

## Законы распределения случайных величин, применяемые в теории надежности

### **1. Общее нормальное распределение (распределение Гаусса)**

Участвуют:  $f(t)$ ,  $P(t)$ ,  $w(t)$

Плотность нормального распределения для параметра наработки на отказ имеет следующий вид:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(t-T_0)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где  $T_0$  - математическое ожидание случайной величины (средняя наработка на отказ);

$\sigma$  - среднее квадратическое отклонение времени между отказами.

Вероятность безотказной работы в течение требуемого времени  $t$  рассчитывается по формуле:

$$P(t) = 0,5 + \frac{1}{2\pi} \int_0^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,$$

где  $z = (T_0 - t) / \sigma$  - вспомогательная переменная

$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$  - функция Гаусса (интервал вероятности), принимаем по справочнику

$$P(t) = 0,5 + \Phi\left(\frac{T_0 - t}{\sigma}\right)$$

Параметр потока отказов при нормальном распределении определяется по формуле:

$$w(t) = \frac{\exp\left(\frac{(T_0 - t)^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \Phi\left(\frac{T_0 - t}{\sigma}\right)}$$

Графические зависимости для основных характеристик надежности при нормальном законе распределения приведены на рисунке

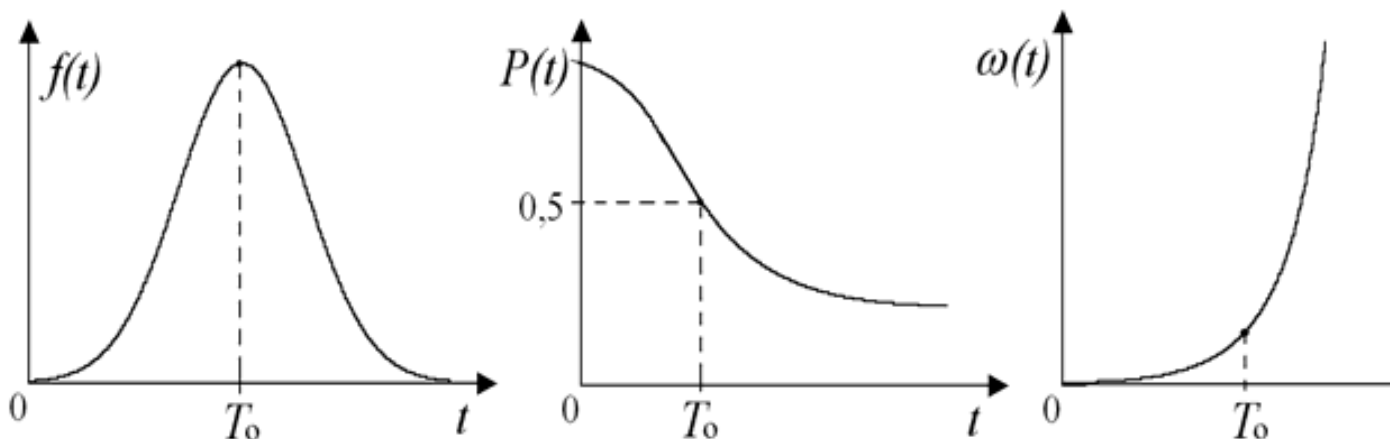


Рисунок 3. Зависимости  $f(t)$ ,  $P(t)$  и  $w(t)$  для нормального закона.

**2. Экспоненциальный закон распределения** применяется для анализа сложных систем, работающих в тяжелых условиях, где преобладают внезапные отказы. Главной его особенностью является независимость потока отказов от времени эксплуатации.

