенса-Штейнера о моментах инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс:

$$I_z = I_{C_z} + Md^2 , \tag{2.6}$$

где I_z и I_{C_z} - моменты инерции относительно параллельных осей z и C_z, причем ось C_z проходит через центр масс; d - расстояние между осями; M - масса системы (или твердого тела). Из теоремы следует, что $I_{C_z} < I_z$.

Часто в ходе расчетов пользуются понятием радиуса инерции.

Радиусом инерции тела относительно оси Oz называется линейная величина, $r_{ин}$, определяемая равенством

$$I_Z = Mr_{ин}^2 \ . \tag{2.5}$$

2.2. Теорема об изменении количества движения

Количеством движения материальной точки массы m, движущейся со скоростью $\vec{V}$, называется вектор $m\vec{V}$, равный произведению массы точки на ее скорость.

Количеством движения механической системы (главным вектором количества движения системы) называется геометрическая сумма количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k . \tag{2.7}$$

Можно доказать, что количество движения системы равно количеству движения воображаемой материальной точки, имеющей массу системы и движущейся со скоростью центра масс системы:

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_C . \tag{2.8}$$

Импульс силы. Пусть к движущейся материальной точке приложена сила $\vec{F}$ (кроме нее к точке могут быть приложены и другие силы, но сейчас мы выделили только одну из них).

Элементарным импульсом силы $\vec{F}$ за элементарный промежуток времени dt называется вектор $d\vec{S}$:

$$d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt . \tag{2.9}$$

Импульсом силы $\vec{F}$ за конечный промежуток времени от t_0 до t называется вектор $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} d\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot dt \tag{2.10}$$

Проекции импульса силы на координатные оси могут быть вычислены по формулам:

$$S_x = \int_{t_0}^{t} F_x dt \qquad S_y = \int_{t_0}^{t} F_y dt \qquad S_z = \int_{t_0}^{t} F_z dt . \tag{2.11}$$

Рассмотрим систему из n материальных точек с массами $m_1, m_2, ..., m_n$. Освободимся от связей, заменив действие связей их реакциями, согласно принципу освобождаемости от связей. Обозначим через $\vec{F}_k^e = F_{kx}^e \vec{i} + F_{ky}^e \vec{j} + F_{kz}^e \vec{k}$ равнодействующую всех внешних сил, как заданных - активных, так и реакций связей, действующих на точку m_k.

Обозначим, далее, через $\vec{F}_k^i$ равнодействующую всех внутренних сил, действующих на ту же точку (рис. 4). *(k* = 1, 2, ... , *n.)*

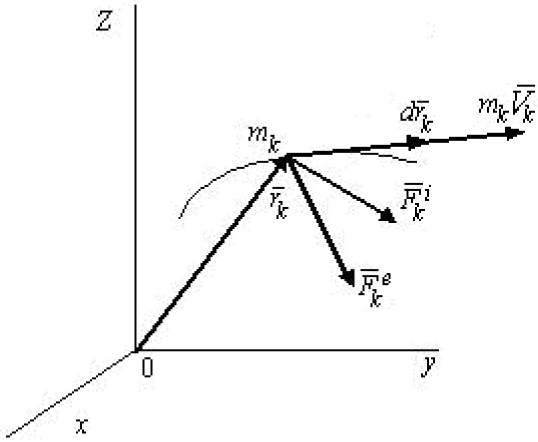


Рис. 4

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек (в дифференциальной форме):

Производная по времени от количества движения системы материальных точек равна геометрической сумме всех внешних сил (как активных, так и реакций связи), *действующих на систему.*

Доказательство. Движение каждой из точек системы подчиняется второму закону Ньютона:

$$m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \qquad (k=1,2, \dots , n). \tag{2.12}$$

Складывая геометрически эти векторные равенства, будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i . \tag{2.13}$$

Преобразуем левую часть последнего равенства

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k = \frac{d\vec{Q}}{dt}, \tag{2.14}$$

поскольку, во-первых, производная суммы векторов равна сумме их производных, а массы точек предполагаются постоянными, и, во-вторых, вектор $\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k$ есть количество движения системы материальных точек $\vec{Q}$. Обращаясь к правой части (2.13) заметим, что геометрическая сумма внутренних сил системы материальных точек равна нулю в каждый момент времени в силу свойства внутренних сил

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i = 0 .$$

Обозначим через $\vec{F}^e$ *главный вектор всех внешних сил* (включая и реакции связей), действующих на точки системы:

$$\vec{F}^e = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e . \qquad (2.15)$$

Итак, из (2.13) имеем для любого момента времени движения системы:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \qquad (2.16)$$

или

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e .$$

Теорема доказана.

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек (в интегральной форме). *Изменение количества движения системы за конечный промежуток времени равно сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему, за тот же промежуток времени.*

Доказательство. Умножим тождество (2.16) на *dt:*

$$d\vec{Q} = \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \right) dt .$$

Интегрируя от начального момента времени $t=0$ до конечного t, будем иметь:

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(0) = \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \right) dt = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^t \vec{F}_k^e dt \right).$$

Здесь правая часть, учитывая, что интеграл суммы есть сумма интегралов, является суммой импульсов внешних сил, действующих на систему. Таким образом

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(0) = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e dt \ , \qquad (2.17)$$

где

$$\vec{Q}(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k(t), \qquad \vec{Q}(0) = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k(0), \qquad (2.18)$$

Проецируя векторное равенство (2.17) на неподвижные инерциальные оси координат x, y, z, получим:

$$Q_x(t) - Q_x(0) = \sum_{k=1}^{n} S_{k_X}^e$$

$$Q_y(t) - Q_y(0) = \sum_{k=1}^{n} S_{k_Y}^e \qquad (2.19)$$

$$Q_z(t) - Q_z(0) = \sum_{k=1}^{n} S_{k_Z}^e \ ,$$

где

$$Q_x(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k V_{k_X}(t) \qquad Q_x(0) = \sum_{k=1}^{n} m_k V_{k_X}(0) \qquad S_{k_X}^e = \int_0^t F_{k_X}^e \, dt$$

и аналогично для проекций на оси y и z.
Теорема доказана.

Закон сохранения количества движения.
Закон сохранения количества движения механической системы:

$$\text{если: } \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = 0, \qquad \text{то } \vec{Q} = \overrightarrow{const}$$

Закон сохранения проекции количества движения на какую-либо ось (например, на ось *x)*

$$\text{если: } \sum_{k=1}^{n} F_{k_X}^e = 0, \qquad \text{то } Q_x = const$$

2.3 Теорема о движении центра масс

Теорема о движении центра масс системы: *Центр масс систем материальных точек движется так, как двигалась бы материальная точка, в которой была бы сосредоточена вся масса системы и к которой были бы приложены все внешние силы* (включая и реакции связей), *действующие на систему.*

Доказательство. Количество движения системы равно произведению массы системы на скорость ее центра масс $\vec{V}_C$*:*

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_C, \qquad \text{где} \qquad M = \sum_{k=1}^{n} m_k .$$

Поставим это выражение в формулу (2.16) и получим:

$$M \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \qquad \text{или} \qquad M \cdot \vec{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e . \tag{2.20}$$

Спроецируем это тождество на инерциальные оси x, y, z, и получим:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_X}^e, \qquad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_Y}^e, \qquad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_Z}^e, \tag{2.21}$$

Где x_C, y_C, z_C - координаты центра масс C системы в осях $Oxyz$.
Теорема доказана.

Закон сохранения движения центра масс механической системы: если главный вектор внешних сил системы равен нулю, центр масс системы движется с постоянной скоростью:

$$\text{если} \quad \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = 0, \qquad \text{то} \qquad \vec{V}_C = \overrightarrow{const}$$

Отметим, что в этом случае постоянным является вектор скорости, а не только его модуль, поэтому центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно (или покоиться, если $V_C(0)=0$).

Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось остается постоянной. Например,

если $\sum\limits_{k=1}^{n} F_{k_x}^e = 0$, то $V_{C_x} = const$

и если $V_{C_x}(0) = 0$, то $x_C = const$

2.4. Теорема об изменении момента количества движения.

Момент количества движения и кинетический момент.

Момент вектора количества движения материальной точки относительно какого-либо центра (или оси) определяется точно так же, как момент вектора силы относительно центра (или оси).

Моментом количества движения материальной точки относительно неподвижного центра О называется вектор, равный векторному произведению радиуса-вектора, соединяющего центр с точкой, на количество движения точки:

$$\vec{M}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}. \tag{2.22}$$

Кинетическим моментом (главным моментом количества движения), механической системы относительно центра О называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0\left(m_k \vec{V}_k\right).$$

Моментом количества движения точки относительно оси x называется величина $M_x\left(m\vec{V}\right)$, равная проекции на эту ось вектора момента количества движения точки относительно любого центра *P*, принадлежащего этой оси. Вычисляется $M_x\left(m\vec{V}\right)$ так же, как момент силы относительно оси.

Кинетическим моментом системы относительно оси x называется проекция на эту ось кинетического момента системы относительно любого центра *P*, принадлежащего оси:

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(m_k \vec{V}_k\right).$$

Аналитическое выражение для кинетического момента системы относительно оси *x* имеет вид:

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - \dot{y}_k z_k).$$

Формулы для K_y и K_z. аналогичны приведенной:

$$K_y = \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k \dot{x}_k - \dot{z}_k x_k)$$

$$K_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k \dot{y}_k - \dot{x}_k y_k)$$

Можно показать, что кинетический момент системы относительно центра *O* равен сумме момента количества движения центра масс относительно центра *O* и кинетического момента системы относительно центра масс *C* в ее относительном движении в системе Кёнига

$$\vec{K}_0 = \vec{M}_0 + \vec{K}_C^*$$

Здесь $\vec{M}_0 = m_0(m_C \vec{V}_C)$, $\vec{K}_C^*$ - кинетический момент системы в ее движении по отношению к системе отсчета Кёнига.

Кинетический момент K_z твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси z с угловой скоростью w, вычисляется по формуле:

$$K_z = I_z w\,,$$

где I_z - момент инерции твердого тела относительно оси z.

Теорема об изменении кинетического момента системы материальных точек:

Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного центра (неподвижной оси) равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра (той же неподвижной оси).

Доказательство. Умножим тождества (2.12) слева векторно на радиусы-векторы $\bar{r}_k$ (см. рис. 2.1):

Вычислим производную от (2.22) для каждой точки системы

$$\frac{d\vec{K}_{Ok}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k\right], \qquad (k=1, 2,\ldots, n) \qquad (2.23)$$

Вычислим правую часть:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k\right] = \left[\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k \vec{V}_k\right] + \left[\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt}\right].$$

Первое слагаемое справа равно нулю как векторное произведение двух коллинеарных (т. е. направленных по одной прямой) векторов: $\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{V}_k$ и $m_k \vec{V}_k$.

Второе слагаемое справа можно преобразовать так:

$$\vec{r}_k \times m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k = \vec{r}_k \times \sum \vec{F}_k$$

с учетом того, что $\frac{d\vec{V}_k}{dt} = \vec{a}_k$ и $m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k$.

Поэтому (2.23) может быть записано в виде:

$$\frac{d\vec{K}_{Oj}}{dt} = \left[\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e\right] + \left[\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i\right] \qquad (k=1, 2,\ldots, n),$$

где $\vec{F}_k^e$ - равнодействующая внешних сил, а $\vec{F}_k^i$ - равнодействующая внутренних сил, действующих на k-ю точку.

Складывая геометрически эти векторные равенства, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} \vec{K}_{Oj} = \sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k \times \vec{F}_k^i\right]. \qquad (2.24)$$

Выясним механический смысл каждого из выражений, входящих сюда. Слева под знаком производной стоит $\vec{K}_0$ - кинетический момент системы относительно центра O, равный геометрической сумме векторов-моментов количеств движения точек системы относительно этого центра:

$$\vec{K}_0 = \sum_{k=1}^{n} \vec{K}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(m_k \vec{V}_k) = \sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k\right].$$

Первая сумма справа в (2.24) есть *сумма моментов (главный момент* $\vec{M}_0^e$*) всех внешних* сил, действующих на систему (включая и силы реакции) относительно центра O:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k \times \vec{F}_k^e\right] = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) = \vec{M}_O^e .$$

Вторая сумма справа в (2.24) есть сумма моментов (главный момент $\vec{M}_0^i$) всех внутренних сил системы материальных точек относительно центра O. Для всех внутренних сил системы сумма их моментов относительно любого неподвижного центра равна нулю в каждый момент времени.

Окончательно тождество (2.24) записывается в виде:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) \qquad (2.25)$$

и выражает доказываемую теорему в векторной форме. Проецируя (2.25) на неподвижные (или инерциальные) оси Ox, Oy, Oz, получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_x(\vec{F}_k^e), \qquad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_y(\vec{F}_k^e), \qquad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e), \qquad (2.26)$$

здесь K_x, K_y, K_z – кинетические моменты системы материальных точек относительно неподвижных осей Ox, Oy, Oz соответственно:

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} M_x(m_k \vec{V}_k), \qquad K_y = \sum_{k=1}^{n} M_y(m_k \vec{V}_k), \qquad K_z = \sum_{k=1}^{n} M_z(m_k \vec{V}_k).$$

Формулы (2.26) выражают теорему об изменении кинетического момента в скалярном виде. Эти теоремы могут привести к первым интегралам и, в частности, при выполнении специальных условий - к законам сохранения кинетического момента системы относительно неподвижного центра (неподвижной оси).

Если эту теорему применить к изучению движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *Oz*, получим дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}_j^e) \ ,$$

где φ - угол поворота тела вокруг оси *Oz*.

Закон сохранения кинетического момента: если главный момент внешних сил системы относительно центра *O* равен нулю, то главный момент количеств движения относительно этого центра будет постоянным. Например,

$$\text{если} \qquad \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}_k^e) = 0, \qquad \text{то} \qquad \vec{K}_0 = \overrightarrow{const} \ .$$

В правой части равенства располагается вектор-константа, т.е. и величина вектора, и его направление не зависят от времени. Если сумма моментов внешних сил системы относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси остается постоянным.

Например,

$$\text{если} \qquad \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{F}_k^e) = 0, \qquad \text{то} \qquad K_z = const \ .$$

2.5. Теорема об изменении кинетической энергии.

Элементарная работа. Рассмотрим точку *B*, перемещающуюся под действием системы сил. Перемещение точки вдоль траектории характеризуется вектором $d\bar{r}$ (рис. 5). Из системы выделим одну силу $\vec{F}$.

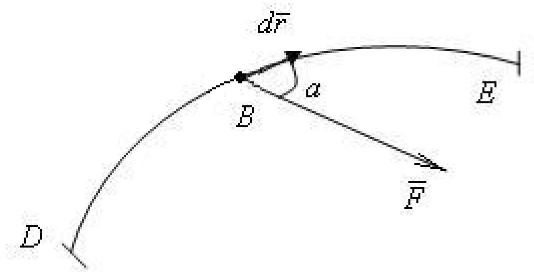


Рис. 5

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина dA, равная скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha \ .$$

В координатной форме элементарная работа подсчитывается по формуле:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

где $F_x, F_y, F_z, dx, dy, dz$ - координаты векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ соответственно.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на принятую форму записи, элементарная работа dA не обязательно является полным·дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат.

Знак элементарной работы определяется косинусом угла a : работа положительна для

$0 \le a \le \frac{p}{2}$, отрицательна для $\frac{p}{2} \le a \le p$ и равна нулю при $a = \frac{p}{2}$.

Вычисление элементарной работы в частных случаях.

1.Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, находится по формуле:

$$dA = \pm M_z(\vec{F}) \cdot dj \quad ,$$

2. Сумма элементарных работ сил пары, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении, может быть подсчитана так:

$$dA = \pm M \cdot dj \quad .$$

Здесь M – момент пары сил, dj - элементарный угол поворота тела. Знак «плюс» берется при одинаковых направлениях дуговых стрелок момента пары и направления вращения, «минус» - при различных направлениях (плоскость действия пары предполагается перпендикулярной оси вращения).

3. При вычислении элементарных работ сил трения, приложенных к телу, катящемуся без проскальзывания, необходимо учесть, что в точке касания P (рис.6.) действуют: нормальная реакция $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и пара сил трения качения с моментом $M_{тр} = N \cdot k$.

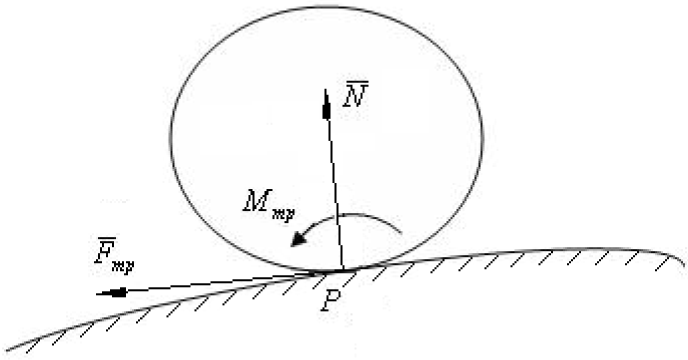


Рис. 6

Поскольку, в силу отсутствия проскальзывания, точка касания является мгновенным центром скоростей и ее скорость $\vec{V}_p$ равна нулю, то и $d\vec{r} = \vec{V}_p dt = 0$, откуда:

$$dA(\vec{N}) = dA(\vec{F}_{тр}) = 0, \qquad dA(M_{тр}) = -M_{тр} \cdot dj = -N \cdot k \cdot dj \; .$$

4. Можно доказать, что сумма элементарных работ сил, приложенных к твердому телу, равна сумме элементарных работ статически эквивалентной системы сил. По теореме о приведении системы сил к заданному центру произвольную систему сил можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы $\vec{R}$, приложенной в наперед заданной точке *P*, и пары сил с моментом $\vec{M}_p$. Поэтому довольно часто вместо громоздкого подсчета суммы элементарных работ большого числа сил, приложенных к телу, подсчитывают сумму элементарных работ одной силы и одной пары.

Пример 1. Система элементарных сил тяжести твердого тела всегда имеет равнодействующую, равную $\vec{G}$, приложенную в центре тяжести *C*. Поэтому сумма элементарных работ сил тяжести равна работе силы тяжести на перемещении центра тяжести тела.

Пример 2. Сумма элементарных работ внутренних сил, приложенных к точкам твердого тела, равна нулю, так как главный вектор и главный момент системы внутренних сил равны нулю.

Работа силы. Потенциальная сила. *Работа силы* $\vec{F}$ на конечном перемещении точки по траектории *DE* (см. рис. 5) равна криволинейному интегралу:

$$A = \int_{DE} dA = \int_{DE} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{DE} F_x dx + F_y dy + F_z dz \, .$$

Сила называется *потенциальной*, если ее работа не зависит от формы траектории, а зависит лишь от её начальной и конечной точек.

Примером потенциальной силы является сила тяжести $\vec{G}$, ее работа может быть подсчитана по формуле:

$$A = -G(z - z_0) \, .$$

Здесь ось z выбрана параллельно линии действия силы тяжести и направлена ей навстречу, $\vec{G}$ - сила тяжести, z_0, z - координаты начальной и конечной точек траектории.

Кинетическая энергия. *Кинетической энергией точки* массы *m*, движущейся со скоростью $\vec{V}$, называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$\frac{mV^2}{2} \, .$$

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех ее точек:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k}{2} \, .$$

Можно доказать, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии центра масс и кинетической энергии системы при ее относительном движении в системе отсчета Кёнига:

$$T = \frac{MV_C^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k (V_k^*)^2}{2},$$

где $M = \sum_j m_j$, а V_j^* - относительные скорости точек.

Формулы для вычисления кинетической энергии твердого тела:

а) при его поступательном движении: $T = \dfrac{mV_C^2}{2}$;

б) при вращении вокруг неподвижной оси *z:* $T = \dfrac{I_z w^2}{2}$;

в) при плоскопараллельном движении: $T = \dfrac{mV_C^2}{2} + \dfrac{I_C w^2}{2}$.

где V_C - скорость центра масс тела, а I_C - момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной основной плоскости и проходящей через центр масс *C*.

Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек (в дифференциальной форме). *Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех сил, действующих на систему* (как внешних, включая реакции связей, так и внутренних) *на действительном элементарном перемещении этой системы.*

Доказательство. Умножим векторные уравнения (2.12) скалярно на действительные элементарные перемещения точек системы $d\vec{r}_k = \vec{V}_k dt$ (см. рис. 2.1):

$$m_k \vec{V}_k \cdot d\vec{V}_k = \vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k + \vec{F}_k^i \cdot d\vec{r} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.27)$$

Поскольку скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля $\vec{V}_k \cdot \vec{V}_k = \vec{V}_k^2 = V_k^2$, то, дифференцируя последнее тождество, найдём

$2\vec{V}_k \cdot d\vec{V}_k = 2V_k \cdot dV_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$

Поэтому левую часть в (2.27) преобразуем к виду:

$$m_k \left(\vec{V}_k \cdot d\vec{V}_k\right) = m_k V_k \cdot dV_k = d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Складывая равенства (2.27), будем иметь в каждый момент движения системы:

$$d\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\vec{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k) + \sum_{k=1}^{n} (\vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2.28)$$

Сумма под знаком дифференциала есть кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2$$

Выражения в правой части (2.28) есть суммы элементарных работ внешних и внутренних сил системы на действительном перемещении. Теорема доказана.

Теорема об изменении кинетической энергии системы материальных точек (в интегральной форме). *Изменение кинетической энергии системы равно сумме работ всех сил, действующих на систему* (как внешних, включая реакции связей, так и внутренних) *на данном перемещение системы.*

Доказательство. Интегрируя дифференциальное равенство (2.28) будем иметь:

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k^i\right). \tag{2.29}$$

Здесь суммы

$$\sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k^e\right) = \int_{T_O}^{T} \sum_{k=1}^{n} (\vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k) = \int_{T_O}^{T} \sum_{k=1}^{n} (F_{k_X}^e dx_k + F_{k_Y}^e dy_k + F_{k_Z}^e dz_k),$$

$$\sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k^i\right) = \int_{T_O}^{T} \sum_{k=1}^{n} (\vec{F}_k^i \cdot d\vec{r}_k) = \int_{T_O}^{T} \sum_{k=1}^{n} (F_{k_X}^i dx_k + F_{k_Y}^i dy_k + F_{k_Z}^i dz_k)$$

выражают соответственно работу внешних и внутренних сил при перемещении системы из начального положения, в котором кинетическая энергия равна T_0 в конечное положение, в котором кинетическая энергия равна T. Теорема доказана.

Замечание о работе внутренних сил. Для неизменяемой системы материальных точек. (в частности, для твердого тела) работа внутренних с при любом действительном перемещении системы равна нулю. Для неизменяемой системы (2.28) и (2.29) запишутся в виде:

$$dT = \sum_{k=1}^{n} (\vec{F}_k^e \cdot d\vec{r}_k) \tag{2.30}$$

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{F}_k^e\right) = \int_{T_O}^{T} \sum_{k=1}^{n} (F_{k_X}^e dx_k + F_{k_Y}^e dy_k + F_{k_Z}^e dz_k) \tag{2.31}$$

3. Принцип Даламбера. Элементы аналитической механики.

3.1. Принцип Даламбера.

Пусть точка материальной системы движется под действием некоторой системы сил (эти силы могут быть разбиты либо на внешние и внутренние, либо на активные и силы реакций связей). Равнодействующую этой системы сходящихся сил обозначим $\vec{F}$.

Силой инерции точки называется векторная величина $\vec{F}^{ин}$, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно ускорению:

$$\vec{F}^{ин} = -m\vec{a}$$

Сила $\vec{F}^{ин}$ фиктивна, она не входит в число реальных сил, действующих на точку.

Принцип Даламбера: при движении механической системы (точки) любое ее состояние можно рассматривать как равновесие, если к реальным силам, действующим на каждую точку системы, добавить фиктивные силы инерции.

В соответствии с этим принципом, если к каждой точке системы добавить силу $\vec{F}_k^{ин} = -m_k\vec{a}_k$, то система сил, состоящая из реальных $\vec{F}_k$ и фиктивных $\vec{F}_k^{ин}$ сил, будет удовлетворять всем уравнениям статики, т.е. главный вектор системы сил и ее главный момент относительно произвольного центра *O* будут равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k + \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{ин} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_O\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n}\vec{M}_O\left(\vec{F}_k^{ин}\right) = 0.$$

В координатной форме эти уравнения записываются так:

$$\sum_{k=1}^{n}F_{kx} + \sum_{k=1}^{n}F_{kx}^{ин} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n}M_x\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n}M_x\left(\vec{F}_k^{ин}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}F_{ky} + \sum_{k=1}^{n}F_{ky}^{ин} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n}M_y\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n}M_y\left(\vec{F}_k^{ин}\right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}F_{kz} + \sum_{k=1}^{n}F_{kz}^{ин} = 0 \qquad \sum_{k=1}^{n}M_z\left(\vec{F}_k\right) + \sum_{k=1}^{n}M_z\left(\vec{F}_k^{ин}\right) = 0.$$

Принцип Даламбера позволяет перенести методы решения задач статики на задачи динамики.

Система сил инерции может оказаться громоздкой в случаях большого количества материальных точек или распределенных масс. Пользуясь теоремой статики о приведении системы сил к центру, систему сил инерции $\vec{F}_k^{ин}$, можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы $\vec{R}^{ин}$ (*главного вектора сил инерции* $\vec{R}^{ин} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{ин}$), приложенной в заданном центре *O*, и одной пары сил, момент которой $\vec{M}_0^{ин}$ равен *главному моменту сил инерции* относительно центра: $\vec{M}_0^{ин} = \sum_{k=1}^{n}\vec{M}_0\left(\vec{F}_k^{ин}\right)$.

Можно показать, что $\vec{R}^{ин}$ подсчитывается по формуле:

$$\vec{R}^{ин} = -m\vec{a}_C,$$

где m - масса системы, $\vec{a}_C$ - ускорение центра масс.

Выражения для главного момента сил инерции твердого тела и его проекций на координатные оси:

1. При поступательном движении: $\vec{M}_C^{ин} = 0$.
2. При вращении вокруг неподвижной оси z: $M_z^{ин} = I_z \varepsilon$.
3. При плоскопараллельном движении: $M_C^{ин} = I_C \varepsilon$. Здесь ε - угловое ускорение тела, I_z и I_c - моменты инерции тела относительно оси z и оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основной плоскости.

Моменты инерции $M_z^{ин}$ и $M_C^{ин}$ направлены противоположно угловому ускорению ε.

3.2. Классификация механических связей. Обобщенные координаты.

Классификация механических связей. *Механическими связями* называются некоторые устройства (тела), накладывающие ограничения на положения и скорости точек механической системы. Эти ограничения выполняются всегда независимо от заданных сил и записываются в виде соотношений, называемых *уравнениями связей.*

Стационарными связями называются связи, не зависящие от времени; связи, зависящие от времени, называются *нестационарными.*

Связи, в уравнения которых входят координаты точек и время, называются геометрическими. Связи называются кинематическими (дифференциальными), если в уравнения связей входят скорости, координаты точек и время.

