Негосударственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Центросоюза Российской Федерации

**СИБИРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ**

МАТЕМАТИКА И СТАТИСТИКА

Методические указания и задания контрольной и самостоятельной работы для студентов заочной формы обучения направления 42.03.01 *Реклама и связи с общественностью*

Новосибирск 2018

Кафедра статистики и математики

АВТОРЫ: О.В. Брюханов, канд. физ.-мат. наук
О.Н. Чащин, канд. физ.-мат. наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТ: Л. Г. Гузевский, д-р физ.-мат. наук, профессор

Рекомендовано к изданию кафедрой статистики и математики, протокол от 12 марта 2018 г., № 8.

Заведующий кафедрой Н.В. Шаланов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Математика – наука о количественных соотношениях и пространственных формах реального мира, понимаемых в самом широком смысле. Длительный исторический путь развития науки привел к проникновению математических методов во все сферы научной и практической деятельности человека. Математика стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Эта наука предоставляет мощные средства для решения разнообразных практических задач.

Дисциплина «Математика и статистика»: позволяет освоить необходимый математический и статистический аппарат, который применяется при решении и анализе прикладных задач, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Программой названной дисциплины предусмотрено изучение студентами первого курса таких разделов, как математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика.

Предлагаемое издание содержит задания контрольных работ и методические указания к их выполнению (основные теоретические положения и образцы решения задач контрольной работы).

В раздел «Задания самостоятельной работы студентов» включены самые важные вопросы и приведены типовые задачи по каждому разделу, входящему в программу дисциплины. Ответы на вопросы студент может найти в любом учебнике из « Списка рекомендуемой литературы» или в данной методической разработке.

2. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Разделы дисциплины

Раздел 1. Математический анализ
Раздел 2. Теория вероятностей
Раздел 3. Математическая статистика

2.2. Темы и их краткое содержание

Раздел 1. Математический анализ

Тема 1. Множества. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

Понятие множества. Операции над множествами. Декартово произведение множеств. Отображение множеств, понятие образа и прообраза. Числовые множества. Множество вещественных чисел. Понятие окрестности точки. Числовая последовательность. Ограниченная, неограниченная, монотонная последовательность. Предел числовой последовательности, его свойства.

Тема 2. Функция. Предел функции

Понятие функции. Способы задания функции. Сложная функция. Обратная функция. График функции. Основные элементарные функции, их использование в экономике. Свойства функций.

Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства и взаимосвязь. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Основные типы неопределённостей и способы их раскрытия. Эквивалентные бесконечно малые функции.

Односторонние пределы функций. Непрерывность функции, точки разрыва и их классификация. Асимптоты графика функции, их нахождение. Глобальные свойства непрерывных функций.

Тема 3. Производная функции

Производная функции, её геометрический и физический смысл. Производная суммы, разности, произведения и частного двух функций. Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Производные *2*-го и высших порядков. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Оценка погрешностей измерения (наблюдения) с помощью дифференциала функции.

Свойства дифференцируемых функций. Основные теоремы о дифференцируемых функциях: Ферма, Ролля, Лагранжа.

Тема 4. Приложения производной

Формула Тейлора и ее приложения. Правило Лопиталя. Признаки монотонности функции. Локальный экстремум функции, необходимое условие экстремума, достаточные условия экстремума. Выпуклость функции, точки перегиба. Глобальный экстремум функции. Общая схема исследования функций и построения графиков.

Тема 5. Неопределенный интеграл

Первообразная функция и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Интегрирование путем замены переменной и интегрирование по частям. Интегрирование простейших рациональных дробей, иррациональных функций, тригонометрических функций.

Тема 6. Определенный интеграл

Определённый интеграл, его геометрический смысл. Основные свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Тема 7. Приложения интегрального исчисления

Геометрические приложения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур. Приближенное вычисление интегралов. Понятие несобственного интеграла, несобственные интегралы первого и второго рода, сходимость несобственных интегралов.

Раздел 2. Теория вероятностей

Тема 8. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Испытания, события, виды событий. Случайные события. Относительная частота наступления события. Классическое и статистическое определение вероятности. Алгебра событий. Полная группа событий. Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Тема 9. Повторные независимые испытания

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Вероятность наступления события A в n испытаниях: а) не менее k_1 и не более k_2 раз; б) хотя бы один раз; в) ни разу. Наивероятнейшее число наступлений события в схеме Бернулли.

Тема 10. Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины. Функция распределения. Основные числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их смысл, свойство. Биномиальный закон распределения. Математическое ожидание, дисперсия случайной величины, имеющей биноминальный закон распределения.

Тема 11. Непрерывная случайная величина

Непрерывные случайные величины. Плотность распределения. Функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства. Числовые характеристики непрерывной случайной величины. Нормальное распределение. Вероятностный смысл параметров нормального распределения. Кривая Гаусса. Правило трех сигм.

Раздел 3. Математическая статистика

Тема 12. Обработка выборочных данных

Задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Выборочный метод. Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма. Статистические оценки параметров распределения. Точечные оценки. Интервальные оценки, точность оценки, надежность, доверительный интервал. Состоятельность и несмещенность оценок.

Тема 13. Проверка статистических гипотез

Статистические гипотезы. Нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы. Статистические критерии. Уровень статистической значимости. Ошибки первого и второго рода. Мощность критерия. Критерий согласия Пирсона. Проверка гипотезы о нормальном распределении выборочных данных.

Тема 14. Теория корреляции

Зависимые случайные величины. Виды зависимостей между случайными величинами. Задачи теории корреляции. Коэффициент корреляции. Уравнение регрессии. Прогноз по регрессии. Корреляционное отношение. Современные пакеты компьютерных программ статистического анализа.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Правила оформления контрольной работы

При выполнении контрольной работы по математике нужно придерживаться следующих правил.

1. Выполнять контрольную работу в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний преподавателя.

2. На обложке тетради разборчиво написать фамилию, инициалы, учебный шифр, номер контрольной работы, название дисциплины. В конце работы указать использованную литературу, дату выполнения и расписаться.

3. Работа обязательно должна содержать все задачи именно вашего варианта.

4. Решения задач нужно располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи следует записать полностью ее условие.

6. Решения задач излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения проверенной работы следует исправить все отмеченные преподавателем ошибки и недочеты и выполнить все его рекомендации.

8. Если контрольная работа возвращена на доработку, то необходимо в короткий срок исправить указанные ошибки и недочеты (в той же тетради) и сдать работу на повторную проверку.

9. По итогам выполнения контрольной работы со студентом проводится собеседование, по результатам которого выставляется оценка «зачтено» или «не зачтено». Защита контрольных работ осуществляется в межсессионный период во время субботних консультаций или во время сессии.

Правило выбора задач контрольной работы

Номера задач контрольной работы определяются с помощью приведенной ниже таблицы по двум последним цифрам номера личного дела (шифра) студента.

В верхней строке (по горизонтали), где помещены цифры от 0 до 9, следует выбрать цифру, являющуюся *последней* в номере вашего шифра.

В левой графе таблицы (по вертикали), где также помещены цифры от 0 до 9, необходимо выбрать цифру, являющуюся *предпоследней* в номере вашего шифра.

На пересечении вертикальной и горизонтальной линий вы найдете номера задач своей контрольной работы.

Например, если шифр РБ-10-102-Д то номера задач выбираем по последней цифре шифра 2 и предпоследней цифре 0. Контрольная работа должна включать задачи 2, 13, 29, 34, 49, 56 64.

Будьте внимательны при выборе варианта задания. Если какая-нибудь задача не соответствует варианту задания, то контрольная работа возвращается на доработку.

ТАБЛИЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОМЕРОВ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

		Последняя цифра шифра									
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***0***	4	3	2	1	8	9	10	6	5	7
		14	15	13	12	17	16	11	20	19	18
		26	28	29	30	21	22	23	24	25	27
		32	31	34	35	36	37	38	33	39	40
		47	48	49	50	42	43	44	45	46	41
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
		65	63	64	67	69	66	62	68	61	70
	1	5	4	3	2	1	10	7	9	8	6
		15	14	13	12	11	16	20	19	18	17
		25	27	28	30	29	21	22	23	24	26
		40	32	33	34	35	36	37	31	38	39
		48	47	50	49	44	45	46	41	43	42
		51	55	60	52	59	57	53	58	56	54
		62	65	68	64	70	67	66	69	63	61
	2	6	10	8	9	7	1	2	3	4	5
		16	15	14	13	12	20	18	19	17	11
		24	26	27	28	29	30	21	22	23	25
		36	37	40	31	32	33	34	35	39	38
		49	50	41	42	43	44	45	46	47	48
		54	60	57	55	53	58	52	59	56	51
		64	70	63	67	65	62	66	68	61	69

Продолжение табл.

Последняя цифра шифра											
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***3***	7	6	9	10	3	2	1	8	5	4
		17	18	19	16	20	11	12	14	13	15
		23	24	25	26	27	28	29	30	22	21
		37	38	31	32	33	34	35	36	40	39
		49	50	48	47	41	42	43	44	45	46
		54	55	58	56	60	52	59	53	51	57
		62	69	66	65	64	63	68	70	61	67
	4	8	7	10	5	4	6	2	1	9	3
		18	19	17	20	12	14	13	15	11	16
		22	23	24	25	21	27	28	29	30	26
		38	31	32	33	34	35	36	37	39	40
		42	46	45	49	48	47	50	41	43	44
		58	56	57	60	52	59	53	55	51	54
		65	69	66	61	63	62	68	64	67	70
	5	3	2	1	4	5	7	9	10	6	8
		13	17	15	16	14	12	18	11	20	19
		27	29	30	21	22	24	25	26	28	23
		31	33	32	34	35	36	39	37	40	38
		46	45	47	48	50	49	41	42	43	44
		51	56	57	54	55	53	60	52	58	59
		70	62	69	67	66	64	68	66	65	61
	6	1	2	3	10	4	5	6	7	8	9
		11	12	13	20	14	15	16	17	18	19
		30	21	28	29	27	26	24	25	23	2
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		44	41	46	45	49	47	50	48	43	42
		60	57	56	54	51	52	53	55	58	59
		67	68	69	62	61	65	64	63	70	66

Окончание табл.

		Последняя цифра шифра									
		0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Предпоследняя цифра шифра	***7***	4	2	8	10	1	9	6	7	3	5
		14	13	20	12	15	11	16	17	19	18
		25	22	24	21	27	26	28	30	23	29
		39	40	31	38	32	33	34	35	36	37
		41	44	47	45	49	42	50	48	43	46
		55	59	56	54	51	52	53	60	57	58
		67	66	69	68	61	62	64	65	70	63
	8	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
		40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
		43	44	45	46	47	48	49	50	41	42
		54	56	55	60	57	53	51	58	59	52
		68	66	61	63	62	64	70	65	67	69
	9	2	1	6	7	3	8	4	5	10	9
		12	13	14	11	19	16	15	17	20	18
		28	30	22	23	24	25	26	27	29	21
		40	38	39	36	31	37	32	33	34	35
		45	46	42	41	43	44	50	47	48	49
		51	54	58	53	55	59	52	57	56	60
		66	67	63	68	69	70	65	61	62	64

4. ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Функция. Предел функции

Задачи 1–10

Вычислить пределы функций.

1. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$; $x_0=1;\ 2;\ -1;\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x^2}{x\sin x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+3}{3n-2}\right)^{2n+4}$.

2. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-1}$; $x_0=-2;\ 0{,}5;\ -1;\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\ln(1+4x)}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-4}{4n-2}\right)^{3n+3}$.

3. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-2x-3}$; $x_0=1;\ -1{,}5;\ -1;\ 3;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x^2}{2x^2}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n-5}\right)^{2n-1}$.

4. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-5x-2}{x^2-2x}$; $x_0=5;\ 2;\ -\dfrac{1}{3};\ 0;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x^3}{\operatorname{tg}5x^3}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+6}{5n+2}\right)^{3n-5}$.

5. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-9x-5}$; $x_0=5;\ 2;\ -1;\ -0{,}5;\ \infty;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}7x}{4x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-4}{n-5}\right)^{9n-6}$.

6. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-x}{4x^2+3x-1}$; $x_0=1;\ 0;\ -1;\ \dfrac{1}{4};\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-3}{2n+5}\right)^{3n+2}$.

7. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+4x-5}$; $x_0=1;\ -5;\ -\dfrac{5}{2};\ 3;\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-7}{3n+5}\right)^{-3n}$.

8. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x^2-12x+4}{x^2+x-6}$; $x_0=-3;\ 2;\ -1;\ \dfrac{2}{5};\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-3}{4n-2}\right)^{-n+5}$.

9. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-3}{3x^2-13x+12}$; $x_0=-1;\ \dfrac{4}{3};\ 1;\ 3;\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{e^{2x}-1}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n-1}\right)^{-n+4}$.

10. *а*) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2+x-28}$; $x_0=-4;\ 2;\ \dfrac{7}{2};\ 3;\ \infty$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\arcsin 4x}$; *в*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^{-n+3}$.

