**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**
**«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»**

**Выполнить все задания контрольной работы в отдельной тетради аккуратно и рукописно (от руки). Тетрадь с контрольной работой принести на первое занятие зимней сессии.**

**<u>Задание 1.</u>**

Для логических функций $f_1$, $f_2$, $f_3$ построить совершенные формы. Выяснить существенность переменных для логических функций $f_1$, $f_2$. В случае несущественности, исключить эти переменные из ее совершенной конъюнктивной нормальной формы. Построить суперпозицию $g(x, y, z) = f_2(f_1, f_3, f_2)$. При помощи метода неопределенных коэффициентов построить для логической функции $f_3$ полином Жегалкина.

**<u>Задание 2.</u>**

Для данных логических функций $f_1$, $f_2$, $f_3$ выяснить их линейность, самодвойственность, монотонность и их принадлежность к замкнутым классам $T_0$, $T_1$. Проверить полноту системы логических функций $\{f_1, f_2, f_3\}$.

**<u>Задание 3.</u>**

Для логической функции $f_1$ построить комбинационную и переключательную схему на элементной базе $\{\bar{\ }, \wedge, \vee\}$. Для логической функции $f_2$ построить упрощенную комбинационную и переключательную схему. Построить минимизированную комбинационную и переключательную схему для логической функции $f_3$

По заданным техническим условиям, определяющим некоторые значения функции проводимости $g$, построить наиболее экономичную (оптимальную) переключательную схему.

**<u>Задание 4.</u>**

В условиях задачи коммивояжера стоимости маршрутов заданы в виде матрицы $A$. Определить маршруты минимальной стоимости и стоимости этих маршрутов. На алгоритмическом языке составить программу решения задачи коммивояжера и решить задачу для заданных стоимостей маршрутов.

**<u>Задание 5.</u>**

Разработать программу на алгоритмическом языке для перечисления всех различных слов, полученных перестановкой букв данного слова. Перечислить все различные перестановки букв.

Для данных множеств составить производящую функцию сочетаний элементов и перечислить эти сочетания. Для множества $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$- перечислить сочетания по четыре элемента. Для множества $B = \{a, b, c, d\}$- перечислить сочетания с повторениями по четыре элемента, в которых элемент $a$ может встречаться не более трех раз, элемент $b$ – не более двух раз, элемент $c$ – не более трех раз, элемент $d$ – не более четырех раз.

## КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

**Некоторые логические функции от двух аргументов.**

| $x$ | $y$ | $x \wedge y$ | $x \oplus y$ | $x \vee y$ | $x \downarrow y$ | $x \leftrightarrow y$ | $x \rightarrow y$ | $x \mid y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **0** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **0** | **1** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **1** | **0** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **1** | **1** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

***Основные свойства логических функций***

1. $x \cdot y = y \cdot x$;
2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
3. $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$;
4. $x \cdot (x \vee y) = x$;
5. $x \cdot (\bar{x} \vee y) = x \cdot y$;
6. $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$;
7. $x \cdot \bar{x} = 0$;
8. $x \cdot 1 = x$;
9. $x \cdot x = x$;
10. $\bar{\bar{x}} = x$ ;
11. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \& (y \rightarrow x)$;
12. $x \oplus y = y \oplus x$;
13. $x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z)$;
14. $x \oplus x = 0$;
15. $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$;
16. $x \cdot y = (x|y)|(x|y)$;
17. $\bar{x} = x|x$;
18. $x \vee y = y \vee x$;
19. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
20. $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$;
21. $x \vee (x \cdot y) = x$;
22. $x \vee (\bar{x} \cdot y) = x \vee y$;
23. $\overline{x \vee y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$ ;
24. $x \vee \bar{x} = 1$
25. $x \vee 1 = 1$
26. $x \vee x = x$
27. $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$;
28. $x \rightarrow y = \bar{y} \rightarrow \bar{x}$ ;
29. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;
30. $x \vee y = x \cdot y \oplus x \oplus y$ ;
31. $x \oplus 0 = x$;
32. $x|y = \overline{x \cdot y}$ ;
33. $x \vee y = (x|x)|(y|y)$;
34. $\bar{x} = x \oplus 1$.

## ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 1

Для логических функций $f_1$, $f_2$, $f_3$ построить совершенные формы. Выяснить существенность переменных для логических функций $f_1$, $f_2$. В случае несущественности, исключить эти переменные из ее совершенной конъюнктивной нормальной формы. Построить суперпозицию $g(x, y, z) = f_2(f_1, f_3, f_2)$. При помощи метода неопределенных коэффициентов построить для логической функции $f_3$ полином Жегалкина.

$f_1 = (1,0,0,0,0,1,0,1)$, $f_2 = (1,0,1,0,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,0,1,0,1)$.

***Решение.*** Построим СДНФ и СКНФ для данных функций. Для этого можно применить правила построения совершенных форм для формул алгебры высказываний. Таблицы истинности функций представлены в векторной форме. Запишем соответствующие им аргументы в следующей таблице 2:

Таблица 2.

**Таблицы значений логических функций $f_1$, $f_2$, $f_3$.**

| $x$ | $y$ | $z$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Согласно правилу построения СДНФ, выберем единичные значения функции $f_1$ и построим соответствующие им элементарные конъюнкции: $\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$, $x\cdot\bar{y}\cdot z$, $x\cdot y\cdot z$. Тогда, соединяя эти элементарные конъюнкции операцией дизъюнкция, получим СДНФ для функции $f_1$:

$$f_1 = \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} \vee x\cdot\bar{y}\cdot z \vee x\cdot y\cdot z.$$

Выбирая нулевые значения функции $f_1$, аналогичным образом построим сначала элементарные дизъюнкции: $x\vee y\vee\bar{z}$, $x\vee\bar{y}\vee z$, $x\vee\bar{y}\vee\bar{z}$, $\bar{x}\vee y\vee z$, $\bar{x}\vee\bar{y}\vee z$. Соединяя эти элементарные дизъюнкции операцией конъюнкция, получим СКНФ для функции $f_1$:

$$f_1 = (x\vee y\vee\bar{z})\cdot(x\vee\bar{y}\vee z)\cdot(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})\cdot(\bar{x}\vee y\vee z)\cdot(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z).$$

Аналогично совершенным формам для $f_1$, построим совершенные формы для функций $f_2$ и $f_3$:

$$f_2 = \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} \vee \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot z \vee x\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} \vee x\cdot\bar{y}\cdot z \text{ - СДНФ};$$

$$f_2 = (\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\cdot(\bar{x}\vee y\vee z)\cdot(x\vee y\vee\bar{z})\cdot(x\vee y\vee z) \text{ – СКНФ};$$

$$f_3 = \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z} \vee \bar{x}\cdot y\cdot z \vee x\cdot\bar{y}\cdot z \vee x\cdot y\cdot z \text{ - СДНФ};$$

$$f_3 = (x\vee y\vee\bar{z})\cdot(x\vee\bar{y}\vee z)\cdot(\bar{x}\vee y\vee z)\cdot(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z) \text{ – СКНФ}.$$

Выясним существенность аргументов для логических функций $f_1$, $f_2$. Проверим существенность переменной $x$. Для этого, согласно определению, необходимо сравнить те пары строк в таблице, где переменная $x$ принимает противоположные значения, а соответствующие им значения других аргументов – одинаковые значения. Сравнивая такие строки, заметим, что $f_1(0, 0, 0) = 1 \neq f_1(1, 0, 0) = 0$. Следовательно, переменная $x$ является существенной для функции $f_1$. Аналогично, ввиду того, что

$$f_1(0, 0, 0) = 1 \neq f_1(0, 1, 0) = 0,\ f_1(0, 0, 0) = 1 \neq f_1(1, 0, 0) = 0$$

переменные $y$, $z$ также являются существенными. Проверим существенность аргументов логической функции $f_2$. Сравнивая пары строк, в соответствии с определением, заметим, что аргументы $x$, $z$ функции $f_2$ не являются существенными. Следовательно, эти переменные можно исключить из выражения этой функции в виде формулы. Аргумент $y$ является существенной переменной, так как $f_2(0, 0, 0) = 0 \neq f_2(0, 1, 0) = 1$. Для исключения переменных $x$ и $z$ из СКНФ функции $f_2$ можно применить основные свойства логических функций. Применяя эти свойства к СКНФ функции $f_2$, получим

$$f_2 = (\bar{x}\vee y\vee\bar{z})\cdot(\bar{x}\vee y\vee z)\cdot(x\vee y\vee\bar{z})\cdot(x\vee y\vee z) =$$

$$= [(\bar{x}\vee y)\vee(\bar{z}\cdot z)]\cdot[(x\vee y)\vee(\bar{z}\cdot z)] =$$

$$= (\bar{x}\vee y)\cdot(x\vee y) = (\bar{x}\cdot x)\vee y = y.$$

Построим суперпозицию $g(x, y, z) = f_2(f_1, f_3, f_2)$. Для этого воспользуемся данными в таблице соответствиями аргументов функций $f_1$, $f_2$, $f_3$ их значениям и, последовательно вычисляя, получим

$$g(0, 0, 0) = f_2(f_1(0, 0, 0),\ f_3(0, 0, 0),\ f_2(0, 0, 0)) = f_2(1, 1, 1) = 0,$$
$$g(0, 0, 1) = f_2(f_1(0, 0, 1),\ f_3(0, 0, 1),\ f_2(0, 0, 1)) = f_2(0, 0, 1) = 1,$$
$$g(0, 1, 0) = f_2(f_1(0, 1, 0),\ f_3(0, 1, 0),\ f_2(0, 1, 0)) = f_2(0, 0, 0) = 1,$$
$$g(0, 1, 1) = f_2(f_1(0, 1, 1),\ f_3(0, 1, 1),\ f_2(0, 1, 1)) = f_2(0, 1, 0) = 0.$$

Аналогично найдем остальные четыре значения искомой функции:

$$g(1, 0, 0) = 1, g(1, 0, 1) = 0, g(1, 1, 0) = 1, g(1, 1, 1) = 0.$$

Таким образом, искомой суперпозицией будет функция:

$$g(x, y, z) = f_2(f_1, f_3, f_2) = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0).$$

Построим для логической функции $f_3$ полином Жегалкина. Это можно сделать преобразованием совершенных форм к виду полинома и используя свойства логических функций. Можно также при помощи метода неопределенных коэффициентов. Рассмотрим второй способ. Согласно определению полинома Жегалкина, для функций от трех аргументов полином будет иметь следующий вид:

$$f_3(x, y, z) = a \oplus b \cdot x \oplus c \cdot y \oplus d \cdot z \oplus e \cdot x \cdot y \oplus f \cdot x \cdot z \oplus g \cdot y \cdot z \oplus h \cdot x \cdot y \cdot z.$$

Подставляя в это выражение аргументы, и приравнивая соответствующим значениям, согласно определению функции $f_3$, получим систему из восьми линейных уравнений:

$$f_3(0, 0, 0) = a = 1,\ f_3(0, 0, 1) = a \oplus d = 0,\ f_3(0, 1, 0) = a \oplus c = 0,$$
$$f_3(1, 0, 0) = a \oplus b = 1,\ f_3(1, 0, 1) = a \oplus b \oplus d \oplus f = 0,$$
$$f_3(1, 1, 0) = a \oplus b \oplus c \oplus e = 1,\ f_3(0, 1, 1) = a \oplus c \oplus d \oplus g = 0,$$
$$f_3(1, 1, 1) = a \oplus b \oplus c \oplus d \oplus e \oplus f \oplus g \oplus h = 1.$$

В ходе решения этой системы, найденные уже коэффициенты необходимо подставить в остальные уравнения. Все уравнения необходимо решить в двоичной системе счисления. В результате вычислений получим сначала $a = 1$, затем из уравнения $1 \oplus d = 0$ получим, $d = 1$. Из уравнений $1 \oplus c = 0$, $1 \oplus b = 1$ получим $c = 1$, $b = 0$. Аналогично, из уравнений $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus f = 0$, $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus e = 1$, $1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus g = 0$ получим $f = 0$, $e = 1$, $g = 1$. Тогда из последнего равенства $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus h = 1$ получим коэффициент $h = 0$. Подставляя найденные коэффициенты в общее выражение полинома Жегалкина, получим искомый полином:

$$f_3(x, y, z) = 1 \oplus y \oplus z \oplus x \cdot y \oplus y \cdot z.$$

## ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 2

Для данных логических функций $f_1$, $f_2$, $f_3$ выяснить их линейность, самодвойственность, монотонность и их принадлежность к замкнутым классам $T_0$, $T_1$. Проверить полноту системы логических функций $\{f_1, f_2, f_3\}$.

$$f_1 = (1,1,0,0,0,1,0,1),\ f_2 = (1,0,1,0,0,1,0,1),\ f_3 = (0,0,1,1,1,1,0,1).$$

***Решение.*** Линейность логической функции можно проверить двумя способами:

1.Во-первых, при помощи построения для логической функции ее полинома Жегалкина. Если полином Жегалкина будет содержать только линейные слагаемые, то, согласно определению свойства линейности, функция будет линейной.

2.Во-вторых, линейность можно проверить также и непосредственно используя определение свойства линейности, при помощи метода неопределенных коэффициентов. Воспользуемся вторым способом. Предположим, что функция $f_1$ является линейной. Тогда, согласно определению линейности логической функции, она должна иметь следующий вид:

$$f_1(x, y, z) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z .$$

Согласно методу неопределенных коэффициентов, составим следующую систему:

$$f_1(0, 0,0) = a_0 = 1,\ f_1(0, 0,1) = a_0 \oplus a_3 = 1,\ f_1(0, 1,0) = a_0 \oplus a_2 = 0,$$
$$f_1(0, 1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0,\ f_1(1, 0,0) = a_0 \oplus a_1 = 0,\ f_1(1, 0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 = 1,$$
$$f_1(1, 1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 = 0,\ f_1(1, 1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 1 .$$

Из первого равенства системы получим $a_0 = 1$. После этого, решая второе, третье и пятое равенство в двоичной системе счисления, получим значения коэффициентов $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0$. Подставим найденные коэффициенты в остальные равенства и вычислим суммы в двоичной системе:

$$f_1(0, 1,1) = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0,\ f_1(1, 0,1) = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \neq 1,\ f_1(1, 1,0) = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \neq 0 .$$

Из этих вычислений следует, что система для определения коэффициентов противоречивая и, следовательно, не имеет решения. Тогда функция $f_1$ не может быть представлена в виде линейной комбинации своих аргументов и не является линейной. Аналогично найдем соответствующие коэффициенты для функции $f_2$: $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 0,\ a_3 = 1$ и для функции $f_3$: $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0$. Вычислим значение функции $f_3(1, 1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0 \neq 1$. То есть, система уравнений для коэффициентов функции $f_3$ противоречива. Следовательно, $f_3$ не является линейной функцией. Система для коэффициентов функции $f_2$ не является противоречивой. Следовательно, $f_2$ является линейной функцией. Ее представление в виде линейной комбинации будет следующим: $f_2(x, y, z) = 1 \oplus x \oplus z$.

Для того чтобы проверить самодвойственность функций $f_1$, $f_2$, $f_3$, составим таблицу соответствий аргументов и значений функций.

Таблица 3.

**Логические значения функций $f_1$, $f_2$, $f_3$.**

| № | $x$ | $y$ | $z$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| **2** | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **4** | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| **5** | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| **6** | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| **7** | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **8** | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Согласно признаку самодвойственности, достаточно сравнить между собой такие пары аргументов ($x$, $y$, $z$), которые имеют противоположные координата. В таблице 3 такие пары аргументов имеют номера 1 и 8, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 5. Соответствующие этим парам аргументов значения функций должны быть противоположными. В этом случае функция будет самодвойственной. Однако согласно таблице 3 $f_1(0,0,0)=1=f_1(1,1,1)=1$, $f_2(0,0,0)=1=f_2(1,1,1)=1$, $f_3(0,0,1)=0$ $=f_3(1,1,0)=0$.

Следовательно, все три функции не являются самодвойственными.