Если кинематическую связь можно «заменить» эквивалентной геометрической, то она называется кинематической интегрируемой, в противном случае – неинтегрируемой.

Геометрические и кинематические интегрируемые связи называются голономными, а кинематические неинтегрируемые - неголономными. Механическая система называется голономной, если на нее наложены только голономные связи, и неголономной, если имеется хотя бы одна неголономная связь.

Связи называются неосвобождающими, если ограничения, накладываемые ими на положения точек, их скорости и время, могут быть записаны в форме равенств. Освобождающие связи записываются в форме неравенств.

Возможным (виртуальным) перемещением точки механической системы называется воображаемое, бесконечно малое, допускаемое наложенными связями перемещение $\delta \vec{r}$ из положения, занимаемого точкой в данный момент времени.

Возможными (или виртуальными) перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения $d\vec{r}_i$, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Для стационарных связей действительные перемещения точек находятся среди возможных.

Механическая система может иметь множество различных возможных перемещений. Однако для систем, состоящих из материальных твердых тел и конечного количества материальных точек, существует некоторое число независимых между собой возможных перемещений, через которые можно выразить любое другое возможное перемещение. Число независимых перемещений называется *числом степеней свободы механической системы.*

Обобщенными координатами называются независимые между собой переменные, которые однозначно определяют положение каждой точки механической системы. В случае голономной системы число степеней свободы равно числу обобщенных координат, в случае неголономной системы число степеней свободы меньше числа обобщенных координат.

Рассмотрим конкретные примеры:

1. Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы.

2. Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Действительное положение любой точки тела в пространстве можно определить, зная положение трех его точек B_1, B_2, B_3, не лежащих на одной прямой. Положение каждой из точек можно задать тремя параметрами, например, координатами x_j, y_j, z_j (j= 1, 2, 3). Общее число координат равно девяти, но эти 9 чисел не могут задаваться произвольно, так как они связаны тремя уравнениями, согласно которым расстояния d_{12}, d_{23}, d_{31} между точками должны оставаться постоянными, поскольку они принадлежат твердому телу. Если, например, известны шесть координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x_3$, то оставшиеся три z_2, y_3, z_3 могут быть найдены из уравнений связей.

3. Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, и в качестве обобщенной координаты можно выбрать угол его поворота j .

4. Твердое тело при плоскопараллельном движении имеет три степени свободы, в качестве обобщенных координат можно, например, выбрать угол его поворота и две декартовы координаты какой-либо точки тела.

5. Твердое тело при поступательном движении имеет три степени свободы, в качестве обобщенных координат можно выбрать три декартовы координаты какой-либо точки тела.

6. Система, состоящая из призмы, положенной на плоскость, и диска, катящегося без проскальзывания по боковой грани призмы, имеет две степени свободы (рис. 7).

7. Система, состоящая из двух свободных точек, имеет шесть степеней свободы.

8. Механизм двигателя внутреннего сгорания, состоящий из большого числа твердых тел, имеет одну степень свободы. В качестве обобщенной координаты можно выбрать угол поворота коленчатого вала j .

9. Тонкий прямолинейный стержень на плоскости, который должен двигаться так, чтобы скорость его центра была параллельна оси стержня, имеет две степени свободы.

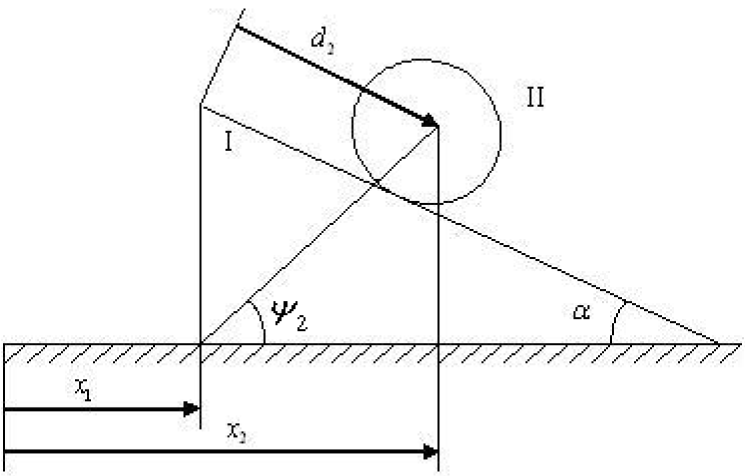


Рис. 7

Из приведенных примеров механических систем лишь одна - последняя была неголономной, остальные были голономными.

Вернемся снова к понятию обобщенных координат, взяв для иллюстрации систему на рис. 7. Положение каждой точки диска и призмы будет известно, если будут заданы значения величин, входящих в один из наборов, состоящих из двух переменных: (x_1, x_2) или (x_1, d_2), или (x_2, y_2). или (x_1, y_2), или $q_1 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2)$, $q_2 = \frac{1}{2}x_1 + x_2$ и т.д.

Вариантов выбора обобщенных координат существует бесконечно много, но каждый фиксированный набор для системы на рис. 7 всегда содержит две независимые величины. Так как данная система голономна, число обобщенных координат равно двум, т.е. числу степеней свободы. Координаты называются обобщенными, поскольку они могут не иметь явно выраженного геометрического смысла, как, например, в случае координат q_1, q_2.

Идеальные связи. Связи называются *идеальными*, если сумма работ их реакций $\vec{R}_i$ равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum_i dA\left(\vec{R}_i\right).$$

Любой сложный механизм, состоящий из нескольких твердых тел, можно трактовать как механическую систему с идеальными связями, если тела соединены абсолютно жестко, при помощи идеальных шарниров (без трения), невесомыми нерастяжимыми идеально гибкими нитями. Кроме того, поверхности соприкосновения должны быть либо абсолютно гладкими, если одно тело скользит по поверхности другого, либо идеально шероховатыми, когда одно из тел катится по поверхности другого без проскальзывания.

3.3 Принцип возможных перемещений.

Рассмотрим задачу о равновесии механической системы. При наличии связей уравнения равновесия механической системы, получаемые геометрическим методом, кроме активных сил содержат еще и реакции связей. Число подлежащих определению реакций тем больше, чем больше связей ограничивают исследуемую систему. Естественно искать такие условия равновесия, которые не содержали бы реакции связей. Эти условия могут быть получены с помощью принципа возможных перемещений.

Метод возможных перемещений использовал еще Аристотель при решении задачи о равновесии рычага. Галилей применял его при исследовании равновесия простейших машин, однако окончательное завершение метод получил только в 1717г. в работах Бернулли и Лагранжа. Швейцарский ученый Бернулли первым показал общность принципа возможных перемещений и его преимущества для решения задачи статики.

Принцип возможных перемещений является принципом, устанавливающим необходимые и достаточные условия равновесия материальной системы точек.

Формулировка и доказательства необходимости и достаточности принципа возможных перемещений дается следующей теоремой.

Теорема Лагранжа. Необходимым и достаточным условием равновесия системы материальных точек с идеальными связями, является равенство нулю суммы работ всех активных сил, действующих на точки системы, на любом возможном перемещении системы, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} dA\left(\vec{F}_i^a\right) = 0 \quad . \tag{3.1}$$

Или, учитывая, что элементарная работа есть скалярное произведение вектора силы на вектор элементарного перемещения

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot d\vec{r}_i = 0 \quad .$$

Записывая это уравнение в аналитической форме, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_{i_X}^a dx_i + F_{i_Y}^a dy_i + F_{i_Z}^a dz_i \right) = 0 \quad ,$$

где $F_{i_X}^a, F_{i_Y}^a, F_{i_Z}^a$ - проекции на инерциальные оси координат активных сил, действующих на *i*–ю точку;

dx_i, dy_i, dz_i - проекции возможного перемещения ***i***-ой материальной точки механической системы.

Последнее уравнение называется также *общим уравнением статики*.

Доказательство необходимости.

Пусть система материальных точек с идеальными связями находится в равновесии. Обозначим через $\vec{F}_i^a$ равнодействующую активных сил, действующих на ***i***-ю точку системы. Заменяя связи реакциями, для каждой точки получим уравнение равновесия.

$$\vec{F}_i^a + \vec{R}_i = 0 \quad , \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{3.2}$$

где $\vec{R}_i$ - равнодействующая реакций связей, наложенных на ***i***-ю точку системы.

Из уравнения (3.2) следует, что $\vec{F}_i^a = -\vec{R}_i$, то есть эти силы равны по модулю и противоположны по направлению, поэтому сумма их работ на любом возможном перемещении будет равна нулю.

$$dA\left(\vec{F}_i^a\right) + dA\left(\vec{R}_i\right) = 0 .$$

Складывая почленно такие равенства, полученные для всех точек системы, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} dA\left(\vec{F}_i^a\right) + \sum_{i=1}^{n} dA\left(\vec{R}_i\right) = 0 .$$

Однако на точки системы наложены идеальные связи, сумма работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n} dA\left(\vec{R}_i\right) = 0 . \tag{3.3}$$

Поэтому получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} dA\left(\vec{F}_i^a\right) = 0 \quad . \tag{3.4}$$

Доказательство достаточности.

Предположим, что на любом возможном перемещении системы выполняется условие (3.1). Покажем, что в этом случае система находится в равновесии.

Следуя от противного, предположим, что при выполнении условия (3.1). система не находится в равновесии. Пусть вектор $\vec{F}_i$ представляет равнодействующую активных сил и реакций связей, действующих на ***i***-ю точку системы так, что

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^a + \vec{R}_i \tag{3.5}$$

и среди сил $\vec{F}_i$ ***(i=1, 2,...n)*** по крайней мере одна отлична от нуля. Тогда точки системы, для которых $\vec{F}_i \neq 0$ начнут движение из состояния покоя в направлении действия силы $\vec{F}_i$.

Обозначим через $d\vec{r}_i$ перемещение ***i-ой*** точки, происходящее под действием силы $\vec{F}_i$. Точки для которых $\vec{F}_i = 0$ будут оставаться в покое и для них $d\vec{r}_i = 0$. Перемещение $d\vec{r}_i$ совпадает с направлением силы $\vec{F}_i$ и происходит в соответствии с ограничивающими систему связями и поэтому является одним из возможных перемещений системы. Подсчитывая работу силы $\vec{F}_i$ на перемещении $d\vec{r}_i$ с учетом того, что векторы $\vec{F}_i$ и $d\vec{r}_i$ имеют одинаковое направление будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i > 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\vec{F}_i^a + \vec{R}_i\right) \cdot d\vec{r}_i\right] > 0 \tag{3.6}$$

Система стеснена идеальными связями, для которых выполняется условие (3.3). Принимая его во внимание, из (3.6) получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot d\vec{r}_i > 0 \tag{3.7}$$

Условие (3.7) противоречит (3.1) для равновесия системы.

Принцип возможных перемещений дает возможность определить положение равновесия системы материальных точек, не находя реакций связей.

3.4. Общее уравнение динамики.

Принцип Даламбера и принцип возможных перемещений определяют общее уравнение динамики.

Рассмотрим систему материальных точек с идеальными связями.

Для каждой точки системы, согласно принципу Даламбера, можно записать равенство:

$$\vec{F}_i^a + \vec{R}_i + \vec{F}_i^{ин} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \qquad (3.8)$$

где $\vec{F}_i^a$ и $\vec{R}_i$ - равнодействующие активных сил и реакций связей, действующих на i–ю точку, а $\vec{F}_i^{ин} = -m\vec{a}_i$ даламберова сила инерции для i – ой точки.

Умножая каждое из выражений (3.8) на соответствующее рассматриваемой точке возможное перемещение $d\vec{r}_i$ и складывая затем полученные соотношения между собой, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\vec{F}_i^a + \vec{R}_i + \vec{F}_i^{ин}\right)\cdot d\vec{r}_i\right] = 0. \qquad (3.9)$$

Так как связи идеальные, то $\sum_{i=1}^{n}(\vec{R}_i \cdot d\vec{r}_i) = 0$ и следовательно

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\vec{F}_i^a + \vec{F}_i^{ин}\right)\cdot d\vec{r}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^a \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{ин} \cdot d\vec{r}_i\right) = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} dA\left(\vec{F}_i^a\right) + \sum_{i=1}^{n} dA\left(\vec{F}_i^{ин}\right) = 0. \qquad (3.10)$$

Полученный :результат можно сформулировать следующим образом: в каждый момент движения механической системы с идеальными связями сумма элементарных работ всех активных сил и даламберовых сил инерции на любом возможном перемещении точек материальной системы равна нулю.

Уравнение (3.10) представляет собой *общее уравнение динамики*. Оно называется также *уравнением Даламбера - Лагранжа*.

Если $F_{i_X}^a$, $F_{i_Y}^a$, $F_{i_X}^a$ - проекции силы $\vec{F}_i^a$, действующей на i-ю точку, на оси декартовой системы координат, а $\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$ проекции ускорения i-ой точки на эти же оси, то уравнение (3.10) можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(F_{i_X}^a - m_i\ddot{x}_i\right)dx_i + \left(F_{i_Y}^a - m_i\ddot{y}_i\right)dy_i + \left(F_{i_Z}^a - m_i\ddot{z}_i\right)dz_i = 0\right]. \qquad (3.11)$$

Уравнения (3.10) или (3.11) позволяют составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы с идеальными голономными связями. При этом из рассмотрения исключаются реакции связей.

Если механическая система представляет собой совокупность твердых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам прибавить приложенную в центре масс тела силу, равную главному вектору сил инерции и пару с моментом, равным главному моменту сил, инерции относительно центра масс, а затем применить принцип возможных перемещений.

Для каждого конкретного возможного перемещения общее уравнение динамики дает одно дифференциальное уравнение движения системы. Перебирая различные независимые возможные перемещения, получим полную систему дифференциальных уравнений движения. Для голономной системы количество этих уравнений будет равно числу степеней свободы этой механической системы.

3.5. Уравнения Лагранжа второго рода.

Для описания движения голономной механической системы. с n степенями свободы, на·которую наложены идеальные связи, бывает удобно использовать уравнения *Лагранжа второго рода:*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\ , \qquad (j=1,\ 2,\ldots S)\ . \qquad (3.12)$$

Здесь q_j – *обобщенные координаты.* количество которых равно числу степеней свободы *S*, $\dot{q}_j$ - *обобщенные скорости,* равные производным по времени от обобщенных координат, T - кинетическая энергия системы, Q_j - *обобщенные силы.* Уравнения Лагранжа второго рода получаются из общего уравнения динамики, при переходе к·обобщённым координатам, путём математических преобразований.

Величины T и Q_j должны быть представлены в виде функций обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени:

$$T=T(q_1,\ldots,q_S,\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_S,\ t)\ ,$$

$$Q_j=Q_j(q_1,\ldots,q_S,\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_S,\ t).$$

Обобщенные силы находятся из выражения для суммы элементарных работ активных сил $\vec{F}_i^a$ на возможном перемещении системы, преобразованного к виду:

$$\sum_i dA\left(\vec{F}_i^a\right) = \sum_i \vec{F}_i^a \cdot d\vec{r} = \sum_{j=1}^{S} Q_j dq_j \ .$$

Количество обобщенных сил равно числу степеней свободы S.

Физическая размерность обобщенной силы Q_j зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты q_j, так как размерность их произведения $Q_j dq_j$ должна совпадать с размерностью работы силы. По этой причине Q_j может не иметь явного физического смысла, отсюда и ее название - *обобщенная сила*.

После подстановки в (3.12) функций T и Q_j получается система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которую необходимо интегрировать с учетом начальных условий.

Преимущество уравнений Лагранжа второго рода состоит в том, что они получаются из выражения для кинетической энергии, а для ее вычисления нужно определить скорости точек механической системы. Методы определения этих скоростей изучены в кинематике.

Вычисление обобщенных сил можно проводить последовательно, выбирая S независимых возможных перемещений, в которых возможное перемещение одной независимой обобщенной координаты, например dq_3, не равно нулю (положительно), а остальных обобщенных координат равны нулю:

$$dq_1 = 0; \qquad dq_2 = 0; \qquad dq_3 > 0; \ldots; \qquad dq_j = 0; \ldots; \qquad dq_S = 0; \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, S).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{S} Q_j dq_j = Q_3 dq_3, \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, S)$$

и Q_3 будет равен коэффициенту при $dq_3 > 0$.

Дифференциальных уравнений получается ровно столько, сколько степеней свободы имеет механическая система. В этих уравнениях отсутствуют реакции связей, которые, как правило, неизвестны.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ДИНАМИКЕ

ЗАДАНИЕ Д-1

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Материальная точка M массой m, получив в точке A начальную скорость V_0, движется в изогнутой трубе ABC (рис. 1.1, 1.2), расположенной в вертикальной плоскости. Участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный. Угол наклона трубы $\alpha=30°$.

На участке AB на материальную точку действует сила тяжести $\vec{P}$, постоянная сила $\vec{Q}$ (ее направление указано на рисунках) и сила сопротивления среды $\vec{R}$, зависящая от скорости $\vec{V}$ груза (направлена сила против движения). Трением груза о трубу на участке AB пренебрегаем.

В точке B материальная точка, не изменяя величины своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на нее действует сила тяжести $\vec{P}$, сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f=0{,}2$) и переменная сила $\vec{F}$, проекция которой F_X на ось x приведена в таблице Д-1.

Известно расстояние $AB=l$ или время t_1 движения от точки A до точки B. Требуется найти закон движения материальной точки на участке BC : $x=f(t)$.

Указание. Решение задачи разбивается на две части. Сначала составляем и интегрируем методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения материальной точки на участке AB, учитывая начальные условия. В случае, когда задана длина отрезка AB, целесообразно перейти от интегрирования по t к интегрированию по переменной z с помощью формулы:

$$\frac{dV_Z}{dt} = \frac{dV_Z}{dt} \cdot \frac{dz}{dz} = V_Z \frac{dV_Z}{dz} \quad .$$

Зная время движения на участке AB или длину этого участка, определяем скорость материальной точки в конце участка, в точке B. Эта скорость принимается за начальную при исследовании движения материальной точки на участке BC. После этого составляем и интегрируем дифференциальное уравнение движения материальной точки на участке BC.

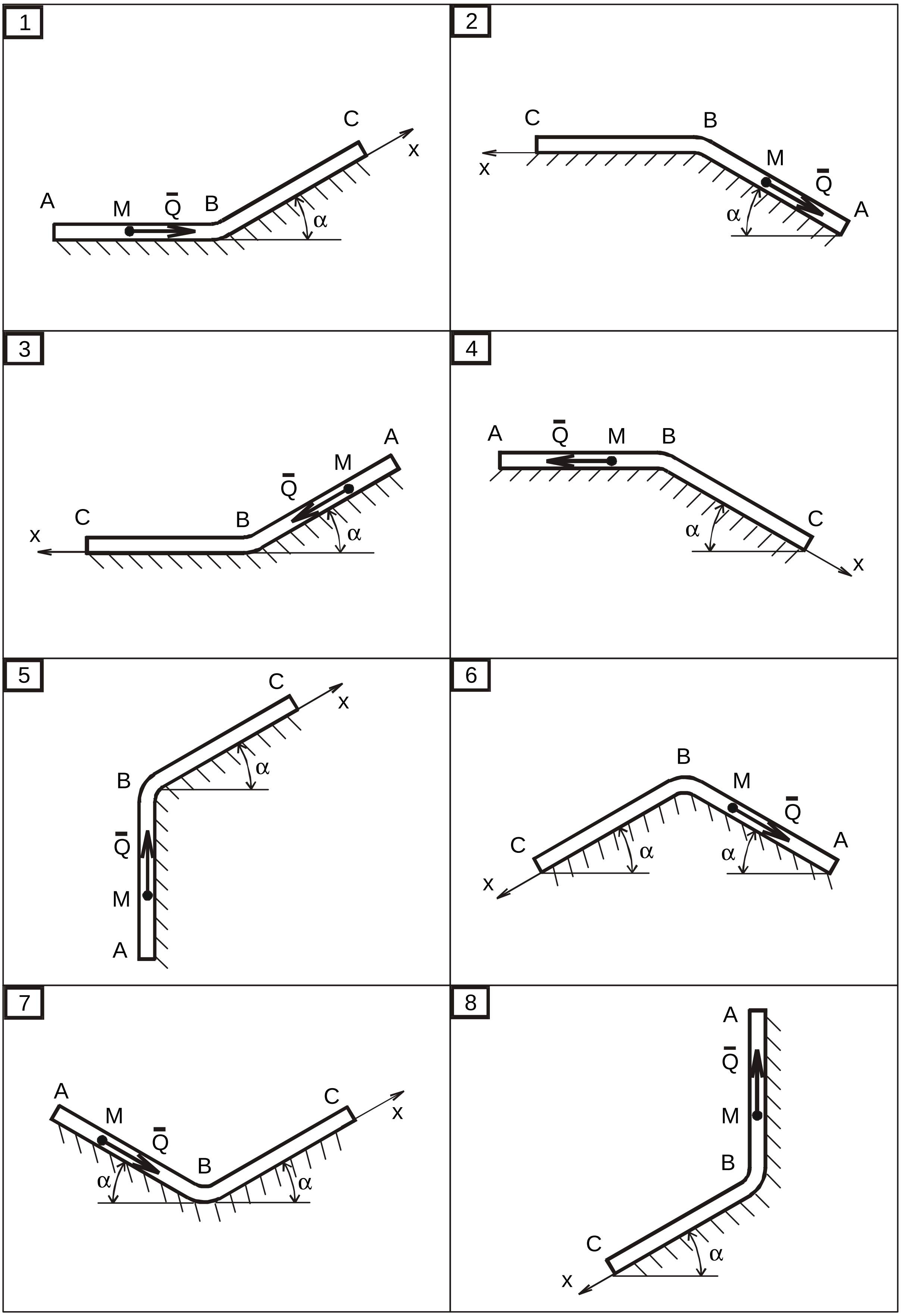
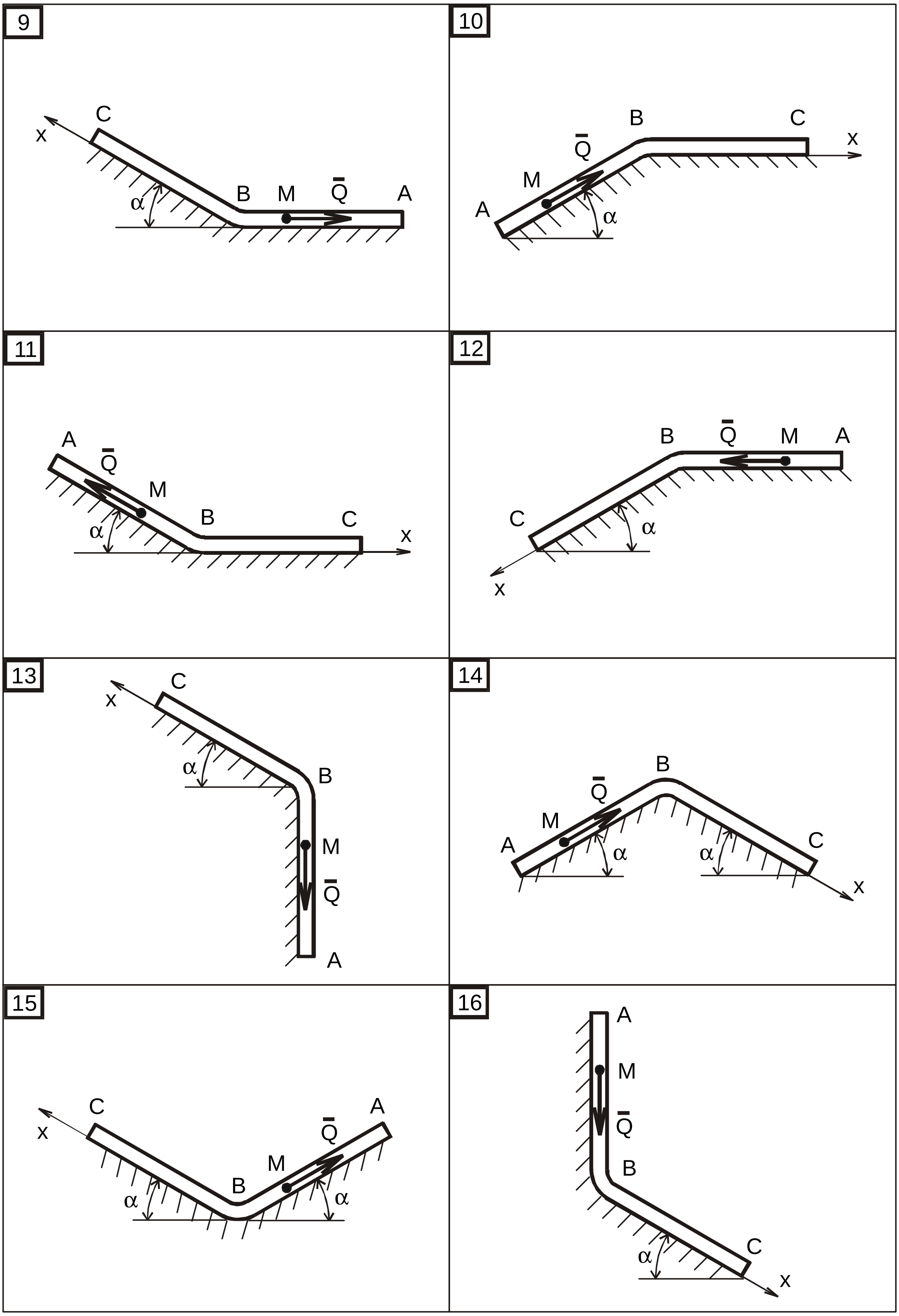

1
A
M
Q̄
B
C
x
α
2
C
x
B
M
Q̄
A
α
3
A
M
Q̄
C
B
x
α
4
A
Q̄
M
B
C
α
x
5
C
x
B
α
Q̄
M
A
6
B
M
Q̄
C
α
α
A
x
7
A
M
Q̄
B
C
x
α
α
8
A
Q̄
M
B
C
α
x

Рис. 1.1



9
C
x
α
B
M
Q̄
A
10
B
C
x
Q̄
M
A
α
11
A
Q̄
M
α
B
C
x
12
B
Q̄
M
A
C
α
x
13
C
x
α
B
M
Q̄
A
14
B
Q̄
M
A
α
α
C
x
15
C
x
A
Q̄
M
B
α
α
16
A
M
Q̄
B
C
α
x

Рис. 1.2

Таблица Д-1

№ варианта	Рис.	m (кг)	V_0, м/с	Q, Н	R, Н	m	l, м	t_1, с	F_X, Н
1	1	4,5	18	9	mV	0,45	-	5	3sin2t
2	2	3	32	4	mV^2	0,8	2,5	-	-8cos4t
3	3	2	2	2	mV	0,4	-	2,5	2sin4t
4	4	6	14	18	mV^2	0,6	5	-	-3cos2t
5	5	1,6	18	4	mV	0,4	-	2	4cos4t
6	6	1,2	22	2	mV^2	0,8	0,5	-	6t
7	7	2	5	2	mV	0,4	-	2,5	2sin4t
8	8	2,4	12	6	mV^2	0,48	1,5	-	6t
9	9	1,8	15	6	mV	0,3	-	3	$9t^2$
10	10	4	12	12	mV^2	0,8	2,5	-	-8cos4t
11	11	2	20	6	mV	0,4	-	2,5	2sin4t
12	12	4,8	5	12	mV^2	0,24	5	-	-6sin2t
13	13	1,2	24	2	mV	0,4	-	1	4cos4t
14	14	2,4	12	6	mV^2	0,8	0,5	-	6t
15	15	4	10	6	mV	0,8	-	5	3sin2t
16	16	2,4	12	2	mV^2	0,48	1,5	-	6t
17	1	6	2,5	18	mV^2	0,6	5	-	-3cos2t
18	2	2	26	3	mV	0,6	-	5	2cos2t
19	3	4	2	4	mV^2	0,2	5	-	-6sin4t
20	4	1,6	18	4	mV	0,4	-	2	4cos4t
21	5	6	14	18	mV^2	0,6	5	-	-3cos2t
22	6	2,1	28	3	mV	0,5	-	3	8sin2t
23	7	2,4	1,2	2	mV^2	0,8	1,5	-	6t
24	8	2	20	6	mV	0,4	-	2,5	2sin4t
25	9	8	10	16	mV^2	0,8	15	-	-6cos2t
26	10	1,8	15	6	mV	0,3	-	2	$9t^2$
27	11	2,5	1,5	8	mV^2	0,75	2,5	-	3sin2t
28	12	3	2,2	9	mV	0,6	-	2,5	2cos2t
29	13	2	28	5	mV^2	0,6	0,5	-	-3cos2t
30	14	4,5	18	9	mV	0,5	-	3	8sin2t

Пример выполнения задания Д-1

На вертикальном участке AB трубы (рис.3) на точку массой $m=1$ кг действует сила тяжести и сила сопротивления $R=mV^2$. Скорость материальной точки M в начальный момент времени $t=0$ в точке A равна нулю. Длина участка $AB=2$ (м). На наклонном участке BC трубы ($a=30^o$) на материальную точку действует сила тяжести, сила трения (коэффициент трения $f=0,2$) и переменная сила $F_X=16sin(3t)$. Требуется определить закон движения материальной точки на участке BC.