Методические указания к решению задач 1 – 10

Пределы функций, основные теоремы о пределах

Пределом функции $f(x)$ называется число A, к которому неограниченно приближаются значения функции при указанном стремлении аргумента x.

Пусть существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = cA,$ где c – число;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B},$ если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

Замечательные пределы, эквивалентные бесконечно малые функции

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e,$

или, в другой форме, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e,$

где $e = 2,718...$ – иррациональное число.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Если значения функции *f(x)* неограниченно возрастают по абсолютной величине при $x \to x_0$, то такую функцию называют *бесконечно большой при* $x \to x_0$. Предел этой функции обозначают знаком бесконечности ∞: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ $(\pm\infty)$.

Теоремы о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty$.

$$\text{Если } \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \text{ то } \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Утверждения всех вышеприведённых теорем также справедливы, если $x \to \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$).

Эквивалентные бесконечно малые функции. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. В этом случае пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой функцией.

Наиболее часто используют эквивалентность следующих бесконечно малых функций при $\alpha(x) \to 0$:

$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$;

$\mathrm{tg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$; $\mathrm{arctg}\, \alpha(x) \sim \alpha(x)$;

$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$; $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

Задача. Вычислить пределы функции

$$\lim_{x\to x_0} \frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}; \quad x_0 = 1;\ -4;\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{3};\ \infty.$$

Решение. В задаче следует найти предел частного. С этой целью необходимо вычислить пределы числителя и знаменателя дроби, подставив в них предельное значение аргумента *x*.

1. $$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4} = \frac{3\cdot 1^2+10\cdot 1-8}{4\cdot 1^2+15\cdot 1-4} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

2. $$\lim_{x\to -4} \frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}.$$

При подстановке $x = -4$ в числитель и знаменатель дроби убеждаемся, что их значения равны нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь не применима. В данном случае говорят, что имеется неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ *при* $x \to x_0$ *может быть раскрыта сокращением дроби на множитель вида* (x–x_0)*, который обращает числитель и знаменатель дроби в нуль,* в данном случае на (x+4). Поэтому следует разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

$3x^2+10x-8=0;$

$D=10^2-4\cdot 3\cdot(-8)=196;$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{2\cdot 3}=\frac{-10\pm 14}{6};$$

$x_1=-4;\quad x_2=\frac{2}{3}.$

$3x^2+10x-8=3(x+4)(x-2/3)=$

$=(x+4)(3x-2).$

$4x^2+15x-4=0;$

$D=15^2-4\cdot 4\cdot(-4)=289;$

$$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{289}}{2\cdot 4}=\frac{-15\pm 17}{8};$$

$x_1=-4;\quad x_2=\frac{1}{4}.$

$4x^2+15x-4=4(x+4)(x-1/4)=$

$=(x+4)(4x-1).$

Таким образом,

$$\lim_{x\to-4}\frac{3x^2+10x-8}{4x^4+15x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(3x-2)}{(x+4)(4x-1)}=\lim_{x\to-4}\frac{3x-2}{4x-1}=\frac{-14}{-17}=\frac{14}{17}.$$

3. $$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+10\cdot\frac{2}{3}-8}{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+15\cdot\frac{2}{3}-4}=\frac{0}{70/9}=0.$$

Здесь применима теорема о пределе частного, так как предел знаменателя существует и не равен нулю.

4. $$\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\frac{3\cdot\frac{1}{16}+10\cdot\frac{1}{4}-8}{4\cdot\frac{1}{16}+15\cdot\frac{1}{4}-4}=\left(\frac{-85/16}{0}\right)=\infty.$$

Здесь использована теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$.

Пределы числителя и знаменателя дроби равны ∞. В этом случае говорят, что имеется неопределенность вида «бесконечность на бесконечность». Теорема о пределе частного здесь не применима.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ *при* $x\to\infty$, *каждый член числителя и знаменателя дроби делят на x в наивысшей степени (в нашем примере на* x^2*), отчего величина дроби не изменится, но исчезнет неопределенность.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{10x}{x^2}-\dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{15x}{x^2}-\dfrac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{10}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{4+\dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{x^2}}=\frac{3}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10}{x}=0;\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8}{x^2}=0;\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15}{x}=0;\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$

(по теореме о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций).

Ответ. 1. $\dfrac{1}{3}$; 2. $\dfrac{14}{17}$; 3. 0; 4. ∞; 5. $\dfrac{3}{4}$.

Задача. Вычислить пределы: *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\ln(1+5x)}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$.

Решение.

а) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\ln(1+5x)}=\left(\frac{\operatorname{tg}0}{\ln 1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}3x\sim 3x;\\ \ln(1+5x)\sim 5x\\ \text{при }\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5};$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 6x}{2x}=\left(\frac{\arcsin 0}{0}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\arcsin 6x\sim 6x\\ \text{при }\ x\to 0\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=3.$$

В рассматриваемых задачах неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ была раскрыта после замены бесконечно малых функций на эквивалентные им и сокращения полученных дробей на x.

Ответ. *а*) $\frac{3}{5}$; *б*) 3.

Задача. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}$.

Решение. Очевидно, что

$$\frac{3n-2}{3n+5}=\frac{3n+5-5-2}{3n+5}=\frac{(3n+5)-7}{3n+5}=1-\frac{7}{3n+5}=1+\frac{-7}{3n+5}.$$

Далее воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-7}{3n+5}\right)^{4n+1}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{\frac{3n+5}{-7}}\right]^{\frac{-7}{3n+5}\cdot(4n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-7\cdot(4n+1)}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28n-7}{3n+5}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-28-\frac{7}{n}}{3+\frac{5}{n}}}=e^{-\frac{28}{3}}.$$

Ответ. $e^{-\frac{28}{3}}$.

Производная функции

Задачи 11–20

Найти производные данных функций и их дифференциалы.

11. *а*) $y=3x^4-\dfrac{5}{\sqrt[4]{x}}+2$; *б*) $y=\dfrac{2x^2}{1-3x}$;

в) $y=2\cos x\cdot\ln x+\sqrt{1-4x^2}$.

12. *а*) $y = 5x^2 + 4\sqrt[3]{x^5} + 3;$ *б*) $y = \dfrac{x^3 - 2x}{3x};$

в) $y = \operatorname{arctg} x^4 - x \cdot \ln x.$

13. *а*) $y = \dfrac{1}{4}x^8 + 8\sqrt[8]{x^3} - 1;$ *б*) $y = \dfrac{4x^2 - 1}{1 - x^2};$

в) $y = \cos(\ln x) + x^2 \cdot \operatorname{tg} x.$

14. *а*) $y = \dfrac{1}{5}x^5 - 3x \cdot \sqrt[3]{x} - 4;$ *б*) $y = \dfrac{x+3}{2x-5};$

в) $y = \ln\sqrt{x-1} + x^3 \cdot \operatorname{arctg} x.$

15. *а*) $y = 3x^8 + 5\sqrt[5]{x^2} - 3;$ *б*) $y = \dfrac{3x^4}{x-3};$

в) $y = \operatorname{tg} e^x + \sin x \cdot \ln x.$

16. *а*) $y = 5x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3;$ *б*) $y = \dfrac{2x-1}{x^5};$

в) $y = \ln(\sin x) - x^6 \cdot \operatorname{tg} x.$

17. *а*) $y = 4x^3 + \dfrac{3}{x \cdot \sqrt[3]{x}} - 2;$ *б*) $y = \dfrac{1 - 6x^2}{1 + x};$

в) $y = \sqrt{\sin x} - x \cdot \operatorname{ctg} x.$

18. *а*) $y = 7x^5 - 3x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 6;$ *б*) $y = \dfrac{2x+4}{1+x^2};$

в) $y = \sqrt{\ln x} - (1 - 2x^2) \cdot \sin x.$

19. *а*) $y = 3x^4 - \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3;$ *б*) $y = \dfrac{x^6 - 1}{2x+1};$

в) $y = \operatorname{tg} x^2 + \sin x \cdot e^x.$

20. *а*) $y = 8x^2 - \dfrac{9}{x^2 \cdot \sqrt{x}} + 6;$ *б*) $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1};$

в) $y = \arcsin x^3 + \ln x \cdot \cos x.$

Методические указания к решению задач 11 – 20

Производная и дифференциал функции одной переменной

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что приращение аргумента стремится к нулю и указанный предел существует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Производная $f'(x_0)$ показывает скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0. Геометрически $f'(x_0) = tg\alpha,$ где α – угол наклона касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке x_0. Нахождение производной функции $f(x)$ называется её дифференцированием.

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной $dx = \Delta x$:

$$dy = f'(x)dx.$$

Правила дифференцирования. Пусть даны дифференцируемые функции u(x) и v(x), тогда справедливы формулы:

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(u - v)' = u' - v';$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

Отметим также, что:

а) производная от независимой переменной равна единице: $x' = 1;$

б) производная постоянной величины *с* равна нулю: $c' = 0;$

в) постоянный множитель выносится за знак производной:

$$(cu)' = c \cdot u'.$$

Производная сложной функции. Сложная функция (суперпозиция функций) – это функция вида $y = f(u)$, где $u = u(x)$, то есть это функция от функции. Например,

- функция $y = \sin 2x$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = \sin u$, где $u = 2x$;
- функция $y = e^{\operatorname{tg} x}$ является сложной, так как ее можно представить в виде $y = e^{u}$, где $u = \operatorname{tg} x$.

Производную сложной функции находят по правилу

$$\left[f(u(x)) \right]' = f'_u \cdot u'_x \ .$$

Таблица производных.

Производные основных элементарных функций	Производные сложных функций
1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	1. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
2. $(a^{x})' = a^{x} \ln a$ $(e^{x})' = e^{x}$	2. $(a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$ $(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$
3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	3. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
4. $(\sin x)' = \cos x$	4. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
5. $(\cos x)' = -\sin x$	5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	8. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
9. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	9. $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	10. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	11. $(\operatorname{arcctg} u)' = \dfrac{-1}{1+u^2} \cdot u'$

Задача. Найти производные данных функций и их дифференциалы.

Решение. *а*) $y = 4x^3 - \dfrac{6}{x^3 \cdot \sqrt{x}} + 3.$

Приведем функцию y к виду, удобному для дифференцирования, используя правила действия со степенями:

$$y = 4x^3 - \frac{6}{x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + 3 = 4x^3 - \frac{6}{x^{\frac{7}{2}}} + 3 = 4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3.$$

По правилу дифференцирования суммы и разности функций:

$$y' = \left(4x^3 - 6x^{-\frac{7}{2}} + 3\right)' = \left(4x^3\right)' - \left(6x^{-\frac{7}{2}}\right)' + 3' =$$

$$= 4 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot x^{-\frac{7}{2}-1} + 0 = 12x^2 + 21x^{-\frac{9}{2}} = 12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}.$$

Тогда дифференциал функции y:

$$dy = f'(x)dx = \left(12x^2 + \frac{21}{\sqrt{x^9}}\right) dx.$$

б) $y=\dfrac{1+9x}{x^3+3}$.

Воспользуемся правилом дифференцирования частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2},\quad \text{где}\ \ u=1+9x,\quad v=x^3+3.$$

$$y'=\left(\frac{1+9x}{x^3+3}\right)'=\frac{\left(1+9x\right)'\cdot(x^3+3)-(1+9x)\cdot\left(x^3+3\right)'}{(x^3+3)^2}=$$

$$=\frac{9\cdot(x^3+3)-(1+9x)\cdot 3x^2}{(x^3+3)^2}=\frac{9x^3+27-3x^2-27x^3}{(x^3+3)^2}=\frac{27-3x^2-18x^3}{(x^3+3)^2}.$$

Тогда дифференциал функции y:

$$dy=f'(x)dx=\frac{27-3x^2-18x^3}{(x^3+3)^2}\,dx.$$

в) $y=\sqrt{\cos x}-\operatorname{tg}x\cdot\ln x$.

Функция $\sqrt{\cos x}$ – сложная. Ее можно представить в виде $y=\sqrt{u}$, где $u=\cos x$. Применим формулу $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

$$\left(\sqrt{\cos x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\cdot(\cos x)'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Производную функции $\operatorname{tg}x\cdot\ln x$ находим по правилу дифференцирования произведения:

$$(uv)'=u'\cdot v+u\cdot v',\ \text{где}\ \ u=\operatorname{tg}x,\quad v=\ln x.$$

$$(\operatorname{tg}x\cdot\ln x)'=(\operatorname{tg}x)'\cdot\ln x+\operatorname{tg}x\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln x+\operatorname{tg}x\cdot\frac{1}{x}.$$

Таким образом,

$$y'=\left(\sqrt{\cos x}\right)'-\left(\operatorname{tg}x\cdot\ln x\right)'=\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{\ln x}{\cos^2 x}-\frac{\operatorname{tg}x}{x}.$$

Тогда дифференциал функции *y:*

$$dy = f'(x)dx = \left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\ln x}{\cos^2 x} - \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \right) dx.$$

Приложения производной

Задачи 21–30

Исследовать функцию $y = f(x)$ средствами дифференциального исчисления и построить её график.