Проверим монотонность этих функций. Для этого, согласно определению, выберем все пары аргументов ($x$, $y$, $z$), для которых выполнено необходимое условие монотонности, то есть условие $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\le(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. Остальные пары не рассматриваются. Если необходимое условие выполнено, то для монотонности должно быть также выполнено достаточное условие $f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\le f(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$. Для пары аргументов, расположенных на строках 1 и 3 таблицы 3 необходимое условие выполнено, но достаточное условие не выполняется, так как $f_1(0,0,0)=1>f_1(0,1,0)=0$. Точно также по строкам 1 и 2 устанавливаем, что логическая функция $f_2$ не является монотонной. Функция $f_3$ не монотонна по строкам 3 и 7 таблицы 3, так как необходимое условие монотонности выполнено, а достаточное условие не выполнено

$$f_3(0,1,0)=1>f_3(1,1,0)=0.$$

Сохранение констант 0 и 1 легко устанавливается по первой и восьмой строке таблицы 3. Так как $f_1(0,0,0)=1$ и $f_2(0,0,0)=1$, то функции $f_1$, $f_2$ не сохраняют константу 0. Так как $f_3(0,0,0)=0$, то $f_3$ сохраняет константу 0. Кроме того, так как $f_1(1,1,1)=1$, $f_2(1,1,1)=1$ и $f_3(1,1,1)=1$, то все три функции $f_1$, $f_2$, $f_3$ сохраняют константу 1.

Таблица 4.

**Свойства логических функций $f_1$, $f_2$, $f_3$.**

| | $L$ | $S$ | $M$ | $T_0$ | $T_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | - | - | - | - | + |
| $f_2$ | + | - | - | - | + |
| $f_3$ | - | - | - | + | + |

Для того, чтобы проверить полноту системы логических функций $\{f_1, f_2, f_3\}$, построим таблицу 4, в которой отметим все основные свойства логических функций этой системы, линейность, самодвойственность, монотонность, сохранение констант 0 и 1. По таблице 4 определим выполнение необходимых и достаточных условий теоремы Поста. Из всех логических функций данной системы только одна линейная, а именно, $f_2$. Отметим в таблице 6 принадлежность функции $f_2$ классу линейных функций знаком (+). Для двух других функций (-). Аналогично, учитывая выявленные ранее другие свойства функций $f_1$, $f_2$, $f_3$, заполним таблицу 4 соответствующими знаками. В этих символических обозначениях, согласно теореме Поста, для полноты системы логических функций необходимо и достаточно, чтобы каждый столбец таблицы 6 содержал, по меньшей мере, один знак (-). Однако, последний столбец не содержит ни одного знака (-). Следовательно, система логических функций $\{f_1, f_2, f_3\}$ не является полной.

## Краткая теория

*Логическим устройством* называется такое устройство, которое функционирует согласно законам логики. К таким устройствам относятся, прежде всего, компьютеры и основные узлы большинства современного оборудования. *Логическими схемами* называются условные изображения логических устройств в виде схем. Наиболее близкими по содержанию к логическим устройствам являются *комбинационные* схемы, которые составляются из элементов, изображающих элементную базу логических устройств. Некоторые из стандартных изображений приведены на рисунке 1.

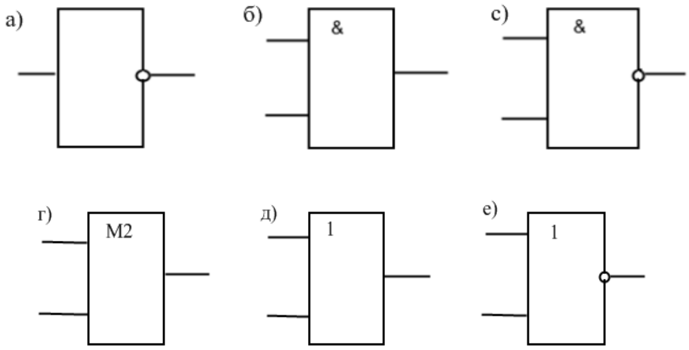


Рис.1. Обозначения основных элементов логических схем.

На рисунке 1 а) изображен элемент, соответствующий логической функции отрицание, на рисунках 10 б) – е) соответственно изображения конъюнкции, отрицания конъюнкции (функция Шеффера), сложение по модулю два, дизъюнкция, отрицание дизъюнкции (функция Пирса). Практическая задача выбора элементной базы непосредственно связана с теоретической задачей полноты системы логических функций. В силу полноты системы логических функций, составленной из отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, достаточно иметь элементную базу и трех этих функций. Можно ограничить базу и всего одним элементом, например, функцией Шеффера или функцией Пирса. Однако такое ограничение может усложнить схему и, поэтому, не всегда такое ограничение приводит к оптимизации устройства.

*Переключательные* схемы логических устройств, применяются для решения оптимизационных задач. Основными элементами переключательных схем являются переменные (переключатели) и их отрицания. При этом значение переменной, равное 1 соответствует включенному состоянию переключателя, а значение, равное 0 - соответствует выключенному состоянию. Отрицания переменных соответствуют обратным состояниям. Конъюнкция двух переменных изображается в виде последовательно соединенных двух или нескольких переменных или их отрицаний. Дизъюнкция двух или нескольких переменных изображается в виде параллельно соединенных переменных (элементов). На рисунке 2 а) и б) две элементарные схемы, при помощи которых можно составить любые переключательные схемы.

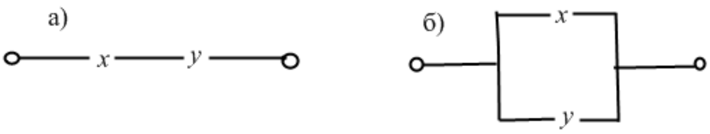


Рис.2. Изображения основных элементов переключательных схем.

Основной целью анализа логических устройств является оптимизация устройств, то есть замена устройств на такие, которые функционально не отличаются от исходных, но содержат меньшее число элементов. Функцией *проводимости* переключательной схемы называется логическая функция, характеризующая работу данного логического устройства. Общая схема оптимизации логических устройств заключается в построении для них переключательных схем, в построении функции проводимости, упрощении функции проводимости и в построении для упрощенной функции проводимости переключательной схемы.

Оптимизацию логических устройств можно провести в результате равносильных преобразований функции проводимости этого устройства. Есть еще один важный способ оптимизации, а именно, минимизация логических функций. Этот способ основан на применении метода неопределенных коэффициентов. Определим сначала понятие *лексикографического порядка* расположения элементарных конъюнкций в дизъюнктивной нормальной форме логической функции. Будем считать, что элементарная конъюнкция имеет больший порядок, если в нее входит большее число сомножителей или же содержит большее число логических операций.

**Общее выражение для дизъюнктивной нормальной формы** логической функции, в котором элементарные конъюнкции расположены в порядке возрастания, имеет следующий вид:

$$f(x,y,z) = a_1 x \vee a_2 y \vee a_3 z \vee a_4 \bar{x} \vee a_5 \bar{y} \vee a_6 \bar{z} \vee a_7 xy \vee a_8 xz \vee a_9 yz \vee$$
$$\vee a_{10} x\bar{y} \vee a_{11} \bar{x}y \vee a_{12} x\bar{z} \vee a_{13} \bar{x}z \vee a_{14} \bar{y}z \vee a_{15} y\bar{z} \vee a_{16} \bar{x}\,\bar{y} \vee a_{17} \bar{x}\,\bar{z} \vee a_{18} \bar{y}\bar{z} \vee$$
$$\vee a_{19} xyz \vee a_{20} \bar{x}yz \vee a_{21} x\bar{y}z \vee a_{22} xy\bar{z} \vee a_{23} \bar{x}\,\bar{y}z \vee a_{24} x\bar{y}\bar{z} \vee a_{25} \bar{x}\,y\bar{z} \vee a_{26} \bar{x}\,\bar{y}\bar{z}.$$

При помощи этого выражения и определения функции, которая минимизируется, необходимо составить систему логических уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов. Выбирая решения полученной системы необходимо учитывать то, что более предпочтительными решениями являются те, в которых ненулевые коэффициенты соответствуют элементарным конъюнкциям наименьшего порядка. При таком выборе будет найдено минимальная ДНФ.

Конструирование логических устройств, предполагает наличие в этом процессе элементов оптимизации, так как наиболее эффективным процесс конструирования логических устройств будет тогда, когда оптимизация будет выполнена уже на этапе конструирования.

Этапы конструирования логических устройств, включают в себя:

1) анализ технических условий конструирования и выбор оптимального представления для функции проводимости, исходя из условий функционирования логического устройства;
2) упрощение, при помощи законов логики, функции проводимости;
3) построение переключательной и комбинационной схемы;
4) построение логического устройства.

## Представление булевой функции формулой логики высказываний

***Булевой функцией*** *$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется n-местная функция, аргументы которой принимают значения во множестве {0, 1} и сама функция принимает значения в этом же множестве.*

Всякую булеву функцию от $n$ переменных можно задать таблицей из $2^n$ строк, в которой в каждой строке записывают одну из оценок списка переменных, принимающих значение 0 или 1.

Для $n=3$ булеву функцию можно задать таблицей:

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | $f(0, 0, 0)$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $f(0, 0, 1)$ |
| 2 | 0 | 1 | 0 | $f(0, 1, 0)$ |
| 3 | 0 | 1 | 1 | $f(0, 1, 1)$ |
| 4 | 1 | 0 | 0 | $f(1, 0, 0)$ |
| 5 | 1 | 0 | 1 | $f(1, 0, 1)$ |
| 6 | 1 | 1 | 0 | $f(1, 1, 0)$ |
| 7 | 1 | 1 | 1 | $f(1, 1, 1)$ |

Используется также задание булевой функции в виде двоичного слова, длина которого зависит от числа переменных. Существует ровно $2^{2^n}$ различных булевых функций от $n$ переменных. Константы 0 и 1 считают нуль-местными булевыми функциями.

*Утверждение. Каждой формуле логики высказываний соответствует некоторая булева функция.*

*Пример*

Построить все булевы функции, зависящие от двух переменных.

Поскольку $n=2$, различных булевых функций от двух переменных существует ровно 16.

| *№ функции* | *Значение функции* | *Формула, соответствующая функции* |
|---|---|---|
| 1 | $f=0000$ | $f=0$ |
| 2 | $f=0001$ | $f=x_1 \wedge x_2$ |
| 3 | $f=0010$ | $f=\overline{x_1 \to x_2}$ |
| 4 | $f=0011$ | $f=x_1$ |
| 5 | $f=0100$ | $f=\overline{x_1} \wedge x_2$ |
| 6 | $f=0101$ | $f=x_2$ |
| 7 | $f=0110$ | $f=x_1 \oplus x_2$ |
| 8 | $f=0111$ | $f=x_1 \vee x_2$ |
| 9 | $f=1000$ | $f=\overline{x_1 \wedge x_2}$ |
| 10 | $f=1001$ | $f=x_1 \approx x_2$ |
| 11 | $f=1010$ | $f=\overline{x_2}$ |
| 12 | $f=1011$ | $f=x_1 \vee \overline{x_2}$ |
| 13 | $f=1100$ | $f=\overline{x_1}$ |
| 14 | $f=1101$ | $f=x_1 \to x_2$ |
| 15 | $f=1110$ | $f=\overline{x_1 \vee x_2}$ |
| 16 | $f=1111$ | $f=1$ |

<u>Теорема 1.</u> *Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ $k$-местная булева функция. Если $f$ не равна тождественно нулю, то существует такая формула $F$, зависящая от списка переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и находящаяся в СДНФ относительно этого списка, что $F$*

*выражает собой функцию f. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки дизъюнктивных членов.*

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ k-местная булева функция. Если f не равна тождественно единице, то существует такая формула F, зависящая от списка переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$ и находящаяся в СКНФ относительно этого списка, что F выражает собой функцию f. Формула F определена однозначно с точностью до перестановки конъюнктивных членов.*

Поскольку каждая булева функция представима в виде формулы логики высказываний, то принцип построения СДНФ и СКНФ сохраняется такой же, как и для формул логики высказываний.

## Минимизация нормальных форм

Выше было сказано, что произвольная булева функция может быть представлена формулой в дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной форме. Равносильными преобразованиями можно получить формулу, содержащую меньшее, чем исходная, число переменных.

***Минимальной ДНФ (МДНФ)*** *функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется ДНФ, реализующая функцию f и содержащая минимальное число символов переменных по сравнению со всеми другими ДНФ, реализующими функцию f.*

Минимальную ДНФ данной формулы можно найти, перебрав конечное число равносильных ей ДНФ и выбрав среди них ту, которая содержит минимальное число переменных. Однако при большом числе переменных такой перебор практически невыполним. Существуют эффективные способы нахождения минимальной ДНФ. Рассмотрим два из них.

Каждый из рассмотренных ниже методов состоит из двух этапов:

- построение сокращенной ДНФ;
- построение матрицы покрытий. Построение МДНФ.

*Если для всякого набора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений переменных условие $g(a) = 1$ влечет $f(a) = 1$, то функция g называется* ***частью функции*** *f (или функция* ***f накрывает функцию g****). Если при этом для некоторого набора $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$функция $g(c)=1$, то говорят, что функция g накрывает единицу функции f на наборе c (или что g накрывает конституенту единицы $x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n}$ функции f).*

Конституента единицы функции *f* есть часть функции *f*, накрывающая единственную единицу функции *f*.

*Элементарная конъюнкция К называется* ***импликантом*** *функции f, если для всякого набора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из 0 и 1 условие $K(a)=1$ влечет $f(a)=1$.*

*Импликант К функции f называется простым, если выражение, получающееся из него выбрасыванием любых множителей, уже не импликант функции f.*

Всякий импликант функции *f* есть часть функции *f*.

Теорема 3. *Всякая функция реализуется дизъюнкцией всех своих простых импликант.*

***Сокращенная ДНФ*** *функции f есть дизъюнкция всех простых импликант функции f.*

*Утверждение. Всякая функция f реализуется своей сокращенной ДНФ. Для всякой функции, не равной тождественно нулю, существует единственная сокращенная ДНФ.*

***<u>Теорема (Куайна).</u>*** *Если в СДНФ функции f провести все операции неполного склеивания, а затем все операции поглощения и удаления дублирующих членов, то в результате получится сокращенная ДНФ функции f.*

*Алгоритм Куайна построения сокращенной ДНФ*

1. Получить СДНФ функции.
2. Провести все операции неполного склеивания.
3. Провести все операции поглощения.

*Пример*

Минимизировать функцию *f=1111010010101111*.

*Решение.*

1. Строим таблицу значения для данной функции (табл 1.). Строим СДНФ функции. При этом слагаемые нумеруем и записываем в столбец (табл 2.).

*Таблица1*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

СДНФ (1): № 0, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 15.

*Таблица 2*

| № слагаемого | слагаемое |
|---|---|
| 1 | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ |
| 2 | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4$ |
| 3 | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$ |
| 4 | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x\;x_4$ |
| 5 | $\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4$ |
| 6 | $x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ |
| 7 | $x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$ |
| 8 | $x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ |
| 9 | $x_1x_2\overline{x_3}\,x_4$ |
| 10 | $x_1x_2x_3\,\overline{x_4}$ |
| 11 | $x_1x_2x_3x_4$ |

2. Проводим все операции неполного склеивания.

Первый этап склеивания (табл. 3):

*Таблица 3*

| *Слагаемые* | *Склеивание по* | *Результат* | *Новые слагаемые* |
|---|---|---|---|
| *1, 2* | $x_4$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ | *1* |
| *1, 3* | $x_3$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ | *2* |
| *1, 6* | $x_1$ | $\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ | *3* |
| *2, 4* | $x_3$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_4$ | *4* |
| *2, 5* | $x_2$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4$ | ***5*** |
| *3, 4* | $x_4$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$ | *6* |
| *3, 7* | $x_1$ | $\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}$ | *7* |
| *5, 9* | $x_1$ | $x_2\;\overline{x_3}x_4$ | *8* |
| *6, 7* | $x_3$ | $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ | *9* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *6, 8* | $x_2$ | $x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ | *10* |
| *7, 10* | $x_2$ | $x_1x_3\overline{x_4}$ | *11* |
| *8, 9* | $x_4$ | $x_1x_2\overline{x_3}$ | *12* |
| *8, 10* | $x_3$ | $x_1x_2\overline{x_4}$ | *13* |
| *9, 11* | $x_3$ | $x_1x_2x_4$ | *14* |
| *10, 11* | $x_4$ | $x_1x_2x_3$ | *15* |

В первом этапе склеивания участвовали все слагаемые СДНФ, значит, ни одно из исходных слагаемых не войдут в сокращенную ДНФ. После первого этапа склеивания (и возможных поглощений) получаем, что

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}\vee\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_4\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3}x_4\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\vee\overline{x_2}x_3\overline{x_4}\vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}\vee$$
$$\vee x_2\overline{x_3}x_4\vee x_1\overline{x_3}\,\overline{x_4}\vee x_1x_3\overline{x_4}\vee x_1x_2\overline{x_3}\vee x_1x_2\overline{x_4}\vee x_1x_2x_4\vee x_1x_2x_3.$$

Пронумеруем дизъюнктивные члены в полученной ДНФ в порядке их следования от 1 до 15 (табл. 4).