Основные характеристики надежности приведены на рисунке 4:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

где  $\lambda = w(t) = \text{const}$  - интенсивность потока отказов

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(t) dt\right) = e^{-\lambda t};$$

$$T_o = \int_0^t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

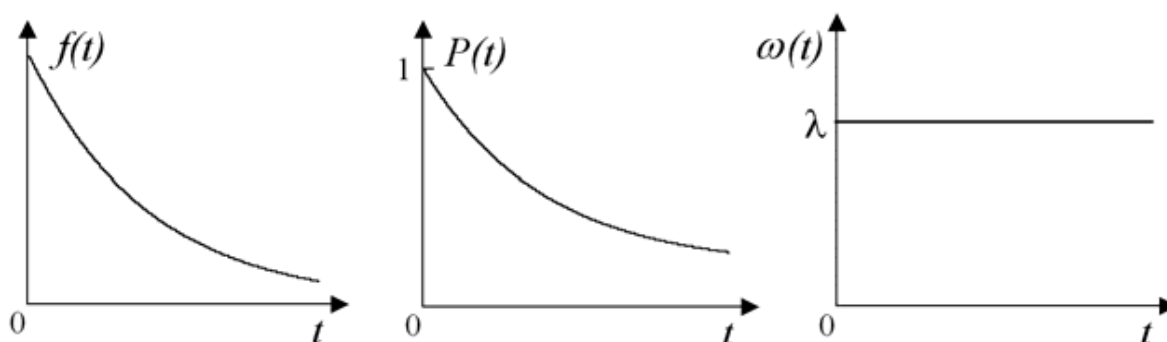


Рисунок 4. Зависимости  $f(t)$ ,  $P(t)$  и  $w(t)$  для экспоненциального закона.

**3. Распределение Вейбулла - Гнеденко** применяется для аппроксимации статистических данных о времени восстановления. Это распределение может быть использовано также в качестве характеристики надежности систем в течение времени их приработки.

$$f(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]; P(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{a}\right)^b\right]; w(t) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1}$$

При значениях  $b < 1$  функция (3.32) характеризует вероятность безотказной работы элементов, у которых часто встречаются скрытые дефекты.

При  $b > 1$  функция характеризует надежность элементов, у которых быстро наступает износ.

При  $b = 1$  распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное (рисунок 4).

Благодаря своей универсальности закон Вейбулла – Гнеденко может описывать работоспособность системы во все периоды ее жизни.

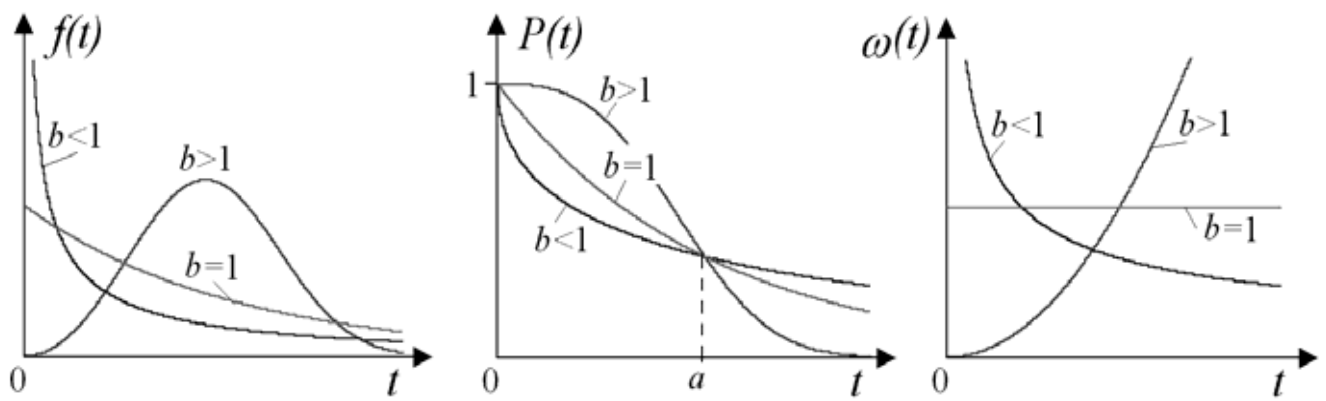


Рисунок 5. Зависимости  $f(t)$ ,  $P(t)$  и  $\omega(t)$  для распределения Вейбулла.