21. $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3$. **22.** $y = -2x^3 + 6x^2$.

23. $y = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4$. **24.** $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

25. $y = \frac{1}{25}(5x^4 - x^5)$. **26.** $y = -2x^3 - 8x^2 - 8x$.

27. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$. **28.** $y = x^3 + 3x^2$.

29. $y = \frac{1}{50}(x^5 - 5x^4)$. **30.** $y = 2x^3 + 12x^2 + 18x$.

Методические указания к решению задач 21 – 30

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любых x из области определения функции справедливо равенство $f(-x)= f(x)$, причём область определения также симметрична относительно точки 0, в этом случае график функции симметричен относительно оси Oy.

Для *нечётной* функции для любых x из области определения справедливо равенство $f(-x)= -f(x)$, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T > 0$ такое, что для любых x из области определения функции справедливо $f(x+T)= f(x)$.

Проиллюстрируем *на примере некоторые важные свойства графика функции* (рис. 1).

Интервалы монотонности:

- функция возрастает при $x \in (a;c)$;

- функция убывает при $x \in (-\infty; a)$ и $x \in (c; +\infty)$.

Точки экстремума: C – точка максимума (max); A – точка минимума (min).

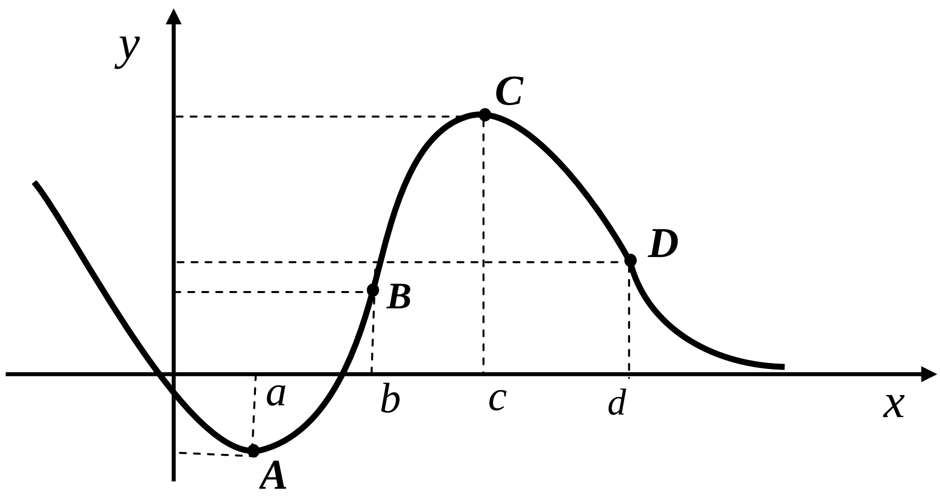


Рис. 1

Интервалы выпуклости и вогнутости:

- функция выпуклая при $x \in (b; d)$;
- функция вогнутая при $x \in (-\infty; b)$ и при $x \in (d; +\infty)$.

Точки B и D являются точками перегиба, так как в них происходит смена выпуклости и вогнутости.

Правило исследования функции $y = f(x)$

на монотонность и точки экстремума.

а) Вычислить первую производную $f'(x)$.

б) Найти *критические* точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

в) Определить знак производной на интервалах между критическими точками в области определения функции.

г) Сделать выводы о промежутках монотонности функции согласно *признакам монотонности:*

если $f'(x) < 0$ на $(a;b)$, то функция убывает при $x \in (a; b)$,

если $f'(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция возрастает при $x \in (a; b)$.

д) Сделать выводы о наличии точек экстремума согласно *достаточному признаку существования экстремума:*

если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Правило исследования функции y = f(x) на выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

а) Вычислить вторую производную $f''(x)$.

б) Найти точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, эти точки называются подозрительными на перегиб.

в) Определить знак второй производной на интервалах между найденными точками в области определения функции.

г) Сделать выводы о промежутках выпуклости и вогнутости согласно *признакам выпуклости и вогнутости:*

если $f''(x) > 0$ на $(a;b)$, то график вогнутый при $x \in (a;b)$,
если $f''(x) < 0$ на $(a;b)$, то график выпуклый при $x \in (a;b)$

д) Сделать выводы о наличии точек перегиба согласно *достаточному условию существования точек перегиба:* если при переходе через подозрительную на перегиб точку вторая производная меняет знак, то в этой точке имеется перегиб графика функции.

Задача. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ и построить ее график**.**

Решение. Исследование будем проводить по следующей схеме.
1. *Область определения функции*.
В нашем примере это множество всех действительных чисел, то есть $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. *Четность и нечетность функции*.

$$f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^3 - 4(-x)^2 + 8(-x) = -\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq \pm f(x).$$

Функция не обладает свойствами четности или нечетности. Следовательно, график функции не будет симметричен ни относительно оси О*y*, ни относительно начала координат.
3. *Периодичность функции*.
Данная функция непериодическая, так как является многочленом.

4. *Непрерывность функции*.

На всей области определения данная функция непрерывна как многочлен.

5. *Поведение функции на концах области определения.*

Концами области определения являются $-\infty$ и $+\infty$, так как $x \in (-\infty; +\infty)$. Найдем пределы функции при $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x\right) = \lim_{x\to+\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = -\infty \cdot \frac{1}{2} = -\infty.$$

Таким образом, слева, при $x \to -\infty$, график функции уходит неограниченно вниз, а справа, при $x \to +\infty$, – неограниченно вверх.

6. *Интервалы монотонности и точки экстремума*.

Вычислим производную функции и найдем критические точки.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 8 = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8.$$

Производная существует при любых *x*. Решим уравнение $y' = 0$.

$$\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 = 0.$$

$$3x^2 - 16x + 16 = 0.$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16 = 64;$$

$$x_1 = \frac{16 - \sqrt{64}}{6} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}, \qquad x_2 = \frac{16 + \sqrt{64}}{6} = 4.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 4).$$

Точки $x_1 = \dfrac{4}{3}$ и $x_2 = 4$ − критические. Они делят область определения функции на интервалы: $\left(-\infty; \dfrac{4}{3}\right)$, $\left(\dfrac{4}{3};\ 4\right)$, $(4;\ +\infty)$. Изобразим эти интервалы на числовой оси (рис. 2).

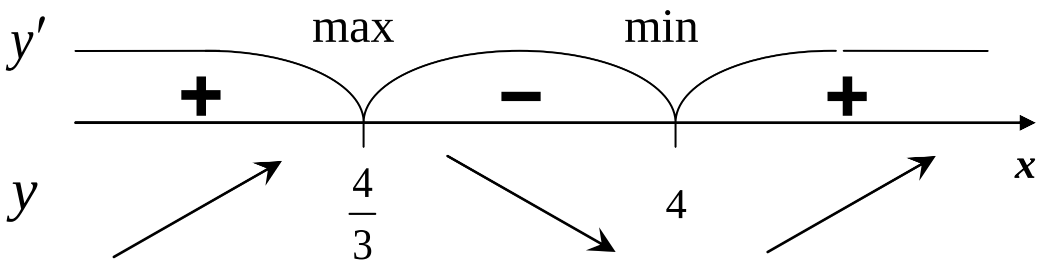


Рис. 2

Поведение функции на каждом интервале определяется знаком производной. Для определения знака y' на интервале достаточно взять любое значение x из рассматриваемого интервала и подставить его в производную y'.

а) На интервале $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$ выберем число, например, $x=0$, и подставим его в производную: $y'(0)=\frac{3}{2}(0-4)\left(0-\frac{4}{3}\right)>0$.

Так как на интервале $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$ производная $y'>0$, следовательно, функция y возрастает на этом интервале (см. признаки монотонности).

б) На интервале $\left(\frac{4}{3};\ 4\right)$ возьмем $x=3$, подставим в производную, получим $y'(3)=\frac{3}{2}(3-4)\left(3-\frac{4}{3}\right)<0$. Следовательно, на интервале $\left(\frac{4}{3};\ 4\right)$ функция убывает.

в) На интервале $(4;+\infty)$ возьмем значение $x=5$. Видим, что $y'(5)=\frac{3}{2}(5-4)\left(5-\frac{4}{3}\right)>0$, следовательно, на интервале $(4;\ +\infty)$ функция возрастает.

Знаки первой производной проставим на рис. 2. При переходе через точку $x=\frac{4}{3}$ производная меняет знак с плюса на минус, значит, $x=\frac{4}{3}$ является точкой максимума (см. признак экстремума).

Найдем значение функции y в этой точке:

$$y_{\max}=y\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2+8\cdot\frac{4}{3}=\frac{128}{27}=4\frac{20}{27}.$$

Таким образом, график имеет максимум в точке $A\left(1\frac{1}{3};\quad 4\frac{20}{27}\right)$.

При переходе через точку $x=4$ производная меняет знак с минуса на плюс (рис. 2). Это означает, что $x=4$ – точка минимума.

$$y_{\min}=y(4)=\frac{1}{2}\cdot 4^3-4\cdot 4^2+8\cdot 4=0.$$

В точке $B(4;0)$ график функции имеет минимум.

7. *Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.*
Найдем производную второго порядка от рассматриваемой функции $y=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x$. Так как $y'=\frac{3}{2}x^2-8x+8$, то $y''=3x-8$. Вторая производная существует при любых значениях x. Найдем точки, где $y''=0$:

$$3x-8=0 \Rightarrow \quad x=\frac{8}{3}.$$

Значение $x = 8/3$ является единственным, подозрительным на перегиб. Эта точка делит область определения $(-\infty;+\infty)$ на интервалы $\left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$ и $\left(\frac{8}{3};\ +\infty\right)$ (см. рис. 4).

а) На интервале $\left(-\infty;\ \frac{8}{3}\right)$ выберем любое число, например, $x=0$ и подставим его во вторую производную $y''=3x-8$. Получим $y''(0)=3\cdot 0-8<0$, значит, на этом интервале график функции выпуклый (см. признак выпуклости и вогнутости).

б) На интервале $\left(\dfrac{8}{3};+\infty\right)$ возьмем, например, $x=5$ и подставим во вторую производную. Получим $y''(5)=3\cdot 5-8>0$, значит, на этом интервале график функции вогнутый. Знаки второй производной проставим на рис. 3.

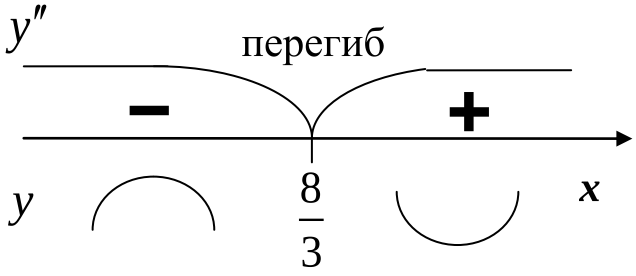


Рис. 3

Так как при переходе через точку $x=\dfrac{8}{3}$ вторая производная y'' меняет знак, то $x=\dfrac{8}{3}$ – точка перегиба (см. условие перегиба).

$$y_{перегиб}=y\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{64}{27}=2\frac{10}{27}.$$

Таким образом, точка $C\left(2\dfrac{2}{3};\ 2\dfrac{10}{27}\right)$ – единственная точка перегиба.

8. *Точки пересечения графика с осями координат*.

На оси О*y* для всех точек выполнено условие $x=0$, поэтому $y(0)=\dfrac{1}{2}\cdot 0^3-4\cdot 0^2+8\cdot 0=0.$ Получена точка пересечения с осью О*y*: (0;0). Для всех точек на оси О*x* выполняется условие $y=0$, тогда

$$\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x=0, \quad \text{то есть} \quad x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)=0.$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, в нашем случае $x=0$ или $\frac{1}{2}x^2-4x+8=0$. Решим это квадратное уравнение: $D=4^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 8=0$; $\quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{1}=4.$

Значения функции в точках $x=0$ и $x=4$ были найдены ранее: $y(0)=0,\quad y(4)=0.$ Таким образом, график функции пересекает ось Оx в точках (0;0) и (4;0).

9. *Дополнительные точки.*

Для более точного построения графика можно найти дополнительные точки. Например, найдем значение функции y при $x=5$:

$$y(5)=\frac{1}{2}\cdot 5^3-4\cdot 5^2+8\cdot 5=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

$D(5;\,2{,}5)$ – дополнительная точка для построения графика.

Выпишем результаты исследования функции $y=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x$.

1. Область определения $(-\infty;+\infty)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty.$
3. Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty;\ 1\frac{1}{3}\right)$ и $(4;\ +\infty)$,

   убывает на промежутке $\left(1\frac{1}{3};\ 4\right)$.
4. Максимум функции в точке $A\left(1\frac{1}{3};\ 4\frac{20}{27}\right)$, минимум – в точке $B(4;0)$.
5. График выпуклый на интервале $\left(-\infty;2\frac{2}{3}\right)$ и вогнутый на интервале $\left(2\frac{2}{3};\ +\infty\right)$.
6. Точка перегиба $C\left(2\frac{2}{3};\ \ 2\frac{10}{27}\right)$
7. Точки пересечения с осями координат: (0;0), (4;0).
8. Дополнительная точка $D(5;\,2{,}5)$.

