Глава 3

ДИНАМИКА

Д1. Дифференциальное уравнение движения точки

Условия задач

Д1.1. Тормозной путь автомобиля на горизонтальной дороге при скорости v_0 составляет S. Чему равен тормозной путь этого автомобиля при той же скорости на спуске α ? Коэффициент трения считать постоянным.

Д1.2. Материальная точка массой m, подвешенная в вязкой среде на вертикальной пружине жесткостью k, падает вниз. В положении статического равновесия пружины точка имела скорость v_0. Сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости: $R = cv^2$. Найти зависимость скорости точки от координаты y, отсчитываемой от положения статического равновесия.

Д1.3. На автомобиль, который тормозит, двигаясь по горизонтальной прямой, действует сила сопротивления воздуха, линейно зависящая от скорости, $R_c = kv$. Даны коэффициент трения f и масса автомобиля m. Какой путь пройдет автомобиль, прежде чем его скорость уменьшится с v_0 до v_1?

Д1.4. Материальная точка массой m движется по криволинейной траектории под действием постоянной по величине силы Q. Найти скорость точки в момент, когда радиус кривизны траектории равен ρ и угол между силой Q и вектором скорости равен α.

Д1.5. Материальная точка массой m движется из состояния покоя по гладкой криволинейной направляющей, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы $F = Q\sin kt$. Определить скорость точки в момент времени t. Сила образует постоянный угол α с вектором скорости.

Д1.6. В сухую погоду автомобиль проходит закругление на дороге на предельной скорости v_1. Найти предельную скорость прохождения этого же поворота после дождя, когда коэффициент трения уменьшается в 4 раза. Считать, что автомобиль не опрокидывается.

Д1.7. Материальная точка массой m движется из состояния покоя по гладкой направляющей радиусом R, расположенной в горизонтальной плоскости, под действием силы Q. Определить реакцию направляющей через время t. Вектор силы направлен внутрь вогнутости окружности и образует постоянный угол α с вектором скорости.

Д1.8. Сила сопротивления воды при движении катера пропорциональна скорости: $R_c = k_1 v$. При этом максимальная скорость катера v_{max}. Найти предельную скорость этого же катера, если бы сила сопротивления зависела от квадрата скорости: $R_c = k_2 v^2$.

Д1.9. Автомобиль массой m разгоняется до некоторой скорости за время t_1. Сила сопротивления пропорциональна скорости: $R_c = kv$. Чему будет равно время разгона до той же скорости при отсутствии сопротивления?

Д1.10. Автомобиль массой m разгоняется до некоторой скорости за время t_1. Сила сопротивления пропорциональна скорости: $R_c = kv$. Чему будет равно время разгона, если силу тяги автомобиля увеличить вдвое?

Д1.11. Теплоход массой m после выключения двигателя движется со скоростью v_0. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости и равно R при скорости 1 м/с. Какое расстояние пройдет теплоход, прежде чем его скорость уменьшится вдвое?

Д1.12. Катер массой m после остановки двигателя движется со скоростью v_0. Сила сопротивление воды пропорциональна квадрату скорости и равна R при скорости 1 м/с. За какое время скорость катера уменьшится до v_1 ?

Д1.13. Автомобиль начинает движение из состояния покоя по окружности радиуса R с постоянным ускорением a. Коэффициент трения f. Через какое время автомобиль соскользнет с окружности?

Д1.14. Определить угол наклона ствола орудия к горизонту, если максимальная высота траектории равна H, начальная скорость снаряда равна v_0. Сопротивление воздуха не учитывать.

Д1.15. Автомобиль массой m, имея скорость v_0, начинает тормозить. Сила торможения пропорциональна скорости и в момент начала торможения равна R. Найти тормозной путь автомобиля.

Д1.16. Тепловоз массой m, имея скорость v_0, начинает тормозить. Сила торможения пропорциональна скорости и в момент начала торможения равна R. Через какое время скорость тепловоза уменьшится вдвое?

Д1.17. С какой скоростью приземлится парашютист массой m, прыгнувший без начальной вертикальной скорости с высоты H. Сила сопротивления воздуха равна R.

Д1.18. Самосвал без груза разгоняется с места до скорости v^* за время t^*. За какое время разгонится до той же скорости груженый самосвал, масса которого при погрузке увеличилась вдвое ? Коэффициент трения равен f.

Д1.19. За какое минимальное время автомобиль с постоянной скоростью объедет квадрат со стороной a, огибая углы по дугам окружности? Коэффициент трения равен f. Считать, что на поворотах возможно соскальзывание, но не опрокидывание.