Коэффициент вариации:

$$\nu(t) = \frac{\sigma(t)}{T_o}$$

$$\nu \approx 0,967 + 16,241 \cdot \exp(0,056 - 6,133 \cdot \nu) \quad - \text{при } \nu < 1$$

$$\nu \approx 0,241 + 0,791 \cdot \exp(0,636 - 0,775 \cdot \nu) \quad - \text{при } \nu \geq 1$$

$$c = 1 + \frac{1}{\nu} \Rightarrow k_{\epsilon} \approx 0,449c^2 - 1,335c + 1,876 \quad - \text{постоянная Гаусса}$$

$$a = \frac{T_o}{k_{\epsilon}}$$

## Задание 1

Построить зависимости  $P(t)$ ,  $\lambda(t)$  и определить среднее время безотказной работы для электромагнитного токового реле РТ-40 в интервале времени 2500 часов, если число отказов  $r$  при  $\Delta t = 100$  часов было распределено так, как показано в таблице 1.

Таблица 1

Задание																												
№ Вар.	ФИО обучающегося	Число отказов за интервал времени 100 часов																										N <sub>0</sub>
1	Аглуллин Руслан Хамидуллович	174	203	179	176	193	181	412	188	184	205	189	208	195	191	210	201	177	212	213	216	206	186	196	198	207	6000	
2	Адушкин Антон Сергеевич	309	326	344	348	320	317	334	352	311	328	325	342	314	318	336	332	350	321	338	363	340	312	329	346	320	10000	
3	Вальчук Дмитрий Валерьевич	179	209	185	181	199	186	424	193	190	211	195	214	200	197	216	207	183	218	220	222	213	192	202	204	210	6000	
4	Васильев Роман Владимирович	318	336	354	358	329	326	344	362	320	337	334	352	323	328	346	342	360	331	348	374	350	321	339	356	354	10000	
5	ГанеевАсхатРифович	468	482	491	420	446	442	450	459	391	455	415	424	433	428	464	388	393	402	397	406	477	486	495	437	411	12000	
6	Кадыров Сергей Ильфатович	178	207	183	179	197	184	420	191	188	209	193	212	198	195	214	205	181	216	218	220	211	190	200	202	191	7000	
7	Коваленко Андрей Владимирович	157	183	161	158	174	163	371	169	166	184	170	187	175	172	189	181	160	190	192	194	186	167	177	178	169	6000	
8	Козлов Сергей Леонидович	278	293	309	313	288	285	301	316	279	295	292	308	282	286	302	299	315	289	304	327	306	281	296	311	289	10000	
9	Комков Александр Романович	178	207	183	179	197	184	420	191	188	209	193	212	198	195	214	205	181	216	218	220	211	190	200	202	191	6000	
10	Копысов Андрей Анатольевич	315	333	351	355	326	323	341	359	317	334	331	349	320	325	343	339	357	328	345	371	347	318	336	353	327	12000	
11	Королев Василий Геннадьевич	157	183	161	158	174	163	371	169	166	184	170	187	175	172	189	181	160	190	192	194	186	167	177	178	169	8000	
12	Матюха Кирилл Олегович	278	293	309	313	288	285	301	316	279	295	292	308	282	286	302	299	315	289	304	327	306	281	296	311	289	13000	
13	Милюков Павел Алексеевич	161	188	166	163	178	167	381	174	170	189	175	193	180	177	194	186	164	196	197	199	191	172	181	183	173	8000	
14	Михайлов Евгений Сергеевич	286	302	318	322	296	293	309	325	287	303	300	316	290	294	311	307	323	297	313	336	315	289	304	320	297	10000	
15	Нефедов Андрей Григорьевич	503	518	527	451	479	475	484	493	421	489	446	456	465	460	498	417	422	432	427	437	513	523	532	470	441	15000	
16	Рябов Владимир Анатольевич	702	662	616	699	605	686	637	591	676	673	667	621	692	654	635	645	599	670	641	584	625	696	649	609	629	19000	
17	Савостьянов Александр Вячеславович	427	439	447	382	406	403	410	418	357	414	378	386	394	390	422	354	358	366	362	370	435	443	451	398	374	15000	
18	Хвостанцев Юрий Владимирович	398	427	403	400	417	405	636	412	408	429	413	432	419	415	434	425	401	436	437	440	430	410	420	422	431	11000	
19	Царьков Евгений Сергеевич	546	567	590	595	559	555	578	600	547	569	565	588	551	557	580	575	598	561	583	615	585	549	571	593	560	15000	