Построим график функции (рис. 4). На плоскости Оxy отметим все характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки экстремумов, точку перегиба, а также дополнительную точку.

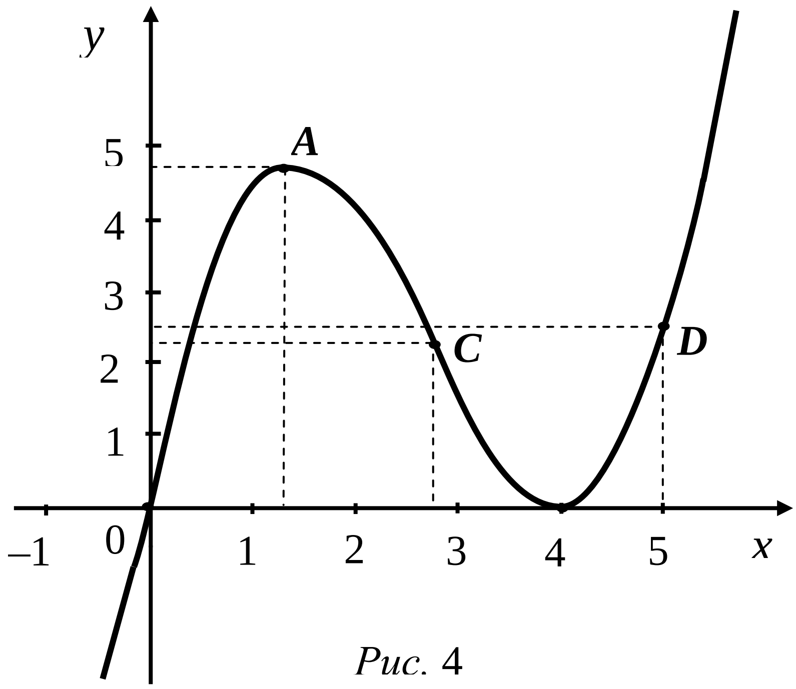


Рис. 4

В силу непрерывности функции соединим все отмеченные точки плавной кривой, продолжив график влево вниз и вправо вверх согласно поведению функции на концах области определения и учитывая характер монотонности и выпуклости графика функции.

Неопределенный интеграл

Задачи 31– 40

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

31. *а*) $\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx$;

б) $\int \cos\left(\frac{2x-5}{3}\right)dx$;

в) $\int x^2 \cdot \sqrt{4-5x^3}\ dx$;

32. *а*) $\int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt[3]{x}}dx$;

б) $\int \sqrt{4-3x}\ dx$;

в) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$;

33. *а*) $\int \frac{2+3x^3+x\sqrt{x}}{x}dx;$

б) $\int \cos(2x-1)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx;$

34. *а*) $\int \frac{x-2\sqrt[3]{x^2}+1}{x}dx;$

б) $\int e^{3-2x}dx;$

в) $\int \frac{x^2}{(3-2x^3)^2}dx;$

35. *а*) $\int \frac{x^5-x^3\cdot\sqrt{x}+1}{x^2}dx;$

б) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{5}dx;$

в) $\int x^3e^{x^4+2}dx;$

36. *а*) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-x^2-3}{x}dx;$

б) $\int \frac{1}{(3+2x)^5}dx;$

в) $\int \frac{1}{(x-1)\ln^2(x-1)}dx;$

37. *а*) $\int \frac{x^5-x+1}{\sqrt[3]{x}}dx;$

б) $\int (2x+5)^6dx;$

в) $\int x\cos(x^2-1)dx;$

38. *а*) $\int \frac{x^4-9\sqrt[3]{x}-5}{x^2}dx;$

б) $\int \cos(2-3x)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt[3]{tgx}}{\cos^2 x}dx;$

39. *а*) $\int \frac{x^3+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx;$

б) $\int e^{-0,5x+1}dx;$

в) $\int \frac{x^2-e^{3x}}{x^3-e^{3x}}dx;$

40. *а*) $\int \frac{x^2+3\sqrt[3]{x}+4}{x}dx;$

б) $\int \sin\left(\frac{1-3x}{4}\right)dx;$

в) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx;$

Методические указания к решению задач 31 – 40

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$.

Множество всех первообразных функции $f(x)$ задается формулой $F(x)+C$, где C – произвольное число, и называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$
2. $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx,$

где k – постоянная, отличная от нуля.

Таблица интегралов.

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$
3. $\int x^{\alpha} \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$
6. $\int \sin x \ dx = -\cos x + C;$
7. $\int \cos x \ dx = \sin x + C;$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + C;$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + C;$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C;$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg}\, x + C;$
13. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C;$
14. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left| \, x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$

Примечание. Формулы верны, когда переменная x является независимой переменной, а также когда x является функцией другой переменной: $x = x(t)$.

Основные методы интегрирования

Идея всех методов интегрирования заключается в приведении искомого интеграла к табличному интегралу или сумме табличных интегралов.

1) *Непосредственное интегрирование.*
Интеграл приводится к табличному виду путем алгебраических или тригонометрических преобразований.

2) *Замена переменной (интегрирование подстановкой).*
Сведение интеграла к табличному виду осуществляется с помощью подстановки $t = \varphi(x)$. Тогда дифференциал dt равен

$$dt = \varphi'(x)dx.$$

Рекомендации по введению новой переменной даны ниже в примерах.

Обратите внимание! Интегрирование – это операция, обратная дифференцированию. Если интеграл взят правильно, то производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x).$$

Задача. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

Решение. В контрольной работе интеграл, обозначенный буквой *a* берется методом непосредственного интегрирования. При этом используются табличные интегралы от степенных функций:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Используются также правила действий со степенями.

$$a)\ \int \frac{3\sqrt[3]{x}-2+6x^4}{\sqrt[3]{x^4}}dx=\int\left(\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}-\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}+\frac{6x^4}{x^{\frac{4}{3}}}\right)dx=$$

$$=\int\left(3x^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}-2x^{-\frac{4}{3}}+6x^{4-\frac{4}{3}}\right)dx=\int\left(3x^{-1}-2x^{-\frac{4}{3}}+6x^{\frac{8}{3}}\right)dx=$$

$$=\int\frac{3}{x}\ dx-\int 2x^{-\frac{4}{3}}dx+\int 6x^{\frac{8}{3}}dx=3\int\frac{dx}{x}-2\int x^{-\frac{4}{3}}dx+6\int x^{\frac{8}{3}}dx=$$

$$=3\ln|x|-2\frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1}+6\frac{x^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1}+C=3\ln|x|-2\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}+6\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}}+C=$$

$$=3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^{3\frac{2}{3}}+C=3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}+C.$$

Проверка.

$$\left(3\ln|x|+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+\frac{18}{11}x^3\cdot\sqrt[3]{x^2}+C\right)'=\left(3\ln|x|\right)'+\left(6x^{-\frac{1}{3}}\right)'+\left(\frac{18}{11}x^{\frac{11}{3}}\right)'+C'=$$

$$=3\frac{1}{x}+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}-1}+\frac{18}{11}\cdot\frac{11}{3}x^{\frac{11}{3}-1}+0=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^{\frac{4}{3}}}+6x^{\frac{8}{3}}=$$

$$=\frac{3x^{\frac{1}{3}}-2+6x^{\frac{8}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}}=\frac{3\sqrt[3]{x}-2+6x^4}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

Интеграл *б* в контрольной работе берется методом замены переменной (подстановкой). Приведем ряд примеров.

1*б*. $\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx.$

За новую переменную возьмем *аргумент подынтегральной функции* $t=\frac{1-2x}{3}$ и найдем dt по формуле:

$$dt=t'(x)dx=\left(\frac{1-2x}{3}\right)'dx=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}x\right)'dx=\left(0-\frac{2}{3}\cdot 1\right)dx=-\frac{2}{3}dx.$$

Тогда

$$\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)dx=\left|\begin{array}{l} t=\frac{1-2x}{3} \\ dt=-\frac{2}{3}dx \\ dx=-\frac{3}{2}dt \end{array}\right|=\int \sin t\cdot\left(-\frac{3}{2}dt\right)=-\frac{3}{2}\int \sin t\cdot dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\left(-\cos t\right)+C=\frac{3}{2}\cos t+C=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)+C.$$

В последнем действии осуществлен переход к исходной переменной x с учетом, что $t=\frac{1-2x}{3}$.

Проверка.

$$\left(\frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)+C\right)'=\frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right)\right)'+C'=$$

$$=-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)\cdot\left(\frac{1-2x}{3}\right)'+0=-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\sin\left(\frac{1-2x}{3}\right).$$

Что и требовалось показать.

2 *б*. $\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx.$

За новую переменную возьмем *показатель степени* $t=1-\frac{1}{3}x.$

Тогда

$$\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1-\frac{1}{3}x \\ dt = -\frac{1}{3}dx \\ dx = -3dt \end{array} \right| = \int e^t\left(-3dt\right) = -3\int e^t dt = -3e^t + C = -3e^{1-\frac{1}{3}x} + C.$$

Проверка.

$$\left(-3e^{1-\frac{1}{3}x}+C\right)' = -3\left(e^{1-\frac{1}{3}x}\right)' + C' = -3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(1-\frac{1}{3}x\right)' + 0 =$$

$$= -3e^{1-\frac{1}{3}x}\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{1-\frac{1}{3}x}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

3*б*. $\displaystyle\int \frac{1}{(4-3x)^7}dx.$

За новую переменную возьмем *функцию, стоящую в основании степени* $t = 4-3x$. Тогда

$$\int \frac{1}{(4-3x)^7}dx = \left| \begin{array}{l} t = 4-3x \\ dt = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int t^{-7}\left(-\frac{1}{3}dt\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-7}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-7+1}}{-7+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\cdot(-6)}\cdot t^{-6} + C = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{t^6} + C = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6} + C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{(4-3x)^6}+C\right)' = \frac{1}{18}\left((4-3x)^{-6}\right)' + C' =$$

$$= \frac{1}{18}(-6)(4-3x)^{-6-1}(4-3x)' + 0 = -\frac{1}{3}(4-3x)^{-7}(-3) = \frac{1}{(4-3x)^7}.$$

Получена подынтегральная функция.

Интеграл под буквой *в* в контрольной работе также берется методом замены переменной (подстановкой). Ознакомимся с примерами таких подстановок.

1*в*. $\int x\sin(2-3x^2)dx$.

За новую переменную удобно взять *аргумент тригонометриической функции,* если к тому же под интегралом присутствует производная этого аргумента в качестве множителя.

$$\int x\sin(2-3x^2)dx=\left|\begin{array}{l} t=2-3x^2 \\ dt=-6xdx \\ xdx=-\dfrac{1}{6}dt \end{array}\right|=\int \sin t\left(-\frac{1}{6}dt\right)=-\frac{1}{6}\int \sin t dt=$$

$$=\frac{1}{6}\cos t+C=\frac{1}{6}\cos(2-3x^2)+C.$$

Проверка.

$$\left(\frac{1}{6}\cos(2-3x^2)+C\right)'=\frac{1}{6}\Big(-\sin(2-3x^2)\Big)(-6x)+0=x\sin(2-3x^2).$$

2*в*. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Здесь за новую переменную удобно принять *показатель степени*, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этого показателя (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array}\right|=\int e^t\left(2dt\right)=2\int e^t dt=2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}+C.$$

Проверка.

$$\left(2e^{\sqrt{x}}+C\right)'=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)'+C'=2e^{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}+0=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.$$

3*в*. $\int \sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}\,dx.$

За новую переменную удобно взять *подкоренное выражение*, так как под интегралом присутствует также его производная (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}\,dx=\left|\begin{array}{l} t=3-4\cos 3x \\ dt=-4\left(-\sin 3x\right)\cdot 3dx \\ \sin 3x\cdot dx=\dfrac{1}{12}dt \end{array}\right|=\int \sqrt[6]{t}\cdot\frac{1}{12}dt=$$

$$=\frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{6}}\cdot dt=\frac{1}{12}\cdot\frac{t^{7/6}}{7/6}+C=\frac{1}{14}\sqrt[6]{\left(3-4\cos 3x\right)^{7}}+C.$$

Проверка.

$$\left[\frac{1}{14}\left(3-4\cos 3x\right)^{\frac{7}{6}}+C\right]'=\frac{1}{14}\cdot\frac{7}{6}\cdot\left(3-4\cos 3x\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(3-4\cos 3x\right)'=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot\left(3-4\cos 3x\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left[0-4\cdot\left(-\sin 3x\right)\cdot\left(3x\right)'\right]=\sin 3x\,\sqrt[6]{3-4\cos 3x}.$$

Получена подынтегральная функция, что и требовалось показать.