Второй этап склеивания:

*Таблица 4*

| *Слагаемые* | *Склеивание по* | *Результат* |
|---|---|---|
| *1, 6* | $x_3$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ |
| *2, 4* | $x_4$ | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}$ |
| *2, 9* | $x_1$ | $\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ |
| *3, 7* | $x_3$ | $\overline{x_2}\,\overline{x_4}$ |
| *9, 13* | $x_2$ | $x_1\overline{x_4}$ |
| *10, 11* | $x_3$ | $x_1\overline{x_4}$ |
| *12, 15* | $x_3$ | $x_1x_2$ |
| *13, 14* | $x_4$ | $x_1x_2$ |

В процедуре склеивания на втором этапе не принимали участие слагаемые № 5, 8 с предыдущего шага, поэтому после второго этапа склеивания и последующих поглощений получаем, что

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee\overline{x_2}\,\overline{x_4}\vee x_1\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4\vee x_2\overline{x_3}\,x_4.$$

Поскольку дальнейшее склеивания невозможны, то это и будет сокращенная ДНФ исходной функции.

Построение сокращенной ДНФ в классе дизъюнктивных нормальных форм

Этот метод не отличается большой эффективностью, но он прост для изложения и не требует введения дополнительных понятий.

Пусть булева функция задана таблицей истинности или СДНФ.

Минимизирующая карта булевой функции представляет собой квадратную матрицу $2^n\times 2^n$, где $n$ – число переменных. Первые столбцы отводят для аргументов, дальнейшие – для их всевозможных конъюнкций по 2, по 3 и т. д. сомножителей, предпоследний - для конъюнкции всех аргументов, последний – для значений функции.

*Шаг 1.* Столбцы для аргументов, как обычно в таблицах истинности, заполняются всевозможными наборами 0 и 1. В столбцах для конъюнкций проставляются десятичные значения двоичных чисел, соответствующих наборам значений аргументов. Последний столбец заполняется соответственно значению функции.

*Далее работа чередуется по строкам, по столбцам.*

*Шаг 2.* Вычеркиваются строки, в которых функция обращается в нуль.

*Шаг 3.* В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркивают те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге.

*Шаг 4.* В сохранившихся строках выбирают «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводят их кружочками.

*Шаг 5.* Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркивают все, кроме одного.

*Шаг 6.* С помощью оставшихся обведенных чисел образуют конъюнкции. Для этого переводят каждое число в двоичную систему. Переменную, которой соответствует 1, берут сомножителем без отрицания, которой соответствует 0 – с отрицанием.

*Шаг 8.* Составляют дизъюнкцию полученных конъюнкций. В результате получаем сокращенную ДНФ функции.

*Пример*

Построить сокращенную ДНФ для функции $f=11100101$.

*Решение.*

1.Строим минимизационную карту (табл. 5):

*Таблица 5*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *1* |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | *1* |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | *1* |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | *0* |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | *0* |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | *1* |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 6 | *0* |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 7 | *1* |

2. Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в нуль (табл. 6):

*Таблица 6*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *1* |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | *1* |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | *1* |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | *0* |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | *0* |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | *1* |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 6 | *0* |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 7 | *1* |

3. В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге (табл. 7):

*Таблица 7*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | **0** | **0** | 0 | 0 | **0** | 0 | *1* |
| 1 | **0** | **0** | **1** | 0 | **1** | 1 | 1 | *1* |
| 2 | **0** | **1** | **0** | **1** | 0 | **2** | 2 | *1* |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | *0* |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | *0* |
| 5 | **1** | **0** | **1** | **2** | 3 | 1 | 5 | *1* |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 6 | *0* |
| 7 | **1** | **1** | **1** | **3** | 3 | **3** | 7 | *1* |

4. В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их (табл. 8):

*Таблица 8*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | **0** | **0** | 0 | 0 | **0** | **0** | *1* |
| 1 | **0** | **0** | **1** | 0 | **1** | 1 | **1** | *1* |
| 2 | **0** | **1** | **0** | **1** | 0 | **2** | **2** | *1* |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | *0* |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | *0* |
| 5 | **1** | **0** | **1** | **2** | 3 | 1 | **5** | *1* |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 6 | *0* |
| 7 | **1** | **1** | **1** | **3** | 3 | **3** | **7** | *1* |

5. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного (табл. 9):

*Таблица 9*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | **0** | **0** | 0 | 0 | **0** | **0** | *1* |
| 1 | **0** | **0** | **1** | 0 | **1** | 1 | **1** | *1* |
| 2 | **0** | **1** | **0** | **1** | 0 | **2** | **2** | *1* |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | *0* |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | *0* |
| 5 | **1** | **0** | **1** | **2** | 3 | 1 | **5** | *1* |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 6 | *0* |
| 7 | **1** | **1** | **1** | **3** | 3 | **3** | **7** | *1* |

6. С помощью оставшихся обведенных чисел образуем конъюнкции. Для этого переводим каждое число в двоичную систему. Переменную, которой соответствует 1, берем сомножителем без отрицания, 0 – с отрицанием. Составляем дизъюнкцию полученных конъюнкций.

Сокращенная ДНФ имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2 x_3.$$

*Пример.*

Построить сокращенную ДНФ функции *f=1111010010101111* с использованием минимизационной карты.

*Решение.*

Строим минимизационную карту (табл. 10) и пошагово выполняем алгоритм.

*Шаг 1.*

*Таблица 10*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $x_1x_2x_3$ | $x_1x_2x_4$ | $x_1x_3x_4$ | $x_2x_3x_4$ | $x_1x_2x_3x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | 5 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 | 8 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 1 | 9 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 5 | 4 | 6 | 2 | 10 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 3 | 11 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6 | 6 | 4 | 4 | 12 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 6 | 7 | 5 | 5 | 13 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 7 | 6 | 6 | 6 | 14 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 7 | 7 | 15 | 1 |

*Шаг 2.* Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в нуль (табл. 11):

*Таблица 11*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $x_1x_2x_3$ | $x_1x_2x_4$ | $x_1x_3x_4$ | $x_2x_3x_4$ | $x_1x_2x_3x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | 5 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 | 8 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 1 | 9 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 5 | 4 | 6 | 2 | 10 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 3 | 11 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6 | 6 | 4 | 4 | 12 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 6 | 7 | 5 | 5 | 13 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 7 | 6 | 6 | 6 | 14 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 7 | 7 | 15 | 1 |

*Шаг 3.* В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге (табл. 12):

*Таблица 12*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $x_1x_2x_3$ | $x_1x_2x_4$ | $x_1x_3x_4$ | $x_2x_3x_4$ | $x_1x_2x_3x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | 5 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 | 8 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 1 | 9 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 5 | 4 | 6 | 2 | 10 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 3 | 11 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6 | 6 | 4 | 4 | 12 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 6 | 7 | 5 | 5 | 13 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 7 | 6 | 6 | 6 | 14 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 7 | 7 | 15 | 1 |

*Шаг 4.* В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их (табл. 13):

*Таблица 13*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $x_1x_2x_3$ | $x_1x_2x_4$ | $x_1x_3x_4$ | $x_2x_3x_4$ | $x_1x_2x_3x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | 5 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 | 8 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 1 | 9 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 5 | 4 | 6 | 2 | 10 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 3 | 11 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6 | 6 | 4 | 4 | 12 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 6 | 7 | 5 | 5 | 13 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 7 | 6 | 6 | 6 | 14 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 7 | 7 | 15 | 1 |

*Шаг 5.* Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного (табл. 14):

*Таблица 14*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_1x_4$ | $x_2x_3$ | $x_2x_4$ | $x_3x_4$ | $x_1x_2x_3$ | $x_1x_2x_4$ | $x_1x_3x_4$ | $x_2x_3x_4$ | $x_1x_2x_3x_4$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | 4 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | 5 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 6 | 6 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 0 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 | 4 | 0 | 8 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 4 | 5 | 5 | 1 | 9 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 5 | 4 | 6 | 2 | 10 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 3 | 11 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 6 | 6 | 4 | 4 | 12 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 6 | 7 | 5 | 5 | 13 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 7 | 6 | 6 | 6 | 14 | 1 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | 7 | 7 | 7 | 15 | 1 |

*Шаг 6.* Сокращенная ДНФ имеет вид

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3x_4.$$

## Построение всех тупиковых ДНФ

***Тупиковой ДНФ (ТДНФ)*** *функции f называется такая ДНФ ее простых импликант, из которых нельзя выбросить ни одного импликанта, не изменив функции f.*

*Теорема 4. Всякая минимальная ДНФ некоторой функции является ее тупиковой ДНФ.*

Для получения МДНФ функции $f$ необходимо построить все ТДНФ функции $f$ и выбрать те из них, которые содержат минимальное число букв.

Алгоритм построения всех тупиковых ДНФ.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть булева функция.

*Шаг 1.* Построим СДНФ функции $f$ и пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ есть ее конституенты (единицы).

*Шаг 2.* Построим сокращенную ДНФ функции $f$ и пусть $K_1, K_2, \ldots, K_m$ – ее простые импликанты.

*Шаг 3.* Построим матрицу покрытий простых импликант функции $f$ ее коституентами единицы (табл. 15), полагая, что

$$a_{ij} = \begin{cases} 1,\ \text{åñëè êàæäûé ìíîæèòåëü â } K_i \text{ ÿâëÿåòñÿ ìíîæèòåëåì â } P_j;\ (P_j \text{ åñòü ÷àñòü } K_i); \\ 0,\ \text{â ïðîòèâíîì ñëó÷àå} \end{cases}$$

*Таблица 15*

| $N$ | $P_1$ | $P_2$ | … | $P_j$ | … | $P_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1j}$ | … | $a_{1n}$ |
| $K_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2j}$ | … | $a_{2n}$ |
| $K_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | … | $a_{ij}$ | … | $a_{in}$ |
| $K_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mj}$ | … | $a_{mn}$ |

*Шаг 4.* Для каждого столбца $j$ $(1 \le j \le n)$ найдем множество $E_j$ всех тех номеров $i$ строк, для которых $a_{ij}=1$.

Пусть $E_j = \{e_{j1}, e_{j2}, e_{j_{rj}}\}$. Составим выражение $A = \bigwedge_{j=1}^{n} (e_{j1} \vee e_{j2} \vee \ldots \vee e_{j,rj})$. Назовем его решеточным выражением. Это выражение можно рассматривать как формулу, построенную в свободной дистрибутивной решетке с образующими $1, 2, \ldots, m$ и с операциями конъюнкции и дизъюнкции.

*Шаг 5.* В выражении $A$ раскроем скобки приведя выражение $A$ к равносильному выражению $B = \bigvee_i (e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \ldots \wedge e_{in})$, где перечислены все конъюнкции $e_{i1} \wedge e_{i2} \wedge \ldots \wedge e_{in}$ элементы $e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}$ которой взяты из скобок $1, 2, \ldots, n$ соответственно в выражении $A$.

*Шаг 6.* В выражении В проведем все операции удаления дублирующих членов и все операции поглощения. В результате получим равносильное выражение С, представляющее собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

*Пример.*

Построить все минимальные ДНФ для функции $f=1111010010101111$.

*Решение.*

Сокращенная ДНФ для данной функции имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 x_4 \vee x_2\overline{x}_3 x_4.$$

Строим матрицу покрытий (табл. 16).

*Таблица 16*

| № | *Простые импликанты* | | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0101 | 1000 | 1010 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| 1 | 1 | 1 | - | - | | | | | | | | + | + | + | + |
| 2 | 0 | 0 | - | - | + | + | + | + | | | | | | | |
| 3 | - | 0 | - | 0 | + | | + | | | + | + | | | | |
| 4 | 1 | - | - | 0 | | | | | | + | + | + | | + | |
| 5 | 0 | - | 0 | 1 | | + | | | + | | | | | | |
| 6 | - | 1 | 0 | 1 | | | | | + | | | | + | | |

Пошагово будем выбирать слагаемые, которые войдут в минимальную ДНФ. Если слагаемое нами выбрано, то мы помечаем конституенты единицы функции f, которые будут покрыты (по строке). При этом автоматически исключаем из рассмотрения конституенты единицы, которые уже покрыты, но относятся к другим слагаемым сокращенной ДНФ.

*Шаг 1.* Выбираем слагаемое 1 (табл. 17):

*Таблица 17*

| № | *Простые импликанты* | | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0101 | 1000 | 1010 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| 1 | 1 | 1 | - | - | | | | | | | | + | + | + | + |
| 2 | 0 | 0 | - | - | + | + | + | + | | | | | | | |
| 3 | - | 0 | - | 0 | + | | + | | | + | + | | | | |
| 4 | 1 | - | - | 0 | | | | | | + | + | + | | + | |
| 5 | 0 | - | 0 | 1 | | + | | | + | | | | | | |
| 6 | - | 1 | 0 | 1 | | | | | + | | | | + | | |

*Шаг 2.* Выбираем слагаемое 2 (табл. 18):

*Таблица 18*

| № | *Простые импликанты* | | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0101 | 1000 | 1010 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| 1 | 1 | 1 | - | - | | | | | | | | + | + | + | + |
| 2 | 0 | 0 | - | - | + | + | + | + | | | | | | | |
| 3 | - | 0 | - | 0 | + | | + | | | + | + | | | | |
| 4 | 1 | - | - | 0 | | | | | | + | + | + | | + | |
| 5 | 0 | - | 0 | 1 | | + | | | + | | | | | | |
| 6 | - | 1 | 0 | 1 | | | | | + | | | | + | | |

*Шаг 3.* Выбираем слагаемое 4 (табл. 19):

*Таблица 19*

| № | *Простые импликанты* | | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0101 | 1000 | 1010 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| 1 | 1 | 1 | - | - | | | | | | | | + | + | + | + |
| 2 | 0 | 0 | - | - | + | + | + | + | | | | | | | |
| 3 | - | 0 | - | 0 | + | | + | | | + | + | | | | |
| 4 | 1 | - | - | 0 | | | | | | + | + | + | | + | |
| 5 | 0 | - | 0 | 1 | | + | | | + | | | | | | |
| 6 | - | 1 | 0 | 1 | | | | | + | | | | + | | |

*Шаг 4.* Выбираем слагаемое 5 (табл. 20):

*Таблица 20*

| № | *Простые импликанты* | | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0101 | 1000 | 1010 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
| 1 | 1 | 1 | - | - | | | | | | | | + | + | + | + |
| 2 | 0 | 0 | - | - | + | + | + | + | | | | | | | |
| 3 | - | 0 | - | 0 | + | | + | | | + | + | | | | |
| 4 | 1 | - | - | 0 | | | | | | + | + | + | | + | |
| 5 | 0 | - | 0 | 1 | | + | | | + | | | | | | |
| 6 | - | 1 | 0 | 1 | | | | | + | | | | + | | |

Поскольку все конституенты единицы покрыты, то одна из ТДНФ имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\, x_4.$$

Поскольку выбор включаемых слагаемых произволен, то функция может иметь несколько ТДНФ. Для рассматриваемой функции существует еще несколько ТДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\, x_4.$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3}\, x_4.$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\vee\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_1\overline{x_4}\vee x_2\overline{x_3}\,x_4.$$

Все найденные ТДНФ являются минимальными ДНФ.

*Пример*

Построить одну из МДНФ функции *f=11100101*.

*Решение.*

Сокращенная ДНФ для данной функции имеет вид $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3}\vee x_1x_3\vee\overline{x_2}\,x_3$.