### Пример решения Задания №1

Построить зависимости  $P(t)$ ,  $\lambda(t)$  и определить среднее время безотказной работы для электромагнитного токового реле РТ-40 (невосстанавливаемого аппарата) в интервале времени 3000 часов, если число отказов  $r$  при  $\Delta t = 100$  часов было распределено так, как показано в таблице 1.

Таблица 1

$\Delta t_i$ , час.	$\Delta n_i$ , штук.	$\Delta t_i$ , час.	$\Delta n_i$ , штук.	$\Delta t_i$ , час.	$\Delta n_i$ , штук.
0 – 100	50	1000 – 1100	15	2000 – 2100	12
100 – 200	40	1100 – 1200	14	2100 – 2200	13
200 – 300	32	1200 – 1300	14	2200 – 2300	12
300 – 400	25	1300 – 1400	13	2300 – 2400	13
400 – 500	20	1400 – 1500	14	2400 – 2500	14
500 – 600	17	1500 – 1600	13	2500 – 2600	16
600 – 700	16	1600 – 1700	13	2600 – 2700	20
700 – 800	16	1700 – 1800	13	2700 – 2800	25
800 – 900	15	1800 – 1900	14	2800 – 2900	30
900 – 1000	14	1900 – 2000	12	2900 – 3000	40

Для каждого промежутка времени

$$P(\Delta t_j) = \frac{N_0 - n(\Delta t_j)}{N_0}.$$

Подставляя в это выражение данные таблицы 3.2, получим:

$$P(100) = \frac{1000 - 50}{1000} = 0,95, \quad P(300) = \frac{1000 - (50 + 40 + 32)}{1000} = 0,878.$$

$$P(200) = \frac{1000 - (50 + 40)}{1000} = 0,91, \quad P(400) = \frac{1000 - (50 + 40 + 32 + 25)}{1000} = 0,853.$$

Расчетные значения вероятностей приведены в таблице 2. По данным этой таблицы строится зависимость  $P(t)$  в виде ступенчатой кривой, показанной на рисунке 1.

Таблица 2

$\Delta t_i$ , час.	$\Delta n_i$ , штук.	$P(t)$ , отн. ед.	$\lambda(t)$ , $1 \cdot 10^{-3} /$ час.
0 – 100	50	0,950	0,514
100 – 200	40	0,910	0,430
200 – 300	32	0,878	0,358
300 – 400	25	0,853	0,289
400 – 500	20	0,833	0,238
500 – 600	17	0,816	0,206
600 – 700	16	0,800	0,198
700 – 800	16	0,784	0,202
800 – 900	15	0,769	0,193
900 – 1000	14	0,755	0,184
1000 – 1100	15	0,740	0,200

1100 – 1200	14	0,726	0,191
1200 – 1300	14	0,712	0,195
1300 – 1400	13	0,699	0,184
1400 – 1500	14	0,685	0,202
1500 – 1600	13	0,672	0,192
1600 – 1700	13	0,659	0,195
1700 – 1800	13	0,646	0,200
1800 – 1900	14	0,632	0,220
1900 – 2000	12	0,620	0,192
2000 – 2100	12	0,608	0,195
2100 – 2200	13	0,595	0,217
2200 – 2300	12	0,583	0,204
2300 – 2400	13	0,570	0,225
2400 – 2500	14	0,556	0,248
2500 – 2600	16	0,540	0,290
2600 – 2700	20	0,520	0,376
2700 – 2800	25	0,495	0,490
2800 – 2900	30	0,465	0,624
2900 – 3000	40	0,425	0,900