4*в*. $\int \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx.$

За новую переменную берем функцию, стоящую в *основании степени*, так как подынтегральное выражение содержит производную этой функции (с точностью до постоянного множителя).

$$\int \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = 2+x^4 \\ dt = 4x^3dx \\ x^3dx = \frac{1}{4}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{t^2} = \frac{1}{4}\int t^{-2}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4(2+x^4)} + C.$$

Проверка.

$$\left(-\frac{1}{4(2+x^4)} + C\right)' = -\frac{1}{4}(-1)\left(2+x^4\right)^{-2}\left(2+x^4\right)' + C' =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2+x^4\right)^{-2}\cdot 4x^3 + 0 = \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}.$$

Основные теоремы теории вероятностей

Задачи 41–50

Партия мужских костюмов состоит из k костюмов производителя *«A»* и m костюмов производителя *«B»*. Некто наугад выбирает из партии один за другим два костюма. Найти вероятность того, что

а) оба костюма изготовлены производителем *«A»*;

б) выбраны костюмы разных производителей;

в) хотя бы один из них изготовлен производителем *«A»*.

Найти вероятности указанных событий, если костюмы выбираются по схеме выборки: 1) с возвращением; 2) без возвращения.

41. $k = 3$, $m = 5$.

42. $k = 4$, $m = 6$.

43. $k = 4$, $m = 3$.

44. $k = 5$, $m = 3$.

45. $k = 6$, $m = 4$.

46. $k = 3$, $m = 4$.

47. $k = 4$, $m = 5$.

48. $k = 6$, $m = 3$.

49. $k = 5$, $m = 4$.

50. $k = 3$, $m = 6$.

Методические указания к решению задач 41-50

Основные понятия теории вероятностей

Испытание **–** это изначальное понятие**,** разъясняется как действие, наблюдение, опыт и прочее.

Событие – это результат испытания.

Пример 1: Некто подбросил монету, которая упала орлом (гербом) вверх. Здесь испытание – подбрасывание монеты, а результат этого испытания – выпадение орла – это событие.

Пример 2: В результате подбрасывания игрального кубика выпало три очка на верхней грани. В этом случае, испытание – подбрасывание кубика, а выпадение трех очков – событие.

Заметим, что монета (пример 1) могла упасть не орлом, а решкой (цифрой) вверх. Аналогично (пример 2), подбрасывание кубика могло бы закончиться выпадением, например, двух или пяти очков. Событие, которое в результате испытания может произойти, а может и не произойти, называется *случайным.*

Пусть в результате испытания могут появиться несколько событий. События называются *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других.

Пример 3: Рассмотрим такое испытание, как сдача экзамена по математике одним из студентов. События, которые, например, могут произойти в результате этого испытания, есть следующие:

A – экзамен сдан на оценку «4»,

B – экзамен сдан на оценку «3»,

C – экзамен сдан на оценку выше, чем «3».

В этом случае, события *А* и *В* несовместны, так как получение оценки «3» делает невозможным получение оценки «4» за этот же экзамен. Наоборот, события *А* и *С* совместны, поскольку они могут произойти одновременно.

Пространством элементарных исходов (или *событий*), соответствующих рассматриваемому испытанию, будет называться такое множество несовместных событий, одно из которых обязательно произойдет в результате испытания, причём любой интересующий нас результат испытания может быть однозначно описан с помощью элементов этого множества.

В примере с игральным кубиком пространство элементарных исходов образуют 6 событий: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6,$ которые заключаются в том, что количество выпавших очков составит соответственно 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Действительно, эти события несовместны, одно из них обязательно произойдет в результате подбрасывания кубика, и с их помощью можно описать любые другие события. Например, событие *А* – выпало четное число очков – означает, что появились события E_2 или E_4 или E_6, эти три элементарных исхода благоприятствуют наступлению события *А*.

Классическое определение вероятности

Элементарные исходы называются *равновозможными,* если ни у одного из них нет преимуществ перед другими, чтобы произойти в результате испытания.

Вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению числа m благоприятствующих событию A элементарных исходов к общему числу n элементарных равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 4. Рассмотрим пример с урновой схемой (урна – ёмкость с шарами).

Пусть в урне находится 20 одинаковых шаров, которые отличаются только цветом, например, 12 из них красные, а остальные – белые. Некто подходит к урне и наугад выбирает один шар. Найдем вероятность того, что этот шар – красный.

Пусть событие K – выбран красный шар. Всего элементарных исходов n = 20 (по количеству шаров), причём все эти исходы равновозможные. Событию K благоприятствует m = 12 исходов (по количеству красных шаров), поэтому

$$P(K) = \frac{m}{n} = \frac{12}{20} = 0{,}6.$$

Вероятность любого события может принимать значения только от 0 до 1 включительно, то есть

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Достоверное событие – обязательно произойдет в результате испытания, то есть $m = n$, так как все исходы благоприятные:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Невозможное событие – не может произойти в результате испытания, то есть m = 0, так как благоприятных исходов нет:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Случайное событие – может произойти или не произойти в результате испытания:

$$0<P(A)<1.$$

Вероятность является числовой мерой объективной возможности наступления события. Вероятность можно задать в процентах, например $P(A)$= 0,8 (80%).

Основные теоремы теории вероятностей

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

Пример 5. В урне имеется 3 белых и 2 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение: Изначально в урне было 5 шаров, из которых 3белых и 2 черных. После первого испытания в урне осталось 4 шара, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P_A(B)$= 3/4.

События A и B называются *независимыми*, если появление одного из этих событий не изменяет вероятности наступления другого, то есть $P(A) = P_B(A)$ или $P(B) = P_A(B)$. В противном случае события называются *зависимыми*.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$$

Событие $\overline{A}$ (не A) называется *противоположным* событию A, если оно наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

Пример 6: *а*) Событие A – изделие бракованное, тогда $\overline{A}$ – изделие без брака; *б*) B – студент сдал экзамен, тогда событие $\overline{B}$ – студент не сдал экзамен; *с*) C – хотя бы один лотерейный билет выигрышный, тогда $\overline{C}$ – нет выигрышных билетов. Из приведенных примеров видно, что противоположное событие можно сформулировать путем простого логического отрицания.

Вероятность противоположного события находится по формуле

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Задача. В партии, состоящей из одинаковых по внешнему виду изделий, смешаны 40 изделий первого сорта и 60 изделий второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наугад два изделия окажутся:

а) оба первого сорта;

б) разных сортов;

в) хотя бы одно из них первого сорта.

Найти указанные вероятности, если изделия выбираются по схеме выборки 1) с возвращением; 2) без возвращения.

Решение. 1. Пусть изделия выбирают по схеме выборки с возвращением. В этом случае первое изделие из партии выбирается случайным образом, определяется его сортность, затем оно возвращается в партию и может быть выбрано повторно. Второе изделие выбирается из той же партии, состоящей из ста изделий. Обозначим:

событие A – первое взятое изделие I сорта,

событие $\overline{A}$ – первое взятое изделие II сорта (не I сорта),

событие B – второе взятое изделие I сорта ,

событие $\overline{B}$ – второе взятое изделие II сорта (не I сорта).

Заметим, что в рассматриваемом случае события A и B независимые, так как вероятность события B не зависит от того, какого сорта было выбрано первое изделие.

а) P(оба изделия I сорта) = $P(A$ и $B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0{,}16.$

Здесь мы воспользовались теоремой умножения вероятностей независимых событий.

б) P (изделия разных сортов) = $P(A$ и $\overline{B}$ или $\overline{A}$ и $B)$ =

$= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0{,}4 \cdot 0{,}6 +$

$+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}48.$

Здесь мы воспользовались теоремой сложения несовместных событий и теоремой умножения для независимых событий.

в) P (хотя бы одно изделие I сорта) = 1 – P (нет ни одного изделия I сорта) = 1 – P (оба изделия II сорта) = 1 – $P(\overline{A}$ и $\overline{B})$ = 1 – $P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - \frac{60}{100} \cdot \frac{60}{100} = 0{,}64.$

Здесь мы воспользовались формулой для нахождения вероятности противоположного события.

2. Пусть изделия выбирают по схеме выборки без возвращения. В этом случае первое изделие из партии выбирается случайным образом, определяется его сортность, но в партию оно не возвращается. Второе изделие выбирается из оставшихся изделий. Подчеркнем,

что в этом случае события A и B являются зависимыми. Найдем вероятности событий.

а) P(оба изделия I сорта) = $P(A$ и $B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} = \frac{78}{495}$.

Здесь воспользовались теоремой умножения вероятностей для зависимых событий. Поясним более подробно, как были найдены вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$. При выборе первого изделия: общее число исходов равно 100 (по числу изделий) и все они равновозможны. Благоприятствующих из них событию A – 40 (по числу изделий I сорта). По классическому определению вероятности, $P(A) = m / n = 40 /100$. Найдем условную вероятность $P_A(B)$, то есть вероятность выбрать второе изделие I сорта при условии, что первое выбранное изделие было также I сорта. Посмотрим, как изменился состав партии после того, как выбрали первое изделие: изделий в партии осталось 100 – 1 = 99 (первое забрали), среди них изделий первого сорта осталось 40 – 1 = 39 (выбранное первое изделие было I сорта). Далее, выбираем второе изделие: общее число исходов этого испытания 99 (по числу оставшихся изделий). Благоприятствующих из них событию B – 39 (по числу оставшихся изделий I сорта). По классическому определению вероятности,

$$P_A(B) = m / n = 39 /99.$$

б) P (изделия разных сортов) = $P(A$ и $\overline{B}$ или $\overline{A}$ и $B) =$

$$= P(A) \cdot P_A(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = \frac{40}{100} \cdot \frac{60}{99} + \frac{60}{100} \cdot \frac{40}{99} = \frac{16}{33} .$$

Здесь мы воспользовались теоремой сложения вероятностей несовместных событий и теоремой умножения вероятностей зависимых событий.

в) P (хотя бы одно изделие I сорта) = 1 – P (ни одного нет изделия I сорта) = 1 – P (оба изделия II сорта) = $1 - P(\overline{A}$ и $\overline{B}) =$

$$1 - P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - \frac{60}{100} \cdot \frac{59}{99} = \frac{106}{165}.$$

Повторные независимые испытания

Задачи 51-60

Вероятность того, что в результате проверки изделию будет присвоен знак «изделие высшего качества» равна p. На контроль поступило n изделий. Какова вероятность того, что знак высшего качества будет присвоен:

а) ровно k изделиям;

б) более чем m изделиям;

в) хотя бы одному изделию?

Указать наивероятнейшее количество изделий, получивших знак высшего качества, и найти соответствующую ему вероятность.

51. $n = 8$; $p = 0{,}4$; $k = 5$; $m = 6$.

52. $n = 7$; $p = 0{,}3$; $k = 4$; $m = 5$.

53. $n = 6$; $p = 0{,}2$; $k = 3$; $m = 4$.

54. $n = 5$; $p = 0{,}3$; $k = 2$; $m = 3$.

55. $n = 4$; $p = 0{,}6$; $k = 1$; $m = 2$.

56. $n = 9$; $p = 0{,}2$; $k = 6$; $m = 7$.

57. $n = 7$; $p = 0{,}7$; $k = 3$; $m = 4$.

58. $n = 6$; $p = 0{,}4$; $k = 1$; $m = 3$.

59. $n = 8$; $p = 0{,}6$; $k = 4$; $m = 5$.

60. $n = 5$; $p = 0{,}5$; $k = 3$; $m = 2$.

Методические указания к решению задач 51 – 60

Повторение независимых испытаний

Пусть известна вероятность появления события A в каждом испытании: $P(A) = p$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - p = q$ – вероятность не появления события A. Испытание повторяется n раз. Требуется найти вероятность того, что событие A наступит при этом ровно k раз.

Обозначим $P_n(k)$ – вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит k раз. Эта вероятность находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где ! - знак факториала, математической операции такой, что

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Например,

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

Внимание: $0! = 1$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ и т. д.

Наивероятнейшее число появлений события

Пусть в n повторных испытаниях событие A появляется k раз, где k может принимать значения: 0; 1; 2; …; n (то есть $0 \le k \le n$). Для каждого из этих значений k можно найти соответствующую ему вероятность по формуле Бернулли.

Значение k, которому соответствует самая большая вероятность, называется *наивероятнейшим числом появления события А.*

Наивероятнейшее число k_0 находится как целое число из промежутка:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

При этом k_0 может принимать либо одно значение, либо два соседних целых значения с одинаковой вероятностью.

Вероятность $P_n(k_0)$, соответствующую значению $k = k_0$, находим по формуле Бернулли.

Появление события хотя бы один раз

Вероятность появления события «хотя бы один раз» в n испытаниях находится с помощью противоположного ему события «ни одного раза»:

P_n (событие наступит хотя бы один раз) = 1 – P_n (ни разу)

$$= 1 - P_n(0) = 1 - \frac{n!}{0! \cdot n!} \cdot p^0 \cdot q^{n-0} = 1 - q^n,$$

при этом учтено, что $0! = 1$ и $p^0 = 1$.