Решение

Рассмотрим движение материальной точки на участке AB. Изобразим на чертеже материальную точку M в произвольном положении. На точку действуют силы $\bar{P}$ и $\bar{R}$. Введем ось z в направлении от точки A к точке B. Составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось z

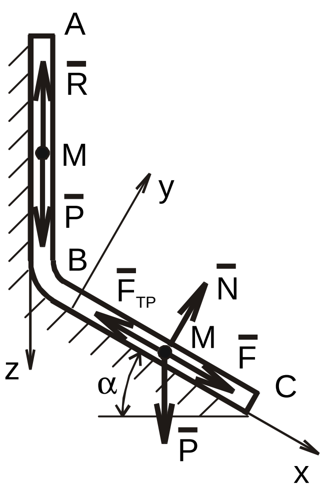


Рис. 1.3

$$m\frac{dV_Z}{dt}=\sum F_{KZ}$$ или

$$m\frac{dV_Z}{dt}=P_Z+R_Z\ ,$$

Учитывая, что $P_Z = mg$, $R_Z = -mV^2$, $V_Z=V$, получим

$$m\frac{dV}{dt}=mg-mV^2, \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt}=g-\frac{m}{m}V^2. \tag{1}$$

Введем обозначение $b=\dfrac{m}{m}=\dfrac{0,5}{1}=0,5$ (1/м).

Тогда (1) запишется так

$$\frac{dV}{dt} = g - bV^2 \quad . \tag{2}$$

Так как в условии задачи задана длина участка *AB*, то целесообразно при интегрировании перейти от переменной t к переменной z в уравнении (2). Домножим на dz правую и левую части уравнения (2), получим

$$dz\frac{dV}{dt} = \left(g - bV^2\right)dz \quad , \quad \text{т. к.} \quad \frac{dz}{dt} = V \quad , \ \text{то имеем}$$

$$VdV = \left(g - bV^2\right)dz \tag{3}$$

Разделим переменные в уравнении (3) и вычислим интегралы от обеих частей равенства

$$\frac{VdV}{g - bV^2} = dz \qquad , \qquad -\frac{1}{2b}\ln\left(g - bV^2\right) = z + C_1 \ . \tag{4}$$

Из начальных условий $V_0 = 0$, $z_0 = 0$ следует, что

$$C_1 = -\frac{1}{2b}\ln g \quad . \tag{5}$$

Подставим (5) в (4), получим

$$-\frac{1}{2b}\ln\frac{g - bV^2}{g} = z \qquad \text{или} \qquad \frac{g - bV^2}{g} = e^{-2bz} \quad .$$

Так как длина участка трубы $AB = 2$ (м), то скорость в конце участка в точке *B* будет равна

$$V_B^2 = g\frac{1 - e^{-2bz}}{b} = 10\frac{1 - e^{-2\cdot 0,5\cdot 2}}{0,5} = 20\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \quad ,$$

$$V_B = 4,15 \quad \text{м/с} \quad . \tag{6}$$

Рассмотрим движение материальной точки на участке *BC*. Изобразим в произвольном положении точку и действующие на нее силы $P=mg$, N, F_{TP} и F. Введем оси координат x и y и составим дифференциальное уравнение движения точки в проекции на оси *x* и *y*

$$m\frac{dV_X}{dt} = mg\sin a - F_{TP} + F_X \quad , \tag{7}$$

$$0 = N - mg\cos a \quad . \tag{8}$$

Найдем силу *N* из уравнения (8)

$$N = mg\cos a \quad .$$

Из этого равенства и закона Кулона $F_{TP}=fN$ определим силу трения

$$F_{TP} = fmg\cos a \quad .$$

Подставим значения сил трения и F_X в уравнение (7)

$$m\frac{dV_X}{dt} = mg(\sin a - f\cos a) + 16\sin(3t) \quad . \tag{9}$$

Разделим обе части уравнения (9) на *m* и подставим численные значения параметров

$$g(\sin a - f\cos a) = 9{,}8\left(\sin 30^{\circ} - 0{,}2\cos 30^{\circ}\right) = 3{,}2 \quad .$$

Имеем
$$\frac{dV_X}{dt} = 3{,}2 + 16\sin(3t) \quad . \tag{10}$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, получим

$$V_X = 3{,}2t - \frac{16}{3}\cos(3t) + C_2 \quad . \tag{11}$$

Из начального условия $V(0) = V_B$ и (6) получим

$$C_2 = 4{,}15 + \frac{16}{3}\cos 0 = 9{,}48 \quad .$$

Подставим значение C_2 в (11)

$$V_X = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - \frac{16}{3}\cos 3t + 9{,}48 \quad .$$

Умножаем обе части уравнения на dt и интегрируем по t

$$x = 1{,}6t^2 - \frac{16}{9}\sin 3t + 9{,}48t + C_3 \quad . \tag{12}$$

Из начального условия $x(0)=0$, получим $C_3=0$. Поставляем значение C_3 в (12) и находим закон движения точки на участке ВС

$$x = 1{,}6t^2 - \frac{16}{9}\sin 3t + 9{,}48t \quad .$$

ЗАДАНИЕ Д-2

Свободные колебания материальной точки.

Система пружин (рис. 2.1) с жесткостями C_1 и C_2 в начальный момент недеформирована. Тело весом P совершает колебания, упав с высоты h из состояния покоя или после сообщения ему начальной скорости V_0 вниз или вверх. Найти закон колебаний $x(t)$ тела, частоту колебаний k, период T и амплитуду A этих колебаний. Необходимые данные взять из таблицы Д-2. Условия задачи таковы, что пластины, соединяющие пружины, во время колебаний остаются параллельными своим первоначальным положениям. Пластины и пружины невесомы. Положительное направление оси x вниз. Считать $g=10$ м/с². Наклонные плоскости гладкие.

Указание. В заданиях с рисунками 1, 4, 7 определить предварительно V_0, учитывая параметр h.

Пример выполнения задания Д-2

Груз массой $m=5$ кг, прикрепленный к двум параллельно соединенным пружинам с коэффициентами жесткости $C_1=200$ н/м и $C_2=50$ н/м перемещается по наклонной плоскости с углом наклона $a=60^o$ (рис.2.2а). В начальный момент груз находился в положении равновесия, и ему сообщили начальную скорость $V_0=0{,}8$ м/с, направленную вниз. Найти закон колебаний груза $x=x(t)$ частоту колебаний, период и амплитуду этих колебаний.

Решение

Заменим прикрепленные к грузу пружины одной эквивалентной с коэффициентом жесткости $C_{ЭКВ}$. Поскольку пружины соединены параллельно, то

$$C_{ЭКВ} = C_1 + C_2 = 250 \text{ Н/м} .$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза. Свяжем с грузом систему координат xOy, начало координат поместим в положение статического равновесия, а ось x направим в сторону удлинения пружины (рис.2.2б).

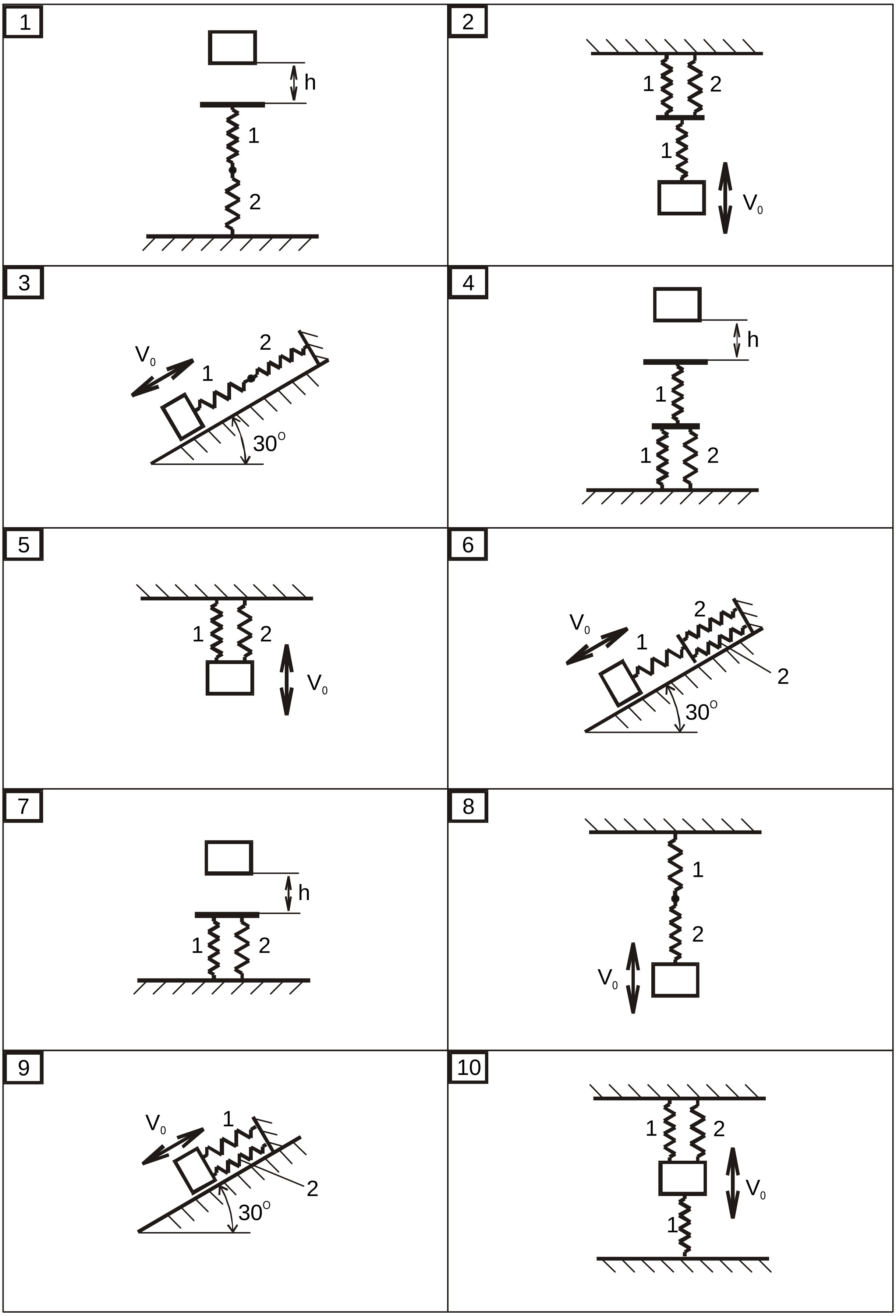

1
h
1
2
2
1
2
1
V0
3
V0
2
1
30o
4
h
1
1
2
5
1
2
V0
6
V0
2
1
2
30o
7
h
1
2
8
1
2
V0
9
V0
1
2
30o
10
1
2
V0
1

Рис. 2.1

Таблица Д-2

№ варианта	№ рисунка	C_1, Н/см	C_2, Н/см	P, Н	h, см	V_0, см/с
1	1	200	50	20	5	-
2	2	190	60	25	-	50, вверх
3	3	180	70	30	-	70, вниз
4	4	170	80	35	8	-
5	5	160	90	40	-	30, вверх
6	6	150	100	45	-	40, вниз
7	7	140	110	50	3	-
8	8	130	120	55	-	70, вверх
9	9	120	140	60	-	50, вниз
10	10	110	150	65	-	20, вверх
11	1	100	160	40	7	-
12	2	90	170	45	-	60, вниз
13	3	80	180	50	-	40, вверх
14	4	70	190	55	6	-
15	5	60	200	60	-	50, вниз
16	6	50	150	65	-	30, вверх
17	7	60	140	70	10	-
18	8	70	130	75	-	80, вниз
19	9	80	120	80	-	40, вверх
20	10	90	110	85	-	80, вниз
21	1	100	90	30	9	-
22	2	110	80	35	-	70, вверх
23	3	120	70	40	-	50, вниз
24	4	130	60	45	4	-
25	5	140	50	50	-	40, вверх
26	6	150	40	55	-	60, вниз
27	7	160	30	60	8	-
28	8	170	90	65	-	30, вверх
29	9	180	70	70	-	20, вниз
30	10	190	60	75	-	50, вверх

Рассмотрим груз в произвольном положении и изобразим действующие на него силы $\bar{P}$, $\bar{F}_{УПР}$ и $\bar{N}$. Так как эквивалентная пружина имеет удлинение $l = x + \delta_{CT}$, то

$$F_{УПР} = C_{ЭКВ} l = C_{ЭКВ}\left(x + \delta_{CT}\right) \quad , \tag{1}$$

где δ_{CT} – статическая деформация пружины.

Уравнение движения груза запишем в виде

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \quad , \qquad \text{где} \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = mg\cos\alpha - F_{УПР} \quad .$$

Тогда с учетом (1) уравнение примет вид

$$m\ddot{x} = mg\cos\alpha - C_{ЭКВ}x - C_{ЭКВ}\delta_{CT} \quad .$$

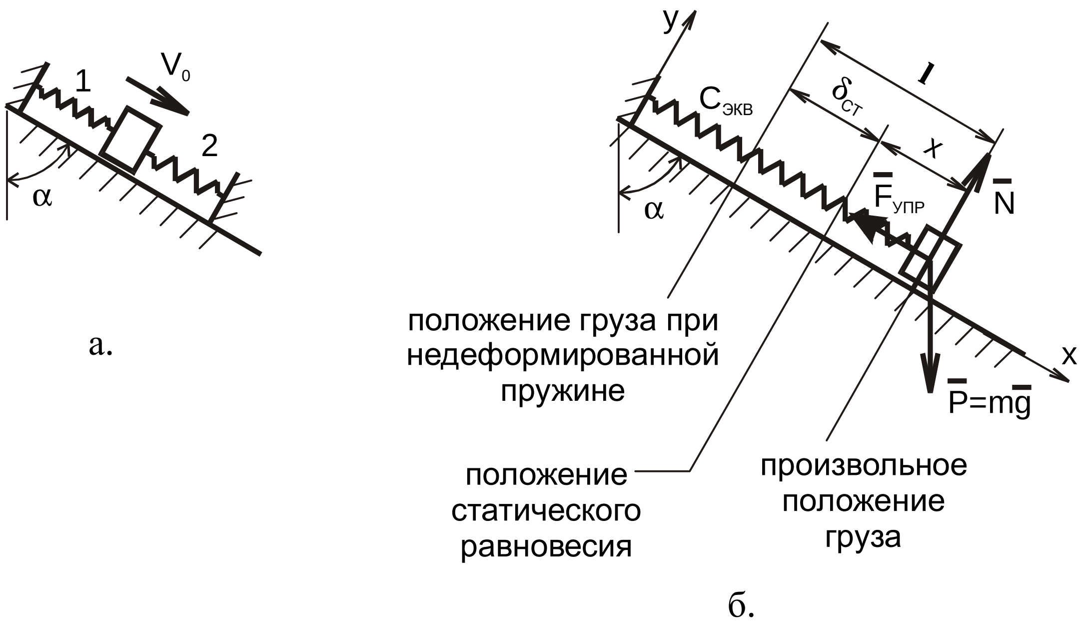


Рис. 2.2

Из условия равновесия груза следует, что

$$C_{ЭКВ}\delta_{CT} = P\cos\alpha \quad .$$

Учитывая это соотношение, получим дифференциальное уравнение движения груза

$$\ddot{x}+k^2x=0 \quad , \tag{2}$$

где $$k^2=\frac{C_{ЭКВ}}{m}=\frac{250}{5}=50 \quad \text{с}^{-2} .$$

Частота колебаний $k=\sqrt{50}$ с$^{-1}$.

Полученное уравнение (2) является линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, его решение ищем в виде

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt \quad , \tag{3}$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования.

Начальные условия $t=0$, $\dot{x}(0)=V_0=0{,}8$ м/с, $x(0)=x_0=0$.

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем $\dot{x}$ из (3)

$$\dot{x}=-C_1k\sin(kt)+C_2k\cos(kt) \quad . \tag{4}$$

Подставим начальные условия в (3) и (4), получим

$$C_1=0 \quad ; \qquad C_2=\frac{\dot{x}}{k}=\frac{0{,}8}{\sqrt{50}}=0{,}1 \quad .$$

Соотношение (3) примет окончательный вид

$$x=0{,}1\sin\left(\sqrt{50}\cdot t\right) \quad . \tag{5}$$

Равенство (5) определяет закон движения груза, т.е. закон колебаний.

Период колебаний $$T=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\sqrt{50}}=0{,}889 \quad \text{с} .$$

Амплитуда колебаний $$A=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=0{,}1 \quad \text{м} .$$

ЗАДАНИЕ Д-3

На звено 1 механизма, угловая скорость которого равна ω_{10}, с некоторого момента времени (t=0) начинает действовать пара сил с моментом М (движущий момент) или движущая сила P.

Массы звеньев 1 и 2 механизма равны соответственно m_1 и m_2 , а масса поднимаемого груза 3 - m_3. Момент сил сопротивления вращению ведомого звена 2 равен M_C. Радиусы больших и малых окружностей звеньев 1 и 2: R_1, r_1, R_2, r_2 .

Схемы механизмов показаны на рис. 3.1-3.3, а необходимые для решения данные приведены в табл. 3.1.

Найти уравнение вращательного движения звена механизма, указанного в последней графе табл. 3.1. Определить также натяжение нитей в заданный момент времени, а в вариантах, где имеется соприкасание звеньев 1 и 2, найти окружное усилие в точке их касания. Звенья 1 и 2, для которых радиусы инерции r_1 и r_2 в табл. 3.1 не заданы, считать сплошными однородными дисками.

Пример выполнения задания Д-3

Дано: m_1=100 кг; m_2=150 кг; m_3=400 кг; M=4200+200t Нм; M_C=2000 Нм=*const*; R_1=60 см; R_2= 40 см; r_2= 20 см; $r_1 = 20\sqrt{2}$ см ; r_2= 30 см; w_{10}=2 сек$^{-1}$.

Найти уравнение $j_2=f(t)$ вращательного движения звена 2 механизма, а также окружное усилие S в точке касания звеньев 1 и 2 и натяжение нити T в момент времени t_1= 1 сек (рис. 3.4.а)

Решение

К звену 1 механизма приложены (рис. 3.4.б) сила тяжести $\vec{G}_1$, движущий момент M, составляющие реакции подшипника $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, окружное усилие $\vec{S}_1$ и нормальная реакция $\vec{N}_1$ звена 2.

К звену 2 механизма приложены сила тяжести $\vec{G}_2$, момент сил сопротивления M_C, составляющие реакции подшипника $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_B$, натяжение нити $\vec{T}$, к которой подвешен груз 3, окружное усилие $\vec{S}_2$ и нормальная ре-

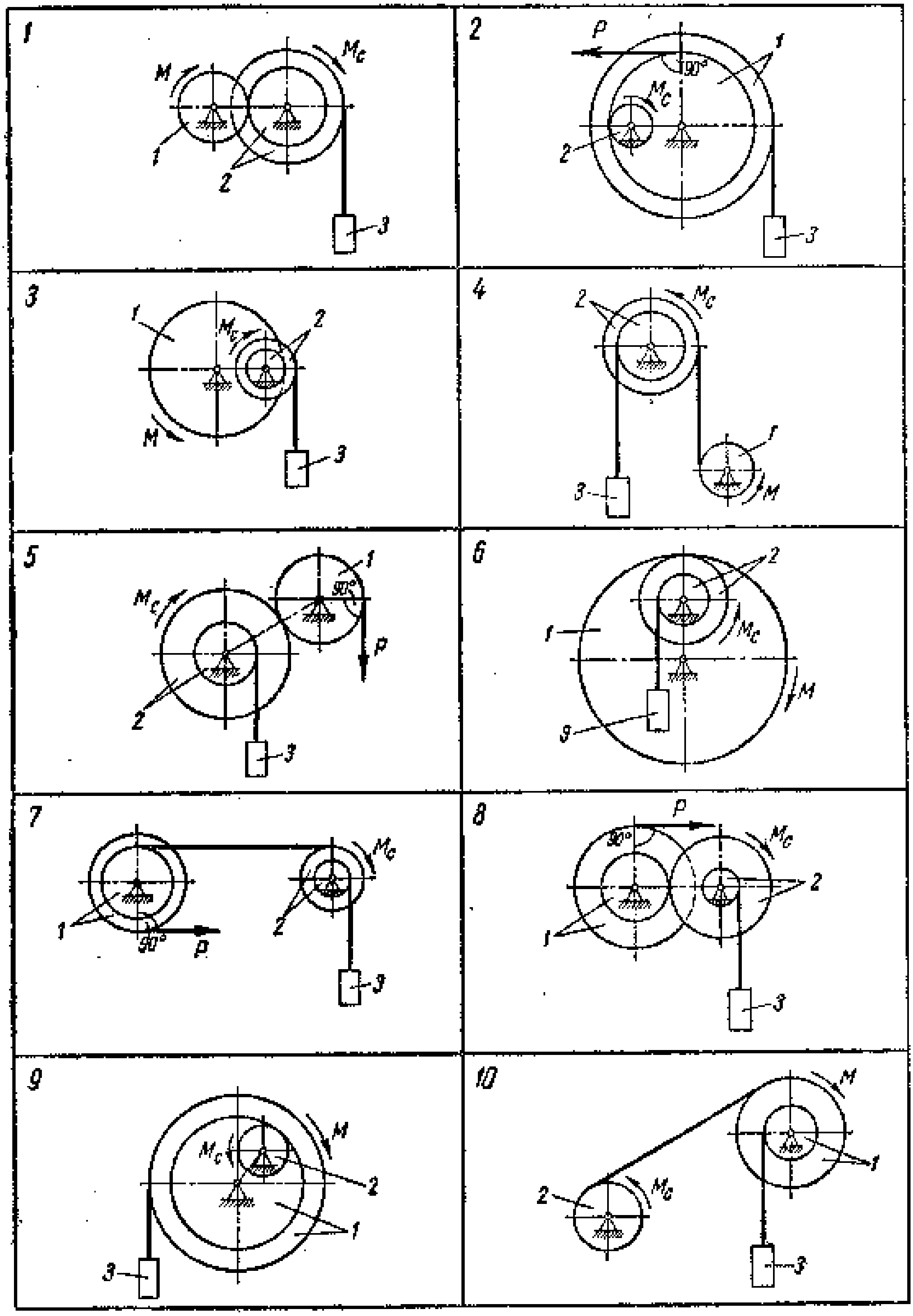

1
M
M_c
1
2
3
2
P
90°
1
M_c
2
3
3
1
M_c
2
M
3
4
2
M_c
1
3
M
5
M_c
1
90°
P
2
3
6
2
1
M_c
M
3
7
M_c
1
90°
P
2
3
8
P
90°
M_c
2
1
3
9
M
M_c
2
1
3
10
M
1
2
M_c
3

Рис. 3.1

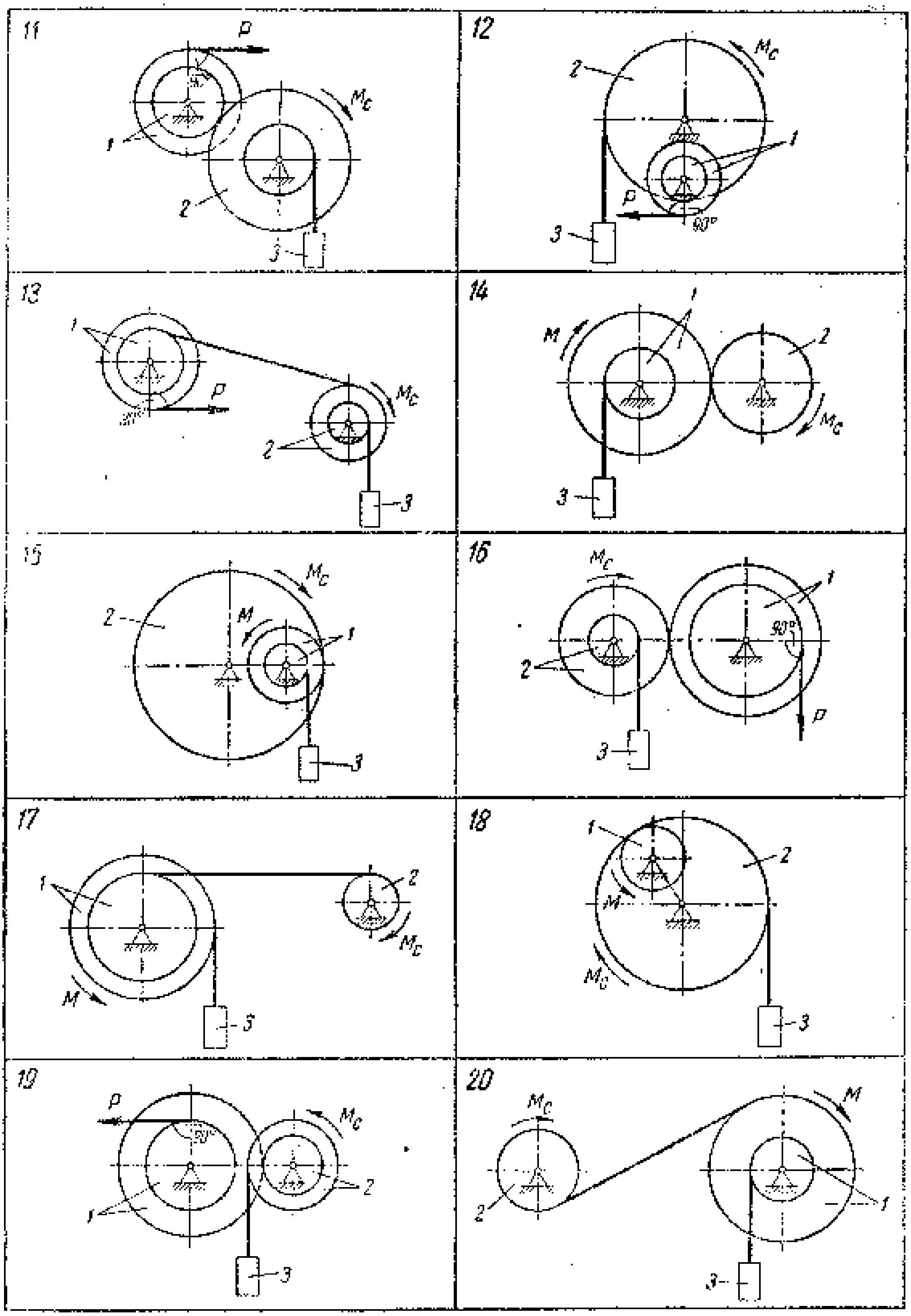


Рис. 3.2

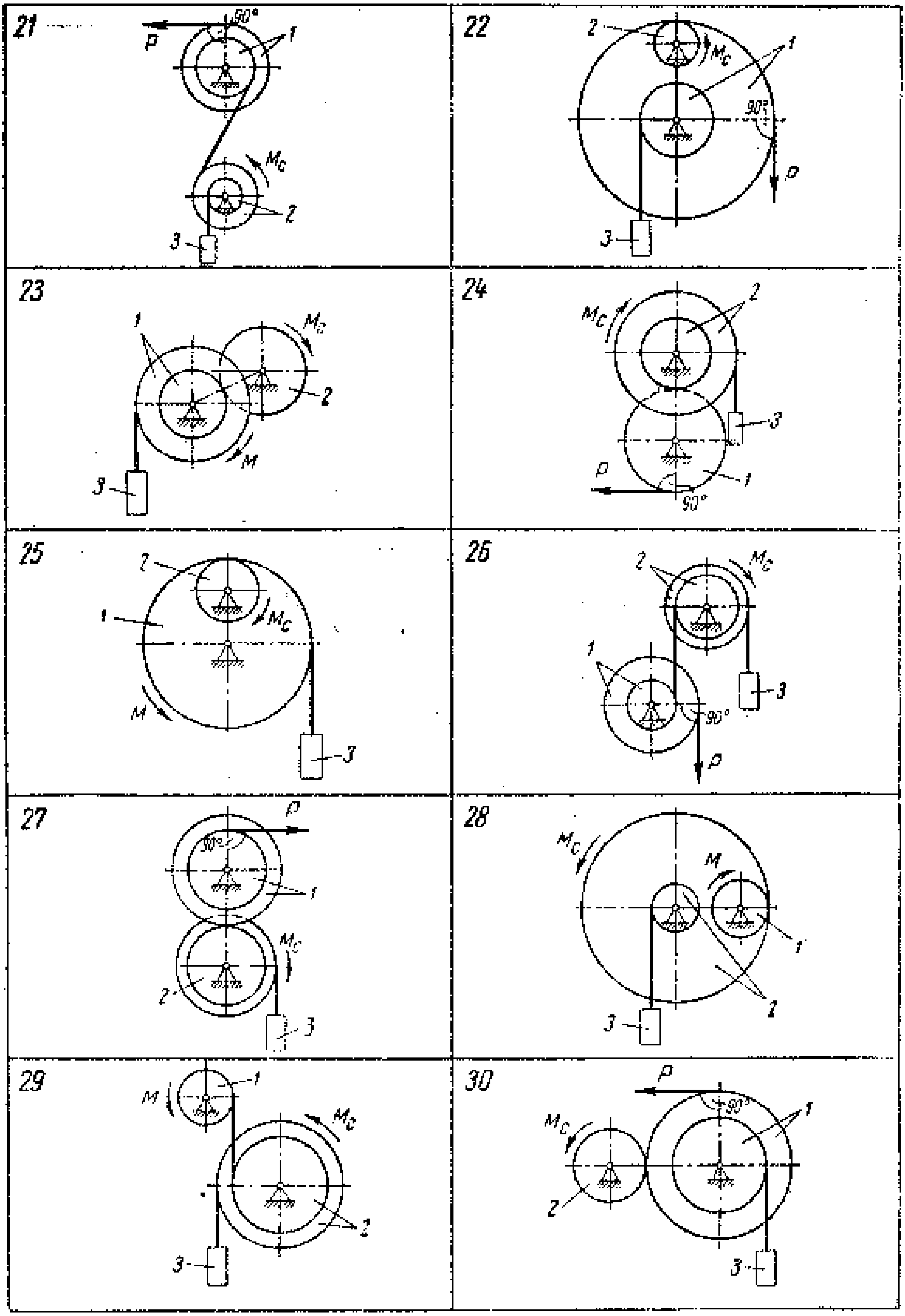

21
P
90°
1
M_c
2
3
22
2
M_c
1
90°
P
3
23
1
M_c
2
M
3
24
M_c
2
3
P
1
90°
25
2
1
M_c
M
3
26
2
M_c
1
3
90°
P
27
P
90°
1
M_c
2
3
28
M_c
M
1
2
3
29
M
1
M_c
2
3
30
P
90°
1
M_c
2
3

Рис. 3.3

Таблица Д-3

№ Вари-анта	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_1, см	r_1, см	R_2, см	r_2, см	ρ_1, см	ρ_2, см	M, Нм	P, Н	M_C, Нм	w_{10}, с$^{-1}$	t, с	Най-ти
1	100	300	500	20	-	60	40	-	60	$2100+20t$	-	1000	2	2	φ_1
2	300	80	500	70	50	20	-	60	-	-	$10200+100t^2$	600	1	0,5	φ_2
3	200	100	400	60	-	30	20	60	$20\sqrt{2}$	$6100+20e^t$	-	800	0,5	2,5	φ_1
4	100	250	300	20	-	50	30	-	40	$1000+40t^2$	-	1400	1,5	2	φ_1
5	150	300	600	30	-	50	20	-	30	-	$5500+200t$	1500	2	1	φ_2
6	400	250	600	70	-	30	20	70	$20\sqrt{2}$	$4800+10e^{2t}$	-	800	3	4	φ_1
7	300	200	400	60	40	30	20	50	20	-	$3000+100t^2$	500	0	3	φ_2
8	300	250	700	50	30	40	20	40	30	-	$9700+50t^3$	500	1	2	φ_1
9	200	100	500	80	60	20	-	$50\sqrt{2}$	-	$5900+30t$	-	600	2	3	φ_2
10	250	100	400	40	20	30	-	30	-	$2500+50e^t$	-	1200	0	1,5	φ_2
11	150	300	700	40	30	60	30	30	40	-	$3900+50t^2$	1000	1	2	φ_1
12	100	200	600	30	20	60	-	$20\sqrt{2}$	60	-	$5700+50t$	1500	2	2	φ_1
13	180	100	300	50	40	30	20	$30\sqrt{2}$	20	-	$2700+200t^3$	400	0,5	1	φ_2
14	150	80	400	40	20	30	-	30	-	$1800+20t$	-	700	1,5	2,5	φ_1
15	300	180	500	20	10	50	-	$10\sqrt{2}$	50	$700+40t^2$	-	300	0	1,5	φ_1

Продолжение таблицы Д-3

№ Варианта	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	R_1, см	r_1, см	R_2, см	r_2, см	r_1, см	r_2, см	M, Нм	P, Н	M_C, Нм	w_{10}, $с^{-1}$	t, с	Найти
16	300	250	400	60	40	50	30	50	40	-	$7300+100t$	1200	1	2	φ_1
17	250	100	800	50	30	20	-	40	-	$5400+50t^2$	-	900	2	2	φ_1
18	200	100	600	20	-	50	-	-	50	$1900+20e^{2t}$	-	1500	0,5	1	φ_2
19	250	150	400	50	30	30	20	40	$20\sqrt{2}$	-	$14200+200t^2$	500	0,5	2	φ_1
20	400	100	800	50	20	30	-	40	-	$3700+50e^{t}$	-	1200	2	1	φ_2
21	200	150	300	50	40	30	20	$30\sqrt{2}$	20	-	$3800+100t$	800	1	1,5	φ_2
22	250	100	800	60	20	10	-	50	-	-	$9700+200t^3$	700	2	0,5	φ_1
23	200	80	400	40	20	30	-	30	-	$2300+20t$	-	900	0,5	1	φ_2
24	100	200	500	30	-	40	20	-	30	-	$12600+100t^2$	500	1,5	1	φ_1
25	150	80	400	60	-	20	-	60	-	$4900+40e^{3t}$	-	800	0	1,5	φ_2
26	250	200	500	50	20	40	30	40	30	-	$3500+150t$	600	2	2	φ_1
27	250	150	500	50	30	40	30	$30\sqrt{2}$	30	-	$15200+100t^3$	700	1,5	1	φ_1
28	60	200	900	20	-	60	10	-	50	$900+10t^2$	-	1500	0	2	φ_2
29	50	200	500	20	-	40	30	-	$25\sqrt{2}$	$2100+20e^{t}$	-	1000	2	0,5	φ_1
30	300	60	600	50	30	20	-	40	-	-	$7200+50t$	700	1,5	1	φ_2

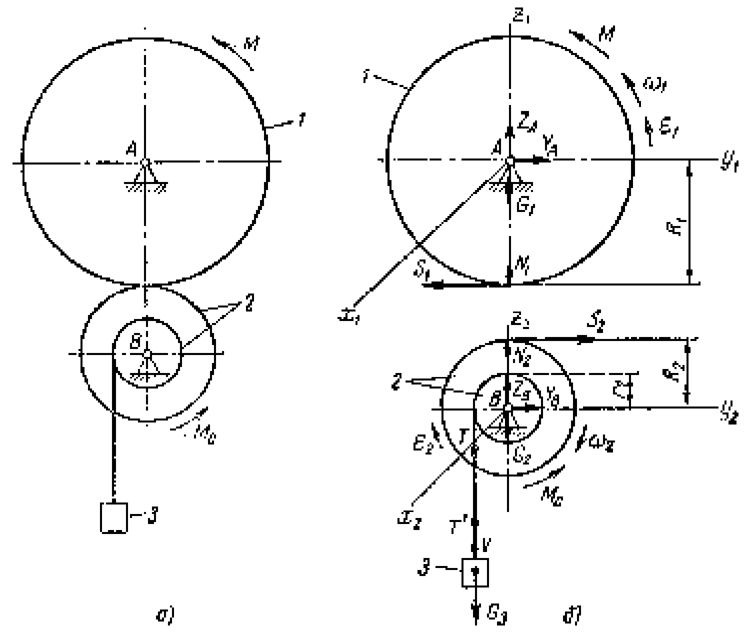


Рис. 3.4

акция $\vec{N}_2$ звена 1.

К грузу 3 приложены сила тяжести $\vec{G}_3$ и натяжение нити $\vec{T}'$.

Очевидно: $\vec{S}_2 = -\vec{S}_1$, $\vec{N}_1 = -\vec{N}_2$, $\vec{T}' = -\vec{T}$.

Составим дифференциальное уравнение вращения звена 1 вокруг неподвижной оси x_1:

$$I_1 \dot{\omega}_1 = M_1^e \quad .$$

Главный момент M_1^e внешних сил, приложенных к звену 1 (рис. 3.4,б), относительно оси x_1

$$M_1^e = M - S_1 R_1 \quad .$$

Момент M задает направление w_1, приводит в движение систему и поэтому принят положительным, а момент, создаваемый усилием $\vec{S}_1$, направлен противоположно w_1, препятствует вращению звена 1 и, следовательно, отрицателен.

Дифференциальное уравнение вращательного движения звена 1 примет вид

$$I_1\ddot{\varphi}_1 = M - S_1R_1 \quad . \qquad (1)$$

Выразим угловое ускорение $\ddot{\varphi}_1$ звена 1 через угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$ звена 2.

Так как

$$\frac{\ddot{\varphi}_1}{\ddot{\varphi}_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad ,$$

то

$$\ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2\frac{R_2}{R_1} \quad .$$

Тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$I_1\ddot{\varphi}_2\frac{R_2}{R_1} = M - S_1R_1 \quad . \qquad (2)$$

Для составления дифференциального уравнения вращения вокруг оси x_2 звена 2, к которому подвешен груз 3, применим теорему об изменении кинетического момента:

$$\frac{dK_2}{dt} = M_2^e \quad . \qquad (3)$$

Кинетический момент системы 2-3 относительно оси x_2

$$K_2 = I_2w_2 + m_3Vr_2 \quad ,$$

где I_2w_2 - кинетический момент звена 2, вращающегося с угловой скоростью w_2 вокруг неподвижной оси x_2;

m_3Vr_2- момент количества движения груза 3, движущегося поступательно со скоростью V.

Так как $V = w_2r_2$, то

$$K_2 = \left(I_2 + m_3r_2^{\,2}\right)w_2 = I_{np_2}\dot{\varphi}_2 \quad ,$$

где: $I_{np_2} = I_2 + m_3r_2^{\,2}$ - приведенный к оси x_2 момент инерции системы 2-3.

Главный момент M_2^e внешних сил, приложенных к системе 2-3 (рис.3.4), относительно оси x_2

$$M_2^{\,e} = S_2 R_2 - G_3 R_2 - M_C \quad .$$

Момент, создаваемый усилием $\vec{S}_2$, задает направление w_2, приводит в движение систему 2-3 и поэтому принят положительным, а момент силы тяжести груза $\vec{G}_3$ и момент сил сопротивления $\vec{M}_C$ направлены противоположно w_2, препятствуют движению системы и, следовательно, отрицательны.

Таким образом, из уравнения (3)

$$\frac{d}{dt}\left(I_{np_2}\dot{\varphi}_2\right) = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C \quad .$$

и получаем следующее дифференциальное уравнение вращения звена 2:

$$I_{np_2}\ddot{\varphi}_2 = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C \quad . \qquad (4)$$

В полученной системе уравнений (2) и (4) неизвестны усилия $S_1 = S_2 = S$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$. Для исключения S первое из уравнений этой системы домножим на R_2 , второе на R_1 и сложим их. Тогда получим

$$\left(I_1\frac{R_2^2}{R_1} + I_{np_2}R_1\right)\ddot{\varphi}_2 = MR_2 - \left(G_3 r_2 + M_C\right)R_1 \quad ,$$

или

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{MR_1R_2 - \left(G_3 r_2 + M_C\right)R_1^2}{I_1R_2^2 + I_{np_2}R_1^2} \quad . \qquad (5)$$

Выражение (5) определяет в общем виде угловое ускорение звена 2 механизма.

Учитывая исходные данные, найдем:

$$I_1 = m_1 r_1^{\,2} = 100\left(0{,}2\sqrt{2}\right)^2 = 8 \quad \text{кг·м}^2 \ ,$$

$$I_{np_2} = I_2 + m_3 r_2^2 = m_2 r_2^2 + m_3 r_2^2 = 150\cdot 0{,}3^2 + 400\cdot 0{,}2^2 = 29{,}5 \quad \text{кг·м}^2 \ .$$

Подставляем числовые данные в (5)

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{(4200 + 200t)0{,}6 \cdot 0{,}4 - (400 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2 + 2000) \cdot 0{,}6^2}{8 \cdot 0{,}4^2 + 29{,}5 \cdot 0{,}6^2} =$$

$$= 4{,}034t + 0{,}4597 \quad (\text{сек}^{-2}).$$

Интегрируем это уравнение дважды:

$$\dot{\varphi}_2 = 2{,}017t^2 + 0{,}4597t + C_1 \quad ;$$

$$\varphi_2 = 0{,}672t^3 + 0{,}230t^2 + C_1 t + C_2 \quad .$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия задачи:

при t=0 φ_2=0 , $\dot{\varphi}_2(0) = \omega_2(0) = \omega_1(0) \cdot \frac{R_1}{R_2} = 2 \cdot \frac{60}{40} = 3$ сек$^{-1}$.

Следовательно,

$$\dot{\varphi}_2(0) = C_1 \quad , \quad \varphi_2(0) = C_2 \quad ,$$

т. е.

$$C_1 = 3 \quad \text{сек}^{-1} \quad ; \quad C_2 = 0 \quad .$$

Уравнение угловой скорости звена 2 имеет вид

$$\dot{\varphi}_2 = 2{,}017t^2 + 0{,}4597t + 3 \quad (\text{сек}^{-1}).$$

Искомое уравнение вращательного движения звена 2 имеет вид:

$$\varphi_2 = 0{,}672t^3 + 0{,}230t^2 + 3t \quad (\text{рад}).$$

Окружное усилие S можно определить из уравнения (4):

$$S = S_2 = \frac{I_{пр_2}\ddot{\varphi}_2 + G_3 r_2 + M_C}{R_2} \quad .$$

При t_1=1 сек

$$S=\frac{29{,}5(4{,}034\cdot 1+0{,}4597)+400\cdot 9{,}81\cdot 0{,}2+2000}{0{,}4}=7295 \quad \text{Н.}$$

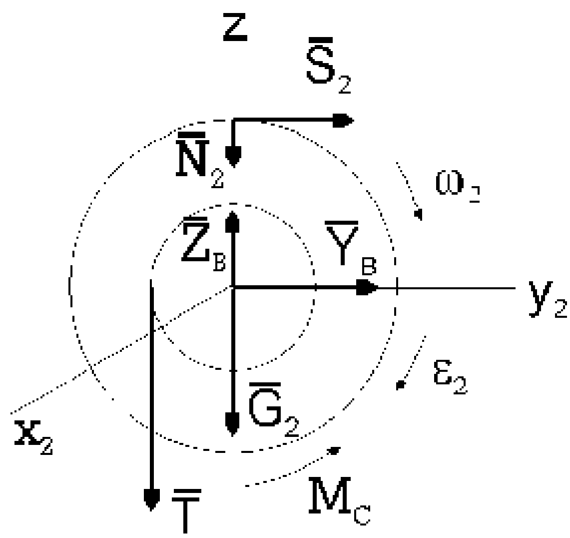


Рис. 3.5

Для определения натяжения нити T составим дифференциальное уравнение вращения звена 2 (рис. 3.5) в следующем виде:

$$I_2\ddot{\varphi}_2=S_2R_2-Tr_2-M_C \quad ,$$

из которого

$$T=\frac{S_2R_2-M_C-I_2\ddot{\varphi}_2}{r_2} \quad .$$

При t_1=1 сек

$$T=\frac{7295\cdot 0{,}4-2000-13{,}5(4{,}0334\cdot 1+0{,}4597)}{0{,}2}=4285 \quad \text{Н .}$$

ЗАДАНИЕ Д-4

Плоскопараллельное движение твердого тела

Барабан радиуса R весом P имеет проточку (как у катушки) радиуса $r=0{,}5R$ (рис.4.1, табл. Д-4). К концам намотанных на барабан нитей приложены постоянные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, направления которых определяются углом b. Кроме сил на барабане действует пара с моментом M. При движении, начинающимся из состояния покоя, барабан катится без скольжения по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона a так, как показано на рисунках.

Пренебрегая сопротивлением качению, определить закон движения центра масс барабана, т.е. $x_C=f(t)$, и наименьшее значение коэффициента трения f_{min} о плоскость, при котором возможно качение без скольжения. Барабан рассматривать как сплошной однородный цилиндр радиуса R.

Указания. При решении задачи Д-4 следует использовать дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. При составлении уравнений следует, во избежании ошибок в знаках, направить координатную ось x в ту сторону, куда предполагается направление движения центра масс барабана (точка C), и считать положительными моменты, направленные в сторону вращения барабана. Если фактически направление движения центра C является другим, то в результате получится $a_C<0$ и найденная величина будет верной. Силу трения, когда не ясно, куда она направлена, можно направлять в любую сторону.

Определяя наименьшее значение коэффициента трения, при котором возможно качение без скольжения, следует учесть, что сила трения не может быть больше предельной, т.е. что $|F_{TP}| \le fN$, откуда $f \ge \dfrac{|F_{TP}|}{N}$. Следовательно $f_{\min} = \dfrac{|F_{TP}|}{N}$. Очень существенно, что во все эти выражения входят модули сил (мы не пишем $|N|$, так как в данной задаче не может быть $N<0$). Если при расчетах получится $F_{TP}<0$, то это означает лишь, что фактически сила F_{TP} направлена в другую сторону.

Пример выполнения задания Д-4

Барабан (сплошной однородный цилиндр) радиусом R и весом P

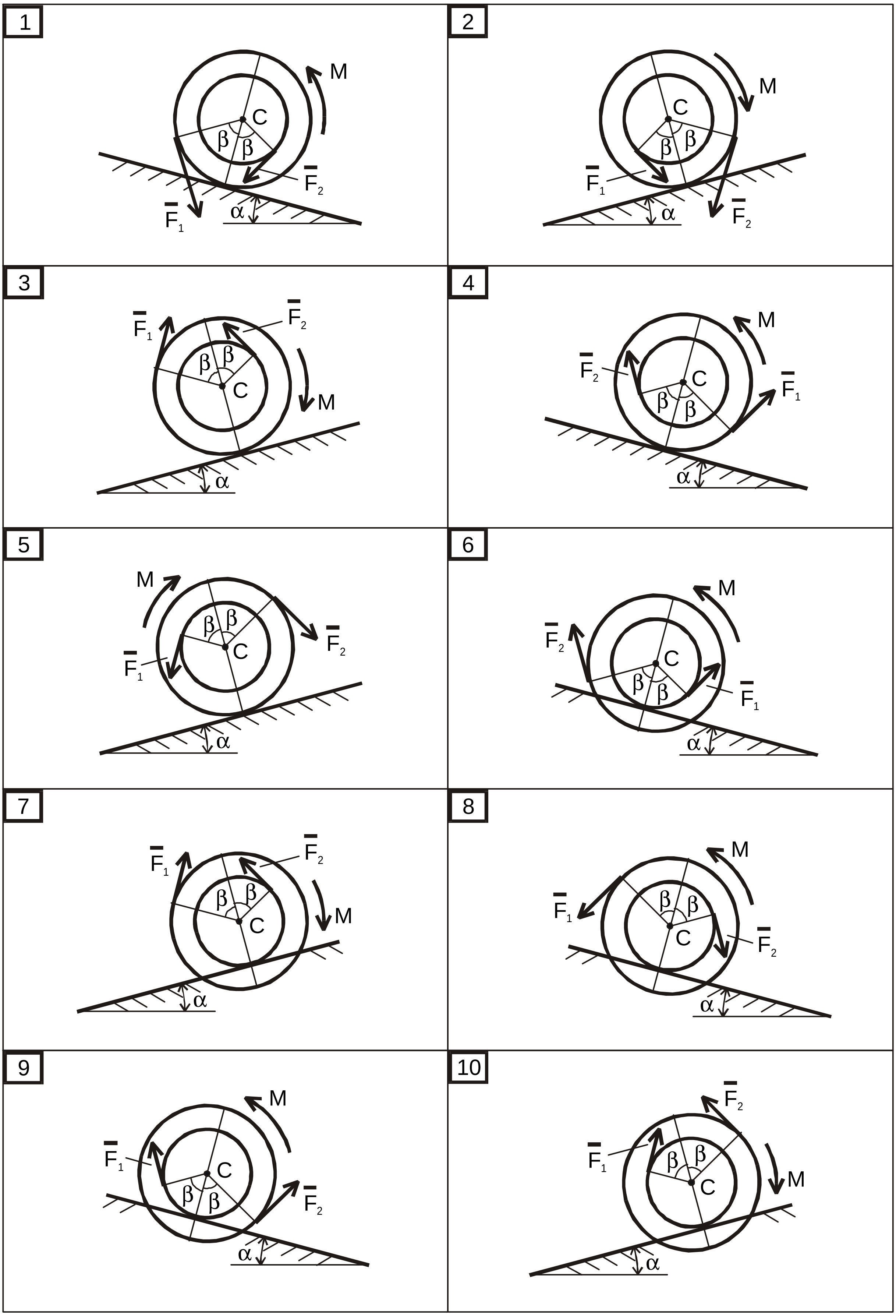

1
M
C
β β
$\bar{F}_1$
$\bar{F}_2$
α
2
M
C
β β
$\bar{F}_1$
$\bar{F}_2$
α
3
$\bar{F}_1$
$\bar{F}_2$
β β
C
M
α
4
M
$\bar{F}_2$
C
$\bar{F}_1$
β β
α
5
M
β β
$\bar{F}_2$
$\bar{F}_1$
C
α
6
M
$\bar{F}_2$
C
β β
$\bar{F}_1$
α
7
$\bar{F}_1$
$\bar{F}_2$
β β
C
M
α
8
M
$\bar{F}_1$
β β
C
$\bar{F}_2$
α
9
M
$\bar{F}_1$
C
β β
$\bar{F}_2$
α
10
$\bar{F}_2$
$\bar{F}_1$
β β
C
M
α

Рис. 4.1

Таблица Д-4

№ варианта	№ рисунка	a, °	b, °	F_1	F_2	M
1	1	30	60	0	0,4P	0
2	2	30	30	0,2P	0	0
3	3	0	30	0	0,2P	0,1PR
4	4	30	-	0	0	0,4PR
5	5	30	90	0,1P	0	0,2PR
6	6	0	60	0,3P	0,1P	0
7	7	30	0	0	0,3P	0,2PR
8	8	0	60	0,2P	0	0,3PR
9	9	30	90	0	0,2P	0,4PR
10	10	30	60	0,1P	0	0,3PR
11	1	30	60	0,4P	0	0
12	2	0	30	0	0,2P	0,3PR
13	3	30	30	0,2P	0,3P	0
14	4	0	60	0,1P	0	0,1PR
15	5	30	30	0	0,2P	0,4PR
16	6	0	90	0,1P	0	0,3PR
17	7	30	60	0,2P	0	0,4PR
18	8	30	30	0	0,1P	0,3PR
19	9	0	90	0,4P	0	0,1PR
20	10	30	60	0	0,3P	0,4PR
21	1	30	60	0,1P	0,2P	0
22	2	0	30	0	0,3P	0,5PR
23	3	30	90	0,1P	0	0,2PR
24	4	30	60	0	0,4P	0,1PR
25	5	30	30	0,2P	0	0,2PR
26	6	0	60	0,1P	0,2P	0
27	7	30	90	0,3P	0	0,1PR
28	8	30	60	0	0,1P	0,4PR
29	9	0	30	0,2P	0	0,1PR
30	10	30	90	0	0,4P	0,2PR

начинает катиться без скольжения из состояния покоя по наклонной плоскости с углом a. На барабан действует сила и пара сил с моментом M (рис.4.2).

Дано: P , $F = 0{,}8\,P$, $M = 1{,}1\,PR$, $a = 30°$, $b = 30°$.

Определить: 1) $x_C=f(t)$ - закон движения центра масс барабана; 2) f_{min} - наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение без скольжения.

Решение

Барабан совершает плоскопараллельное движение под действием сил: $\vec{P}$, $\vec{F}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{TP}$ и момента M. Так как направление силы трения $\vec{F}_{TP}$ нам заранее неизвестно, выбираем его произвольно. Выбираем оси Ox, Oy и составляем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx} \quad , \qquad m\ddot{x}_C = F\cos b + P\sin a + F_{TP} \quad ; \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{ky} \quad , \qquad m\ddot{y}_C = N - P\cos a - F\sin b \quad ; \tag{2}$$

$$I_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum M_{Cz}\left(\vec{F}_k\right) \quad , \qquad \frac{mR^2}{2}e = FR - F_{TP}R - M \quad . \tag{3}$$

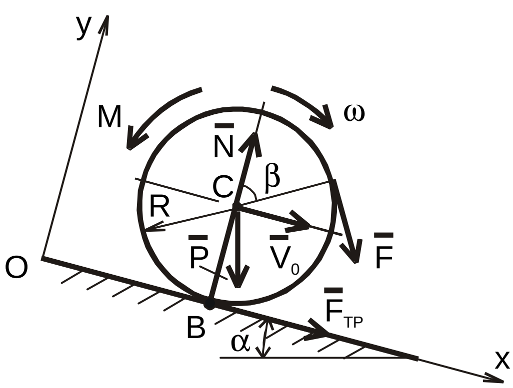


Рис. 4.2

За положительное направление для моментов принято направление угловой скорости w, т.е. в ту сторону, куда будет вращаться барабан при движении центра от оси Oy.

В систему уравнений (1), (2), (3) входят пять неизвестных ($\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, ε, F_{TP}, N) . Но так как $y_C=const=R$, то $\ddot{y}_C = 0$, следовательно осталось четыре неизвестных ($\ddot{x}_C$, ε, F_{TP} , N). Для решения задачи необходимо воспользоваться соотношением из кинематики. Так как точка B является мгновенным центром скоростей, то

$$V_C = \dot{x}_C = wR \quad , \qquad\qquad a_C = \ddot{x}_C = \dot{w}R = eR \quad . \tag{4}$$

1) Определение $\ddot{x}_C = f(t)$.

Чтобы определить $\ddot{x}_C = f(t)$, исключим e из уравнения (3), подставив в него (4)

$$\frac{1}{2}m\ddot{x}_C = F - F_{TP} - \frac{M}{R} \quad . \tag{5}$$

Далее из (1) и (5) исключим неизвестную силу F_{TP} , для этого сложим отдельно левые и правые части уравнений

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = F(1 + \cos b) + P\sin a - \frac{M}{R} \quad ,$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = 0{,}8P(1 + \cos 30^{\circ}) + P\sin 30^{\circ} - 1{,}1P \quad ,$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_C = 0{,}89P \quad .$$

Отсюда, так как $P=mg$ получим для определения $x_C=f(t)$ следующее дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}_C = 0{,}6g \quad . \tag{6}$$

Интегрируя уравнение (6), получим

$$\dot{x}_C = 0{,}6gt + C_1 \quad , \qquad\qquad x_C = 0{,}3gt^2 + C_1 t + C_2 \quad . \tag{7}$$

На основании начальных условий $\dot{x}_C(0) = 0$, $x_C(0)=0$ и уравнений (7) имеем $C_1=0$, $C_2=0$.

Таким образом получим закон движения центра масс

$$x_C = 0{,}3gt^2 \quad . \tag{8}$$

2) Определение f_{min} .

Для определения f исходим из того, что при качении без скольжения сила трения должна удовлетворять неравенству

$$\left|F_{TP}\right| \leq fN \quad . \tag{9}$$

В (9) входят модули сил. Величину N находим из (2), учитывая, что $\ddot{y}_C = 0$. Получим

$$N = P\cos a + F\sin b = P\cos 30^{0} + 0{,}8P\sin 30^{0} = 1{,}27P \quad . \tag{10}$$

Значение F_{TP} можно найти из (5) , подставив в него $\ddot{x}_C$ из (6).

Получим

$$0{,}3mg = F - F_{TP} - \frac{M}{R} \ , \qquad \text{т. к.} \quad mg = P \, , \quad \text{то}$$

$$F_{TP} = F - \frac{M}{R} - 0{,}3P = 0{,}8P - 1{,}1P - 0{,}3P = -0{,}6P \quad . \tag{11}$$

Знак указывает, что сила $\vec{F}_{TP}$ имеет направление, противоположное указанному на рисунке.

Подставляя значения F_{TP} и N из равенств (10) и (11) в неравенство (9), получим $0{,}6P \leq 1{,}27Pf$, откуда $f \geq 0{,}47$.

Следовательно наименьшим коэффициентом трения, при котором возможно качение барабана без скольжения, будет $f_{\min} = 0{,}47$.

ЗАДАНИЕ Д-5

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя. Учитывается трение скольжения тела *A* и сопротивление качению тела *D*, катящегося без скольжения. Другими силами сопротивления и массами нерастяжимых нитей пренебрегаем. Требуется определить скорость и ускорение тела *A* в тот момент, когда оно пройдет путь S_A=*S*.

В задаче обозначено:

m_A , m_B , m_D , m_E - массы тел *A, B, D, E*;

R_B , r_B , R_D , r_D , R_E , r_E - радиусы больших и малых окружностей тел *B, D, E*;

r_B , r_D , r_E - радиусы инерции тел *B, D, E* относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести;

a - угол наклона плоскости к горизонту;

f - коэффициент трения скольжения тела *A*;

k - коэффициент трения качения тела *D*.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами. Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Считать величину m равной *10* кг, g=*10* м/с^2.

<u>Указания:</u>

1. Выбрать направления S_A и V_A и определить скорости и перемещения всех тел системы в зависимости от V_A и S_A .
2. Вычислить кинетическую энергию системы.
3. Вычислить сумму работ всех внешних сил, действующих на систему. Если сумма работ отрицательна, сменить направления S_A и V_A и вернуться к пункту 1. Если опять сумма работ получится отрицательной, то система под действием сил тяжести не приходит в движение из состояния покоя и V_A=0, a_A=0. Следует отметить, что при смене направлений S_A и V_A в силовой схеме необходимо изменить только направления сил сопротивления.
4. Записать теорему об изменении кинетической энергии системы.

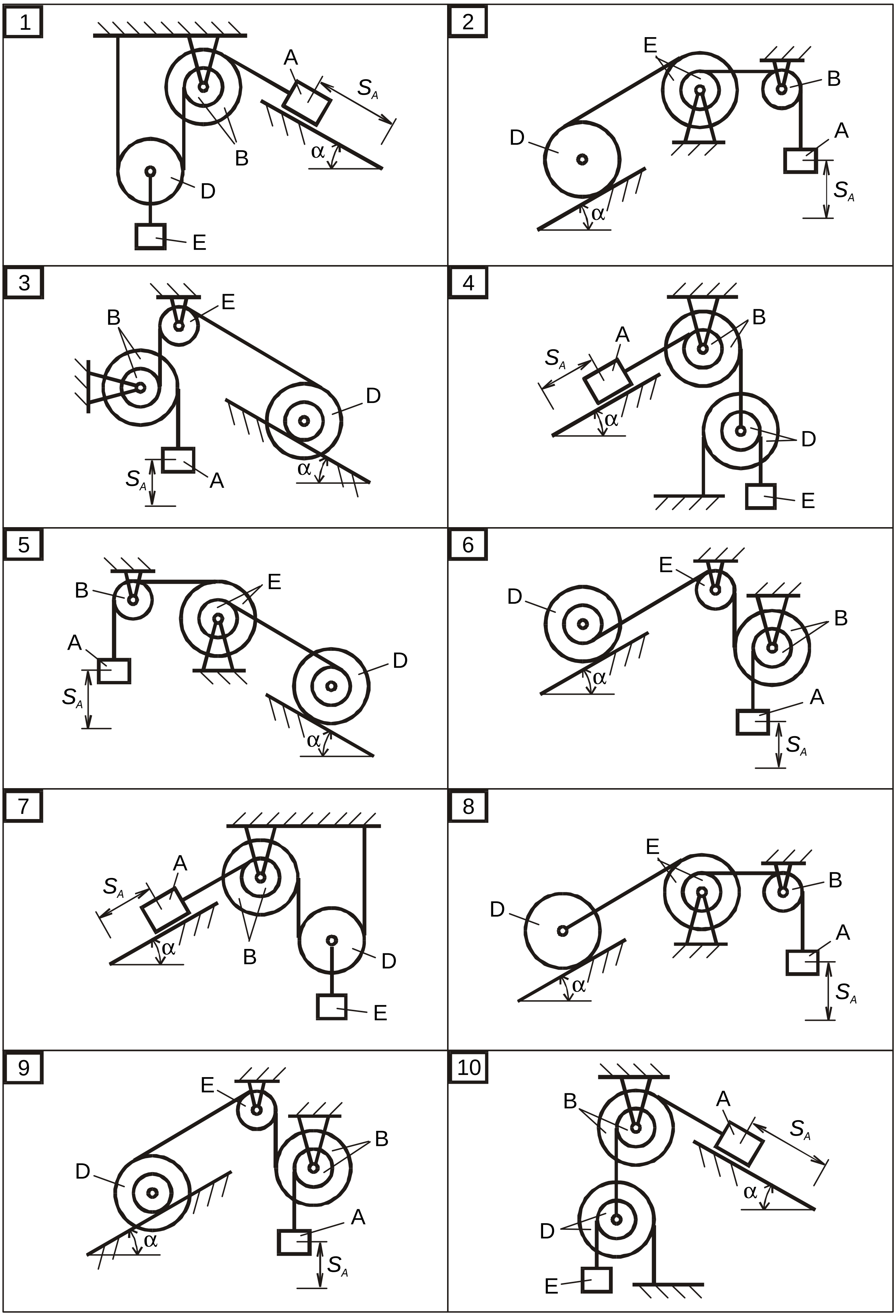

1
A
S_A
B
α
D
E
2
E
B
D
A
S_A
α
3
B
E
D
S_A
A
α
4
B
A
S_A
α
D
E
5
B
E
A
D
S_A
α
6
E
D
B
α
A
S_A
7
A
S_A
α
B
D
E
8
E
B
D
A
α
S_A
9
E
B
D
α
A
S_A
10
B
A
S_A
α
D
E

Рис. 5.1

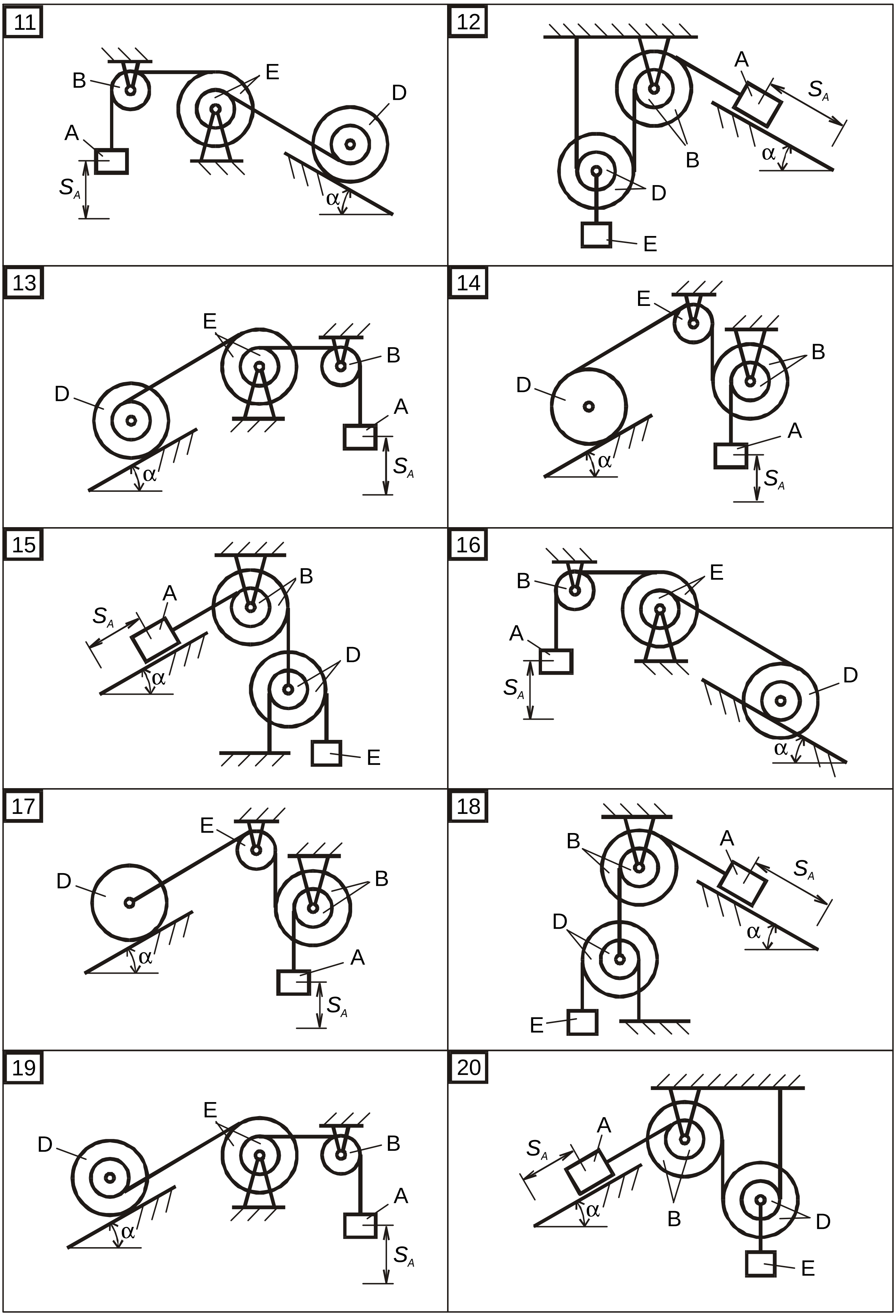

11
B
E
D
A
S_A
α
12
A
S_A
α
B
D
E
13
E
B
D
A
S_A
α
14
E
B
D
A
α
S_A
15
B
A
S_A
D
α
E
16
B
E
A
S_A
D
α
17
E
B
D
α
A
S_A
18
B
A
S_A
D
α
E
19
E
B
D
A
α
S_A
20
A
S_A
α
B
D
E

Рис. 5.2

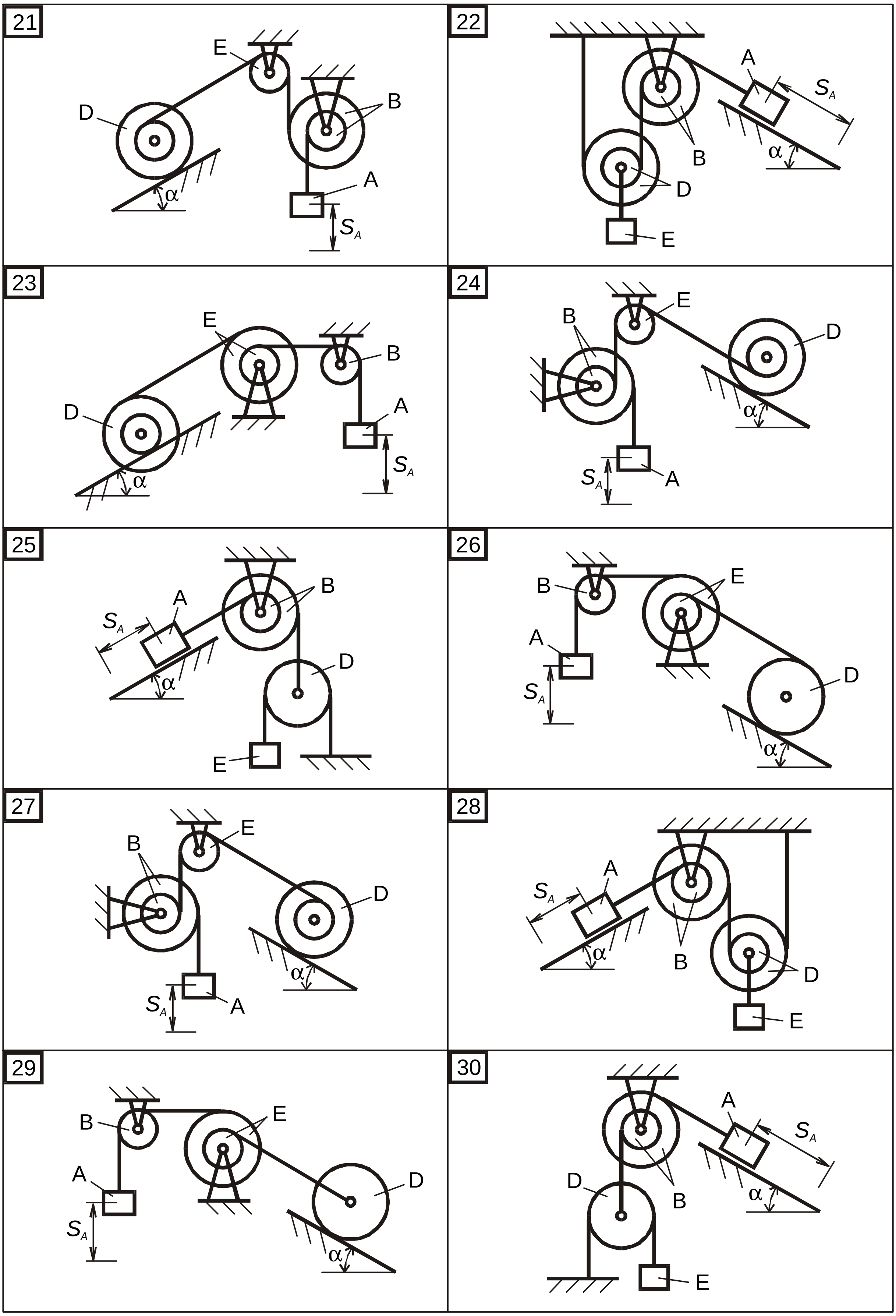

21
E
D
B
A
α
S_A
22
A
S_A
B
α
D
E
23
E
B
D
A
S_A
α
24
E
B
D
α
S_A
A
25
B
A
S_A
α
D
E
26
B
E
A
S_A
D
α
27
E
B
D
α
S_A
A
28
A
S_A
α
B
D
E
29
E
B
A
D
S_A
α
30
A
S_A
D
B
α
E

Рис. 5.3

Таблица Д-5

№ варианта	№ рисунка	m_A, кг	m_B, кг	m_E, кг	m_D, кг	R_B, м	r_B, м	r_B, м	R_E, м	r_E, м	r_E, м	R_D, м	r_D, м	r_D, м	a, °	f	k, см	S, м
1	1	5m	4m	2m	m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	-	-	60	0,1	-	1
2	2	6m	5m	4m	2m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	45	-	0,2	2
3	3	4m	m	2m	m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,6	0,2	0,3	15	-	0,1	1,5
4	4	8m	6m	3m	2m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	30	0,2	-	3
5	5	7m	5m	4m	m	-	-	-	0,7	0,4	0,5	0,6	0,3	0,4	50	-	0,3	4,5
6	6	9m	8m	3m	3m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,9	0,3	0,5	20	-	0,4	1,5
7	7	6m	2m	3m	2m	0,4	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	60	0,15	-	2,5
8	8	4m	2m	m	2m	-	-	-	0,5	0,2	0,3	-	0,4	-	15	-	0,1	4
9	9	7m	5m	3m	3m	0,6	0,3	0,4	-	-	-	0,8	0,5	0,7	20	-	0,4	2
10	10	5m	4m	2m	m	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,7	0,3	0,4	50	0,25	-	1
11	11	8m	5m	3m	2m	-	-	-	0,5	0,1	0,2	0,8	0,4	0,5	30	-	0,3	3,5
12	12	9m	7m	5m	4m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	70	0,1	-	2
13	13	6m	3m	2m	m	-	-	-	0,5	0,2	0,3	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	4,5
14	14	7m	5m	4m	2m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	-	0,6	-	20	-	0,1	3
15	15	4m	3m	2m	m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,5	0,1	0,2	60	0,2	-	1,5
16	16	5m	4m	2m	m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	0,7	0,4	0,5	30	-	0,3	1
17	17	6m	5m	4m	2m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	0,4	-	20	-	0,1	2
18	18	4m	m	2m	m	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,4	0,1	0,2	65	0,15	-	1,5
19	19	8m	6m	3m	2m	-	-	-	0,9	0,3	0,5	0,6	0,3	0,4	15	-	0,2	3
20	20	7m	5m	4m	m	0,5	0,1	0,3	-	-	-	0,6	0,3	0,4	45		-	4,5
21	21	9m	8m	3m	3m	0,6	0,2	0,3	-	-	-	0,7	0,3	0,4	30	-	0,3	1,4
22	22	6m	2m	3m	2m	0,9	0,3	0,5	-	-	-	0,5	0,2	0,3	60	0,25	-	2,5
23	23	4m	2m	m	2m	-	-	-	0,4	0,1	0,2	0,5	0,1	0,2	20	-	0,1	4
24	24	7m	5m	3m	3m	0,7	0,3	0,4	-	-	-	0,9	0,3	0,5	15	-	0,3	2
25	25	5m	4m	2m	m	0,5	0,1	0,2	-	-	-	-	-	-	75	0,1	-	1
26	26	8m	5m	3m	2m	-	-	-	0,6	0,3	0,4	-	0,5	-	25	-	0,2	3,5
27	27	9m	7m	5m	4m	0,7	0,4	0,5	-	-	-	0,8	0,5	0,7	30	-	0,3	2
28	28	6m	3m	2m	m	0,4	0,1	0,2	-	-	-	0,6	0,2	0,3	70	0,2	-	4,5
29	29	7m	5m	4m	2m	-	-	-	0,8	0,5	0,7	-	0.6	-	20	-	0,1	3
30	30	4m	3m	2m	m	0,5	0,2	0,3	-	-	-	-	-	-	60	0,15	-	1,5

5. Из полученного соотношения определить скорость тела A (а также ускорение тела A в вариантах, перечисленных выше).

Пример выполнения задания Д-5

Дано: $m=10$ (кг), $m_A=3m$, $m_B=0{,}5m$, $m_D=4m$, $m_E=0{,}5m$, $R_B=20$ (см), $r_B=0{,}5R_B$, $R_D=10$ (см), $R_E=20$ (см), $r_E=0{,}5R_E$, $r_B=20$(см), $r_E=10$ (см), $a=30°$, $k=0{,}25$ (см), $S=1$(м), блок D – сплошной цилиндр.

Решение

По условию задачи в начальный момент времени $t_0=0$ система находилась в покое, поэтому $T_0=0$. Предположим, что к моменту времени t_1 тело A прошло путь S_A и приобрело скорость V_A.

Изобразим силовую схему варианта задачи (рис.5.4).

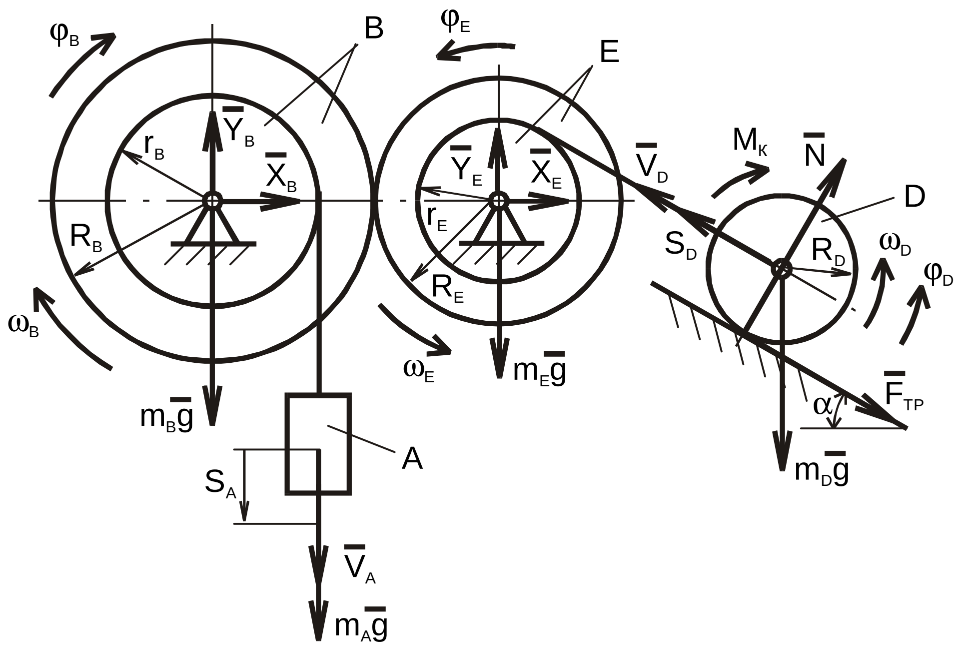


Рис. 5.4

1. Вычислим, в зависимости от V_A, угловые скорости тел B, E, D и скорость V_D центра масс тела D.

$$w_B = \frac{V_A}{r_B}, \qquad w_E = w_B\frac{R_B}{R_E} = V_A\frac{R_B}{r_B R_E},$$

$$V_D = w_E r_E = V_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E} \quad , \qquad w_D = \frac{V_D}{R_D} = V_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \quad .$$

2. Вычислим в зависимости от S_A смещения тел B, E, D.

$$j_B = \frac{S_A}{r_B} \quad , \quad j_E = S_A \frac{R_B}{r_B R_E} \quad , \quad S_D = S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E} \quad , \quad j_D = S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \quad .$$

3.Вычислим кинетическую энергию системы для момента времени t

$$T_1 = T_A + T_B + T_E + T_D \quad ,$$

$$T_A = \frac{m_A V_A^2}{2} \quad , \qquad T_B = \frac{I_B w_B^2}{2} = \frac{I_B V_A^2}{2 r_B^2} \quad , \qquad T_E = \frac{I_E w_E^2}{2} = \frac{I_E V_A^2}{2} \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 ,$$

$$T_D = \frac{m_D V_D^2}{2} + \frac{I_D w_D^2}{2} = \frac{m_D V_A^2}{2} \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + \frac{I_D V_A^2}{2} \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 \quad ;$$

$$T = \frac{V_A^2}{2} \left(m_A + \frac{I_B}{r_B^2} + I_E \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 + m_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + I_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 \right) = \frac{V_A^2}{2} \cdot A \ ,$$

где
$$A = m_A + \frac{I_B}{r_B^2} + I_E \left(\frac{R_B}{r_B R_E} \right)^2 + m_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E} \right)^2 + I_D \left(\frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right)^2 = 75 \quad (\text{кг}).$$

4. Подсчитаем сумму работ всех внешних сил, действующих на систему. Работу совершают только силы тяжести тел A и D и момент M_K сил сопротивления качению тела D, $\qquad M_K = N \cdot k = m_D g \cos a \cdot k$.

$$\sum_k A\left(\vec{F}_k^e\right) = m_A g S_A - m_D g \sin a \cdot S_D - m_D g \cos a \cdot k \cdot j_D =$$

$$= g\left(m_A S_A - m_D \sin a \cdot S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos a \cdot k \cdot S_A \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) =$$

$$= g S_A \left(m_A - m_D \sin a \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos a \cdot k \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = S_A \cdot B$$

где $$B = g\left(m_A - m_D \sin a \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E} - m_D \cos a \cdot k \cdot \frac{R_B r_E}{r_B R_E R_D} \right) = 91{,}4 \quad (кг\cdot м/с^2).$$

Итак, сумма работ положительна и направление S_A и V_A выбрано верно.

Далее запишем теорему об изменении кинетической энергии для неизменяемой механической системы

$$T - T_0 = \sum_k A\left(F_k^e\right) .$$

Подставим выражения для кинетической энергии и суммы работ внешних сил

$$\frac{V_A^2}{2} \cdot A - 0 = S_A \cdot B \ , \qquad (1)$$

откуда $$V_A = \sqrt{\frac{2 \cdot S_A \cdot B}{A}} .$$

Подставляя числовые значения, получим

$$V_A \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 91{,}4 \cdot S_A}{75}} \approx 1{,}56 \quad м/с .$$

Определим ускорение тела *A*, для чего возьмем производную по времени от правой и левой части соотношения (1), помня, что $S_A = S_A(t)$, $\frac{dS_A}{dt} = V_A$, $\frac{dV_A}{dt} = a_A$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V_A^2}{2} \cdot A \right) = \frac{d}{dt}\left(S_A \cdot B\right) ,$$

$$\frac{A}{2} \cdot 2V_A \cdot \frac{dV_A}{dt} = B \cdot \frac{dS_A}{dt} ,$$

$$A \cdot V_A a_A = B \cdot V_A .$$

Окончательно $$a_A = \frac{B}{A} \approx \frac{91{,}4}{75} \approx 1{,}21 \quad м/с^2 .$$

ЗАДАНИЕ Д-6

Принцип Даламбера для механической системы

Вертикальный вал вращается с постоянной угловой скоростью w (рис.6.1). Вал, стержни *1*, *2*, *3* и точечный груз *4* лежат в одной плоскости и жестко скреплены между собой. Стержни имеют линейные плотности g_1, g_2, g_3 и длины l_1, l_2, l_3, масса точечного груза равна m_4. Определить указанные в таблице параметры конструкции так, чтобы в подпятнике *A* и подшипнике *B* не возникало динамических реакций. Исходные данные и определяемые величины приведены в таблице Д-6.

Пример выполнения задания Д-6

Дано: $g_1 = 1$ кг/м, $g_2 = 2$ кг/м, $g_3 = 3$ кг/м, $l_1 = 3$ м, $l_2 = 2$ м, $m_4 = 10$ кг, $a = 30°$.

Определить: z, l_3 (рис.6.2а).

Решение

Динамические реакции в подпятнике *A* и подшипнике *B* равны нулю, если главный вектор и главный момент сил инерции равны нулю (при $w = const$). В качестве центра приведения возьмем точку *0* (рис.6.2б).

Главный вектор сил инерции

$$\vec{F}^{ин} = \vec{F}_1^{ин} + \vec{F}_2^{ин} + \vec{F}_3^{ин} + \vec{F}_4^{ин}$$

$$\vec{F}_i^{ин} = -m_i \vec{a}_{Ci} \quad , \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \ .$$

$$\left.\begin{aligned}
F_1^{ин} &= g_1 l_1 w^2 \frac{1}{2} l_1 \sin a = \frac{9}{4} w^2 \\
F_2^{ин} &= g_2 l_2 w^2 \left(l_1 \sin a + \frac{l_2}{2} \right) = 10 w^2 \\
F_3^{ин} &= g_3 l_3 w^2 \frac{l_3}{2} = \frac{3}{2} l_3^2 w^2 \\
F_4^{ин} &= m_4 w^2 l_3 = 10 l_3 w^2
\end{aligned}\right\} \ . \qquad (1)$$

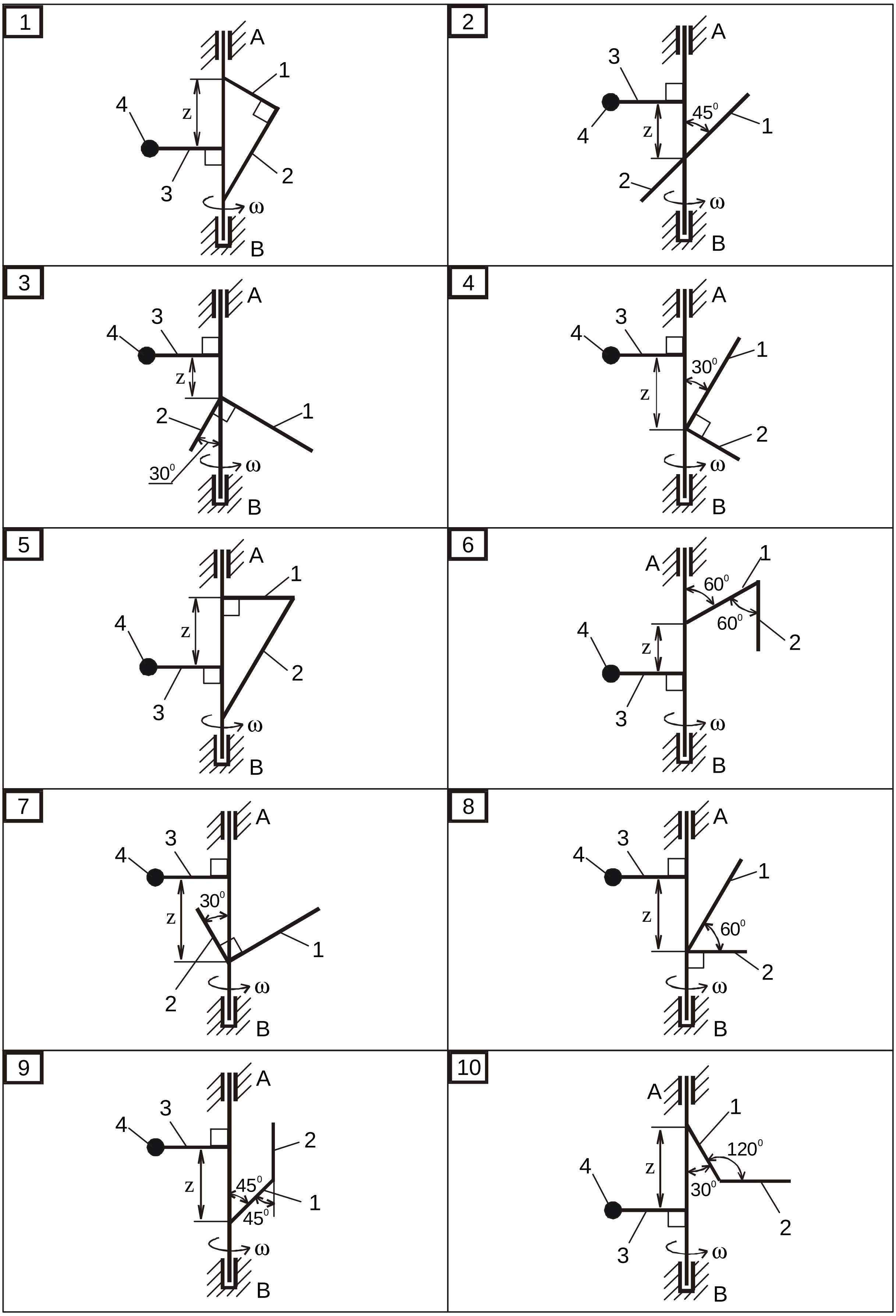

1
A
1
4
z
2
3
ω
B
2
A
3
45⁰
1
4
z
2
ω
B
3
A
3
4
z
1
2
30⁰
ω
B
4
A
3
4
30⁰
1
z
2
ω
B
5
A
1
4
z
2
3
ω
B
6
A
1
60⁰
60⁰
4
2
z
3
ω
B
7
A
3
4
30⁰
z
1
2
ω
B
8
A
3
4
1
z
60⁰
2
ω
B
9
A
3
4
2
z
45⁰
1
45⁰
ω
B
10
A
1
120⁰
4
z
30⁰
2
3
ω
B

Рис. 6.1

Таблица Д-6

№ варианта	№ рис.	g_1, кг/м	g_2, кг/м	g_3, кг/м	m_4, кг	l_1, м	l_2, м	l_3, м	*Найти*
1	1	1	5	0	10	1	6	-	z, l_3
2	2	8	12	7	-	3	4	2	z, m_4
3	3	12	4	-	10	9	3	2	z, g_3
4	4	1	6	0	10	6	1	-	z, l_3
5	5	10	11	7	-	5	3	2	z, m_4
6	6	5	6	-	10	6	2	3	z, g_3
7	7	9	3	2	0	9	3	-	z, l_3
8	8	5	2	3	-	2	5	3	z, m_4
9	9	11	8	-	10	2	5	10	z, g_3
10	10	1	7	10	10	1	7	-	z, l_3
11	1	2	6	1	-	2	5	3	z, m_4
12	2	6	10	-	10	6	3	2	z, g_3
13	3	6	8	0	10	7	1	-	z, l_3
14	4	2	12	2	-	2	2	3	z, m_4
15	5	12	1	-	10	6	3	2	z, g_3
16	6	3	4	12	0	3	2	-	z, l_3
17	7	11	5	3	-	11	5	3	z, m_4
18	8	6	1	-	10	1	6	2	z, g_3
19	9	12	7	10	10	1	6	-	z, l_3
20	10	3	9	10	-	3	9	10	z, m_4
21	1	4	8	-	0	4	3	2	z, g_3
22	2	7	11	6	10	7	2	-	z, l_3
23	3	11	3	10	-	1	2	2	z, m_4
24	4	3	11	-	0	3	3	1	z, g_3
25	5	9	10	6	10	4	2	-	z, l_3
26	6	2	3	11	-	6	5	2	z, m_4
27	7	12	6	-	10	12	6	2	z, g_3
28	8	3	4	2	0	4	3	-	z, l_3
29	9	10	9	10	-	3	4	10	z, m_4
30	10	2	6	-	10	2	8	10	z, g_3

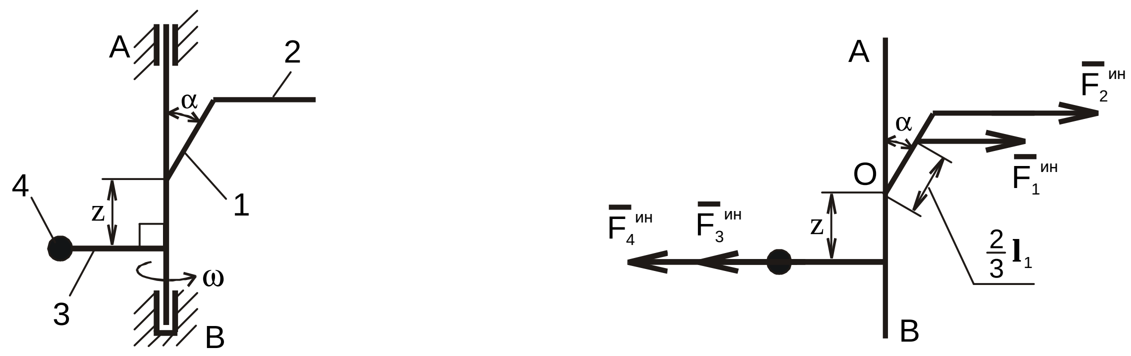
Линии действия сил инерции в данном случае перпендикулярны оси вращения и являются системой параллельных сил. Из равенства нулю главного вектора следует алгебраическое уравнение

$$F_1^{ин} + F_2^{ин} - F_3^{ин} - F_4^{ин} = 0 \quad . \tag{2}$$

Подставим (1) в (2), получим:

$$g_1 l_1^2 \sin a + g_2 l_2 \left(2 l_1 \sin a + l_2\right) - 3 g_3 l_3^2 - 2 m_4 l_3 = 0$$

или
$$3 l_3^2 + 20 l_3 - \frac{49}{2} = 0 \quad . \tag{3}$$



а. б.

Рис. 6.2

Решая квадратное уравнение (3), найдем длину стержня

$$l_3 = 1{,}06 \text{ м} \qquad (l_3 > 0) \quad .$$

Найдем главный момент сил инерции относительно точки *O*

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}^{ин}\right) = \sum_{k=1}^{4} \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^{ин}\right) \quad .$$

Вычислим модули моментов сил инерции

$$\left.\begin{aligned}
M_O\left(\vec{F}_1^{\,ин}\right) &= F_1^{ин}\,\frac{2}{3}\,l_1\cos\alpha = \frac{9\sqrt{3}}{4}\,\omega^2\\
M_O\left(\vec{F}_2^{\,ин}\right) &= F_2^{ин}\,l_1\cos\alpha = 15\sqrt{3}\,\omega^2\\
M_O\left(\vec{F}_3^{\,ин}\right) &= F_3^{ин}\,z = \frac{3}{2}(1{,}06)^2\,\omega^2 z\\
M_O\left(\vec{F}_4^{\,ин}\right) &= F_4^{ин}\,z = 10{,}6\cdot\omega^2 z
\end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Система сил инерции лежит в одной плоскости. Из равенства нулю главного момента следует алгебраическое выражение:

$$-M_O\left(\vec{F}_1^{\,ин}\right) - M_O\left(\vec{F}_2^{\,ин}\right) - M_O\left(\vec{F}_3^{\,ин}\right) - M_O\left(\vec{F}_4^{\,ин}\right) = 0 \quad . \qquad (5)$$

Подставим (4) в (5), получим:

$$\left[\gamma_1 l_1^3\,\frac{2}{3}\sin\alpha + \gamma_2 l_2^2\left(1 + 2\,\frac{l_1}{l_2}\sin\alpha\right)\right]\cos\alpha + z\left(\gamma_3 l_3^2 + 2m_4 l_3\right) = 0 \quad ,$$

$$z = -\frac{\left[\gamma_1 l_1^3\,\frac{2}{3}\sin\alpha + \gamma_2 l_2^2\left(1 + 2\,\frac{l_1}{l_2}\sin\alpha\right)\right]\cos\alpha}{\gamma_3 l_3^2 + 2m_4 l_3} = -2{,}46 \quad \text{м} .$$

Следовательно, стержень *3* длиной *1,06* (м) и груз *4* должны находиться выше точки *0* на расстоянии равном *2,46* (м).

ЗАДАНИЕ Д–7

Принцип возможных перемещений

Механизмы (рис.7.1-7.3) в заданном положении находятся в равновесии. Необходимо определить величину, указанную в предпоследней графе таблицы Д-7.1, применяя принцип возможных перемещений и пренебрегая силами трения. Все необходимые для решения данные приведены в таблице Д-7.1.

Примечание: механизмы в вариантах 3, 6, 10, 14, 16, 18, 19, 25 и 30 расположены в вертикальной плоскости, а остальные - в горизонтальной.

Пример выполнения задания Д-7

В механизме (рис.7.4) груз A может опускаться вертикально вниз и посредством нерастяжимой нити, намотанной на блок B, привести во вращательное движение блок B и находящийся с ним в зацеплении шкив C. Со шкивом C жестко скреплен кривошип O_1D, который может привести в движение шарнирно соединенный с ним шатун DE. Шатун DE, в свою очередь, может привести в движение по горизонтальной прямой ползун E, к которому прикреплена пружина. Второй конец пружины прикреплен к неподвижной опоре. Необходимо определить при равновесии механизма величину сжатия пружины h, применив принцип возможных перемещений. При этом заданными величинами являются : вес груза A P_A=100 Н; коэффициент жесткости пружины c=5 Н/см; радиусы r_B=20 см, R_B=40 см; углы a=30° и b=90°. Вес кривошипа O_1D и шатуна DE не учитывать, силами трения пренебречь.

Решение

Механическая система, состоящая из пяти тел (груз A, блок B, шкив C, жестко скрепленный с кривошипом O_1D, шатун DE и ползун E), находится в равновесии в указанном на рис. 7.4 положении.

Связи в механизме не имеют сил трения, а поэтому являются идеальными.

1. Применим к данной механической системе принцип возможных перемещений:

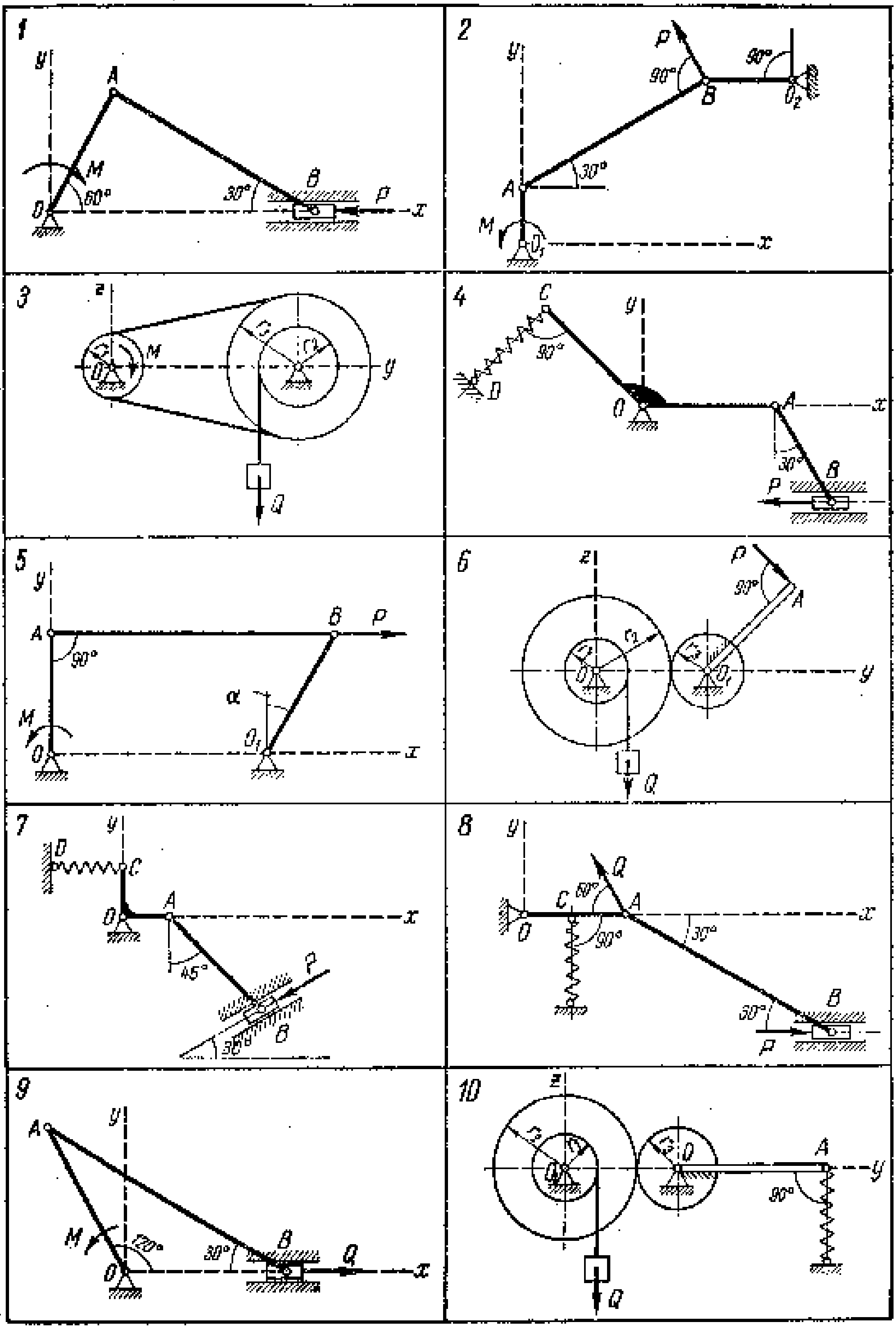


Рис. 7.1

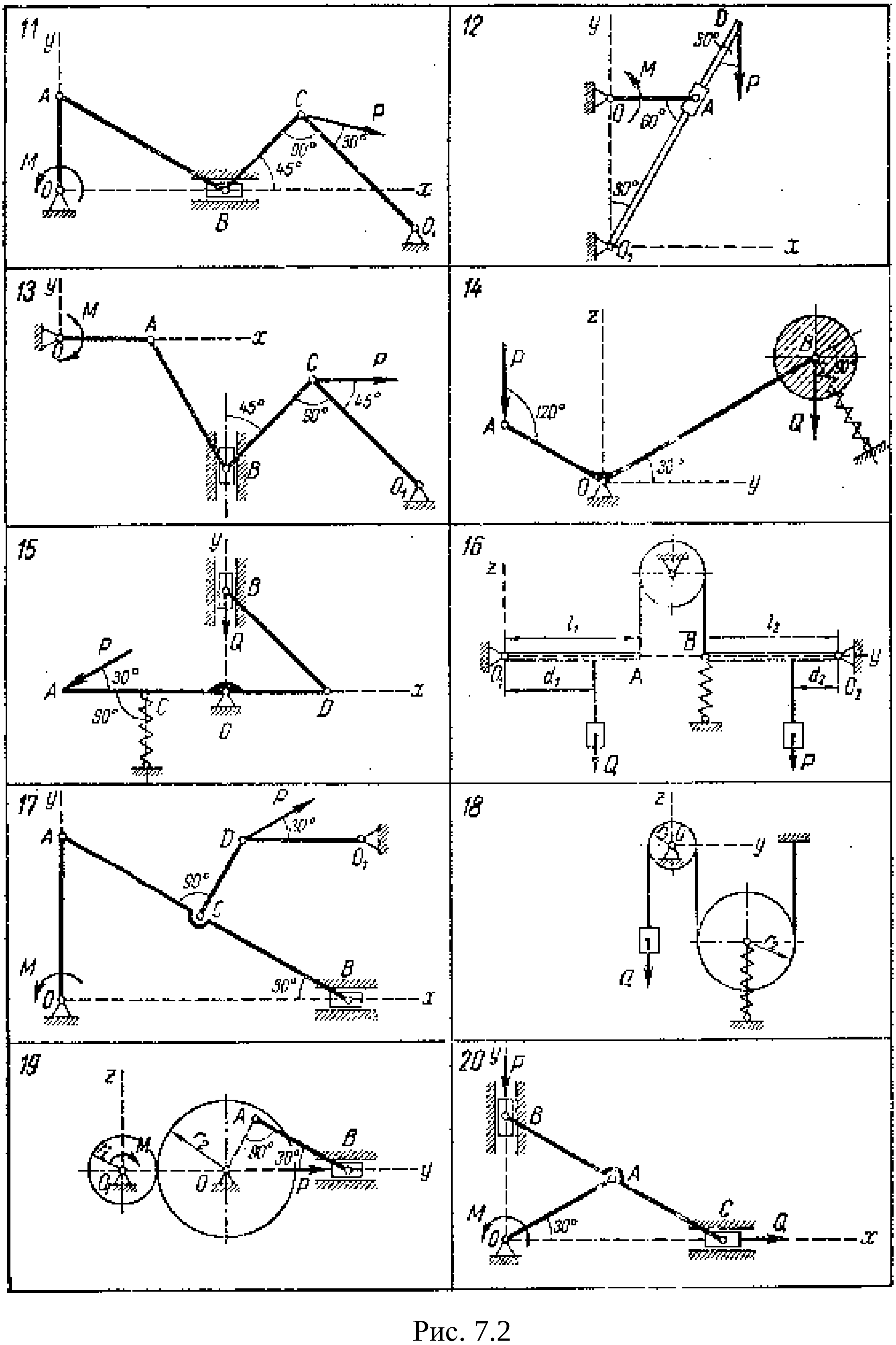


Рис. 7.2

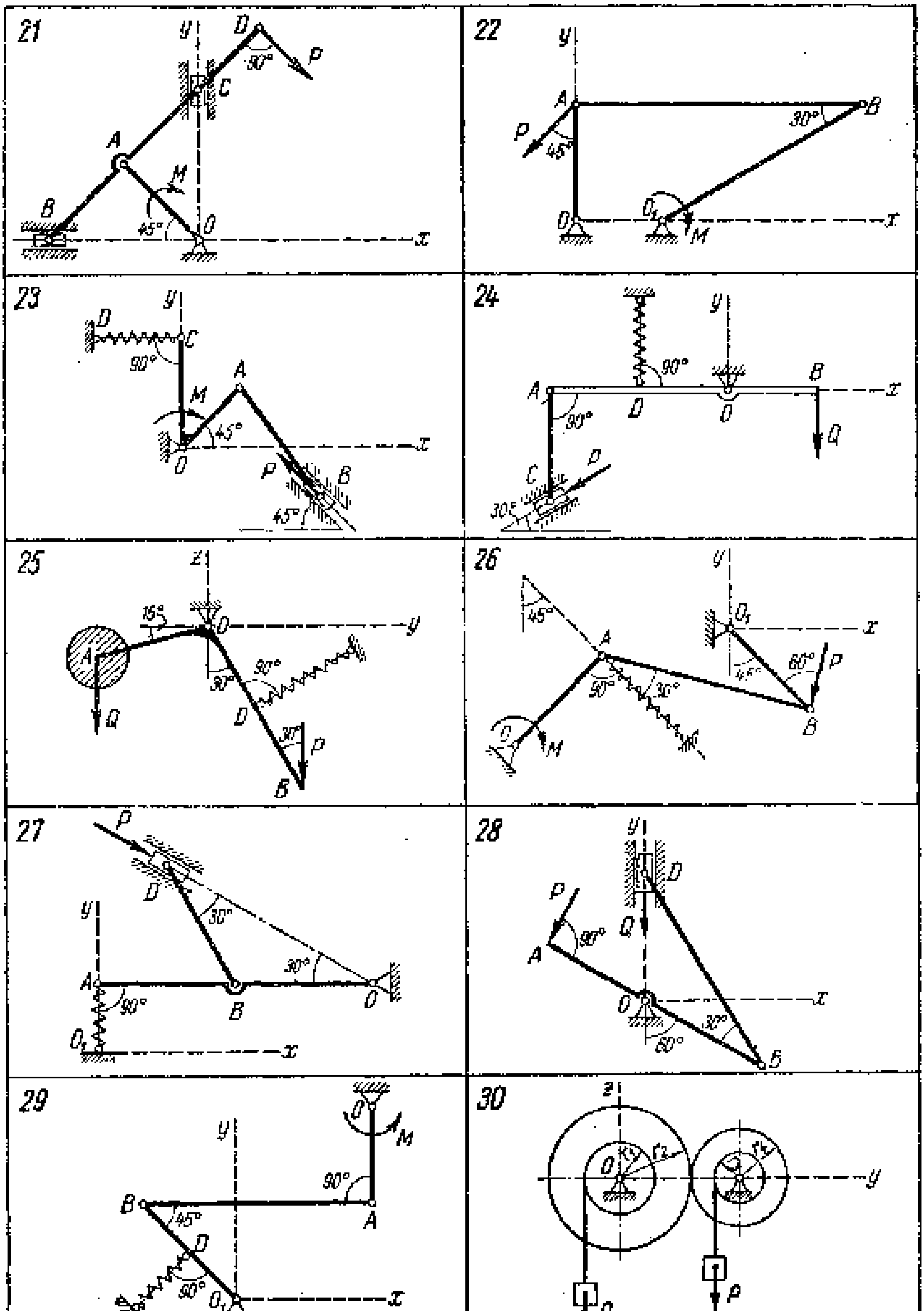


Рис. 7.3

Таблица Д-7.1

№ варианта	Линейные размеры, см	Сила Q , Н	Сила P , Н	Момент M , Н·м	Жесткость пружины с , Н/см	Деформация пружины h, см	Определить	Примечания
1	OA=10	-	-	20	-	-	P	-
2	O_1A=20	-	100	-	-	-	M	-
3	r_1=20; r_2=30; r_3=40	-	-	100	-	-	Q	-
4	OC:OA=4:5	-	200	-	-	4	c	-
5	OA=100	-	-	10	-	-	P	-
6	r_1=15; r_2=50; r_3=20; O_1A=80	200	-	-	-	-	P	O_1A - невесомый
7	OC=OA	-	-	-	10	3	P	Пружина сжата
8	OC=AC	-	200	-	10	2	Q	
9	OA=20	200	-	-	-	-	M	OA - невесомый
10	r_1=15; r_2=40; r_3=20; OA=100	$2\cdot10^3$	-	-	-	4	c	
11	OA=20	-	-	300	-	-	P	-
12	O_1D=60; AO=20	-	-	100	-	-	P	-
13	OA=40	-	-	200	-	-	P	-
14	OB=2 OA	20	-	-	25	3	P	OA,OB-невесомые, пружина растянута
15	AC=OC=OD	$3\cdot10^3$	-	-	250	3	P	Пружина сжата
16	d_1=80; d_2=25; l_1=100; l_2=75	$5\cdot10^3$	-	-	100	4	P	O_1A и O_2B - невесомые, пружина растянута

Продолжение таблицы Д-7.1

№ варианта	Линейные размеры, см	Сила Q , Н	Сила Р , Н	Момент М , Н·м	Жесткость пружины с , Н/см	Деформация пружины h, см	Определить	Примечания
17	OA=20	-	-	200	-	-	P	-
18	-	200	200	-	100	-	h	Р-вес блока r_2
19	r_1=20; r_2=30; OA=25	-	-	100	-	-	P	AB - невесомый
20	OA=AB=AC=50	50	100	-	-	-	M	-
21	OA=AB=AC= =DC=25	-	200	-	-	-	M	-
22	OA=40	-	-	400	-	-	P	-
23	OC=2 OA=100	-	200	50	50	-	h	-
24	AD=OD=OB	-	250	-	150	2,5	Q	Пружина сжата
25	OD=DB=0,8 AO	400	-	-	120	3	P	AO и BO - невесомые, пружина растянута
26	OA=25	-	500	120	-	2	c	Пружина растянута
27	OB=AB	-	-	-	180	2	P	-
28	OB=1,25 OA	-	450	-	-	-	Q	-
29	BD=O_1D; AO=30	-	-	120	100	-	h	-
30	r_1=15; r_2=36; r_3=10; r_4=20	-	600	-	-	-	Q	-

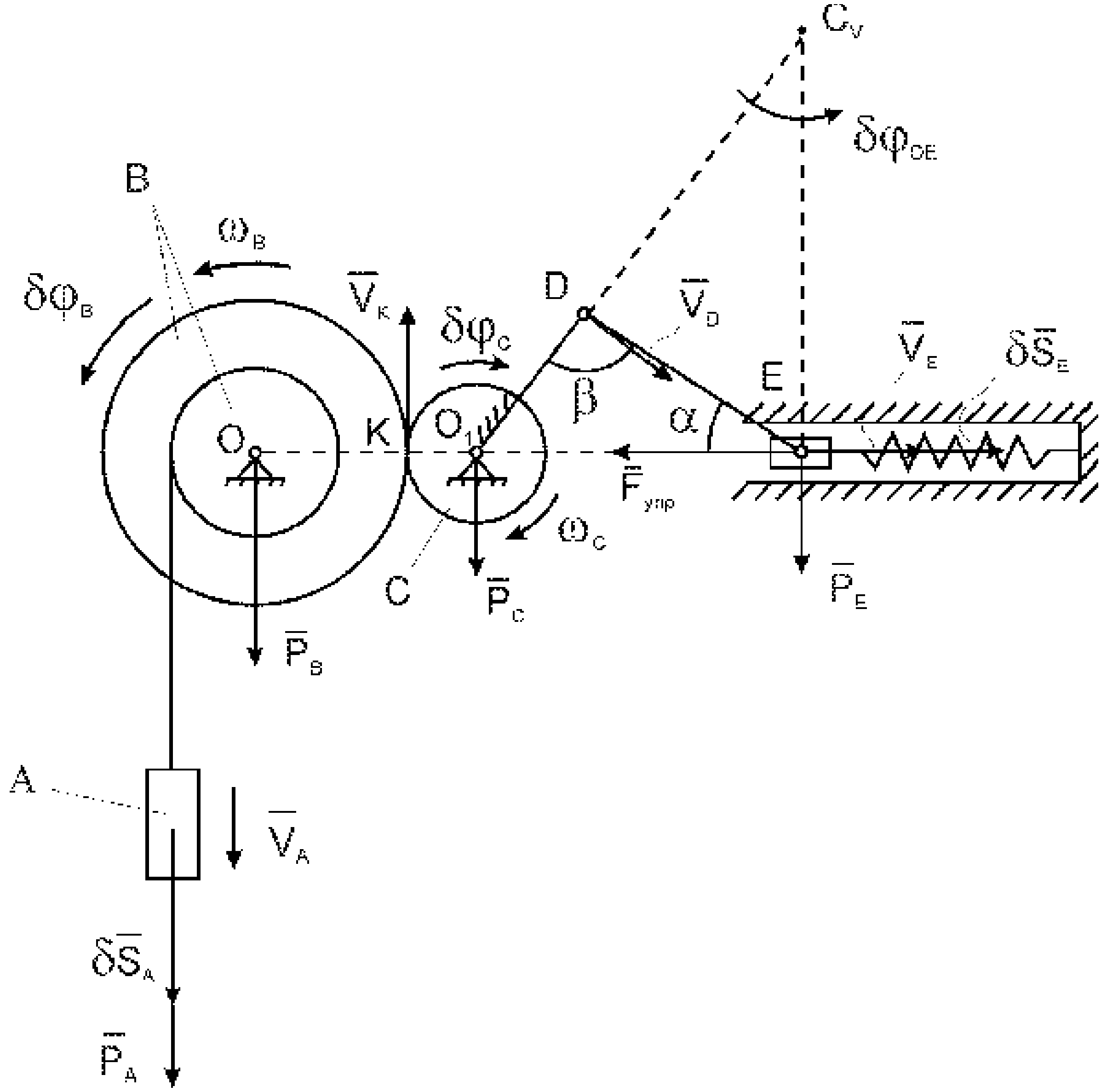


Рис. 7.4

$$\sum_{k=1}^{n} dA\left(\vec{F}_k^{\,a}\right) = 0 \quad , \tag{1}$$

где $\sum_{k=1}^{n} dA\left(\vec{F}_k^{\,a}\right)$ - сумма элементарных работ активных сил на любом возможном перемещении системы.

2. Изобразим на рисунке действующие на систему активные силы: силы тяжести тел $\vec{P}_A$, $\vec{P}_B$, $\vec{P}_C$, $\vec{P}_E$ (вес тел O_1D и DE по условию задачи не учитываем) и силу упругости пружины $\vec{F}_{уп}$, учитывая при этом, что пружина в указанном положении механизма сжата.

3.Так как рассматриваемая механическая система имеет одну степень свободы, ей можно сообщить два независимых возможных перемещения – движения груза *A* вверх или вниз. Дадим грузу *A* возможное перемещение $\delta\vec{S}_A$, направленное вниз. Этому возможному перемещению будут соответствовать: поворот блока *B* вокруг неподвижного цента *O* на угол $\delta\varphi_B$; поворот тела *C* вместе со стержнем O_1D вокруг неподвижного центра O_1 на угол $\delta\varphi_C$, поворот шатуна *DE* вокруг мгновенного центра скоростей C_v на угол $\delta\varphi_{DE}$, а также перемещение $\delta\vec{S}_E$ ползуна *E*.

4. Найдем сумму элементарных работ активных сил на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения. Элементарная работа сил тяжести $\vec{P}_B$ и $\vec{P}_C$ равна нулю, так как точки их приложения неподвижны. Элементарная работа силы тяжести $\vec{P}_E$ равна нулю, так как точка ее приложения получила возможное перемещение $\delta\vec{S}_E$ по горизонтали. Следовательно, элементарную работу на возможном перемещении производят лишь две силы: сила тяжести $\vec{P}_A$ груза *A* и сила упругости пружины $\vec{F}_{уп}$:

$$\left.\begin{aligned} \delta A\left(\vec{P}_A\right) &= P_A\delta S_A \\ \delta A\left(\vec{F}_{уп}\right) &= -F_{уп}\delta S_E \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

При этом величина силы упругости пружины будет равна

$$\left|\vec{F}_{уп}\right| = ch \quad , \qquad (3)$$

где c - коэффициент жесткости пружины,

h - величина сжатия пружины.

Таким образом, на основании (2) с учетом (3) найдем сумму элементарных работ активных сил на возможном перемещении системы:

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A\left(\vec{F}_k^{\,a}\right) = P_A\delta S_A - ch\cdot\delta S_E \qquad (4)$$

5. Подставляя (4) в уравнение (1) , получим

$$P_A\delta S_A - ch\cdot\delta S_E = 0 \quad . \qquad (5)$$

Из уравнения (5) находим:

$$h = \frac{P_A}{c}\cdot\frac{\delta S_A}{\delta S_E} \quad . \qquad (6)$$

Как следует из равенства (6) для окончательного решения задачи необходимо установить зависимость между возможными перемещениями δS_A и δS_E. Это можно осуществить различными способами. Приведем один из них. На рассматриваемую механическую систему наложены стационарные связи. При этом элементарные действительные перемещения принадлежат к числу возможных перемещений и , следовательно, зависимости между возможными перемещениями должны быть такими же, как и между соответствующими скоростями, то есть:

$$\frac{dS_A}{dS_E} = \frac{V_A}{V_E} \quad , \tag{7}$$

где - $\frac{V_A}{V_E}$ отношение между скоростями груза A и ползуна E, которое имело бы место в данном положении механизма при его движении.

Подставляя (7) в равенство (6), получим:

$$h = \frac{P_A}{c} \cdot \frac{V_A}{V_E} \quad . \tag{8}$$

Как следует из равенства (8), для окончательного решения задачи необходимо найти отношение скоростей $\frac{V_A}{V_E}$, то есть необходимо решить задачу кинематики для рассматриваемого механизма.

6. Результаты решения задачи кинематики (зависимости между скоростями звеньев механизма и отдельных его точек) для наглядности представим в виде таблицы Д-7.2.

Таблица Д-7.2

Наименование звена или точки	Скорость
груз A	V_A
блок B	$w_B = \frac{V_A}{r_B}$
точка K	$V_K = w_B R_B = \frac{V_A}{r_B} \cdot R_B$
шкив C и кривошип O_1D	$w_C = w_{O_1D} = \frac{V_K}{r_C} = \frac{V_A R_B}{r_B r_C}$
точка D	$V_D = w_{O_1D} \cdot O_1D = \frac{V_A R_B l}{r_B r_C}$
шатун DE	$\frac{V_D}{V_E} = \frac{DC_V}{EC_V} = \cos 30^{\circ}$ $\frac{V_A R_B l}{V_E r_B r_C} = \cos 30^{\circ}$

Таким образом, как следует из последней строки данной таблицы, будет справедливо следующее соотношение

$$\frac{V_A}{V_E} = \frac{r_B r_C \cos 30^0}{R_B l} \quad . \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) получим:

$$h = \frac{P_A}{c} \cdot \frac{r_B r_C \cos 30^0}{R_B l} = \frac{100 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0{,}867}{5 \cdot 40 \cdot 50} = 1{,}74 \text{ см} \quad , \tag{10}$$

то есть найдем искомую величину сжатия пружины.

ЗАДАНИЕ Д-8

Общее уравнение динамики

Механическая система, состоящая из груза 1 весом P_1 , блоков 2 и 3 весом P_2 и P_3 соответственно и сплошного катка 4 весом P_4 , движется под действием сил тяжести. Радиус инерции блоков 2 и 3 - r_2 и r_3 . Если в таблице радиус инерции блока не указан, блок следует считать полым цилиндром. Каток 4 движется по рельсу, наклоненному к горизонту под углом a без скольжения. Коэффициент трения качения k . Трением в осях пренебречь, проскальзывание невесомых нерастяжимых нитей отсутствует. С помощью общего уравнения динамики определить ускорение оси катка. Схемы механизмов приведены на рис. 8.1, 8.2, данные – в таблице Д-8.1.

Пример выполнения задания Д-8

Механическая система, представленная на рис. 8.3, движется под действием сил тяжести.

Дано: P_1=3 кН, P_2=2 кН, P_3=2 кН, P_4=2 кН, a=30°, R_2=0,4 м, r_2=0,2 м, r_2=0,3 м, r_4=0,5 м, k=0,3 см.

Определить ускорение оси катка.

Решение

1. Разобравшись в работе системы (рис.8.3) и выбрав направление вектора ускорения $\bar{a}_C$, изобразим на рисунке активные силы, реакции неидеальной связи в точке контакта катка с рельсом, линейные и угловые ускорения тел, главные векторы и главные моменты сил инерции.

2. Так как система имеет одну степень свободы, то задаваясь возможным перемещением dS_C , скоростью V_C и ускорением a_C точки C, выразим все остальные перемещения, необходимые для решения задачи, через dS_C , V_C и a_C . Решение задачи кинематики для наглядности представим в виде таблицы Д-8.2.

Вычислим модули всех сил инерции и модули моментов сил инерции.

$$F_1^{ИН} = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1}{g} \cdot \frac{2a_C R_2}{r_2} \quad , \qquad F_2^{ИН} = F_3^{ИН} = 0 \quad , \qquad F_4^{ИН} = \frac{P_4}{g} a_C \quad .$$

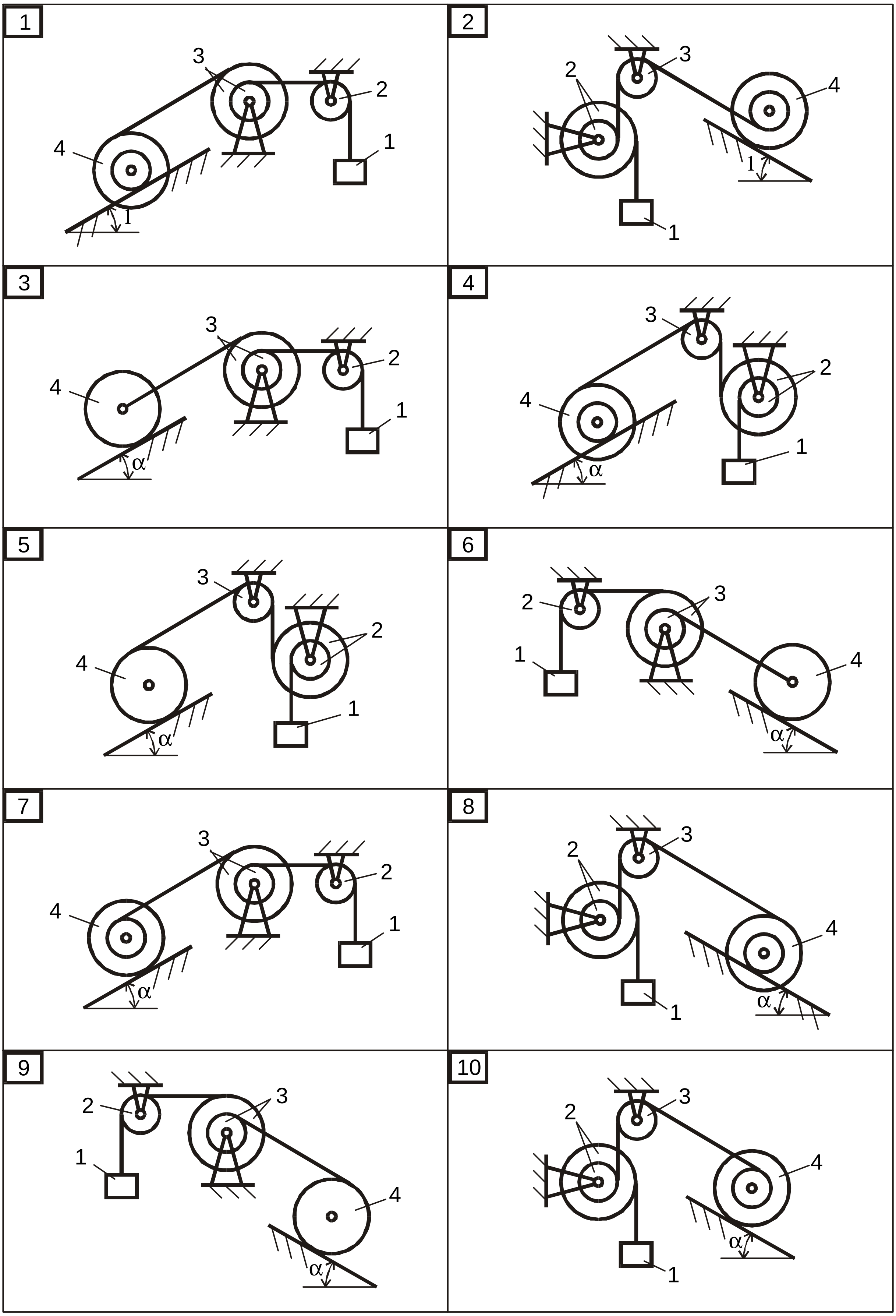


Рис. 8.1

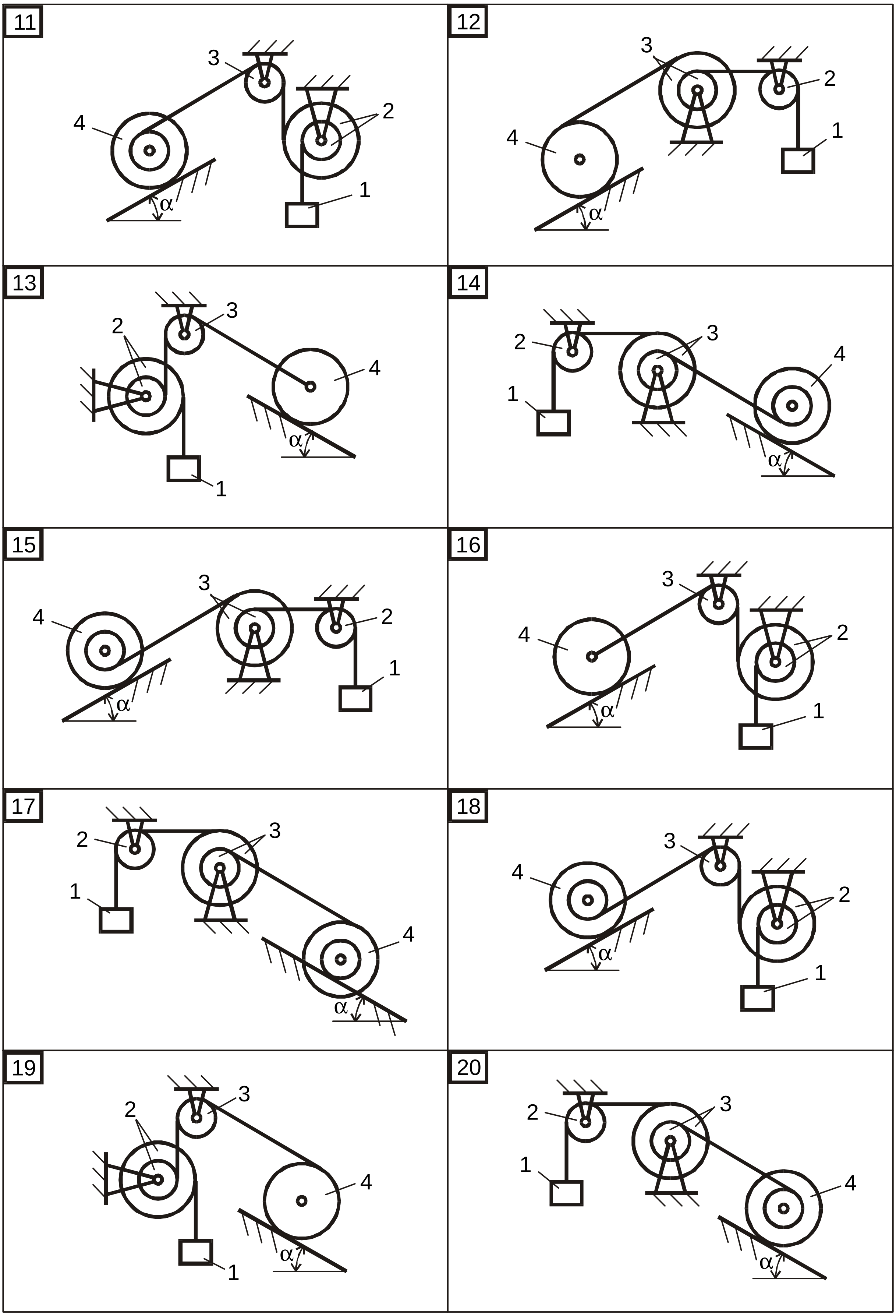


Рис. 8.2

Таблица Д-8.

№ варианта	№ рисунка	P_1, кН	P_2, кН	P_3, кН	P_4, кН	a, °	R_2, м	r_2, м	r_2, м	R_3, м	r_3, м	r_3, м	R_4, м	r_4, м	r_4, м	k, см
1	1	1	0,5	1	1	10	-	-	-	0,5	0,3	0,4	0,6	0,5	0,3	0,3
2	2	3	2	2	2	20	0,5	0,3	0,4	-	-	-	0,8	0,7	0,5	0,3
3	3	5	5	3	4	20	-	-	-	0,6	0,5	0,3	-	-	0,7	0,3
4	4	2	1,5	1	2	20	0,4	0,2	0,3	-	-	-	1	0,9	0,8	0,4
5	5	4	3	2	3,5	15	0,5	0,3	0,4	-	-	-	-	-	0,6	0,4
6	6	1	2	1	0,5	15	-	-	-	0,4	0,2	0,3	-	-	0,2	0,5
7	7	3	3	1	2	15	-	-	-	0,3	0,1	0,2	0,9	0,7	0,6	0,5
8	8	1	1,5	2	1	10	0,9	0,6	0,8	-	-	-	0,5	0,4	0,2	0,3
9	9	2	2,5	3	0,5	20	-	-	-	0,4	0,1	0,2	-	-	0,5	0,3
10	10	4	3,5	5	2,5	20	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,8	0,7	0,6	0,3
11	11	1	2	1	0,5	10	0,6	0,4	0,5	-	-	-	0,5	0,2	0,1	0,4
12	12	2	1	0,5	1,5	15	-	-	-	0,8	0,5	0,7	-	-	0,2	0,4
13	13	3	2	1	2,5	20	0,9	0,6	0,8	-	-	-	-	-	0,3	0,4
14	14	4	1	2	3	15	-	-	-	0,5	0,3	0,4	0,7	0,5	0,4	0,4
15	15	5	4	2	4,5	10	-	-	-	0,9	0,6	0,8	0,8	0,6	0,5	0,4
16	16	1	1,5	2	1	20	0,4	0,2	0,3	-	-	-	-	-	0,1	0,5
17	17	2	2	3	1,5	10	-	-	-	0,4	0,1	0,2	0,4	0,3	0,2	0,5
18	18	3	2,5	3	2,5	10	0,8	0,5	0,7	-	-	-	0,8	0,6	0,5	0,5
19	19	4	3,5	4	3,5	15	0,9	0,5	0,6	-	-	-	-	-	0,7	0,5
20	20	5	4,5	3	4,5	20	-	-	-	0,4	0,1	0,2	0,4	0,3	0,2	0,5
21	1	2	1,5	1,6	1,5	15	-	-	-	0,3	0,1	0,2	0,7	0,6	0,4	0,3
22	2	4	3	2,5	3	25	0,6	0,4	0,5	-	-	-	0,9	0,8	0,6	0,3
23	3	1	1	0,5	1	15	-	-	-	0,4	0,1	0,2	-	-	1	0,4
24	4	3	2	1,5	2,5	20	0,3	0,1	0,2	-	-	-	1,5	1,3	1,2	0,4
25	5	5	6	2,4	4	10	0,8	0,5	0,7	-	-	-	-	-	0,5	0,4
26	6	2	3	0,5	1	20	-	-	-	0,6	0,4	0,5	-	-	0,4	0,5
27	7	4	2	2	4	10	-	-	-	0,5	0,3	0,4	1	0,9	0,8	0,5
28	8	5	4	2,5	5	10	0,8	0,5	0,7	-	-	-	1,4	1,1	1	0,5
29	9	3	3	4	2	15	-	-	-	0,5	0,2	0,4	-	-	0,4	0,3
30	10	5	4	6	3	20	0,3	0,1	0,2	-	-	-	1	0,9	0,8	0,3

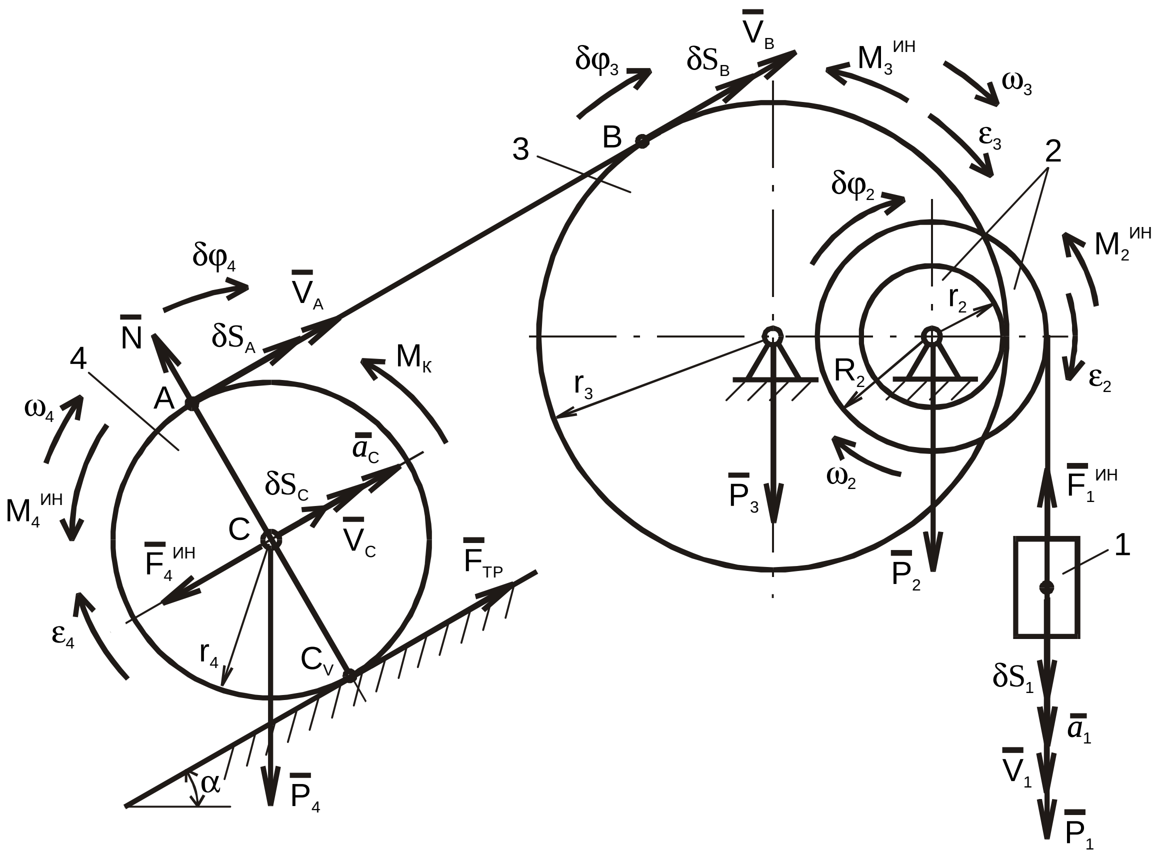


Рис. 8.3

Таблица Д-8.2

Ускорение	***Скорость***	Возможное перемещение
$e_4 = \dfrac{a_C}{r_4}$	$w_4 = \dfrac{V_C}{r_4}$	$dj_4 = \dfrac{dS_C}{r_4}$
$e_3 = \dfrac{2a_C}{r_3}$	$w_3 = \dfrac{V_B}{r_3} = \dfrac{2V_C}{r_3}$	$dj_3 = \dfrac{2dS_C}{r_3}$
$e_2 = \dfrac{2a_C}{r_2}$	$w_2 = \dfrac{r_3}{r_2} w_3 = \dfrac{2V_C}{r_2}$	$dj_2 = \dfrac{2dS_C}{r_2}$
$a_1 = \dfrac{2a_C R_2}{r_2}$	$V_1 = R_2 w_2 = \dfrac{2V_C R_2}{r_2}$	$dS_1 = \dfrac{2dS_C R_2}{r_2}$

$$M_1^{ИН} = 0 \quad , \qquad M_2^{ИН} = \frac{P_2}{g} r_2^2 e_2 = \frac{P_2}{g} r_2^2 \frac{2a_C}{r_2} \quad ,$$

$$M_3^{ИН} = \frac{P_3}{g} r_3^2 e_3 = \frac{P_3}{g} r_3^2 \frac{2a_C}{r_3} \quad , \qquad M_4^{ИН} = \frac{P_4 r_4^2}{2g} e_4 = \frac{P_3 r_4^2}{2g} \cdot \frac{a_C}{r_4} \; .$$

Момент трения качения $M_K = k \cdot N = k \cdot P_4 \cos a$.

Запишем общее уравнение динамики в общем виде:

$$P_1 dS_1 - F_1^{ИН} dS_1 - M_2^{ИН} dj_2 - M_3^{ИН} dj_3 - P_4 \sin a \cdot dS_C -$$

$$- F_4^{ИН} dS_C - M_4^{ИН} dj_4 - M_K dj_4 = 0 \quad .$$

Подставим значения сил и моментов инерции выраженные через a_C и линейные и угловые перемещения выраженные через dS_C . Вынесем dS_C из всех слагаемых за скобку, получим:

$$dS_C \left[P_1 \frac{2R_2}{r_2} - \frac{P_1}{g} \cdot \frac{2a_C R_2}{r_2} \cdot \frac{2R_2}{r_2} - \frac{P_2}{g} r_2^2 \frac{2a_C}{r_2} \cdot \frac{2}{r_2} - \frac{P_3}{g} r_3 2a_C \frac{2}{r_3} - \right.$$

$$\left. - P_4 \sin a - \frac{P_4}{g} a_C - \frac{P_4}{2g} \cdot \frac{r_4 a_C}{r_4} - P_4 \cos a \cdot \frac{k}{r_4} \right] = 0$$

.

Так как $dS_C{}^{1}0$, то выражение в скобках должно быть равно нулю. Отсюда получим

$$a_C = \frac{2P_1 \frac{R_2}{r_2} - P_4 \left(\sin a - \frac{k}{r_4} \cos a \right) g}{4 \left(P_1 \left(\frac{R_2}{r_2} \right)^2 + P_2 \left(\frac{r_2}{r_2} \right)^2 + P_3 + \frac{3}{2} P_4 \right)} \quad .$$

Далее подставим числовые данные и вычислим значение a_C

$$a_C = \frac{2 \cdot 3 \frac{0,4}{0,2} - 2 \left(\sin 30^{\circ} - \frac{0,03}{0,5} \cos 30^{\circ} \right) 10}{4 \left(3 \left(\frac{0,4}{0,2} \right)^2 + 2 \left(\frac{0,3}{0,2} \right)^2 + 2 + \frac{3}{2} \cdot 2 \right)} = 0,015 \quad \text{м/с}^2 \; .$$

ЗАДАНИЕ Д-9

Уравнения Лагранжа II рода

Для заданной механической системы на основе уравнений Лагранжа II рода составить дифференциальные уравнения движения. Необходимые данные и рекомендуемые обобщенные координаты приведены в таблице Д-9.

При решении задачи массами нитей пренебречь. Считать, что качение происходит без проскальзывания. Блоки и катки, для которых в таблице радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами. Силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Заданные силы *P* и моменты пар *M* считать постоянными величинами.

Пример выполнения задания

Механическая система (рис. 9.2а), состоящая из грузов 1, 2, 3 массами m_1, m_2, m_3 соответственно, подвижного блока 4 массой m_4 и неподвижного блока 5 массой m_5 движется под действием сил тяжести. Коэффициент трения скольжения между грузом 2 и плоскостью равен f. Силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Блоки 4 и 5 считать сплошными однородными цилиндрами. Найти дифференциальные уравнения движения механической системы.

Решение

Для выполнения задания используем уравнения Лагранжа II рода. Поскольку механическая система имеет две степени свободы, должна получиться система из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases} . \qquad (1)$$

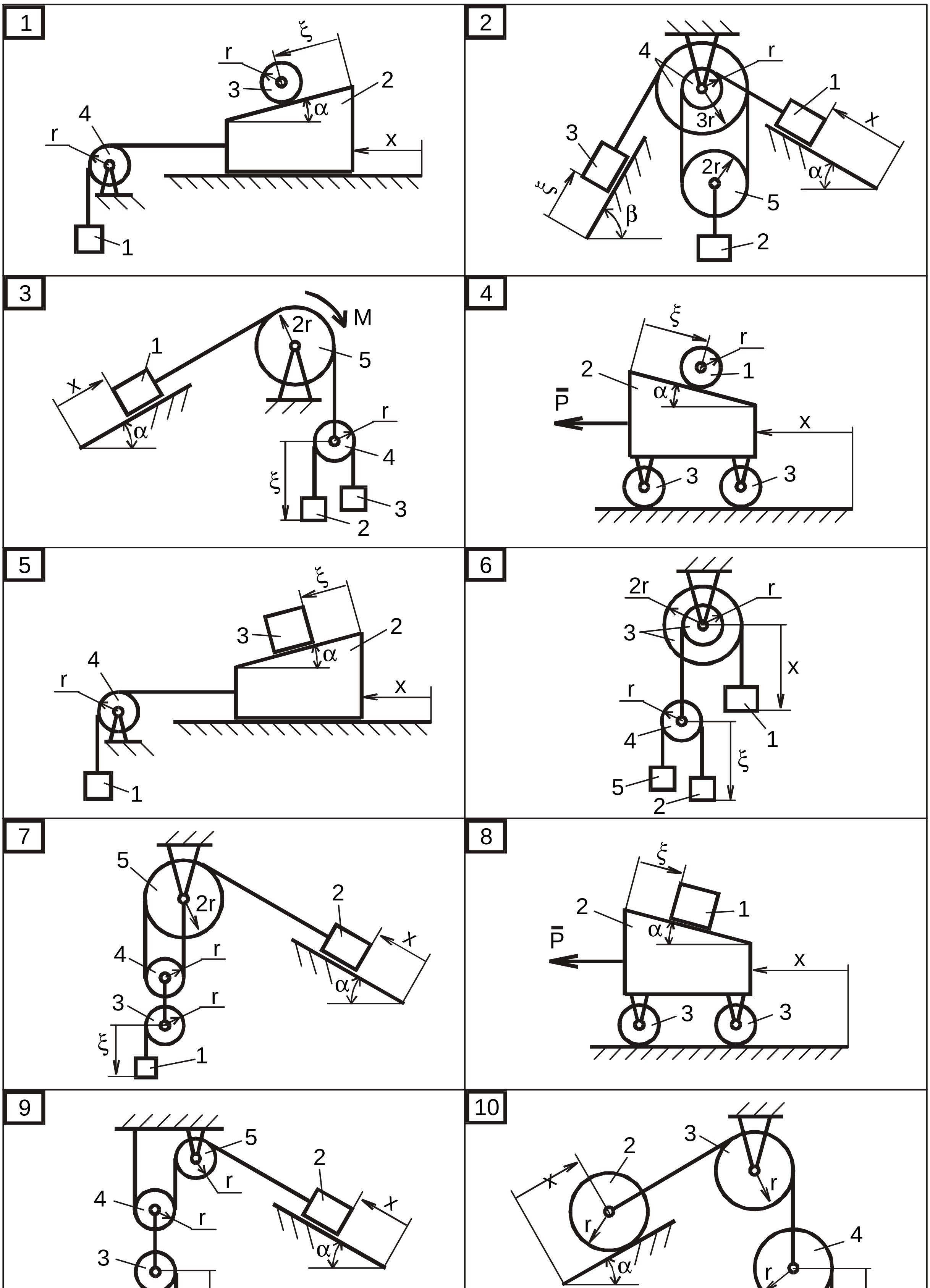
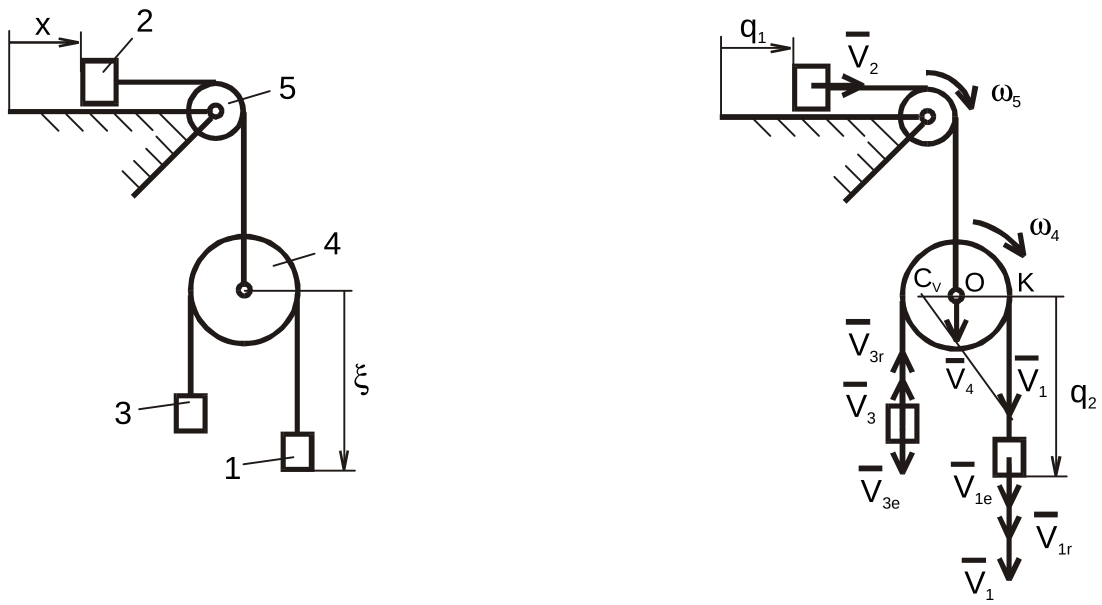

1
r
ξ
3
2
α
4
r
x
1
2
4
r
1
3
3r
x
ξ
2r
α
β
5
2
3
M
2r
5
1
x
α
r
4
ξ
3
2
4
ξ
r
2
1
α
P̄
x
3
3
5
ξ
3
2
α
4
r
x
1
6
2r
r
3
x
r
4
ξ
1
5
2
7
5
2r
2
4
r
x
3
r
α
ξ
1
8
ξ
1
2
α
P̄
x
3
3
9
5
2
r
4
r
x
α
3
ξ
1
10
3
2
x
r
r
4
α
r
ξ
1

Рис. 9.1

Таблица Д-9

№ варианта	№ рисунка	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	P	M	f	k	q_1	q_2	r	a	Дополнительные указания
1	1	m_1	m_2	m_3	0	-	-	-	f	0	x	x	-	a	f - для тела 2
2	2	m_1	m_2	m_3	m_4	0	-	-	f	-	x	x	$3r$	-	f - для тела 3, r - для тела 4
3	3	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	M	0	-	x	x	-	a	
4	4	m_1	m_2	m_3	-	-	P	-	-	k	x	x	-	a	k - для тела 3
5	5	m_1	m_2	m_3	m_4	-	-	-	f	-	x	x	-	0	f - для тела 2
6	6	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	-	-	x	x	$2r$	-	r - радиус инерции тела 3
7	7	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	0	-	x	x	-	a	
8	8	m_1	m_2	m_3	-	-	P	-	0	k	x	x	-	a	k - для тела 3
9	9	m_1	m_2	m_3	m_4	0	-	-	f	-	x	x	-	a	f - для тела 2
10	10	m_1	m_2	0	m_4	-	-	-	-	k	x	x	-	a	k - для тела 2
11	1	m_1	m_2	m_3	0	-	-	-	0	k	x	x	-	a	k - для тела 3
12	2	m_1	m_2	m_3	m_4	0	-	-	f	-	x	x	$2r$	-	f - для тела 1, r - для тела 4
13	3	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	M	f	-	x	x	-	0	f - для тела 1
14	4	m_1	m_2	m_3	-	-	P	-	-	k	x	x	-	a	k - для тела 1
15	5	m_1	m_2	m_3	m_4	-	-	-	0	-	x	x	-	a	
16	6	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	-	-	x	x	r	-	r - радиус инерции тела 3
17	7	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	f	-	x	x	-	0	f - для тела 2
18	8	m_1	m_2	m_3	-	-	P	-	f	0	x	x	-	a	f - для тела 1
19	9	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	0	-	x	x	-	a	
20	10	m_1	m_2	m_3	m_4	-	-	-	-	0	x	x	-	a	
21	1	m_1	m_2	m_3	m_4	-	-	-	f	k	x	x	-	0	f - для тела 2, k - для тела 3
22	2	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	-	-	x	x	r	-	r - радиус инерции тела 4
23	3	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	M	f	-	x	x	-	a	f - для тела 1
24	4	m_1	m_2	m_3	-	-	P	-	-	k	x	x	-	0	k - для тела 1
25	5	m_1	m_2	m_3	m_4	-	-	-	f	-	x	x	-	a	f - для тела 3
26	6	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	-	-	x	x	$3r$	-	r - радиус инерции тела 3
27	7	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	f	-	x	x	-	a	f - для тела 2
28	8	m_1	m_2	m_3	-	-	P	-	f	k	x	x	-	0	f - для тела 1, k - для тела 3
29	9	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	-	-	f	-	x	x	-	0	f - для тела 2
30	10	m_1	m_2	m_3	m_4	-	-	-	-	k	x	x	-	0	k - для тела 2



а. б.

Рис. 9.2

Выберем координату x в качестве обобщенной координаты q_1, а координату ξ в качестве обобщенной координаты q_2.

1. Найдем кинетическую энергию механической системы. Грузы 1, 2 и 3 движутся поступательно, блок 5 вращается вокруг неподвижной оси, а подвижный блок 4 находится в плоскопараллельном движении. Изобразим на рисунке вектора скоростей тел системы (рис. 9.2б) и запишем выражение кинетической энергии

$$T = \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{I_5 w_5^2}{2} + \frac{m_4 V_4^2}{2} + \frac{I_4 w_4^2}{2} + \frac{m_3 V_3^2}{2} + \frac{m_1 V_1^2}{2} \quad .$$

Выразим скорости тел через производные обобщенных координат

$$V_2 = \dot{q}_1 \quad , \quad w_5 = \frac{V_2}{r_5} = \frac{\dot{q}_1}{r_5} \quad , \quad V_4 = V_2 = \dot{q}_1 \quad .$$

Груз 1 находится в сложном движении, поэтому

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{1r} + \vec{V}_{1e} \quad .$$

Переносным движением груза 1 является поступательное движение со скоростью V_4, скорость относительного движения равна $\dot{q}_2$. С учетом направления векторов, получаем

$$V_1 = V_{1r} + V_{1e} = \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \quad .$$

Аналогично получаем выражение для скорости груза 3 (он также находится в сложном движении, однако вектора относительной и переносной скоростей направлены в разные стороны)

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_{3r} + \vec{V}_{3e} \quad ,$$

$$V_3 = V_{3r} - V_{3e} = \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \quad .$$

Найдем угловую скорость w_4 подвижного блока 4. Поскольку переносное движение тел 1, 2 и 4 одинаковое (поступательное со скоростью V_4), угловая скорость w_4 не зависит от переносного движения, а зависит только от относительного, т. е.

$$w_4 = \frac{V_{1r}}{r_4} = \frac{\dot{q}_2}{r_4} \quad .$$

Если это не очевидно, можно, действуя формально, найти мгновенный центр скоростей блока 4 и вычислить его угловую скорость следующим образом

$$w_4 = \frac{V_1}{KC_V} = \frac{V_4}{OC_V} = \frac{V_1 - V_4}{KC_V - OC_V} = \frac{V_1 - V_4}{r_4} = \frac{\dot{q}_2 + \dot{q}_1 - \dot{q}_1}{r_4} = \frac{\dot{q}_2}{r_4} \quad .$$

Подставим выражения скоростей, а также выражения моментов инерции блоков 4 и 5

$$I_4 = \frac{m_4 r_4^2}{2} \quad , \qquad\qquad I_5 = \frac{m_5 r_5^2}{2}$$

в выражение кинетической энергии системы

$$T=\frac{m_2\dot{q}_1^2}{2}+\frac{m_5 r_5^2\dot{q}_1^2}{4r_5^2}+\frac{m_4\dot{q}_1^2}{2}+\frac{m_4 r_4^2\dot{q}_2^2}{4r_4^2}+\frac{m_3\left(\dot{q}_2-\dot{q}_1\right)^2}{2}+\frac{m_1\left(\dot{q}_2+\dot{q}_1\right)^2}{2}\quad .$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые относительно $\dot{q}_1^2$, $\dot{q}_2^2$ и $\dot{q}_1\dot{q}_2$

$$T=\left(m_1+m_2+m_3+m_4+\frac{m_5}{2}\right)\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\left(m_1+m_3+\frac{m_4}{2}\right)\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+\left(m_1-m_3\right)\dot{q}_1\dot{q}_2=$$

$$=A\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+B\frac{1}{2}\dot{q}_2^2+C\dot{q}_1\dot{q}_2\quad ,\qquad (2)$$

где $A=m_1+m_2+m_3+m_4+\dfrac{m_5}{2}$, $B=m_1+m_3+\dfrac{m_4}{2}$,

$$C=m_1-m_3\quad .\ (3)$$

2. Вычислим производные от кинетической энергии (2)

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}=A\frac{1}{2}2\dot{q}_1+C\dot{q}_2=A\dot{q}_1+C\dot{q}_2\quad ,$$

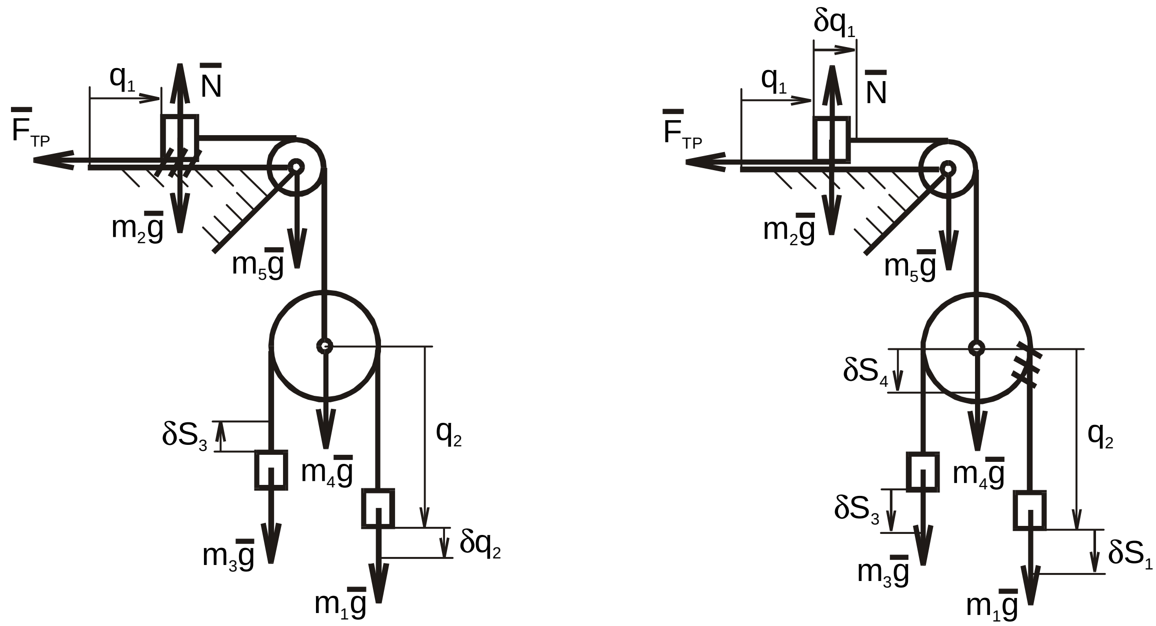
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}=B\frac{1}{2}2\dot{q}_2+C\dot{q}_1=B\dot{q}_2+C\dot{q}_1\quad ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)=A\ddot{q}_1+C\ddot{q}_2\quad ,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}\right)=B\ddot{q}_2+C\ddot{q}_1\quad ,\qquad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=0\quad ,\qquad \frac{\partial T}{\partial q_2}=0\quad .\qquad (5)$$

3. Найдем обобщенные силы. Для этого изобразим на рис. 9.3а,б активные силы, действующие на тела системы. К этим силам относятся силы тяжести, $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$, $m_5\vec{g}$, а также реакции $\vec{F}_{TP}$ и $\vec{N}$ неидеальной связи - плоскости, вдоль которой движется груз 2.

а). Зафиксируем координату q_1 (т. е. будем считать, что груз 2 неподвижен относительно опорной плоскости), дадим системе возможное перемещение (рис. 9.3а) и запишем сумму элементарных работ активных сил на этом перемещении



а. б.

Рис. 9.3

$$\sum_k dA_k^a = m_1 g \cdot dq_2 - m_3 g \cdot dS_3 = (m_1 - m_3) g \cdot dq_2 \qquad \text{(т. к. } dS_3 = dq_2\text{)} \quad .$$

Отсюда найдем обобщенную силу Q_2

$$Q_2 = (m_1 - m_3) g \quad . \tag{6}$$

б). Зафиксируем координату q_2 (будем считать, что груз 1 неподвижен относительно блока 4), дадим системе возможное перемещение (рис. 9.3б) и запишем сумму элементарных работ активных сил

$$\sum_k dA_k^a = -F_{TP} \cdot dq_1 + m_4 g \cdot dS_4 + m_1 g \cdot dS_1 + m_3 g \cdot dS_3 =$$

$$= (-fm_2 + m_4 + m_1 + m_3) g \cdot dq_1$$

(т. к. $dS_4=dS_1=dS_3=dq_1$, $F_{TP}=fN=fm_2g$) .

Отсюда найдем обобщенную силу Q_1

$$Q_1 = \left(m_1 - fm_2 + m_3 + m_4\right)g \quad . \tag{7}$$

4. Запишем дифференциальные уравнения движения системы. Для этого подставим выражения (4), (5), (6) и (7) в уравнения (1)

$$\begin{cases} A\ddot{q}_1 + C\ddot{q}_2 = \left(m_1 - fm_2 + m_3 + m_4\right)g \\ B\ddot{q}_2 + C\ddot{q}_1 = \left(m_1 - m_3\right)g \end{cases} \quad . \tag{8}$$

Подставив выражения (3) констант A, B и C в уравнения (8), получим ответ

$$\begin{cases} \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dfrac{m_5}{2}\right)\ddot{q}_1 + \left(m_1 - m_3\right)\ddot{q}_2 = \left(m_1 - fm_2 + m_3 + m_4\right)g \\ \left(m_1 + m_3 + \dfrac{m_4}{2}\right)\ddot{q}_2 + \left(m_1 - m_3\right)\ddot{q}_1 = \left(m_1 - m_3\right)g \end{cases} \quad .$$

ПОРЯДОК ОФОРМЛЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Расчетно-графические работы выполняются на листах писчей или чертежной бумаги формата *А4* (210х297 мм). Текст и рисунки наносятся только на одну сторону листа. Выполнение рисунков "от руки" не допускается.

2. Первая страница представляет собой титульный лист, образец которого приведен на странице 75.

3. На второй странице записывается условие задания, вычерчивается заданная схема и выписываются из таблицы все данные (для соответствующего варианта).

4. Решение задачи начинается с третьей страницы, на которой вычерчивается расчетная схема механизма (конструкции). Схема выполняется аккуратно, четко и в таком масштабе, который позволит ясно изобразить все необходимые вектора скоростей, ускорений и т.д. Ход решения каждой задачи должен сопровождаться краткими пояснениями, т.е. должно быть указано, какие теоремы, формулы или уравнения применяются при решении данной задачи. В противном случае задание не зачитывается.

Образец титульного листа

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МАМИ»

Кафедра «Теоретическая механика»

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА __Д-___

Вариант № _____

Студент ____________________

Группа _____________________

Преподаватель ______________

МОСКВА 2010

Учебное издание

Гадельшин Тагир Камельянович
Норицина Галина Илларионовна
Петров Владимир Кириллович
Макаров Дмитрий Алексеевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. РАЗДЕЛ «ДИНАМИКА».
Учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения.

Под редакцией д.ф.-м.н., проф. Бондаря В.С..

Оригинал-макет подготовлен редакционно-издательским отделом МГТУ «МАМИ»

По тематическому плану внутривузовских изданий учебной литературы на 2010 г., доп.

Подписано в печать 25.02.2010. Формат 60х90 1/16. Бумага 80г/м^2
Гарнитура «Таймс». Ризография. Усл. печ. л. _____
Тираж 500 экз. Заказ № _____

МГТУ «МАМИ»
107023, г. Москва, Б. Семеновская ул., 38.