Строим матрицу покрытий (табл. 21):

*Таблица 21*

| № | Простые импликанты | | | Конституенты единицы функции *f* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 000 | 001 | 010 | 101 | 111 |
| 1 | 0 | 0 | - | + | + | | | |
| 2 | 0 | - | 0 | + | | + | | |
| 3 | 1 | - | 1 | | | | + | + |
| 4 | - | 0 | 1 | | + | | + | |

*Шаг 1.* Выбираем слагаемое 3 (табл. 22):

*Таблица 22*

| № | Простые импликанты | | | Конституенты единицы функции *f* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 000 | 001 | 010 | 101 | 111 |
| 1 | 0 | 0 | - | + | + | | | |
| 2 | 0 | - | 0 | + | | + | | |
| 3 | 1 | - | 1 | | | | + | + |
| 4 | - | 0 | 1 | | + | | + | |

*Шаг 2.* Выбираем слагаемое 2 (табл. 23):

*Таблица 23*

| № | Простые импликанты | | | Конституенты единицы функции *f* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 000 | 001 | 010 | 101 | 111 |
| 1 | 0 | 0 | - | + | + | | | |
| 2 | 0 | - | 0 | + | | + | | |
| 3 | 1 | - | 1 | | | | + | + |
| 4 | - | 0 | 1 | | + | | + | |

*Шаг 3.* Выбираем слагаемое 1(табл. 24):

*Таблица 24*

| № | Простые импликанты | | | Конституенты единицы функции *f* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 000 | 001 | 010 | 101 | 111 |
| 1 | 0 | 0 | - | + | + | | | |
| 2 | 0 | - | 0 | + | | + | | |
| 3 | 1 | - | 1 | | | | + | + |
| 4 | - | 0 | 1 | | + | | + | |

В результате получаем МДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee\overline{x_1}\,\overline{x_3}\vee x_1x_3.$$

## Алгоритм минимизации функций в классе ДНФ

1. Строим СДНФ функции *f*.
2. Строим сокращенную ДНФ функции *f*.

3. С помощью матрицы покрытий и решеточного выражения строим все ТДНФ функции *f*.
4. Среди построенных ТДНФ выбираем все минимальные дизъюнктивные нормальные формы функции *f*.

*Пример*

В классе нормальных форм минимизировать функцию *f=01011110*.

*Решение.*

Для построения сокращенной ДНФ используем алгоритм Куайна.

1. Строим СДНФ для функции *f*. Таблица значений имеет вид (табл. 25):

*Таблица 25*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 |

СДНФ (1): № 1, 3, 4, 5, 6 (табл.26):

*Таблица 26*

| *№ слагаемого* | *Слагаемое СДНФ* |
|---|---|
| 1 | $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$ |
| 2 | $\overline{x_1}\,x_2\,x_3$ |
| 3 | $x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ |
| 4 | $x_1\,\overline{x_2}\,x_3$ |
| 5 | $x_1\,x_2\,\overline{x_3}$ |

2. Проводим все операции неполного склеивания (табл. 27):

*Таблица 27*

| *Слагаемые* | *Склеивание по* | *Результат* |
|---|---|---|
| *1, 2* | $x_2$ | $\overline{x_1}\,x_3$ |
| *1, 4* | $x_1$ | $\overline{x_2}\,x_3$ |
| *3, 4* | $x_3$ | $x_1\,\overline{x_2}$ |
| *3, 5* | $x_2$ | $x_1\,\overline{x_3}$ |

Дальнейшее склеивание невозможно. Все слагаемые предыдущего шага участвовали в операции склеивания, поэтому сокращенная ДНФ имеет вид:

$$f = \overline{x_1}\,x_3 \vee \overline{x_2}\,x_3 \vee x_1\,\overline{x_2} \vee x_1\,\overline{x_3}\,.$$

3. Строим матрицу покрытий (табл. 28).

*Таблица 28*

| *№* | *Простые импликанты* | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | *001* | *011* | *100* | *101* | *110* |
| *1* | *0* | - | *1* | + | + | | | |
| *2* | - | *0* | *1* | + | | | + | |
| *3* | *1* | *0* | - | | | + | + | |
| *4* | *1* | - | *0* | | | + | | + |

Последовательно выбираем слагаемые: № 4, 1, 2 (табл. 29).

*Таблица 29*

| *№* | *Простые импликанты* | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | *001* | *011* | *100* | *101* | *110* |
| *1* | *0* | - | *1* | + | + | | | |
| *2* | - | *0* | *1* | + | | | + | |
| *3* | *1* | *0* | - | | | + | + | |
| *4* | *1* | - | *0* | | | + | | + |

В результате МДНФ имеет вид:

$$f = \overline{x_1}\, x_3 \vee \overline{x_2}\, x_3 \vee x_1\, \overline{x_3}\ .$$

*Пример.*

Построить МДНФ функции *f=11011011*.

*Решение.*

Для построения сокращенной ДНФ используем минимизационную карту (табл. 30).

*Шаг 1.*

*Таблица 30*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *1* |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | *1* |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | *0* |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | *1* |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 2 | 2 | 0 | 4 | *1* |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 | 5 | *0* |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 2 | 6 | *1* |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 7 | *1* |

*Шаг 2.* Вычеркиваем строки, в которых функция обращается в нуль (табл. 31):

*Таблица 31*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | 1 |
| 1 | *0* | *0* | *1* | *0* | *1* | *1* | *1* | 1 |
| 2 | *0* | *1* | *0* | *1* | *0* | *2* | *2* | 0 |
| 3 | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *3* | *3* | 1 |
| 4 | *1* | *0* | *0* | *2* | *2* | *0* | *4* | 1 |
| 5 | *1* | *0* | *1* | *2* | *3* | *1* | *5* | 0 |
| 6 | *1* | *1* | *0* | *3* | *2* | *2* | *6* | 1 |
| 7 | *1* | *1* | *1* | *3* | *3* | *3* | *7* | 1 |

*Шаг 3.* В каждом столбце из сохранившихся чисел вычеркиваем те, равные которым уже вычеркнуты в этом столбце на предыдущем шаге (табл. 32):

*Таблица 32*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | ***1*** |
| 1 | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | ***1*** |
| 2 | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **2** | **2** | ***0*** |
| 3 | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **3** | **3** | ***1*** |
| 4 | **1** | **0** | **0** | **2** | **2** | **0** | **4** | ***1*** |
| 5 | **1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **1** | **5** | ***0*** |
| 6 | **1** | **1** | **0** | **3** | **2** | **2** | **6** | ***1*** |
| 7 | **1** | **1** | **1** | **3** | **3** | **3** | **7** | ***1*** |

*Шаг 4.* В сохранившихся строках выбираем «значения» наименьших по числу множителей конъюнкций (включая и конъюнкции с одним множителем – переменные) и обводим их (табл. 33):

*Таблица 33*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | ***1*** |
| 1 | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | ***1*** |
| 2 | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **2** | **2** | ***0*** |
| 3 | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **3** | **3** | ***1*** |
| 4 | **1** | **0** | **0** | **2** | **2** | **0** | **4** | ***1*** |
| 5 | **1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **1** | **5** | ***0*** |
| 6 | **1** | **1** | **0** | **3** | **2** | **2** | **6** | ***1*** |
| 7 | **1** | **1** | **1** | **3** | **3** | **3** | **7** | ***1*** |

*Шаг 5*. Если в одном столбце обведено несколько одинаковых чисел, то вычеркиваем все, кроме одного (табл. 34):

*Таблица 34*

| № | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_1x_2$ | $x_1x_3$ | $x_2x_3$ | $x_1x_2x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | ***1*** |
| 1 | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | ***1*** |
| 2 | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **2** | **2** | ***0*** |
| 3 | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **3** | **3** | ***1*** |
| 4 | **1** | **0** | **0** | **2** | **2** | **0** | **4** | ***1*** |
| 5 | **1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **1** | **5** | ***0*** |
| 6 | **1** | **1** | **0** | **3** | **2** | **2** | **6** | ***1*** |
| 7 | **1** | **1** | **1** | **3** | **3** | **3** | **7** | ***1*** |

*Шаг 6*. Сокращенная ДНФ имеет вид: $f = \overline{x}_1\,\overline{x}_2 \vee x_1\,x_2 \vee \overline{x}_1\,x_3 \vee x_1\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\,\overline{x}_3 \vee x_2x_3$. Строим матрицу покрытий (табл. 35).

*Таблица 35*

| № | *Простые импликанты* | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | *000* | *001* | *011* | *100* | *110* | *111* |
| *1* | *0* | *0* | - | + | + | | | | |
| *2* | *1* | *1* | - | | | | | + | + |
| *3* | *0* | - | *1* | | + | + | | | |
| *4* | *1* | - | *0* | | | | + | + | |
| *5* | - | *0* | *0* | + | | | + | | |
| *6* | - | *1* | *1* | | | + | | | + |

Последовательно выбираем слагаемые: № 1, 2, 5, 6 (табл. 36).

*Таблица 36*

| № | *Простые импликанты* | | | *Конституенты единицы функции f* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | *000* | *001* | *011* | *100* | *110* | *111* |
| *1* | *0* | *0* | - | + | + | | | | |
| *2* | *1* | *1* | - | | | | | + | + |
| *3* | *0* | - | *1* | | + | + | | | |
| *4* | *1* | - | *0* | | | | + | + | |
| *5* | - | *0* | *0* | + | | | + | | |
| *6* | - | *1* | *1* | | | + | | | + |

В результате МДНФ имеет вид:

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_2 x_3.$$

## Полные системы булевых функций

***Система булевых функций*** *$f_1, f_2, \ldots, f_n$ называется* ***полной****, если любая булева функция может быть выражена через функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ с помощью суперпозиций.*

*Пример*

Исходя из определения полной системы булевых функций, следует, что система $\{\wedge, \vee, \neg\}$ является полной, так как любая булева функция может быть представима в виде СДНФ и/либо СКНФ.

Дадим определение суперпозиции функций.

$K^0 = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}),\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_{k_2}), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_{k_m})\}$ *- конечная система булевых функций.*

*Функция $f$ называется* ***суперпозицией ранга 1*** *(или элементарной суперпозицией) функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, если $f$ может быть получена одним из следующих способов:*

1. *переименованием некоторой переменной $x_j$ какой-нибудь функции $f_i$, т. е. $f=f_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_{k1})$, где $y$ может совпасть с любой переменной;*
2. *подстановкой некоторой функции $f_l$ ($1 \le l$ $m$) вместо какой-либо переменной $x_j$ любой из функций $fi \in K^0$, т. е. $f=f_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, f_l(x_1, x_2, \ldots, x_{k1}), x_{j+1}, \ldots, x_{ki})$.*

*Суперпозиции ранга 1 образуют класс функций $K^1$. Класс функций, получающихся из функций класса $K^{r-1}$ суперпозиций ранга r-1 с помощью элементарных суперпозиций, называется* ***классом функций $K^r$ суперпозиций ранга r****. Суперпозициями функций из $K^0$ называются функции, входящие в какой-либо из классов $K^r$.*

*Класс (множество) К булевых функций называется* ***функционально замкнутым****, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции.*

*Пример*

1. Четыре булевы функции одной переменной ($f_1$ = *00*, $f_2$ = *11*, $f_3$ = *01*, $f_4$ = *10*) образуют замкнутый класс.
2. Булевы функции $f_1 = x$ и $f_2 = \bar{x}$ образуют замкнутый класс.

*Теорема. Класс $\mathbf{T_0}=\{f \mid f(0, 0, \ldots, 0)=0\}$ функций, сохраняющих константу ноль на нулевом наборе, замкнут относительно суперпозиций.*

*Теорема. Класс $\mathbf{T_1}=\{ f \mid f(1, 1, \ldots, 1)=1\}$ функций, сохраняющих константу один на единичном наборе замкнут относительно суперпозиций.*

## Двойственные функции

***Двойственной*** *для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция*

$$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$$

*Пример*

Построить функцию, двойственную данной:

1. $f = x \vee y$;
2. $f = x \to y$.

*Решение.*

1. $f^* = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}} = x \wedge y.$
2. $f^* = \overline{\bar{x} \to \bar{y}} = \overline{\bar{\bar{x}} \vee \bar{y}} = \bar{\bar{\bar{x}}} \wedge \bar{\bar{y}} = \bar{x} \wedge y.$

*Функция, совпадающая со своей двойственной, называется* ***самодвойственной****.*

*Утверждение. Если функция* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *самодвойственна, то функция* $\overline{f}$ *тоже самодвойственна.*

*Утверждение. Чтобы функция была самодвойственной необходимо и достаточно, чтобы на всяких двух противоположных наборах она принимала разные значения.*

Противоположными называются те наборы, которые в сумме дают двоичный код числа $(2^n-1)$.

*Пример.*

Выяснить являются ли функции самодвойственными:

1. $f = (\overline{x} \approx y) \to \overline{z}$;
2. $f = 01110010$.

*Решение.*

1. Строим таблицу истинности для данной функции $f = (\overline{x} \approx y) \to \overline{z}$ (табл. 37):

*Таблица 37*

| № | $x$ | $y$ | $z$ | $\overline{x}$ | $(\overline{x} \approx y)$ | $\overline{z}$ | $f = (\overline{x} \approx y) \to \overline{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *0* | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| *1* | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| *2* | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| *3* | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| *4* | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| *5* | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| *6* | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| *7* | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Так как наборы *(0, 0, 0)* и *(1, 1, 1)* являются противоположными, а *f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1)*, то данная функция не является самодвойственной.

2. Строим таблицу значений для функции *f = 01110001* (табл. 38).

*Таблица 38*

| № | $x$ | $y$ | $z$ | $f(x, y, z)$ |
|---|---|---|---|---|
| *0* | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *1* | 0 | 0 | 1 | 1 |
| *2* | 0 | 1 | 0 | 1 |
| *3* | 0 | 1 | 1 | 1 |
| *4* | 1 | 0 | 0 | 0 |
| *5* | 1 | 0 | 1 | 0 |
| *6* | 1 | 1 | 0 | 0 |
| *7* | 1 | 1 | 1 | 1 |

Перечислим пары противоположных наборов: (0, 7), (1, 6), (2, 5), (3, 4). Легко убедиться по таблице, что на всяких двух противоположных наборах функция принимает разные значения. Следовательно, функция является самодвойственной.

*Теорема 5. Класс* $\mathbf{S} = \{f \mid f = f^*\}$*самодвойственных функций замкнут относительно суперпозиций.*

*Линейные функции*

***Арифметические функции*** *в алгебре логики это сложение по модулю два и умножение (конъюнкция).*

***Многочленом Жегалкина*** *называется многочлен, являющийся суммой константы 0 или 1 и различных одночленов, в которые все переменные входят не выше, чем в первой степени:* $\sum X_{t_1}...X_{i_k} + a_j$*, причем на каждом наборе* $<i_1, ..., i_k>$ *все* $a_{ij}$ $(j = 1, ..., k)$ *различны,* $a_j \in \{0, 1\}$.

*<u>Теорема 6.</u> Всякую булеву функцию можно представить единственным полиномом Жегалкина.*

Многочлен Жегалкина можно получить различными способами. Остановимся на рассмотрении построения многочлена Жегалкина с помощью треугольника Паскаля. Рассмотрим алгоритм на примере.

*Пример.*

Построить многочлен Жегалкина для функции $f=10011110$.

*Решение.*

Алгоритм построения многочлена Жегалкина:

*Шаг 1.* Строим таблицу (табл. 39). Первый столбец содержит возможные слагаемые полинома Жегалкина. Нулевому набору всегда соответствует слагаемое 1. Остальным наборам соответствует слагаемое, представляющее собой конъюнкцию переменных, которые на данном наборе принимают значение 1. Следующие $n$ столбцов – всевозможные наборы из 0 и 1, соответствующие переменным. Далее столбец значений функции f. Функция g является вспомогательной, поэтому изначально этот столбец не заполнен.

*Таблица 39*

| *Слагаемые полинома Жегалкина* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ | $g$ | *Треугольник Паскаля* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | | |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | | |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | | |
| $x_2x_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | | |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | | |
| $x_1 x_3$ | 1 | 0 | 1 | 1 | | |
| $x_1 x_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | | |
| $x_1 x_2 x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | | |

*Шаг 2.* Построение треугольника Паскаля. Верхняя сторона треугольника есть функция $f$. Любой другой элемент треугольника есть сумма по модулю два двух соседних элементов предыдущей строки. Левая сторона треугольника представляет собой значение вспомогательной функции $g$ (табл. 40).