Событие наступит «хотя бы один раз» означает, что оно наступит один или более раз, поэтому можно записать:

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

Задача. Стрелок поражает цель с вероятностью 0,7. С какой вероятностью в серии из 5 выстрелов он поразит мишень:

а) ровно два раза;

б) более трех раз;

в) хотя бы один раз;

Указать наивероятнейшее число попаданий и соответствующую ему вероятность.

Решение. По условию задачи: $p = 0{,}7$; $n = 5$; $k = 2$; $m = 3$; вероятность промаха $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

а) Вероятность попадания ровно два раза в серии из пяти выстрелов находим по формуле Бернулли:

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot p^2 \cdot q^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3 =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 10 \cdot 0{,}01323 = 0{,}1323.$$

б) Событие «стрелок поразит мишень более трех раз» запишем в виде: $m > 3$, тогда

$$P_5(m > 3) = P_5(4 \text{ или } 5) = P_5(4) + P_5(5).$$

Здесь применена теорема сложения вероятностей несовместных событий. Используя формулу Бернулли, найдем:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} \cdot p^4 \cdot q^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 5 \cdot 0{,}2401 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015;$$

$$P_5(5) = \frac{5!}{5! \cdot 0!} \cdot p^5 \cdot q^0 = 1 \cdot p^5 \cdot 1 = 0{,}7^5 = 0{,}16807;$$

$$P_5(m > 3) = 0{,}36015 + 0{,}16807 = 0{,}52822.$$

в) Событию D – «стрелок поразит мишень хотя бы 1 раз», противоположно событие $\overline{D}$ – «не поразит ни разу», то есть стрелок промахнется все пять раз, следовательно, число попаданий $k = 0$:

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P_5(0) = 1 - \frac{5!}{0!\cdot 5!}\cdot p^0 \cdot q^5 = 1 - q^5 =$$

$$= 1 - 0{,}3^5 = 1 - 0{,}00243 = 0{,}99757.$$

Здесь учтено, что $0! = 1$ и $p^0 = 1$.

Наивероятнейшее число попаданий k_0 находим как *целое* число из промежутка:

$$np - q \le k_0 \le np + p\ ;$$

$$5 \cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le k_0 \le 5 \cdot 0{,}7 + 0{,}7\ ;$$

$$3{,}2 \le k_0 \le 4{,}2\ ;$$

$$k_0 = 4\ .$$

Соответствующую ему вероятность $P_5(4)$ вычислим по формуле Бернулли. В данной задаче она уже была найдена выше:

$$P_5(4) = \frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 = 0{,}36015.$$

Обработка выборочных данных

Задачи 61 – 70

По итогам выборочных обследований, для некоторой категории сотрудников, величина их месячного заработка x_i тыс. руб. и соответствующее количество сотрудников n_i представлены в виде интервального статистического распределения.

а) Построить гистограмму относительных частот распределения.

б) Найти основные характеристики распределения выборочных данных: среднее выборочное значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам точечным образом.

г) Зная, что значения признака X в генеральной совокупности подчинены нормальному закону распределения, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания (генерального среднего значения) с надежностью γ считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

61.

X	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
n_i	5	10	20	15	10

$\gamma = 0{,}95$

62.

X	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
n_i	2	5	15	10	8

$\gamma = 0{,}90$

63.

X	7-9	9-11	11-13	13-15	15-17
n_i	5	10	20	15	10

$\gamma = 0{,}92$

64.

X	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
n_i	7	12	18	13	15

$\gamma = 0{,}94$

65.

X	6-10	10-14	14-20	20-24	24-28
n_i	5	12	20	15	8

$\gamma = 0{,}91$

66.

X	5-7	7-8	8-9	9-10	10-11
n_i	7	15	22	18	8

$\gamma = 0{,}93$

67.

X	9-11	11-13	13-15	15-17	17-19
n_i	8	13	15	15	7

$\gamma = 0{,}85$

68.

X	7-11	11-15	15-19	19-23	23-27
n_i	5	15	25	18	12

$\gamma = 0{,}99$

69.

X	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
n_i	8	15	19	22	12

$\gamma = 0{,}98$

70.

X	8-11	11-14	14-17	17-20	20-23
n_i	3	7	20	15	5

$\gamma = 0{,}88$

Методические указания к решению задач 61 – 70

Статистическое распределение выборки

Выборочный метод – один из основных методов математической статистики. Его сущность заключается в том, что изучение большой совокупности объектов относительно некоторого количественного признака X производится по сравнительно небольшому числу случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется множество всех изучаемых объектов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью (*выборкой*) называется множество объектов, отобранных для изучения из генеральной совокупности. Выборка должна быть организована случайным образом, чтобы правильно представлять генеральную совокупность.

Объемом совокупности называется количество объектов в совокупности. Объем выборки n, как правило, значительно меньше объема N генеральной совокупности: $n << N$.

Данные выборки записываются в виде таблицы, называемой статистическим распределением выборки:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

В первой строке перечислены все наблюдаемые значения признака X в порядке их возрастания (или убывания). Они называются вариантами x_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$). Во второй строке указаны частоты n_i соответствующих вариант x_i , они показывают, сколько раз наблюдалось каждое значение признака X.

Очевидно, что сумма всех частот n_i равна объему выборки n:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Основные числовые характеристики выборки

Средняя выборочная (среднее взвешенное значение признака в выборке):

$$\bar{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{к} x_i n_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k).$$

Дисперсия выборочная. Характеризует разброс (рассеяние) значений вариант x_i от выборочного среднего значения $\overline{x_в}$ и измеряется в квадратных единицах признака X:

$$D_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x}_в)^2 n_i = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x}_в)^2 n_1 + (x_2 - \bar{x}_в)^2 n_2 + \ldots + (x_к - \bar{x}_в)^2 n_k\right]$$

Для вычисления дисперсии используется также другая, часто более удобная формула:

$$D_в = \overline{x_в^2} - (\bar{x}_в)^2,$$

где

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i n_i; \qquad \overline{x_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i .$$

Среднее квадратическое отклонение выборки – характеристика рассеяния значений признака в выборке от среднего выборочного в единицах признака *X:*

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} .$$

С помощью найденных выборочных характеристик $x_в, D_в, \sigma_в$ оцениваются соответствующие генеральные характеристики:

$\bar{X}$ – генеральная средняя;

D – генеральная дисперсия;

σ – генеральное среднее выборочное отклонение.

Оценки имеют следующий вид:

$$\bar{x} \approx \overline{x_в}\ ; \quad D \approx \frac{n}{n-1} \cdot D_в = S_в{}^2, \quad \sigma \approx S_в = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в}\ ,$$

где $S_в^2$ – так называемая исправленная выборочная дисперсия.

Приведенные оценки носят случайный характер, так как зависят от выборки. Эти оценки удовлетворяют следующим требованиям:

- *несмещённость* (отсутствие систематических ошибок, то есть, нет отклонений только в одну сторону от истинного значения);
- *состоятельность* (увеличении объема выборки повышает вероятность правильности оценки);
- *эффективность* (имеют самый незначительный разброс по сравнению с другими возможными несмещёнными оценками).

Основные характеристики выборки $x_в, D_в, \sigma_в$ лишь приближенно характеризуют генеральную совокупность и могут оказаться далекими от соответствующих характеристик генеральной совокупности: $\overline{x} = a$, D, σ. Поэтому для последних используются также интервальные оценки, когда неизвестная характеристика заключена в некотором интервале с заданной надежностью (вероятностью) **γ**. Такой интервал называется доверительным. Значения надежности берутся, как правило, высокими: 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999, что соответствует 90; 95; 99 или 99,9%.

Если количественный признак X в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, то с вероятностью **γ** доверительный интервал, заданный выражением

$$(\overline{x_в} - t \cdot \sigma / \sqrt{n}; \quad \overline{x_в} + t \cdot \sigma / \sqrt{n}),$$

покрывает неизвестное математическое ожидание a. Здесь вспомогательный параметр t находится из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$ с помощью таблицы для интегральной функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. приложение 4)

Часто статистическое распределение выборки носит интервальный характер. В этом случае указывают числовые частичные интервалы, куда попадают значения признака X, и n_i – количество значений, попавших в интервал с номером i. В качестве значений x_i выбирают середины частичных интервалов.

Значения n_i называются абсолютными частотами, их сумма равна объему выборки: $\sum n_i = n$. Относительные частоты $w_i = \frac{n_i}{n}$ показывают долю значений x_i в общем объеме выборки. Очевидно, что сумма всех относительных частот (долей) равна 1: $\sum w_i = 1$.

Графически дискретное статистическое распределение изображается в виде полигона частот, обычно относительных. *Полигон* представляет собой ломаную линию, соединяющую соседние точки с координатами (x_i ; w_i).

Интервальное статистическое распределение изображается на графике в виде гистограммы относительных частот. *Гистограмма* – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников. В основании каждого прямоугольника лежит частичный интервал, а высотой прямоугольника является величина $\frac{w_i}{h_i}$, где h_i – длина частичного интервала. При таком построении площадь каждого частичного прямоугольника равна относительной частоте w_i, а сумма всех площадей, то есть площадь ступенчатой фигуры, равна единице: $\sum w_i = 1$.

Если длины частичных интервалов равны, то высотой прямоугольника может служить w_i или h_i.

Задача. В результате выборочного наблюдения за вкладами клиентов банка получено следующее распределение клиентов по величине вклада X в тыс. руб.:

X	До 100	100-200	200-300	300-400	400-500
n_i	10	18	20	32	28

где n_i – количество клиентов с величиной вклада в заданном интервале.

а) Изобразить данное распределение графически, построив гистограмму относительных частот.

б) Найти основные характеристики выборки: среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам.

г) С надежностью 95% указать доверительный интервал для генеральной средней, приняв гипотезу о нормальном распределении признака X, и считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

Решение. Найдем объем выборки n:

$$n=\sum n_i=10+18+20+32+28=108,$$

то есть для обследования выбрано 108 клиентов.

а) Вычислим относительные частоты для каждого частичного интервала:

$$w_1=\frac{n_1}{n}=\frac{10}{108}=0{,}093; \qquad w_2=\frac{n_2}{n}=\frac{18}{108}=0{,}167;$$

$$w_3=\frac{n_3}{n}=\frac{20}{108}=0{,}185; \qquad w_4=\frac{n_4}{n}=\frac{32}{108}=0{,}296;$$

$$w_5=\frac{n_5}{n}=\frac{28}{108}=0{,}259\ .$$

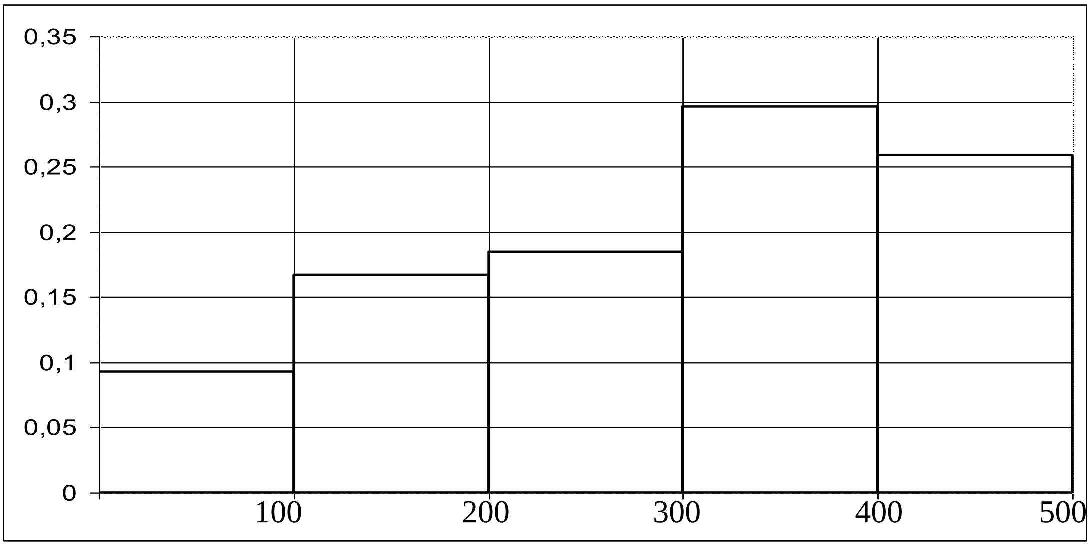
Рекомендуем все вычисления вести с точностью до 0,001.

Контроль: $\sum w_i=0{,}093+0{,}167+0{,}185+0{,}296+0{,}259=1$.

В итоге получено следующее интервальное распределение относительных частот признака X:

X	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500
w_i	0,093	0,167	0,185	0,296	0,259

Шаг разбиения h, то есть длина каждого частичного интервала: h = 100. Построим гистограмму относительных частот (рис. 5), откладывая по горизонтальной си значения признака X, а по вертикальной оси – значения w_i.



б) Для нахождения характеристик выборки от заданного интервального распределения признака X перейдем к дискретному распределению, выбирая в качестве значений признака x_i середины частичных интервалов:

x_i	50	150	250	350	450
n_i	10	18	20	32	28

Найдем основные характеристики этого распределения.