Д1.20. Воздушный шар плавно ($v_0 = 0$) взлетает с ускорением a_0. По мере набора высоты h подъемная сила F шара уменьшается (за счет охлаждения и уменьшения плотности атмосферы) по закону $F = F_0 - kh$, где F_0 и k известные константы. Чему равна скорость шара на высоте H?

Д1.21. Воздушный шар массой m_1 падает вниз. В момент, когда скорость шара равна v_0, а ускорение a_0, сбросили балласт массой m_2. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, подъемная сила равна F. Как долго после этого будет продолжаться падение шара?

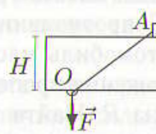
Д1.22. Тормозной путь автомобиля на горизонтальной дороге при скорости v_1 равен S. Коэффициент трения равен f. Силу сопротивления воздуха считать постоянной. Чему равен тормозной путь этого автомобиля при той же скорости на спуске с уклоном α?

Д1.23. Аэростат массой M падает вниз с ускорением a. Сила сопротивления воздуха R =const. Какой балласт необходимо сбросить, чтобы через некоторое время аэростат поднимался вверх с тем же ускорением?

Д1.24. Воздушный шар массой M падает вниз. На высоте H скорость шара равна v_0, а ускорение равно a_0. Какой балласт необходимо сбросить, чтобы шар мягко ($v = 0$) приземлился? Силу сопротивления воздуха считать постоянной.

Д1.25. Автомобиль массой M без груза разгоняется с места до скорости v_0 за время t_1. За какое время разгоняется до той же скорости автомобиль с грузом m? Сопротивление пропорционально скорости.

Д1.26. Груз массой m начинает движение из состояния покоя по верхней горизонтальной поверхности бруска, заделанного в стену. На нижней поверхности бруска закреплено неподвижное кольцо. Нить от груза продета сквозь кольцо и натянута постоянной силой F. В начальном положении груз находился на расстоянии $OA = L$ от кольца. Толщина бруска H. Трением и размерами груза пренебречь. Найти максимальную скорость груза.



Д1.27. Воздушный шар массой m имеет в начале подъемную силу T. Скорость ветра v_1. За счет негерметичности оболочки шара его подъемная сила со временем равномерно уменьшается. Пролетев расстояние S, шар падает. Найти вертикальную скорость шара в момент падения.

Д1.28. Автомобиль без груза разгоняется с места до скорости v_0 за время t_1. Какую скорость он разовьет за то же время с грузом, составляющим 50% массы автомобиля? Коэффициент трения равен f.

Д1.29. По мере подъема воздушного шара массой M его начальная подъемная сила T_0 равномерно с высотой уменьшается за счет охлаждения воздуха в оболочке. Максимальная высота подъема равна H. Найти скорость шара на высоте $H/2$.

Д1.30. Воздушный шар массой M падает вниз. В момент, когда скорость шара равна v_0, а ускорение равно a_0, сбросили балласт m. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости, подъемная сила F =const. На сколько метров после этого еще опустится шар?

Ответы к задачам см. в табл. 15 на с. 254.

Примеры решений

Задача 1. С аэростата сбросили балласт, падение аэростата замедлилось, и через время t_0 он поднялся на ту высоту, с которой сбросили балласт. Модуль силы сопротивления воздуха R=const, подъемная сила аэростата — $\vec{T}$, масса аэростата без балласта — m. Сколько времени после сброса балласта аэростат опускался?

Решение

Ось y направим вверх, поместив ее начало в нижней точке траектории аэростата. При падении на аэростат действуют силы тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$, сила сопротивления воздуха $\vec{R}$ и подъемная сила $\vec{T}$ (рис. 92). Аэростат принимаем за материальную точку. Дифференциальное уравнение движения в проекции на ось y имеет вид

$$m\ddot{y} = T + R - G.$$

Дважды интегрируем уравнение движения. Для постоянных сил интеграл берется просто:

$$m\dot{y} = (T + R - G)t + C_1,$$
$$my = (T + R - G)t^2/2 + C_1 t + C_2.$$

Начальные условия: $t = 0$, $y = H$, $\dot{y} = -v_0$. Отсюда находим константы интегрирования $C_1 = -mv_0, C_2 = mH$. Получаем уравнения

$$\dot{y} = (T + R - G)t/m - v_0, \tag{3.1}$$
$$y = (T + R - G)t^2/(2m) - v_0 t + H. \tag{3.2}$$

Аналогично составляем уравнение при подъеме аэростата.