Если принять  $\Delta t \rightarrow 0$  и располагать экспериментальные точки посередине каждого из участков, то полученная гладкая кривая будет близка к действительной вероятности безотказной работы. Зависимость получается тем точнее, чем меньше промежутки  $\Delta t$  и чем большее число образцов  $N_0$  было взято на испытание.

Интенсивность отказов определяется по формуле (3.6) для середины каждого промежутка:

$$\lambda(t) = \frac{n(t)}{N_0 \cdot \Delta t}.$$

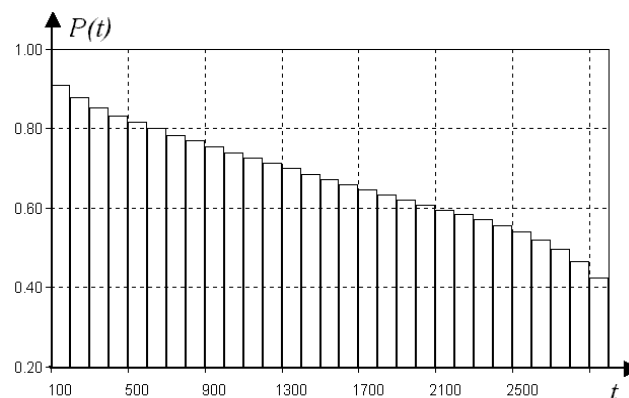


Рисунок 1 Зависимость вероятности безотказной работы реле от времени (к примеру 3.1).

$$\lambda(50) = \frac{50}{\frac{1000+950}{2} \cdot 100} = 0,514 \cdot 10^{-3} \quad \frac{1}{\text{час}};$$

$$\lambda(150) = \frac{40}{\frac{950+910}{2} \cdot 100} = 0,43 \cdot 10^{-3} \quad \frac{1}{\text{час}};$$

$$\lambda(250) = \frac{32}{\frac{910+878}{2} \cdot 100} = 0,358 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{час}};$$

Зависимость  $\lambda(t)$  строится аналогично гистограмме  $P(t)$ .

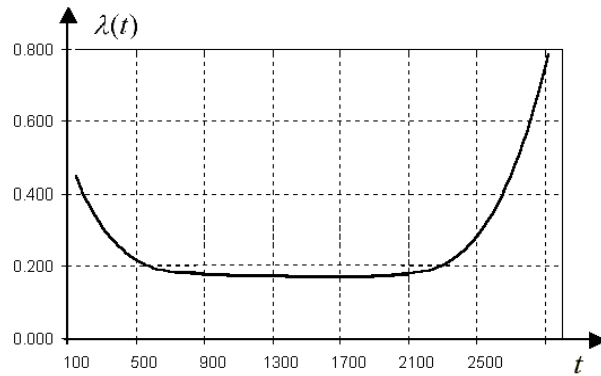


Рисунок 2. Зависимость интенсивности отказов реле от времени

Среднее время безотказной работы вычисляется по формуле:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} n_i \cdot t_i}{N_0} = \frac{50 \cdot 50 + 40 \cdot 150 + 32 \cdot 250 + \dots 30 \cdot 2850 + 40 \cdot 2950}{1000} = 748,35 \text{ ч};$$

Для произвольного числа элементов  $N < N_0$  (например при  $N = 575$ ):

$$T = \frac{\sum_{i=1}^N n_i \cdot t_i}{N} = \frac{50 \cdot 50 + 40 \cdot 150 + 32 \cdot 250 + \dots 30 \cdot 2850 + 40 \cdot 2950}{575} = 1400 \text{ ч}.$$