Средняя выборочная (средняя величина вклада в тыс. рублей.):

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i n_i = \frac{1}{108}(50 \cdot 10 + 150 \cdot 18 + 250 \cdot 20 + 350 \cdot 32 + 450 \cdot 28) =$$

$$= \frac{1}{108}(500 + 2700 + 5000 + 11200 + 12600) = \frac{1}{108} \cdot 32000 \approx 296{,}296.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x_в})^2 \cdot n_i = \frac{1}{108} \cdot \left[(50 - 296{,}296)^2 \cdot 10 + (150 - 296{,}296)^2 \cdot 18 + \right.$$

$$\left. + (250 - 296{,}296)^2 \cdot 20 + (350 - 296{,}296)^2 \cdot 32 + (450 - 296{,}296)^2 \cdot 28\right] =$$

$$= \frac{1}{108}(606617{,}196 + 385245{,}353 + 42866{,}392 + 92291{,}828 +$$

$$+ 661497{,}749) = \frac{1}{108} \cdot 1788518{,}518 = 16560{,}3566.$$

Второй способ вычисления дисперсии.

Найдем среднее квадратов значений признака:

$$\overline{x_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i^2 n_i = \frac{1}{108}(50^2 \cdot 10 + 150^2 \cdot 18 + 250^2 \cdot 20 + 350^2 \cdot 32 + 450^2 \cdot 28) =$$

$$= \frac{1}{108}(25000 + 405000 + 1250000 + 3920000 + 5670000) =$$

$$= \frac{1}{108} \cdot 11270000 \approx 104351{,}852\ , \quad \text{тогда}$$

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x_в}\right)^2 = 104351{,}852 - (296{,}296)^2 =$$

$$=104351,8519–87791,4952=16560,3566.$$

Этот результат должен совпадать с результатом первого способа (иногда приближенно из-за округлений).

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_в = \sqrt{Dв} = \sqrt{16560,3566} \approx 128,687,$$

то есть, в среднем разброс вкладов составляет ± 128,687 тыс. рублей от среднего значения 296,296 тыс. рублей.

в) Оценим неизвестные генеральные характеристики:

генеральная средняя: $\overline{x} \approx \overline{x_в} = 296,296$ тыс. рублей;

генеральная дисперсия:

$$D \approx \frac{n}{n-1} D_в = \frac{108}{108-1} \cdot 16560,3566 \approx 16715,1263;$$

генеральное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{16715,1263} \approx 129,287$$

г) Доверительный интервал для оценки генеральной средней a (среднего вклада) с надежностью γ находим по формуле:

$$a \in (\overline{x_в} - t \cdot \sigma / \sqrt{n}; \quad \overline{x_в} + t \cdot \sigma / \sqrt{n}).$$

По условию задачи $n = 108$; $\overline{x_в} = 296,296$; $\sigma = 129,287$, $\gamma = 0,95$. Неизвестный параметр t находим из условия: $2\Phi(t) = \gamma$. Поскольку в данной задаче $\gamma = 0,95$, то есть $2\Phi(t) = 0,95$, то $\Phi(t) = 0,475$. По таблице (приложение 2), находим $t = 1,96$.

Вычислим по этим данным доверительный интервал:

$$\left(296,296 - 1,96 \cdot \frac{129,287}{\sqrt{108}}; \quad 296,296 + 1,96 \cdot \frac{129,287}{\sqrt{108}}\right),$$

$$(296,296 - 24,384; \quad 296,296 + 24,384),$$

$$(271,912; \quad 320,680).$$

Таким образом, с вероятностью 95% неизвестная генеральная средняя (математическое ожидание) находится в этом интервале:

$$\overline{x} = a \in (271,912; \quad 320,680).$$

Длина полуинтервала $\delta = t \cdot \sigma / \sqrt{n} = 24,384$ характеризует точность оценки и называется предельной ошибкой оценки. Оценка тем точнее, чем меньше δ и, следовательно, доверительный интервал становится более узким.

Величина предельной ошибки δ зависит от *n*, σ и *t*. Очевидно, что с увеличением объема выборки *n* предельная ошибка δ уменьшается и, следовательно, точность оценки повышается. При увеличении рассеяния σ предельная ошибка δ увеличивается, то есть оценка делается менее точной.

Увеличение надежности γ ведет к росту вспомогательного параметра *t* и расширению доверительного интервала (надежнее попасть в большой интервал). Это делает оценку менее точной. Таким образом, при повышении надежности оценки ухудшается ее точность.

Ответы: $\overline{x_в} = 296{,}296$; $D_в = 16560{,}3566$; $\sigma_в = 128{,}683$.

$\overline{x} \approx 296{,}296$; $D \approx 16715{,}1263$; $\sigma \approx 129{,}287$.

$\overline{x} = a \in (271{,}912;\ 320{,}680)$ с надёжностью 95%.

5. ЗАДАНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Раздел 1. Математический анализ

Основные вопросы

1. Понятие предела функции в точке и на бесконечности, их графические пояснения. Односторонние пределы.
2. Определение эквивалентных бесконечно-малых, привести примеры эквивалентных бесконечно-малых.
3. Понятие непрерывности функции в точке. Точки разрыва, их виды.
4. Геометрический, механический смысл производной.
5. Признаки возрастания и убывания функции, необходимые и достаточные условия экстремума функции.
6. Признаки выпуклости и вогнутости графика функции. Необходимые и достаточные условия перегиба графика функции.
7. Неопределенный интеграл, основные методы интегрирования.
8. Определённый интеграл, его геометрический смысл.

Типовые задачи

1. Установить, какая из двух записей верна:
   а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;
   б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.
2. Даны множества: Z – целых чисел, M – отрицательных чисел, P – положительных чисел. Найти для этих множеств
   $$(Z-M)\bigcap P;\ M\bigcap P; M\bigcup P; Z\bigcup M.$$
3. Вычислить пределы функций:

   а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^7-5x^5+2}{7x^6-3x-4}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7\sqrt{x}+2}{5x^2+6x-4}$;

   в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3}{x+2}$; *г*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin^3 x}-1}{x^2-x^3}$;

   д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 2x}{x\sin 5x}$; *е*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^{2n+4}$;
4. Исследовать на непрерывность функцию $y=\dfrac{2x}{x-1}$, изобразить схематически ее график.
5. Найти производные функций:

   а) $y=5x-\dfrac{4}{x^3}$; *б*) $y=\mathrm{arctg}(2x+3)$;

   в) $y=\dfrac{3-x^2}{5x+1}$; *г*) $y = x^2\ln(3x-1)$.
6. Исследовать функции средствами дифференциального исчисления и построить их графики:

   а) $y = x^3 - 9x^2$; *б*) $y = xe^{-x}$; *в*) $y = x\ln x.$.
7. Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $y=4x-x^2$ в точке $x = 1$. Результаты изобразить графически.
8. Найти пределы функций по правилу Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-15x+18}{x^2-4x-12}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$.

9. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

$a)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{7x-5}}$; $\quad б)\ \int \frac{2x^3+5\sqrt{x}-x}{x^2}dx$; $\quad в)\ \int x\cos\left(4x^2\right)dx$;

$г)\ \int \frac{x+2{,}5}{x^2+5x-6}dx$; $\quad д)\ \int x^2 \sin x dx$; $\quad е)\ \int \frac{1+\ln x}{x}dx$.

10. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями. Сделать чертеж.

а) $y = x^2$, $\quad y = 0$, $x = 2$;

б) $y = x^3$, $\quad y = 8$;

в) $y = x^2$, $\quad y = \sqrt{x}$;

г) $y = 4 - x^2$, $\quad y = x^2 - 2x$.

Раздел 2. Теория вероятностей

Основные вопросы

1. Классическое и статистическое определения вероятности.
2. Теоремы сложения вероятностей для несовместных и совместных событий.
3. Теоремы умножения вероятностей для независимых и зависимых событий.
4. Повторение независимых испытаний. Формула Бернулли.
5. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
6. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.
7. Биноминальный закон распределения дискретной случайной величины.
8. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.
9. Нормальный закон распределения, показательный и равномерный законы распределения случайной величины.

Типовые задачи

1. Эксперт оценивает качественный уровень трех видов изделий по потребительским признакам. Вероятность того, что изделию первого вида будет присвоен знак качества, равна 0,95; для изделия второго вида эта вероятность равна 0,85; а для изделия третьего вида 0,65. Найти вероятность того, что знак качества будет присвоен: *а*) всем изделиям; *б*) только одному изделию; *в*) хотя бы одному изделию.
2. В партии товара, состоящей из 50 мужских костюмов, находится 30 изделий местного производства. Товаровед наудачу отбирает три изделия. Какова вероятность, что все три изделия окажутся: *а*) местного производства; *б*) не местного производства?
3. В магазин поступает натуральный сок в бутылках от двух изготовителей: местного и иногороднего, причем местный изготовитель поставляет 30% всей продукции. Вероятность того, что при транспортировке бутылка окажется разбитой, для местной продукции – 0,6%, а для иногородней – 2%. Найти вероятность того, что взятая наудачу бутылка окажется неразбитой.
4. Оптовая база снабжает товаром n магазинов. Вероятность того, что в течение дня поступит заявка на товар, равна р для каждого магазина. Найти вероятность того, что в течение дня: 1) поступит k заявок; 2) не менее k_1 и не более k_2 заявок; 3) каково наивероятнейшее число поступающих в течение дня заявок и чему равна соответствующая ему вероятность?
   а) $p = 0{,}6$; $n = 7$; $k = 4$; $k_1 = 0$; $k_2 = 2$;
   б) $p = 0{,}7$; $n = 20$; $k = 7$; $k_1 = 8$; $k_2 = 14$.
5. Найти: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по известному закону ее распределения, заданному таблично:

X	12	14	18	24	27
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

6. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 540 г. Известно, что 5 % коробок имеют массу, меньшую 500 г. Вес коробок распределён по нормальному закону. Каков процент коробок, масса которых: а) менее 470 г; б) от 500 до 550 г; в) отличается от средней не более, чем на 30 г?

7. Интервал движения автобуса равен 15 минут. Какова вероятность того, что пассажир на остановке автобуса будет ждать его не более 5 минут?

Раздел 3. Математическая статистика

Основные вопросы

1. Сущность выборочного метода.
2. Статистическое распределение выборки.
3. Основные характеристики выборочного распределения.
4. Точечные и интервальные оценки генеральных характеристик.
5. Определение статистической гипотезы. Основная и конкурирующая гипотезы.
6. Понятие о критериях согласия.
7. Понятие корреляционной зависимости между случайными величинами.
8. Оценка силы (тесноты) линейной корреляционной связи по коэффициенту линейной корреляции.

Типовые задачи

1. По данным выборки найти относительные частоты и построить гистограмму относительных частот:

X	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	3	6	8	2	1

   Вычислить среднюю выборочную, дисперсию и среднее выборочное квадратическое отклонение. Дать точечные оценки основных генеральных характеристик. С надёжностью 95% найти доверительный интервал для генеральной средней.
2. Для вариационного ряда: 1; 2; 3; 3; 4; 5; 5; 5; 7 указать моду, медиану и размах варьирования. Вычислить среднее значение и дисперсию.
   Найти среднее значение, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для вариационного ряда:

X	5	10	12	15	20
n_i	2	1	5	1	1

Указать также моду, медиану и размах варьирования.

3. Из большой партии изделий по схеме случайной бесповторной выборки было проверено 20 изделий с целью определения случайной величины X – процента влажности древесины, из которой изготовлены эти изделия. Получены следующие результаты:

X	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	3	6	8	2	1

По данным этой выборки, на уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном законе распределения значений признака в генеральной совокупности, используя критерий согласия Пирсона.

4. Имеются следующие данные об уровне механизации работ X % и производительности труда Y (тонн/час) для нескольких однотипных предприятий:

X	30	32	36	40	41	47	54
Y	24	20	28	30	31	33	37

Оценить тесноту и направление связи между признаками X и Y с помощью коэффициента линейной корреляции и найти уравнение линейной зависимости производительности труда Y от уровня механизации работ X. Результаты пояснить графически.

5. Результаты выборки о соответственных значениях двух признаков X и Y представлены корреляционной таблицей:

$У\backslash X$	12	17	22	27	32	37
25					4	1
35				9	5	
45		4	10	8		
55			8	6		
65	3	7	2			

Найти общие и условные средние для признаков X и Y. Оценить тесноту линейной зависимости между признаками и составить уравнения линейной регрессии Y по X и X по Y. Найти корреляционное отношение.

6. Для нескольких приблизительно одинаковых по площади гастрономических магазинов имеются следующие данные об уровне их издержек X %, годовом объёме товарооборота Y (млн. руб.) и годовой прибыли Z (тыс. руб.):

X	5,2	7,5	8,4	10,1	12,0
Y	1,6	2,5	5,0	5,8	7,2
Z	1500	2040	4850	6360	7820

Найти уравнение линейной регрессионной модели для зависимости прибыли Z от издержек обращения X и объёма товарооборота Y. Найти выборочные коэффициенты парной и частной корреляции и проанализировать степень тесноты линейной связи между всеми парами переменных. Используя найденную регрессионную модель, рассчитать средний уровень годовой прибыли, если издержки обращения составят 11% при объёме годового товарооборота 10 млн. руб.

6. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

6.1. Основная литература

1. Высшая математика : учебник / В.С. Шипачев. — М. : ИНФРА-М, 2018. — 479 с. — (Высшее образование). — www.dx.doi.org/10.12737/5394. - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=945790
2. ЮДИН СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ. Математика и экономико-математические модели : учебник для вузов / ЮДИН СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ. - М. : РИОР:Инфра-М, 2016. - 374с. : ил. - (Высшее образование:Бакалавриат). - Библиогр.:с.365. - ISBN 978-5-369-01409-7. - ISBN 978-5-16-010197-3. - ISBN 978-5-16-102510-9.
3. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие/О.А.Кастрица, 4-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2015. - 491 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010960-2, 200 экз.

6.2 Дополнительная литература

4. Высшая математика: Практикум / И.Г. Лурье, Т.П. Фунтикова. - М.: Вузовский учебник: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 160 с.: 60x88 1/16. (обложка) ISBN 978-5-9558-0281-7, 200 экз.

5. Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., - 3-е изд. - М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2015. - 479 с.: 60x90 1/16. - (Золотой фонд российских учебников) (Переплёт) ISBN 978-5-238-00991-9. - Режим доступа: http://znanium.com/go.php?id=872573

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Справочный материал по элементарной математике

1. Формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

2. Формулы для нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант уравнения.

3. Формула разложения квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

4. Действия со степенями:

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0); \qquad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}; \qquad x^{-p} = \frac{1}{x^p};$$

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}; \qquad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}; \qquad \left(x^p\right)^q = x^{pq};$$

$$(xy)^p = x^p \cdot y^p; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}.$$

Здесь $n \in \square$; $m \in \square$; $p, q \in \square$.

5. Некоторые тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x;$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x;$$
$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}; \qquad \mathrm{ctg}\, x = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

6. Значения тригонометрических функций для некоторых углов α:

Угол α / Функция	0^0	30^0	60^0	90^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	∞
$\mathrm{ctg}\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

7. Значения некоторых обратных тригонометрических функций:

$$\sin 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \arcsin 0 = 0;$$
$$\cos 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \arccos 1 = 0;$$
$$\mathrm{tg}\, 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{arctg}\, 0 = 0 \qquad \text{и т.п.}$$

8. Логарифмы:

$$\boxed{\log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad a^b = x.}$$

$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$ $\qquad$ $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$

$\log_a x^p = p\log_a x;$ $\qquad$ $\log_{a^p} x = \dfrac{1}{p}\log_a x;$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}.$$

Здесь $a > 0,\quad a \neq 1,\quad x > 0,\quad y > 0,\quad p \in \square,\quad c > 0,\quad c \neq 1$.

9. Десятичные и натуральные логарифмы, их значения:

x	$\lg x$	$\ln x$
1	0	0
2	0,3010	0,6931
$e \approx 2{,}718$	0,4343	1
3	0,4772	1,0986
4	0,6021	1,3863
5	0,6990	1,6094
6	0,7782	1,7918
7	0,8451	1,9459
8	0,9031	2,0794
9	0,9542	2,1972
10	1	2,3026

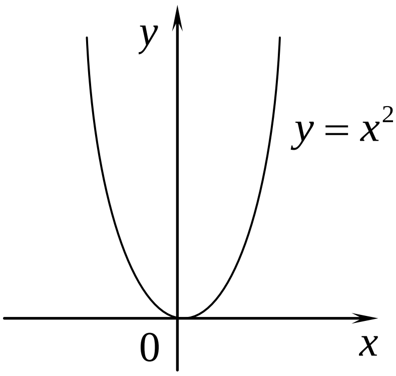
$\lg x = \log_{10} x;$

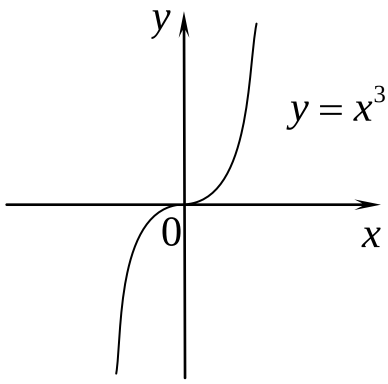
$\ln x = \log_e x,$ $\quad$ где e=2,711828...

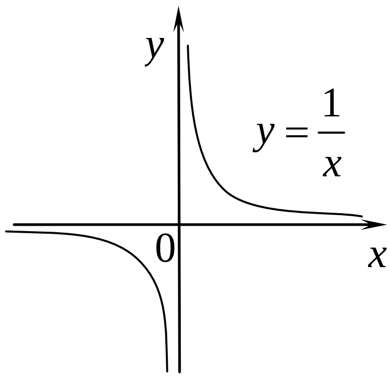
$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0{,}4343} \approx 2{,}3026 \cdot \lg x.$$

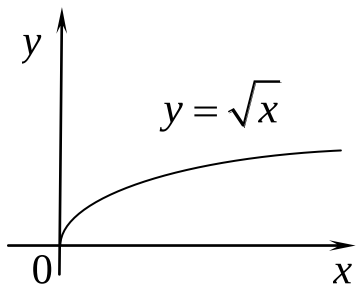
Графики основных элементарных функций

1. Степенные функции

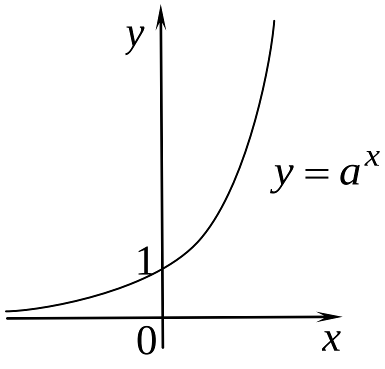




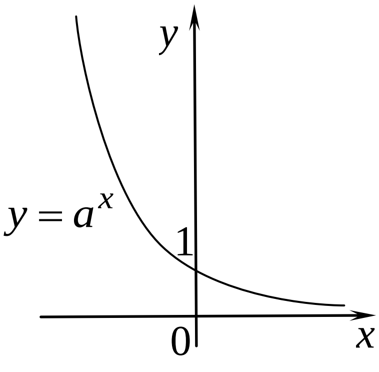




2. Показательные функции

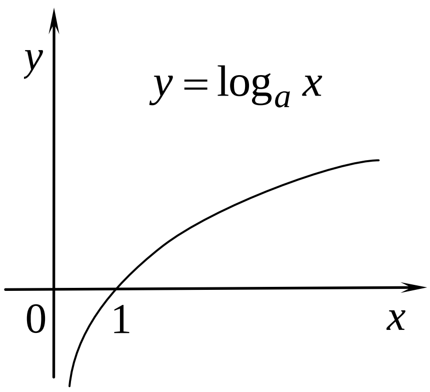


$a > 1$

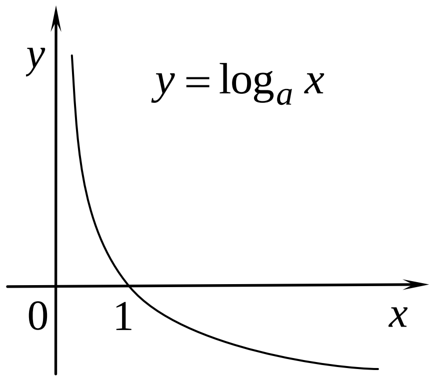


$0 < a < 1$

3. Логарифмические функции

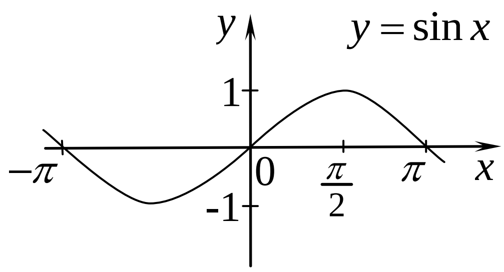


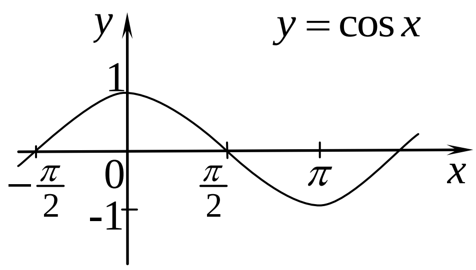
$a > 1$

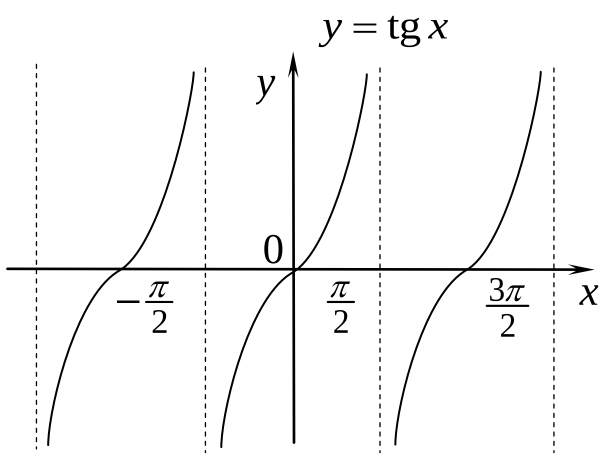


$0 < a < 1$

4. Тригонометрические функции







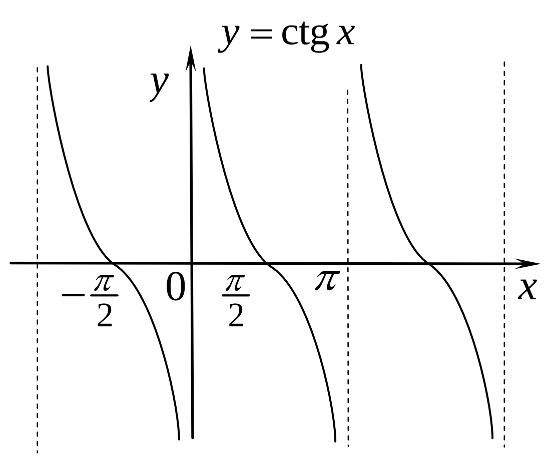


Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ Приложение 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0631	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	2519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\varphi(x \geq 4) = 0 \qquad \varphi(-x) = \varphi(x)$$

Приложение 4

Таблица значений функции $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869
0,11	0,0439	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3883
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962
0,16	0,0638	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3581	1,42	0,4222
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292

Продолжение таблицы

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,48	0,4306	1,76	0,4608	2,08	0,4812	2,64	0,4959
1,49	0,4319	1,77	0,4616	2,10	0,4821	2,66	0,4961
1,50	0,4332	1,78	0,4625	2,12	0,4830	2,68	0,4963
1,51	0,4345	1,79	0,4633	2,14	0,4838	2,70	0,4965
1,52	0,4357	1,80	0,4641	2,16	0,4846	2,72	0,4967
1,53	0,4370	1,81	0,4649	2,18	0,4854	2,74	0,4969
1,54	0,4382	1,82	0,4656	2,20	0,4861	2,76	0,4971
1,55	0,4394	1,83	0,4664	2,22	0,4868	2,78	0,4973
1,56	0,4406	1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,80	0,4974
1,57	0,4418	1,85	0,4678	2,26	0,4881	2,82	0,4976
1,58	0,4429	1,86	0,4686	2,28	0,4887	2,84	0,4977
1,59	0,4441	1,87	0,4693	2,30	0,4893	2,86	0,4979
1,60	0,4452	1,88	0,4699	2,32	0,4898	2,88	0,4980
1,61	0,4463	1,89	0,4706	2,34	0,4904	2,90	0,4981
1,62	0,4474	1,90	0,4713	2,36	0,4909	2,92	0,4982
1,63	0,4484	1,91	0,4719	2,38	0,4913	2,94	0,4984
1,64	0,4495	1,92	0,4726	2,40	0,4918	2,96	0,4985
1,65	0,4505	1,93	0,4732	2,42	0,4922	2,98	0,4986
1,66	0,4515	1,94	0,4338	2,44	0,4927	3,00	0,49865
1,67	0,4525	1,95	0,4744	2,46	0,4931	3,20	0,49931
1,68	0,4535	1,96	0,4750	2,48	0,4934	3,40	0,49966
1,69	0,4545	1,97	0,4756	2,50	0,4938	3,60	0,49984
1,70	0,4554	1,98	0,4761	2,52	0,4941	3,80	0,49993
1,71	0,4564	1,99	0,4767	2,54	0,4945	4,00	0,49997
1,72	0,4573	2,00	0,4772	2,56	0,4948	4,50	0,49999
1,73	0,4582	2,02	0,4783	2,58	0,4951	5,00	0,50000
1,74	0,4591	2,04	0,4793	2,60	0,4953		
1,75	0,4599	2,06	0,0480	2,62	0,4956		

$$\Phi(x > 5) = 0{,}5$$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$