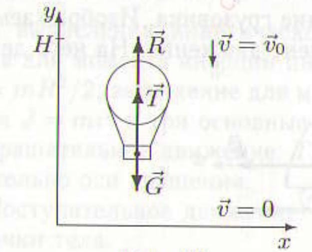


Рис. 92

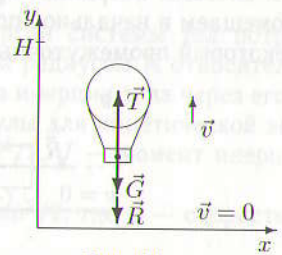


Рис. 93

Сила сопротивления при этом меняет свое направление (рис. 93). Оставляя ось y прежней, время отсчитываем с момента подъема:

$$m\ddot{y} = T - R - G.$$

Дважды интегрируем по времени это уравнение. Получаем сначала $m\dot{y} = (T - R - G)t + C_3$, затем

$$my = (T - R - G)t^2/2 + C_3 t + C_4. \tag{3.3}$$

Начальные условия: $t = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = 0$. Находим константы интегрирования: $C_3 = 0, C_2 = 0$. Из (3.3) следует

$$y = \frac{(T - R - G)t^2}{2m}. \tag{3.4}$$

Находим искомое время падения. Обозначаем его t_1, а время подъема — t_2. По условию $t_1 + t_2 = t_0$. Подставляем в (3.1), (3.2) условия: $t = t_1$, $\dot{y} = 0$, $y = 0$, а в (3.4) $t = t_2$, $y = H$. Получаем систему трех уравнений с неизвестными t_1, H, v_0:

$$0 = (T + R - G)t_1/m - v_0,$$

$$0 = (T + R - G)t_1^2/(2m) - v_0 t_1 + H,$$

$$H = (T - R - G)(t_0 - t_1)^2/(2m).$$

Исключая неизвестную высоту H и неизвестную начальную скорость v_0, получаем

$$t_1 = \frac{t_0}{1 + \sqrt{(T + R - mg)/(T - R - mg)}}.$$

Задача 2. Грузовик массой m имеет максимальную скорость $v_{\max}$ и разгоняется с места до v_* за время t_*. Сила сопротивления пропорциональна скорости. Чему равна средняя сила тяги двигателя грузовика?

Решение

Ось x системы координат принимаем горизонтальной, начало координат помещаем в начальное положение грузовика. Изображаем грузовик в некоторый промежуточный момент движения. На него действует

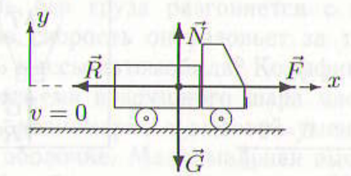


Рис. 94

сила тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$, сила сопротивления $\vec{R} = -k\vec{v}$, пропорциональная скорости v, с неизвестным пока коэффициентом k, неизвестная сила тяги $\vec{F}$ и реакция опоры $\vec{N}$ (рис. 94).

Составляем дифференциальное уравнение движения в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = F - R.$$

Дважды интегрируем уравнение движения. Так как правая часть уравнения является функцией скорости, а в вопросе задачи содержится время, вводим замену $v = \dot{x}$ и интегрируем уравнение с разделяющимися переменными t и v:

$$\frac{mdv}{F - kv} = dt,$$

$$-(m/k)\ln(F - kv) = t + C_1.$$

Начальные условия: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v = 0$. Так как в этой задаче не идет речь о расстояниях, то интегрировать второй раз и использовать условие на координату x не требуется. Из условия на скорость находим константу интегрирования, $C_1 = -(m/k)\ln(F)$. Зависимость скорости от времени движения принимает вид

$$-(m/k)\ln(1 - kv/F) = t. \tag{3.5}$$

Находим искомую силу тяги F грузовика, считая ее постоянной. Для этого используем все имеющиеся в задаче данные. Известна максимальная скорость $v = v_{\max}$. Необходимым условием экстремума функции $v = v(t)$ является равенство $dv/dt = 0$ или $m\ddot{x} = F - kv_{\max} = 0$. Отсюда: $k = F/v_{\max}$. Подставляем это соотношение в (3.5), откуда, при $t = t_*$ и $v = v_*$, получаем среднюю силу тяги грузовика:

$$F = \frac{mv_{\max}}{t_*}\ln\left(\frac{v_{\max}}{v_{\max} - v_*}\right).$$

Д2. Кинетическая энергия системы

При вычислении кинетической энергии системы тел потребуется формула для момента инерции цилиндра радиусом R относительно его оси $J = mR^2/2$, выражение для момента инерции тела через его радиус инерции $J = mi^2$ и три основные формулы для кинетической энергии.

1. Вращательное движение: $T = J\omega^2/2$, J — момент инерции тела относительно оси вращения.

2. Поступательное движение: $T = mv^2/2$, где v — скорость какой-либо точки тела.

3. Плоское движение:

$$T = mv_C^2/2 + J_C\omega^2/2, \tag{3.6}$$

где v_C — скорость центра масс тела, J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс.