

# 1 Домашнее задание №1

## 1.1 Построить график кривой [2 балла]

Для одной из перечисленных ниже кривых, заданных параметрически, построить график. Для построения можно использовать любые программы и библиотеки для визуализации данных, например Gnuplot, Python (Matplotlib), Scilab, Maxima, Octave и т.д. Также можно выполнить задание вручную, нарисовав кривые от руки.

$$1. \begin{cases} x = t - \frac{1}{t}, \\ y = t^2 - \frac{1}{t}; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \frac{t^3}{1+t^2}, \\ y = \frac{t^2 - t^3}{1+t^2}; \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{(1-t)(1+t)^2}{1+t^2}; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \frac{t^2 + t^3}{1+t^2}, \\ y = \frac{t^2 - t^3}{1+t^2}; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x = \frac{5t^2}{1+t^5}, \\ y = \frac{5t^3}{1+t^5}; \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{t}{1+t^4}; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = t^3 - \frac{t^5}{5}, \\ y = \frac{3}{1+t^2}; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = t - \frac{1}{t}; \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \frac{t^2}{1-t}, \\ y = \frac{t^3}{1-t^2}; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = t(4-t^2), \\ y = t^2(4-t^2); \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - t^5; \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x = t^2(2-t^2), \\ y = (t-t^2)(1-t^2); \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = \frac{t^2}{1-t^3}, \\ y = \frac{t^3}{1-t^3}; \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = t^4, \\ y = t^2 - t^5; \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x = 2t^5 - 5t^2, \\ y = 2t^3 - 3t^2; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1}, \\ y = \frac{t^3}{t-1}; \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ y = \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}; \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = \frac{t^2}{1-t}, \\ y = t^2; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = \frac{1}{1+t^2}, \\ y = \frac{t+t^2}{1+t^2}; \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x = \frac{t^2}{1-t^4}, \\ y = \frac{t^3}{1-t^4}; \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x = (t-t^2)(1-t^2), \\ y = (t+t^2)(1-t^2); \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x = \frac{t^2}{1-t^2}, \\ y = \frac{t^2}{1-t^2}; \end{cases}$$

## 1.2 Группы, линейные и евклидовы пространства [1-3 балла]

Покажите, что относительно операции сложения  $+$  группой являются следующие множества и проверьте группу на коммутативность:

1.  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел,
2.  $\mathbb{Q}$  — множество рациональных чисел,
3.  $2\mathbb{Z}$  — множество четных целых чисел,
4.  $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел,
5.  $\mathbb{C}$  — множество комплексных чисел,
6.  $\mathbb{H}$  — множество кватернионов,
7.  $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{P})$  — множество матриц  $m \times n$  с элементами из поля  $\mathbb{P}$ ,
8.  $P[x]$  — множество многочленов с действительными коэффициентами,
9.  $C(X)$  — множество непрерывных функций на отрезке  $X$ .

Покажите, что относительно операции умножения « $\cdot$ » группой являются следующие множества и проверьте на коммутативность:

10.  $\mathbb{Q}/\{0\}$  — множество рациональных чисел исключая 0,
11.  $\mathbb{R}/\{0\}$  — множество действительных чисел исключая 0,
12.  $\mathbb{C}/\{0\}$  — множество комплексных чисел исключая 0.

Покажите, что следующие множества являются линейными пространствами:

13. Поле  $\mathbb{P}$  над  $\mathbb{P}$  [3 балла],
14. Множество  $\mathbb{R}$  над  $\mathbb{R}$ ,
15. Множество  $\mathbb{C}$  над  $\mathbb{C}$ ,
16. Множество непрерывных функций  $C[a, b]$  на отрезке  $[a, b]$  над  $\mathbb{R}$ ,
17. Множество полиномов  $P(x)$  над  $\mathbb{R}$ .

Покажите, что следующие линейные пространства изоморфны пространству векторов-строк или векторов-столбцов

18. Множество полиномов  $P(x)$  над  $\mathbb{R}$ .

Пусть задано некоторое евклидово пространство. Найдите формулу преобразования для следующих случаев.

19. Как преобразуется матрица квадратичной формы при замене координат (переходе от одного базиса к другому)? Получите формулу преобразования используя тензорные обозначения. [3б]
20. Как преобразуется скалярное произведение при замене координат?
21. Как преобразуется длина вектора при замене координат?
22. Покажите, что скалярное произведение является билинейной формой.

### 1.3 Координатные линии и особые точки

Для перечисленных ниже систем координат найдите координатные линии и особые точки [2-3 балла].

1. Обобщенная полярная система координат, определяемая равенством

$$\frac{x_1}{a_1} + i \frac{x_2}{a_2} = u_1 e^{iu_2},$$

где  $0 \leq u_1 < \infty$ ,  $-\pi < u_2 < \pi$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ .

2. Эллиптическая система координат, определяемая равенством

$$x_1 + ix_2 = \operatorname{ch}(u_1 + iu_2),$$

где  $0 \leq u_1 < \infty$ ,  $-\pi < u_2 \leq \pi$ .

3. Параболическая система координат, определяемая равенством

$$x_1 + ix_2 = (u_1 + iu_2)^2,$$

где  $-\infty < u_1 < \infty$ ,  $0 \leq u_2 < \infty$ .

4. Биполярная система координат, определяемая равенством

$$x_1 + ix_2 = \operatorname{th} \left( \frac{u_1 + iu_2}{2} \right),$$

где  $-\infty < u_1 < \infty$ ,  $-\pi < u_2 \leq \pi$ ,  $u_1 \neq 0$

5. Обобщенная цилиндрическая система координат, определяемая равенством

$$x_1 = a_1 u_1 \cos u_2, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2, \quad x_3 = u_3,$$

где  $u_1 \geq 0$ ,  $0 < u_2 \leq 2\pi$ ,  $-\infty < u_3 < \infty$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ .

6. Обобщенная сферическая система координат, определяемая равенством

$$x_1 = a_1 u_1 \sin u_2 \cos u_3, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2 \sin u_3, \quad x_3 = a_3 u_1 \cos u_2,$$

где  $u_1 \geq 0$ ,  $0 \leq u_2 \leq \pi$ ,  $0 \leq u_3 < 2\pi$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ .

### 1.4 Визуализация репера Френе для двумерного случая [3 балла]

Для кривой, которая была выбрана в задании №1, построить касательный и нормальный векторы в произвольной точке. Для построения можно использовать любые программы и библиотеки для визуализации данных, например Gnuplot, Python (Matplotlib), Scilab, Maxima, Octave и т.д.

### 1.5 Визуализация соприкасающейся окружности и эволюты [от 2 до 6 баллов]

Для кривой, которая была выбрана в задании №1, построить для произвольной точки соприкасающуюся окружность и вектор радиуса кривизны. Для всех точек изобразить эволюту. За анимацию передвижения конца вектора радиуса кривизны по эволюте дополнительные баллы.