*Таблица 40*

| *Слагаемые полинома Жегалкина* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ | $g$ | *Треугольник Паскаля* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | $f = 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0$ |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 0 1 0 0 0 1 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 1 1 0 0 1 |
| $x_2x_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 0 1 0 1 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 1 1 1 |
| $x_1 x_3$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 0 0 |
| $x_1 x_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 0 |
| $x_1 x_2 x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

*Шаг 3.* Построение полинома Жегалкина. В полином войдут только те слагаемые, которым соответствует единица во вспомогательной функции $g$.

Для данной функции многочлен Жегалкина имеет вид:

$$f = 1 + x_3 + x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3.$$

*Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **линейной**, если многочлен Жегалкина для нее имеет следующий линейный относительно переменных вид:*

*$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + ... + a_nx_n + a_{n+1}$, где каждое $a_i$ равно 0 или 1.*

Булева функция из рассмотренного выше примера не является линейной.

*<u>Теорема 7.</u> Класс $\mathbf{L} = \{f \mid f = a_0+a_1x_1+...+a_nx_n,\ a_i \in \{0, 1\}\}$ линейных функций замкнут относительно суперпозиций.*

<u>Монотонные функции</u>

*Если $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ - наборы длины n из 0 и 1, то $\boldsymbol{a} \le \mathbf{b}$, если $a_1 \le b_1$, ..., $a_n \le b_n$.*

*Пример*

Наборы ( 0, 1, 0) и (1, 1, 0) сравнимы, причем *( 0, 1, 0) ≤ (1, 1, 0).*

Наборы (0, 1) и (1, 0) несравнимы. Также несравнимы наборы (0, 1) и ( 1, 1, 0).

*Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется **монотонной**, если для всяких наборов $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n)$ условие $\boldsymbol{a} \le \mathbf{b}$ влечет $\mathbf{f(a) \le f(b)}$.*

*Утверждение. Функция монотонна тогда и только тогда, когда ее сокращенная ДНФ не содержит отрицаний.*

*Следствие. Функция монотонна тогда и только тогда, когда ее МДНФ не содержит отрицаний.*

*Пример.*

Выяснить, являются ли функции монотонными:

1. *f = 00100110*;
2. *f = 00110111*.

*Решение.*

1. Сокращенная ДНФ для функции *f = 00100110* имеет вид $f = x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3$. Поскольку сокращенная ДНФ содержит отрицания, то функция не является монотонной.

2. Сокращенная ДНФ для функции *f = 00110111* имеет вид $f = x_2 \vee x_1x_3$. Поскольку сокращенная ДНФ не содержит отрицаний, то функция является монотонной.

*<u>Теорема 8.</u> Класс $\mathbf{M} = \{f \mid a \le b \Rightarrow f(a) \le f(b)\}$ монотонных функций замкнут относительно суперпозиций.*

<u>Теорема Поста о функциональной полноте</u>

*<u>Теорема Поста</u> (признак полноты системы булевых функций). Для того чтобы система булевых функций $\{f_1, ..., f_m\}$ была полной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого из пяти функционально замкнутых классов $T_0, T_1$, L, M, S нашлась хотя бы одна функция $f_i$ из системы, не принадлежащая этому классу.*

*Пример.*

Выяснить к каким функционально замкнутым классам принадлежит булева функция *f=01001110*, используя теорему Поста.

*Решение.*

Строим таблицу значений и треугольник Паскаля (табл. 41):

*Таблица 41*

| *Слагаемые полинома Жегалкина* | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | *f* | *g* | *Треугольник Паскаля* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | *f =* 0 1 0 0 1 1 1 0 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 1 0 1 0 0 1 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 1 1 1 0 1 |
| $x_2x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 0 0 1 1 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 0 1 0 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1\ x_3$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 1 1 |
| $x_1\ x_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 0 |
| $x_1\ x_2\ x_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Полином Жегалкина имеет вид: $f = x_3 + x_2x_3 + x_1 + x_1\ x_3$.

1. $f(0, 0, 0) = 0 \Rightarrow f \in T_0$;
2. $f(1, 1, 1) = 1 \Rightarrow f \notin T_1$;
3. $f(0, 0, 0) = f(1, 1, 1)$, а наборы $(0, 0, 0)$ и $(1, 1, 1)$ являются противоположными, то $f \notin S$;
4. так как в полиноме Жегалкина присутствуют слагаемые, представляющие собой конъюнкцию нескольких переменных, то $f \notin L$;
5. сокращенная ДНФ функции имеет вид: $f = x_1\overline{x_2} \vee x_1\overline{x_3} \vee \overline{x_2}\,x_3$, так как она содержит отрицания, то $f \notin M$.

Сведем полученные данные:

| | $T_0$ | $T_1$ | $S$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | + | - | - | - | - |

*Пример.*

Доказать полноту системы $\{+, \vee, 1\}$.

*Решение.*

Введем обозначения: $f_1 = x_1 + x_2$, $f_2 = x_1 \vee x_2$, $f_3 = 1$. Построим единую таблицу для функций (табл. 42).

*Таблица 42*

| *Слагаемые* | № | $x_1$ | $x_2$ | $f_1 = x_1+x_2$ | *Δ Паскаля* | $f_2 = x_1 \vee x_2$ | *Δ Паскаля* | $f_3 = 1$ | *Δ Паскаля* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 1 1 0 | 0 | 0 1 1 1 | 1 | 1 1 1 1 |
| $x_2$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 0 1 | 1 | 1 0 0 | 1 | 0 0 0 |
| $x_1$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 1 | 1 | 1 0 | 1 | 0 0 |
| $x_1x_2$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Полином Жегалкина:

$f_1 = x_1 + x_2$;

$f_2 = x_2 + x_1 + x_1x_2$;

$f_3 = 1$.

| $f$ | $T_0$ | $T_1$ | $L$ | $M$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | + | - | + | - | - |
| $f_2$ | + | + | - | + | - |
| $f_3$ | - | + | + | + | - |

Поскольку для каждого из пяти функционально замкнутых классов нашлась функция, не принадлежащая этому классу (в каждом столбце имеется хотя бы один минус), то система булевых функций $\{+, \vee, 1\}$ является полной.

## Существенные и несущественные переменные. Производная булевой функции первого порядка. Вес переменной

*Булева функция $f \in P_n$* ***существенно зависит*** *от переменной $x_i$, если существует такой набор значений $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, что*

$$f\left(a_1, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_n\right) \neq f\left(a_1, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n\right).$$

*В этом случае $x_i$ называют **существенной переменной**, в противном случае $x_i$ называют **несущественной переменной**.*

***Производная первого порядка** $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ от булевой функции f по переменной $x_i$ есть сумма по модулю 2 соответствующих остаточных функций:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n\right) \oplus f\left(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n\right),$$

*где $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_n)$ – единичная остаточная функция; $f(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_n)$ – нулевая остаточная функция; $\oplus$ - сумма по модулю 2.*

Единичная остаточная функция получается в результате приравнивания переменной $x_i$ единице, нулевая – приравниванием $x_i$ нулю.

***Весом производной** $P(\partial f/\partial x_i)$ от булевой функции называется число конституент этой производной.*

*Утверждение. Чем больше вес производной $P(\partial f/\partial x_i)$, тем больше функция f зависит от переменной $x_i$.*

*Пример*

Определить переменную $x_i$, по которой производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ функции

$$f\left(x_1, ..., x_5\right) = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_3\bar{x}_5 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_5 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4x_5$$

имеет минимальный (максимальный) вес, т. е. функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ зависит от нее менее (более) существенно.

*Решение.*

Определим вес каждой переменной, найдя сначала соответствующую производную. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \left(\bar{x}_2x_3 \vee x_3\bar{x}_5 \vee x_2x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_5 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4x_5\right) \oplus \left(\bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_2x_3x_5 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4x_5\right).$$

Для вычисления веса производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ зависящей от четырех переменных $x_2, x_3, x_4, x_5$, представим 4-мерное пространство с образующими $\{x_2, x_3, x_4, x_5\}$ в виде декартова произведения двух двумерных пространств $\{x_2, x_3\} \times \{x_4, x_5\}$ с образующими $\{x_2, x_3\}$ и $\{x_4, x_5\}$ соответственно. Тогда производную $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ можно задать в виде двумерной таблицы.

| | $x_4x_5$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_2x_3$ | **00** | **01** | **10** | **11** |
| **00** | 0 | 0 | 1 | 1 |
| **01** | 1 | 0 | 1 | 0 |
| **10** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **11** | 1 | 0 | 1 | 1 |

Вес производной $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ равен числу единиц в этой таблице.

Итак, $P\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = 7.$

Аналогично вычислим вес производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *(i = 2, 3, 4, 5)* (табл. 43, 44, 45,46).

Имеем:

*Таблица 43*

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \left(\overline{x_1}\,\overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_3 \overline{x_5} \vee x_1 x_4 \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} x_5\right) \oplus \left(x_1 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5\right),$$

| | **$x_4x_5$** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **$x_1x_3$** | ***00*** | ***01*** | ***10*** | ***11*** |
| ***00*** | *0* | *0* | *0* | *0* |
| ***01*** | *0* | *1* | *0* | *1* |
| ***10*** | *0* | *0* | *1* | *1* |
| ***11*** | *0* | *1* | *0* | *0* |

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = 5.$$

*Таблица 44*

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \left(x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_5\right) \oplus \left(\bar{x}_1 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}\right.$$

| | **$x_4x_5$** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **$x_1x_2$** | ***00*** | ***01*** | ***10*** | ***11*** |
| ***00*** | *0* | *0* | *1* | *0* |
| ***01*** | *0* | *1* | *1* | *1* |
| ***10*** | *1* | *0* | *1* | *1* |
| ***11*** | *0* | *1* | *0* | *0* |

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = 8.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = \left(x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5 \vee x_1 x_2 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5\right) \oplus \left(x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_3 \bar{x}_5 \vee \bar{x}_2 x_3 x_5 \vee \bar{x}_3 x_5\right),$$

*Таблица 45*

| | **$x_3x_5$** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **$x_1x_2$** | ***00*** | ***01*** | ***10*** | ***11*** |
| ***00*** | *1* | *0* | *0* | *0* |
| ***01*** | *1* | *0* | *0* | *0* |
| ***10*** | *0* | *1* | *0* | *0* |
| ***11*** | *1* | *0* | *0* | *1* |

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_4}\right) = 5.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_5} = \left(x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 \bar{x}_4\right) \oplus \left(x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_3 x_1 \vee x_1 x_2 x_4\right),$$

*Таблица 46*

| | **$x_3x_4$** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **$x_1x_2$** | ***00*** | ***01*** | ***10*** | ***11*** |
| ***00*** | *1* | *0* | *1* | *1* |
| ***01*** | *1* | *0* | *0* | *0* |
| ***10*** | *1* | *0* | *0* | *0* |
| ***11*** | *1* | *0* | *1* | *0* |

$$P\left(\frac{\partial f}{\partial x_5}\right) = 7.$$

Выяснили, что минимальное значение $\min P\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ получено при дифференцировании функции $f$ по переменным $x_2$ и $x_4$, максимальное значение $\max P\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ получено при дифференцировании функции $f$ по переменной $x_3$.

## ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 3

Для логической функции $f_1$ построить комбинационную и переключательную схему на элементной базе $\{\bar{\ },\wedge,\vee\}$. Для логической функции $f_2$ построить упрощенную комбинационную и переключательную схему. Построить минимизированную комбинационную и переключательную схему для логической функции $f_3$

По заданным техническим условиям, определяющим некоторые значения функции проводимости $g$, построить наиболее экономичную (оптимальную) переключательную схему.

$$f_1 = (x \to y) \leftrightarrow \bar{x},\ f_2 = (1,0,1,0,0,1,0,1),\ f_3 = (0,0,1,1,1,1,0,1),$$

$$g(0,1,1,0) = 1,\ g(0,1,0,1) = 1,\ g(1,1,1,0) = 0,\ g(0,1,0,0) = 0.$$

***Решение.*** Логическую функцию $f_1$ необходимо выразить, при помощи равносильных преобразований, через те функции, которые входят в данную элементную базу $\{\bar{\ },\wedge,\vee\}$:

$$f_1 = (x \to y) \leftrightarrow \bar{x} \equiv [(\bar{x} \vee y) \to \bar{x}] \wedge [\bar{x} \to (\bar{x} \vee y)] \equiv$$

$$\equiv [\overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{x}] \wedge [(x \vee \bar{x} \vee y] \equiv [(x \wedge \bar{y}) \vee \bar{x}].$$

Построим комбинационную и переключательную схемы. Для этого необходимо определить внешнюю операцию в полученной формуле. В данном случае внешней является дизъюнкция. В комбинационной схеме построим соответствующий дизъюнкции элемент схемы. После этого, найдем внешние операции в формулах, связанных дизъюнкцией, и построим для них соответствующие элементы. Продолжая построение, получим следующую комбинационную схему, изображенную на рисунке 3. Аналогично строится переключательная схема, только в этом случае стандартные элементы комбинационных схем необходимо заменить соответствующими элементами переключательной схемы, изображенными на рисунке 1 а) и б). В результате получим следующую переключательную схему, изображенную на рисунке 4.

Функция $f_2$ задана набором своих значений, тогда как для построения схем необходимо выражение этой функции в виде формулы. Такую формулу можно получить на основе теоремы о существовании, для логических функций, совершенных форм. Построим для функции $f_2$ совершенную конъюнктивную нормальную форму. Выбор СКНФ связан с необходимостью выбора формулы, содержащей минимум переменных и логических операций.

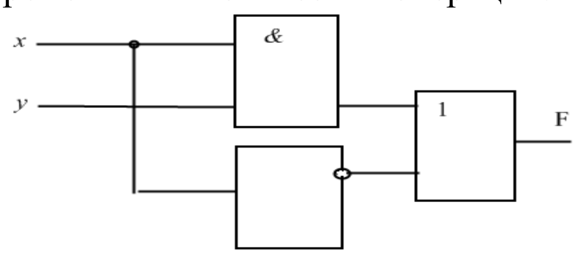


Рис. 3. Комбинационная схема для функции $f_1$.

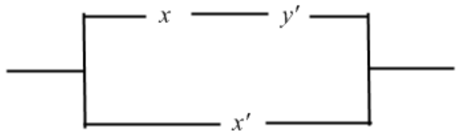


Рис.4. Переключательная схема для функции $f_1$.

Применяя правило построения СКНФ, получим:

$$f_2 = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Комбинационная и переключательная схемы, построенные для $f_2$ по этой формуле, не будут оптимальными, так эту формулу можно упростить при помощи равносильных преобразований. В результате упрощения получим:

$$f_2 = (x \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

После упрощения, комбинационная и переключательная схемы будут следующими:

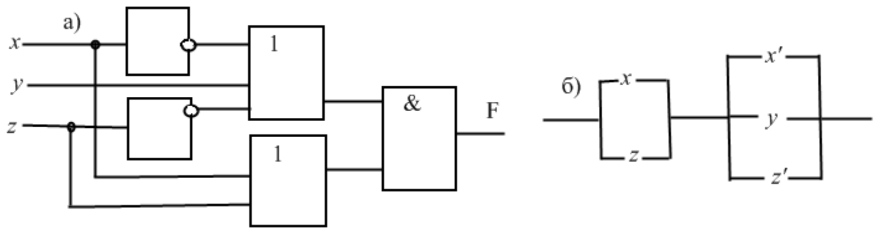


Рис.5. Комбинационная и переключательная схемы для функции $f_2$.

Построим минимальную комбинационную и переключательную схему для функции $f_3$ . При помощи метода неопределенных коэффициентов найдем минимальную ДНФ для функции $f_3$. Для этого составим следующую систему логических уравнений и определим неизвестные коэффициенты в общем выражении для ДНФ функций от трех аргументов:

$$f_3(0,0,0) = a_4 \vee a_5 \vee a_6 \vee a_{16} \vee a_{17} \vee a_{18} \vee a_{26} = 0,$$
$$f_3(0,0,1) = a_3 \vee a_4 \vee a_5 \vee a_{13} \vee a_{14} \vee a_{16} \vee a_{23} = 0,$$
$$f_3(0,1,0) = a_2 \vee a_4 \vee a_6 \vee a_{12} \vee a_{15} \vee a_{25} = 1,$$
$$f_3(0,1,1) = a_2 \vee a_3 \vee a_4 \vee a_9 \vee a_{12} \vee a_{13} \vee a_{20} = 1,$$
$$f_3(1,0,0) = a_1 \vee a_5 \vee a_6 \vee a_{10} \vee a_{11} \vee a_{18} \vee a_{24} = 1,$$
$$f_3(1,0,1) = a_1 \vee a_3 \vee a_5 \vee a_8 \vee a_{10} \vee a_{14} \vee a_{21} = 1,$$
$$f_3(1,1,0) = a_1 \vee a_2 \vee a_6 \vee a_7 \vee a_{11} \vee a_{15} \vee a_{22} = 0,$$
$$f_3(1,1,1) = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee a_7 \vee a_8 \vee a_9 \vee a_{19} = 1.$$

Из первого, второго и седьмого уравнений следует, что

$$a_4 = a_5 = a_6 = a_{16} = a_{17} = a_{18} = a_{26} = 0,\ a_3 = a_{13} = a_{14} = a_{23} = 0,$$
$$a_1 = a_2 = a_7 = a_{11} = a_{15} = a_{22} = 0.$$

Учитывая эти найденные значения, перепишем остальные равенства:

$$a_{12} \vee a_{25} = 1,\ a_9 \vee a_{12} \vee a_{20} = 1,\ a_{10} \vee a_{24} = 1,\ a_8 \vee a_{10} \vee a_{21} = 1,\ a_8 \vee a_9 \vee a_{19} = 1.$$

Ненулевых коэффициентов должно быть минимальное количество, и они должны соответствовать элементарным конъюнкциям наименьшего лексикографического порядка. Тогда, ненулевыми будут $a_8 = a_{10} = a_{12} = 1$. Остальные коэффициенты будут равны нулю. В результате, получим следующую минимальную ДНФ для функции $f_3$: $f_3 = xz \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y$. Минимальную ДНФ можно, при помощи свойств логических функций, сократить и представить в следующем виде: $f_3 = x(z \vee \bar{y}) \vee \bar{x}y$. Комбинационная и переключательная схемы будут иметь вид, изображенный на рисунках 6 и 7.

Согласно техническим условиям, обязательными являются только четыре соответствия аргументов значениям функции $g$, частично определяющие функцию $g$. Следовательно, остальные соответствия можно определить произвольно, но при этом из всех возможных вариантов выбрать оптимальный вариант. Например, дополняя необходимые соответствия, можно построить следующие либо СДНФ, либо СКНФ:

$$g(x,y,z,p) = \bar{x} \wedge y \wedge z \wedge \bar{p} \vee \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge p \text{ - СДНФ},$$

$$g(x,y,z,p) = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee p) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z \vee p) \text{ - СКНФ}.$$

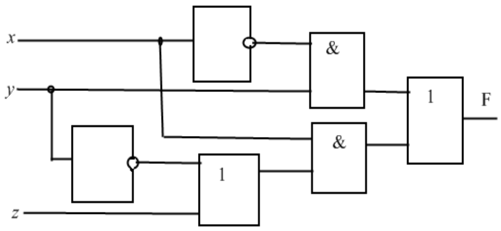


Рис.6. Комбинационная схема для функции $f_3$.

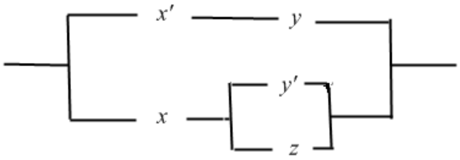


Рис.7 Переключательная схема для функции $f_3$.

Из двух этих форм выберем тот, который можно при помощи равносильных преобразований выразить в более простой форме. Преобразуем эти формы:

а) $g(x,y,z,p) = (\bar{x} \wedge y) \wedge (z \wedge \bar{p} \vee \bar{z} \wedge p)$, б) $g(x,y,z,p) = (\bar{y} \vee p) \vee [(\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee z)]$.

Полученные выражения содержат одинаковое число переменных и одинаковое число логических операций. Следовательно, в качестве оптимального решения можно выбрать любую из этих формул.

Построим комбинационную схему для формулы а) (Рис. 8).

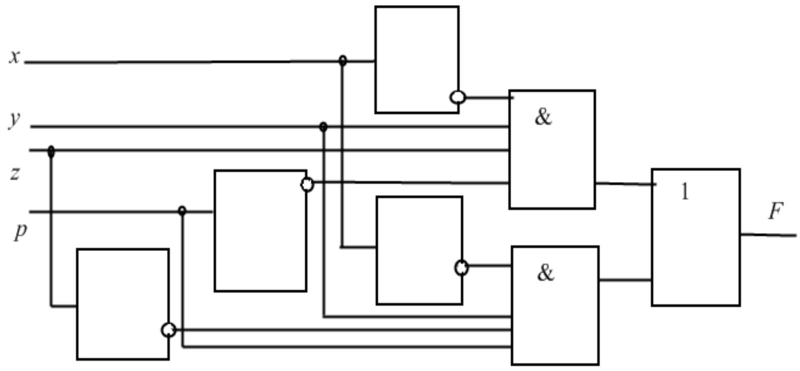


Рис.8 Комбинационная схема для функции $g$.

**<u>Задача коммивояжера состоит в следующем:</u>**

*Туристическое агентство для путешествий выбирает города в количестве **n** и маршруты путешествия. Предполагается, что все возможные маршруты проходят через каждый город ровно один раз и возвращаются в исходный пункт. Стоимости всех маршрутов известны. Агентству необходимо выбрать наиболее выгодный по стоимости маршрут путешествия.*

Существуют различные методы решения этой задачи, называемые методами ветвей и границ. Однако, рассматриваемый здесь метод представляется более простым для компьютерной реализации алгоритма решения.

<u>Алгоритм решения задачи коммивояжера состоит в следующем:</u>

1. Применяя алгоритм перечисления всех полных простых, составить полный список всех возможных маршрутов;
2. Присвоить элементам матрицы $A(i, j)$ весовые коэффициенты соответствующих ребер $(i, j)$ (стоимостей отдельных маршрутов);
3. Определить минимум среди сумм вида $A(1,i)+A(i,j)+A(j,k)+...+A(s,1)$ для всех маршрутов полного списка;
4. Все минимальные стоимости и соответствующие им маршруты представляют собой решения задачи коммивояжера.

## ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ <u>ЗАДАНИЯ 4</u>

В условиях задачи коммивояжера стоимости маршрутов заданы в виде матрицы *A*. Определить маршруты минимальной стоимости и стоимости этих маршрутов.

На алгоритмическом языке составить программу решения задачи коммивояжера и решить задачу для заданных стоимостей маршрутов.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 120 | 322 | 116 | 643 | 671 |
| 337 | 122 | 345 | 321 | 533 |
| 351 | 246 | 754 | 212 | 245 |
| 357 | 678 | 553 | 754 | 785 |
| 223 | 334 | 553 | 335 | 769 |

Определить маршруты минимальной стоимости и стоимости этих маршрутов.

***Решение.*** Согласно алгоритму перечисления, число полных простых циклов полного графа из пяти вершин равно 24. При помощи алгоритма перечисления простых циклов составим программу на алгоритмическом языке (Приложение 1). Результатами расчета являются список всех маршрутов, представляющих собой полные простые циклы соответствующего графа. Маршруты их стоимости приведены в таблице 1.

*Таблица.1.*

**Маршруты и их стоимости.**

| № | маршрут | стоимость | № | маршрут | стоимость |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12345 | 1887 | 13 | 14235 | 2134 |
| 2 | 12354 | 1604 | 14 | 14253 | 2758 |
| 3 | 12435 | 1664 | 15 | 14325 | 2198 |
| 4 | 12453 | 2332 | 16 | 14352 | 2112 |
| 5 | 12534 | 1977 | 17 | 14523 | 2458 |
| 6 | 12543 | 2094 | 18 | 14532 | 2564 |
| 7 | 13245 | 1691 | 19 | 15234 | 1919 |
| 8 | 13254 | 1587 | 20 | 15243 | 2230 |
| 9 | 13425 | 1762 | 21 | 15324 | 2148 |
| 10 | 13452 | 1784 | 22 | 15342 | 2451 |
| 11 | 13524 | 1373 | 23 | 15423 | 2380 |
| 12 | 13542 | 1711 | 24 | 15432 | 2142 |

Для того чтобы определить число маршрутов, имеющих минимальную стоимость, построим график стоимости маршрутов (Рис. 2). Согласно этому графику, минимальную стоимость имеет только один маршрут (13524) и его стоимость – 1373. Найденный маршрут и его стоимость является решением задачи коммивояжера.

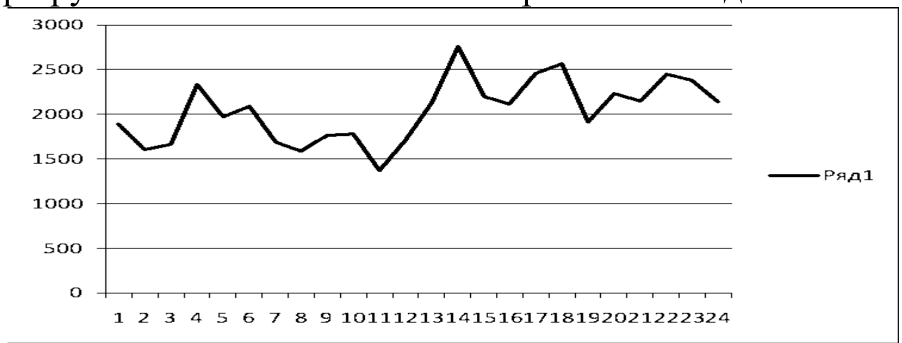


Рис.2. График стоимости маршрутов.

**Приложение 1** Решение задачи коммивояжера.

```
Sub commiw()
Dim a(8, 8), b(8, 8)
a(1, 1) = 120: a(1, 2) = 322: a(1, 3) = 116: a(1, 4) = 643: a(1, 5) = 671
a(2, 1) = 337: a(2, 2) = 122: a(2, 3) = 345: a(2, 4) = 321: a(2, 5) = 533
a(3, 1) = 351: a(3, 2) = 246: a(3, 3) = 754: a(3, 4) = 212: a(3, 5) = 245
a(4, 1) = 357: a(4, 2) = 678: a(4, 3) = 553: a(4, 4) = 754: a(4, 5) = 785
a(5, 1) = 223: a(5, 2) = 334: a(5, 3) = 553: a(5, 4) = 335: a(5, 5) = 769
m = 1
For i = 2 To 5
```

```
For j = 2 To 5
For k = 2 To 5
For l = 2 To 5
If i = j Then GoTo 10
If i = k Then GoTo 10
If i = l Then GoTo 10
If j = k Then GoTo 10
If j = l Then GoTo 10
If k = l Then GoTo 10
s1 = a(1, i) + a(i, j) + a(j, k) + a(k, l) + a(l, 1)
s2 = 10000 + 1000 * i + 100 * j + 10 * k + l
Cells(m, 1) = s1
Cells(m, 2) = s2
m = m + 1
10 ' stb
Next l, k, j, i
End Sub
```

## АЛГОРИТМЫ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕСТАНОВОК И ПЕРЕСТАНОВОК С ПОВТОРЕНИЯМИ. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ СОЧЕТАНИЙ И СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ

В основе решения многих прикладных задач лежат алгоритмы перечисления перестановок и сочетаний. Большинство из них приводит к трудоемким вычислениям и необходимости применения компьютерных вычислений. В связи с этим рассмотрим алгоритмы перечисления, приспособленные к эффективному использованию компьютерных вычислений.

Рассмотрим множество *A,* содержащее *n* различных элементов. Упорядоченные множества, составленные из всех элементов множества *A* и отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, называются *перестановками* данного множества *A.* Нетрудно доказать, что число таких перестановок равно $n!$. Если не все элементы множества *A* будут различными и некоторые из них будут одинаковыми, то среди перестановок элементов множества *A* будут одинаковые. То есть, в этом случае число различных перестановок будет меньше. Более конкретно, предположим, что число повторений элементов равно $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Тогда число различных *перестановок, с учетом их повторения*, будет равно:

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}.$$

Рассмотрим множество *A* из *n* различных элементов. Произвольное *k*-элементное подмножество множества *A* называется *сочетанием* из *n* элементов по *k* элементов. Согласно теореме, число таких сочетаний равно:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Сочетаниями* из $n$ элементов по $k$ элементов с *повторениями* называются множества, содержащие $k$ элементов, среди которых допускаются повторения одинаковых элементов. Число различных сочетаний из $n$ элементов по $k$ с повторениями равно:

$$f_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

В прикладных задачах часто бывает необходимо знать не только число перестановок и сочетаний, но и алгоритмы их явного перечисления. Для перечисления перестановок можно использовать свойства определителей матриц. Перечисление сочетаний и сочетаний с повторениями можно выполнить при помощи производящих функций.

*Производящей функцией* последовательности $\{a_n\}$ называется сумма степенного ряда:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Например, производящей функцией последовательности $a_k = C_n^k$ будет функция:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^n = (1+x)^n.$$

## ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 5

Разработать программу на алгоритмическом языке для перечисления всех различных слов, полученных перестановкой букв данного слова. Перечислить все различные перестановки букв: а) слова «солнце», б) слова «колесо».

Для данных множеств составить производящую функцию сочетаний элементов и перечислить эти сочетания. Для множества $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$- перечислить сочетания по четыре элемента. Для множества $B = \{a, b, c, d\}$- перечислить сочетания с повторениями по четыре элемента, в которых элемент $a$ может встречаться не более трех раз, элемент $b$ – не более двух раз, элемент $c$ – не более трех раз, элемент $d$ – не более четырех раз.

***Решение***. Согласно алгоритму вычисления определителя матрицы, для перечисления всех перестановок букв данного слова достаточно составить матрицу размерности 6х6, все строки которой одинаковы и составлены из букв слова «солнце». После этого, исключая повторения индексов, составим элементы определителя сформированной матрицы символов.

Алгоритмическая программа приведена в Приложении 2.

Результатом работы программы является полный список всех слов, которые можно составить из букв слова «солнце». В случае повторения букв в слове, необходимо в предыдущую программу добавить блок, в котором выполняется сравнение слов и исключение одинаковых слов. В результате получим программу для перечисления перестановок с повторениями (Приложение 2).

В таблице 7 приведен полный список всех слов, образованных из букв слова «колесо». Число различных слов, приведенных в таблице 1 равно 360, что соответствует значению, полученному по формуле для перестановок с повторениями.

Рассмотрим теперь сочетания и сочетания с повторениями.
Производящую функцию для сочетаний элементов множества $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ можно представить в виде полинома:

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)(1+ex)(1+fx)(1+gx).$$

Согласно определению производящей функции, все сочетания из четырех символов данного множества будут представлены как коэффициенты перед $x^4$.

Для сочетаний с повторениями составим следующую производящую функцию:

$$(1+ ax + a^2x^2 + a^3x^3)(1+bx + b^2x^2)(1+cx + c^2 x^2 + c^3 x^3)(1+dx+d^2x^2 +d^3x^3 +d^4x^4).$$

Согласно результатам вычисления, число сочетаний в этом случае будет равно 29.

Таблица 1.

**Полный список слов, образованных из букв слова «колесо».**

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ОЛЕСОК | ЕОСОЛК | КСЕОЛО | ЕКСОЛО | СЕЛОКО | КОСОЕЛ | ЕОКСОЛ | ОКСОЛЕ | СОКЛОЕ |
| ОЛЕОСК | ЕООЛСК | КСОЛЕО | ЕКОЛСО | СЕОКЛО | КООЕСЛ | ЕОКОСЛ | ОКОЛСЕ | СОКОЛЕ |
| ОЛСЕОК | ЕООСЛК | КСОЕЛО | ЕКОСЛО | СЕОЛКО | КООСЕЛ | ЕОСКОЛ | ОКОСЛЕ | СОЛКОЕ |
| ОЛСОЕК | ЕЛОСОК | КОЛЕСО | ЕЛКСОО | СОКЛЕО | КЕОСОЛ | ЕОСОКЛ | ОЛКСОЕ | СОЛОКЕ |
| ОЛОЕСК | ЕЛООСК | КОЛСЕО | ЕЛКОСО | СОКЕЛО | КЕООСЛ | ЕООКСЛ | ОЛКОСЕ | СООКЛЕ |
| ОЛОСЕК | ЕЛСООК | КОЕЛСО | ЕЛСКОО | СОЛКЕО | КЕСООЛ | ЕООСКЛ | ОЛСКОЕ | СООЛКЕ |
| ОЕЛСОК | ЕСОЛОК | КОЕСЛО | ЕЛСОКО | СОЛЕКО | КСОЕОЛ | ЕСКООЛ | ОЛСОКЕ | СЛКООЕ |
| ОЕЛОСК | ЕСООЛК | КОСЛЕО | ЕЛОКСО | СОЕКЛО | КСООЕЛ | ЕСОКОЛ | ОЛОКСЕ | СЛОКОЕ |
| ОЕСЛОК | ЕСЛООК | КОСЕЛО | ЕЛОСКО | СОЕЛКО | КСЕООЛ | ЕСООКЛ | ОЛОСКЕ | СЛООКЕ |
| ОЕСОЛК | СОЛЕОК | ЛКЕСОО | ЕСКЛОО | ОКЛЕСО | ОКЕСОЛ | СКОЕОЛ | ОСКЛОЕ | КОЛЕОС |
| ОЕОЛСК | СОЛОЕК | ЛКЕОСО | ЕСКОЛО | ОКЛСЕО | ОКЕОСЛ | СКООЕЛ | ОСКОЛЕ | КОЛОЕС |
| ОЕОСЛК | СОЕЛОК | ЛКСЕОО | ЕСЛКОО | ОКЕЛСО | ОКСЕОЛ | СКЕООЛ | ОСЛКОЕ | КОЕЛОС |
| ОСЛЕОК | СОЕОЛК | ЛКСОЕО | ЕСЛОКО | ОКЕСЛО | ОКСОЕЛ | СОКЕОЛ | ОСЛОКЕ | КОЕОЛС |
| ОСЛОЕК | СООЛЕК | ЛКОЕСО | ЕСОКЛО | ОКСЛЕО | ОКОЕСЛ | СОКОЕЛ | ОСОКЛЕ | КООЛЕС |
| ОСЕЛОК | СООЕЛК | ЛКОСЕО | ЕСОЛКО | ОКСЕЛО | ОКОСЕЛ | СОЕКОЛ | ОСОЛКЕ | КООЕЛС |
| ОСЕОЛК | СЛОЕОК | ЛЕКСОО | ЕОКЛСО | ОЛКЕСО | ОЕКСОЛ | СОЕОКЛ | ООКЛСЕ | КЛОЕОС |
| ОСОЛЕК | СЛООЕК | ЛЕКОСО | ЕОКСЛО | ОЛКСЕО | ОЕКОСЛ | СООКЕЛ | ООКСЛЕ | КЛООЕС |
| ОСОЕЛК | СЛЕООК | ЛЕСКОО | ЕОЛКСО | ОЛЕКСО | ОЕСКОЛ | СООЕКЛ | ООЛКСЕ | КЛЕООС |
| ООЛЕСК | СЕОЛОК | ЛЕСОКО | ЕОЛСКО | ОЛЕСКО | ОЕСОКЛ | СЕКООЛ | ООЛСКЕ | КЕОЛОС |
| ООЛСЕК | СЕООЛК | ЛЕОКСО | ЕОСКЛО | ОЛСКЕО | ОЕОКСЛ | СЕОКОЛ | ООСКЛЕ | КЕООЛС |
| ООЕЛСК | СЕЛООК | ЛЕОСКО | ЕОСЛКО | ОЛСЕКО | ОЕОСКЛ | СЕООКЛ | ООСЛКЕ | КЕЛООС |
| ООЕСЛК | КЛЕСОО | ЛСКЕОО | СКЛЕОО | ОЕКЛСО | ОСКЕОЛ | КОЛСОЕ | ЛКОСОЕ | ОКЛЕОС |
| ООСЛЕК | КЛЕОСО | ЛСКОЕО | СКЛОЕО | ОЕКСЛО | ОСКОЕЛ | КОЛОСЕ | ЛКООСЕ | ОКЛОЕС |
| ООСЕЛК | КЛСЕОО | ЛСЕКОО | СКЕЛОО | ОЕЛКСО | ОСЕКОЛ | КОСЛОЕ | ЛКСООЕ | ОКЕЛОС |
| ЛОЕСОК | КЛСОЕО | ЛСЕОКО | СКЕОЛО | ОЕЛСКО | ОСЕОКЛ | КОСОЛЕ | ЛОКСОЕ | ОКЕОЛС |
| ЛОЕОСК | КЛОЕСО | ЛСОКЕО | СКОЛЕО | ОЕСКЛО | ОСОКЕЛ | КООЛСЕ | ЛОКОСЕ | ОКОЛЕС |
| ЛОСЕОК | КЛОСЕО | ЛСОЕКО | СКОЕЛО | ОЕСЛКО | ОСОЕКЛ | КООСЛЕ | ЛОСКОЕ | ОКОЕЛС |
| ЛОСОЕК | КЕЛСОО | ЛОКЕСО | СЛКЕОО | ОСКЛЕО | ООКЕСЛ | КЛОСОЕ | ЛОСОКЕ | ОЛКЕОС |
| ЛООЕСК | КЕЛОСО | ЛОКСЕО | СЛКОЕО | ОСКЕЛО | ООКСЕЛ | КЛООСЕ | ЛООКСЕ | ОЛКОЕС |
| ЛООСЕК | КЕСЛОО | ЛОЕКСО | СЛЕКОО | ОСЛКЕО | ООЕКСЛ | КЛСООЕ | ЛООСКЕ | ОЛЕКОС |
| ЛЕОСОК | КЕСОЛО | ЛОЕСКО | СЛЕОКО | ОСЛЕКО | ООЕСКЛ | КСОЛОЕ | ЛСКООЕ | ОЛЕОКС |
| ЛЕООСК | КЕОЛСО | ЛОСКЕО | СЛОКЕО | ОСЕКЛО | ООСКЕЛ | КСООЛЕ | ЛСОКОЕ | ОЛОКЕС |
| ООЛЕКС | ООЕКЛС | ООЕЛКС | ЛКОЕОС | ЛКООЕС | ЛКЕООС | ЛОКЕОС | ЛОКОЕС | ЛОЕКОС |
| ЛОЕОКС | ЛООКЕС | ЛООЕКС | ЛЕКООС | ЛЕОКОС | ЛЕООКС | ЕКОЛОС | ЕКООЛС | ЕКЛООС |
| ЕОКЛОС | ЕОКОЛС | ЕОЛКОС | ЕОЛОКС | ЕООКЛС | ЕООЛКС | ЕЛКООС | ЕЛОКОС | ЕЛООКС |
| ЕОЛСОК | ЕОЛОСК | ЕОСЛОК | ОЕЛОКС | ОЕОКЛС | | | | |

**Приложение 2**. Перечисление перестановок с повторениями.

```
Sub Combin2()
Dim A(10, 10), B(720)
For i = 1 To 6
A(i, 1) = "К": A(i, 2) = "О": A(i, 3) = "Л": A(i, 4) = "Е": A(i, 5) = "С": A(i, 6) = "О"
Next i
d = 1
For i = 1 To 6
For j = 1 To 6
For k = 1 To 6
For l = 1 To 6
For m = 1 To 6
For n = 1 To 6
If i = j Then GoTo 10
If i = k Then GoTo 10
If i = l Then GoTo 10
If i = m Then GoTo 10
If i = n Then GoTo 10
If j = k Then GoTo 10
If j = l Then GoTo 10
If j = m Then GoTo 10
If j = n Then GoTo 10
If k = l Then GoTo 10
If k = m Then GoTo 10
If k = n Then GoTo 10
If l = m Then GoTo 10
If l = n Then GoTo 10
If m = n Then GoTo 10
'Cells(d, 1) = A(i, j) + A(j, k) + A(k, l) + A(l, m) + A(m, n) + A(n, i)
B(d) = A(i, j) + A(j, k) + A(k, l) + A(l, m) + A(m, n) + A(n, i)
d = d + 1
10 '***
Next n, m, l, k, j, i
d = 1
For j = 1 To 720
For i = j To 719
If B(j) = B(i + 1) Then GoTo 20
GoTo 30
20 Cells(d, 2) = B(j)
d = d + 1
30 '***
Next i, j
End Sub
```

## ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

### ЗАДАНИЕ 1

Для логических функций $f_1$, $f_2$, $f_3$ построить совершенные формы. Выяснить существенность переменных для логических функций $f_1$, $f_2$. В случае несущественности, исключить эти переменные из ее совершенной конъюнктивной нормальной формы. Построить суперпозицию $g(x, y, z) = f_2(f_1, f_3, f_2)$. При помощи метода неопределенных коэффициентов построить для логической функции $f_3$ полином Жегалкина.

Вариант 1. $f_1 = (1,0,1,0,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,1,1,0,1,0,0,1)$, $f_3 = (0,1,0,1,0,1,0,0)$.
Вариант 2. $f_1 = (0,1,0,1,0,1,1,1)$, $f_2 = (1,0,1,1,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,1,1,0,0)$.
Вариант 3. $f_1 = (0,0,1,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,1,1,0,1,0,0,0)$, $f_3 = (1,1,1,1,0,0,0,0)$.
Вариант 4. $f_1 = (0,1,0,0,1,1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0,0,1,0,1,0)$, $f_3 = (1,0,0,1,0,1,0,0)$.
Вариант 5. $f_1 = (1,0,0,1,0,0,0,1)$, $f_2 = (0,0,1,0,0,1,0,1)$, $f_3 = (0,1,1,0,1,0,1,0)$.
Вариант 6. $f_1 = (0,1,0,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,1,1,1,1,0,0,1)$, $f_3 = (0,1,1,1,0,1,0,0)$.
Вариант 7. $f_1 = (0,0,1,1,1,1,0,0)$, $f_2 = (0,1,1,0,1,0,1,0)$, $f_3 = (1,0,0,1,1,1,0,0)$.
Вариант 8. $f_1 = (0,0,1,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,0,0,1,1,1,0,1)$, $f_3 = (0,1,1,1,0,1,1,0)$.
Вариант 9. $f_1 = (0,1,0,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,1,1,0,1,0,0,1)$, $f_3 = (1,1,0,1,0,0,1,0)$.
Вариант 10. $f_1 = (1,1,0,0,0,1,1,1)$, $f_2 = (1,1,1,0,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,0,1,1,0,1)$.
Вариант 11. $f_1 = (0,0,0,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,0,1,0,1,0,0,1)$, $f_3 = (1,1,0,1,0,1,0,0)$.
Вариант 12. $f_1 = (0,0,0,1,1,1,0,1)$, $f_2 = (1,0,1,0,0,1,0,0)$, $f_3 = (0,1,0,1,0,1,0,1)$.
Вариант 13. $f_1 = (0,0,1,0,0,1,1,1)$, $f_2 = (1,0,1,0,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,0,1,0,0)$.
Вариант 14. $f_1 = (1,0,0,0,0,1,1,0)$, $f_2 = (1,0,1,0,0,1,0,0)$, $f_3 = (1,0,1,0,0,1,0,0)$.
Вариант 15. $f_1 = (1,0,0,0,0,1,0,1)$, $f_2 = (1,0,1,0,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,0,1,0,0)$.
Вариант 16. $f_1 = (0,0,0,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (1,0,1,0,1,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,0,1,0,0)$.
Вариант 17. $f_1 = (0,0,1,0,0,0,1,1)$, $f_2 = (0,0,1,0,0,1,0,1)$, $f_3 = (0,1,0,0,0,1,0,1)$.
Вариант 18. $f_1 = (1,0,0,1,0,1,0,0)$, $f_2 = (0,1,1,0,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,0,1,0,1)$.
Вариант 19. $f_1 = (1,1,1,0,0,1,0,1)$, $f_2 = (1,0,0,1,0,0,1,1)$, $f_3 = (1,1,0,0,0,1,0,1)$.
Вариант 20. $f_1 = (1,0,0,1,0,0,0,1)$, $f_2 = (0,0,1,0,0,1,0,1)$, $f_3 = (0,1,1,0,1,0,1,0)$.
Вариант 21. $f_1 = (1,1,0,0,0,1,0,1)$, $f_2 = (1,0,1,0,0,1,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,0,0,1,1,1)$.
Вариант 22. $f_1 = (1,0,0,0,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,1,1,0,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,1,1,0,1)$.
Вариант 23. $f_1 = (1,0,0,0,1,1,0,1)$, $f_2 = (1,0,1,1,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,1,1,0,1)$.
Вариант 24. $f_1 = (1,0,0,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (1,0,0,0,1,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,1,0,1,1,1)$.
Вариант 25. $f_1 = (1,1,0,0,0,0,0,1)$, $f_2 = (1,0,1,0,0,0,1,1)$, $f_3 = (1,0,1,1,0,0,0,1)$.

### ЗАДАНИЕ 2

Для данных логических функций $f_1$, $f_2$, $f_3$ выяснить их линейность, самодвойственность, монотонность и их принадлежность к замкнутым классам $T_0$, $T_1$. Проверить полноту системы логических функций $\{f_1, f_2, f_3\}$.

Вариант 1. $f_1 = (1,0,1,0,0,1,1,1)$, $f_2 = (0,1,1,0,1,0,0,1)$, $f_3 = (0,1,0,1,0,1,0,1)$.
Вариант 2. $f_1 = (0,1,1,1,0,1,1,1)$, $f_2 = (1,0,1,1,0,0,0,1)$, $f_3 = (1,0,0,0,1,1,1,0)$.
Вариант 3. $f_1 = (0,0,1,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,1,1,0,1,0,0,0)$, $f_3 = (1,1,1,1,0,0,0,1)$.
Вариант 4. $f_1 = (1,1,0,0,1,1,0,0)$, $f_2 = (0,1,1,0,1,0,1,0)$, $f_3 = (1,0,0,1,0,1,0,0)$.
Вариант 5. $f_1 = (1,0,0,1,0,1,0,1)$, $f_2 = (0,0,1,1,0,1,0,1)$, $f_3 = (0,1,1,0,1,0,1,0)$.
Вариант 6. $f_1 = (0,1,0,1,0,1,1,1)$, $f_2 = (0,1,1,1,0,0,0,1)$, $f_3 = (0,1,0,1,0,1,0,0)$.
Вариант 7. $f_1 = (1,0,1,0,1,1,0,0)$, $f_2 = (0,1,1,0,0,0,1,0)$, $f_3 = (1,0,0,1,1,1,0,1)$.

Вариант 8. $f_1$ = (0,0,1,1,0,1,1,1), $f_2$ = (0,0,0,1,1,1,0,1), $f_3$ = (0,1,0,1,0,1,1,0).
Вариант 9. $f_1$ = (0,1,0,1,0,1,0,1), $f_2$ = (0,1,1,0,1,1,0,1), $f_3$ = (1,1,0,1,1,0,1,0).
Вариант 10. $f_1$ = (1,1,0,0,0,1,1,0), $f_2$ = (1,1,1,0,1,0,0,1), $f_3$ = (1,0,0,0,1,0,0,1).
Вариант 11. $f_1$ = (0,0,0,1,0,1,1,1), $f_2$ = (0,0,1,0,1,0,1,1), $f_3$ = (1,1,0,1,0,1,0,0).
Вариант 12. $f_1$ = (0,0,1,1,1,1,0,1), $f_2$ = (1,0,1,1,0,1,0,0), $f_3$ = (0,1,0,1,0,1,0,1).
Вариант 13. $f_1$ = (1,1,0,0,1,0,0,1), $f_2$ = (1,0,1,1,0,0,1,1), $f_3$ = (1,0,1,1,0,0,0,1).
Вариант 14. $f_1$ = (0,0,1,1,0,1,1,1), $f_2$ = (1,0,1,0,0,1,0,1), $f_3$ = (1,1,0,1,0,1,0,0).
Вариант 15. $f_1$ = (1,0,1,0,0,1,1,0), $f_2$ = (1,0,1,0,0,1,1,0), $f_3$ = (1,0,1,0,0,1,0,0).
Вариант 16. $f_1$ = (1,0,1,0,0,1,0,1), $f_2$ = (1,0,1,1,0,0,0,1), $f_3$ = (1,0,0,1,1,1,0,0).
Вариант 17. $f_1$ = (0,0,0,1,1,1,0,1), $f_2$ = (1,0,1,0,1,1,0,1), $f_3$ = (1,0,0,1,0,1,0,0).
Вариант 18. $f_1$ = (0,0,1,1,0,0,1,1), $f_2$ = (0,0,1,0,0,1,0,1), $f_3$ = (0,1,0,0,0,1,0,1).
Вариант 19. $f_1$ = (1,0,0,1,0,1,0,0), $f_2$ = (0,1,1,0,0,0,1,1), $f_3$ = (1,1,0,1,0,1,0,1).
Вариант 20. $f_1$ = (0,1,1,0,0,1,0,1), $f_2$ = (1,0,0,1,0,0,1,1), $f_3$ = (1,1,0,1,0,1,0,1).
Вариант 21. $f_1$ = (1,1,0,0,0,1,0,1), $f_2$ = (1,0,1,0,0,1,0,1), $f_3$ = (1,0,0,0,0,1,1,1).
Вариант 22. $f_1$ = (1,0,0,0,0,1,0,1), $f_2$ = (0,1,1,0,0,0,1,1), $f_3$ = (1,0,0,1,1,1,0,1).
Вариант 23. $f_1$ = (1,0,0,1,1,1,0,1), $f_2$ = (1,0,1,1,0,0,0,1), $f_3$ = (1,0,0,1,1,1,0,1).
Вариант 24. $f_1$ = (1,0,0,1,0,1,0,1), $f_2$ = (1,0,0,0,1,1,0,1), $f_3$ = (1,0,0,1,0,1,1,1).
Вариант 25. $f_1$ = (0,1,1,1,0,1,0,0), $f_2$ = (1,0,1,1,1,0,0,1), $f_3$ = (0,0,1,1,0,1,0,1).

## ЗАДАНИЕ 3

Для логической функции $f_1$ построить комбинационную и переключательную схему на элементной базе $\{\bar{\ },\wedge,\vee\}$. Для логической функции $f_2$ построить упрощенную комбинационную и переключательную схему. Построить минимизированную комбинационную и переключательную схему для логической функции $f_3$ По заданным техническим условиям, определяющим некоторые значения функции проводимости $g$, построить наиболее экономичную (оптимальную) переключательную схему.

Вариант 1.

$f_1 = (\bar{x} \to \bar{y}) \leftrightarrow x$, $f_2$ = (1,0,1,0,0,0,1,1), $f_3$ = (0,1,1,1,0,1,0,1),
$g$(0,1,1,1) = 1, $g$(1,1,0,1) = 1, $g$(1,0,1,0) = 0, $g$(0,0,0,0) = 0.

Вариант 2.

$f_1 = (x \to \bar{y}) \leftrightarrow \bar{x}$, $f_2$ = (1,1,1,0,0,1,0,1), $f_3$ = (0,0,1,1,0,0,0,1),
$g$(1,1,1,0) = 1, $g$(0,1,0,1) = 1, $g$(1,1,0,0) = 0, $g$(0,1,0,1) = 0.

Вариант 3.

$f_1 = (\bar{x} \wedge y) \leftrightarrow \bar{x}$, $f_2$ = (1,0,0,0,0,1,0,1), $f_3$ = (1,0,0,1,1,1,0,1),
$g$(0,1,0,0) = 1, $g$(0,1,1,1) = 1, $g$(1,1,0,0) = 0, $g$(1,1,0,0) = 0.

Вариант 4.

$f_1 = (x \wedge \bar{y}) \leftrightarrow \bar{x}$, $f_2$ = (1,0,1,0,1,1,0,1), $f_3$ = (0,0,1,1,0,1,1,1),
$g$(0,0,1,0) = 1, $g$(1,1,0,1) = 1, $g$(1,0,1,0) = 0, $g$(0,1,0,1) = 0.

Вариант 5.

$f_1 = (x \to y) \wedge \bar{x}$, $f_2$ = (1,0,0,0,0,1,0,0), $f_3$ = (0,0,1,0,1,1,0,1),
$g$(0,1, 0, 0) = 1, $g$(0,1,0,1) = 1, $g$(1,1,0,0) = 0, $g$(0,1,1,0) = 0.

Вариант 6.

$f_1 = (x \to \bar{y}) \to \bar{x}$, $f_2$ = (1,1,1,0,0,1,0,1), $f_3$ = (0,0,1,1,1,1,0,0),

$g(1,1,1,0) = 1$, $g(0,1,0,1) = 1$, $g(1,1,1,1) = 0$, $g(0,1,0,0) = 0$.

Вариант 7.

$f_1 = (\bar{x} \to y) \vee x$, $f_2 = (1,0,1,0,0,1,1,1)$, $f_3 = (0,0,0,1,1,1,0,1)$,
$g(0,1,0,0) = 1$, $g(1,1,0,1) = 1$, $g(0,1,1,0) = 0$, $g(0,1,0,1) = 0$.

Вариант 8.

$f_1 = (x \to \bar{y}) \wedge x$, $f_2 = (1,0,1,0,0,1,0,0)$, $f_3 = (0,0,1,1,1,0,0,1)$,
$g(0,1,1,1) = 1$, $g(0,1,1,0) = 1$, $g(1,1,1,0) = 0$, $g(0,1,0,0) = 0$.

Вариант 9.

$f_1 = (x \leftrightarrow y) \leftrightarrow \bar{x}$, $f_2 = (1,0,1,0,1,1,0,1)$, $f_3 = (0,0,1,1,0,1,0,1)$,
$g(0,1,0,0) = 1$, $g(0,0,0,1) = 1$, $g(1,0,1,0) = 0$, $g(1,1,0,0) = 0$.

Вариант 10.

$f_1 = (x \leftrightarrow \bar{y}) \wedge \bar{x}$, $f_2 = (1,1,1,0,0,1,0,1)$, $f_3 = (0,0,1,1,1,1,0,0)$,
$g(0,0,1,0) = 1$, $g(0,0,0,1) = 1$, $g(1,1,1,0) = 0$, $g(1,1,0,0) = 0$.

Вариант 11.

$f_1 = (\bar{x} \to y) \vee y$, $f_2 = (0,0,1,0,0,1,0,1)$, $f_3 = (0,0,0,0,1,1,0,1)$,
$g(0,0,1,0) = 1$, $g(0,1,0,0) = 1$, $g(0,1,1,0) = 0$, $g(1,1,0,0) = 0$.

Вариант 12.

$f_1 = (\bar{x} \to y) \wedge x$, $f_2 = (1,0,0,0,0,1,0,0)$, $f_3 = (0,0,1,1,0,0,0,1)$,
$g(0,1,0,1) = 1$, $g(0,0,0,1) = 1$, $g(1,0,1,0) = 0$, $g(0,1,1,0) = 0$.

Вариант 13.

$f_1 = (x \vee \bar{y}) \leftrightarrow y$, $f_2 = (1,0,0,0,0,1,0,1)$, $f_3 = (0,0,1,1,0,1,0,0)$,
$g(0,0,1,0) = 1$, $g(0,0,0,1) = 1$, $g(1,1,1,0) = 0$, $g(1,1,0,0) = 0$.

Вариант 14.

$f_1 = (x \vee y) \to \bar{y}$, $f_2 = (1,0,1,1,0,1,0,1)$, $f_3 = (0,0,1,1,1,1,1,1)$,
$g(1,1,1,0) = 1$, $g(0,1,1,1) = 1$, $g(1,0,1,0) = 0$, $g(0,1,0,0) = 0$.

Вариант 15.

$f_1 = (x \leftrightarrow y) \wedge \bar{x}$, $f_2 = (1,0,1,0,0,1,1,1)$, $f_3 = (0,0,0,1,1,1,0,1)$,
$g(0,1,1,1) = 1$, $g(1,1,0,1) = 1$, $g(1,1,1,1) = 0$, $g(0,1,0,1) = 0$.

Вариант 16.

$f_1 = (x \to y) \vee \bar{y}$, $f_2 = (1,0,1,0,1,1,0,1)$, $f_3 = (0,0,1,0,1,1,0,1)$,
$g(0,1,1,0) = 1$, $g(0,1,0,0) = 1$, $g(1,0,1,0) = 0$, $g(1,1,0,0) = 0$.

Вариант 17.

$f_1 = (x \leftrightarrow \bar{y}) \leftrightarrow \bar{x}$, $f_2 = (1,0,1,0,1,1,0,1)$, $f_3 = (0,0,1,1,0,0,0,1)$,
$g(0,1,1,1) = 1$, $g(0,0,0,1) = 1$, $g(1,0,1,0) = 0$, $g(0,1,0,0) = 0$.

Вариант 18.

$f_1 = (x \to y) \vee \bar{x}$, $f_2 = (1,0,1,0,0,1,0,0)$, $f_3 = (0,0,1,1,1,0,0,0)$,
$g(0,1,0,0) = 1$, $g(0,0,0,0) = 1$, $g(1,0,1,0) = 0$, $g(1,1,0,0) = 0$.

Вариант 19.

$f_1 = (x \leftrightarrow y) \to \bar{x}$, $f_2 = (1,0,0,0,0,1,0,0)$, $f_3 = (0,0,1,0,0,1,0,1)$,
$g(0,0,1,0) = 1$, $g(0,1,0,1) = 1$, $g(1,1,1,1) = 0$, $g(0,1,0,0) = 0$.

Вариант 20.

$f_1 = (x \leftrightarrow \bar{y}) \leftrightarrow x$, $f_2 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, $f_3 = (0,0,0,1,1,1,0,0)$,
$g(0,1,1,0) = 1$, $g(0,1,0,1) = 1$, $g(1,1,1,0) = 0$, $g(0,1,0,0) = 0$.

Вариант 21.

$$f_1 = (x \leftrightarrow y) \vee \bar{x}, \; f_2 = (1,1,1,0,0,1,0,1), \; f_3 = (0,0,1,1,1,1,1,0),$$
$$g(0,1,1,0) = 1, g(0,1,0,1) = 1, g(1,1,1,0) = 0, g(0,1,0,0) = 0.$$

Вариант 22.

$$f_1 = (x \vee \bar{y}) \leftrightarrow x, \; f_2 = (1,0,0,0,0,1,1,1), \; f_3 = (0,0,1,0,0,1,0,1),$$
$$g(0,0,1,1) = 1, g(1,1,0,1) = 1, g(1,0,1,1) = 0, g(0,1,1,0) = 0.$$

Вариант 23.

$$f_1 = (x \rightarrow y) \vee \bar{y}, \; f_2 = (1,0,1,0,0,1,1,1), \; f_3 = (0,1,1,1,1,1,0,1),$$
$$g(0,1,1,1) = 1, g(1,1,0,1) = 1, g(1,1,1,0) = 0, g(0,1,0,1) = 0.$$

Вариант 24.

$$f_1 = (x \wedge y) \leftrightarrow x, \; f_2 = (1,0,1,0,1,1,1,1), \; f_3 = (0,0,1,1,0,1,0,0),$$
$$g(0,1,0,0) = 1, g(0,0,0,1) = 1, g(0,1,1,0) = 0, g(1,1,0,0) = 0.$$

Вариант 25.

$$f_1 = (x \wedge \bar{y}) \leftrightarrow y, \; f_2 = (1,0,1,0,0,1,1,1), \; f_3 = (0,0,1,0,1,0,0,1),$$
$$g(0,1,1,1) = 1, g(0,0,0,1) = 1, g(1,1,1,0) = 0, g(0,1,0,1) = 0.$$

## ЗАДАНИЕ 4

В условиях задачи коммивояжера стоимости маршрутов заданы в виде матрицы *A*. Определить маршруты минимальной стоимости и стоимости этих маршрутов.

На алгоритмическом языке составить программу решения задачи коммивояжера и решить задачу для заданных стоимостей маршрутов.

Вариант 1.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 230 | 321 | 432 | 442 | 533 | 621 | 320 |
| 334 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 567 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 562 |

Вариант 2.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 130 | 341 | 432 | 442 | 533 | 621 | 320 |
| 334 | 249 | 673 | 651 | 344 | 162 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 249 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 342 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 362 | 144 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 567 |
| 238 | 232 | 545 | 761 | 354 | 631 | 262 |

Вариант 3.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 430 | 351 | 432 | 142 | 533 | 421 | 320 |
| 334 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 643 | 522 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 346 | 240 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 562 | 504 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 421 | 652 | 567 |
| 238 | 232 | 745 | 361 | 354 | 631 | 762 |

Вариант 4.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 270 | 621 | 432 | 642 | 533 | 221 | 120 |
| 234 | 219 | 773 | 651 | 344 | 762 | 224 |
| 456 | 706 | 443 | 622 | 332 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 302 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 462 | 544 | 226 | 331 |
| 533 | 422 | 770 | 533 | 721 | 652 | 467 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 362 |

Вариант 5.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 130 | 321 | 432 | 442 | 533 | 321 | 390 |
| 334 | 219 | 173 | 651 | 144 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 132 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 567 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 562 |

Вариант 6.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 330 | 321 | 432 | 442 | 533 | 621 | 320 |
| 334 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 302 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 567 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 562 |

Вариант 7.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 430 | 121 | 432 | 842 | 533 | 621 | 520 |
| 334 | 619 | 673 | 651 | 344 | 762 | 424 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 173 | 633 | 721 | 652 | 467 |
| 238 | 232 | 645 | 261 | 354 | 331 | 762 |

Вариант 8.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 630 | 321 | 432 | 400 | 733 | 621 | 120 |
| 334 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 602 | 632 | 511 | 290 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 132 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 630 | 422 | 333 | 533 | 721 | 652 | 167 |
| 238 | 232 | 445 | 761 | 354 | 631 | 262 |

Вариант 9.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 530 | 621 | 432 | 442 | 233 | 321 | 620 |
| 434 | 219 | 673 | 651 | 544 | 762 | 324 |
| 556 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 279 |
| 377 | 446 | 840 | 332 | 582 | 631 | 561 |
| 332 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 173 | 533 | 721 | 652 | 467 |
| 438 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 262 |

Вариант 10.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 530 | 521 | 402 | 542 | 133 | 621 | 420 |
| 734 | 219 | 673 | 651 | 544 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 300 | 542 | 631 | 461 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 507 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 162 |

Вариант 11.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 530 | 301 | 432 | 402 | 533 | 621 | 120 |
| 534 | 219 | 673 | 551 | 344 | 762 | 324 |
| 356 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 209 |
| 177 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 560 |
| 438 | 232 | 345 | 761 | 354 | 231 | 362 |

Вариант 12.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 321 | 132 | 442 | 533 | 221 | 520 |
| 634 | 219 | 673 | 651 | 340 | 562 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 200 |
| 877 | 446 | 840 | 122 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 333 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 467 |
| 538 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 262 |

Вариант 13.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 130 | 321 | 432 | 242 | 133 | 621 | 354 |
| 534 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 204 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 532 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 532 | 412 | 832 | 162 | 544 | 226 | 931 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 831 | 162 |

Вариант 14.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 130 | 321 | 432 | 242 | 133 | 621 | 354 |
| 534 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 204 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 132 | 100 | 532 | 162 | 530 | 226 | 301 |
| 532 | 412 | 832 | 162 | 544 | 226 | 931 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 831 | 162 |

## Вариант 15.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 230 | 321 | 432 | 442 | 533 | 621 | 320 |
| 334 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 567 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 562 |

## Вариант 16.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 630 | 321 | 432 | 542 | 500 | 121 | 720 |
| 234 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 424 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 567 |
| 438 | 732 | 645 | 761 | 304 | 631 | 560 |

## Вариант 17.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 330 | 321 | 432 | 542 | 500 | 121 | 420 |
| 234 | 219 | 673 | 451 | 344 | 762 | 424 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 107 | 406 | 140 | 132 | 342 | 601 | 261 |
| 632 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 117 |
| 438 | 732 | 645 | 761 | 304 | 631 | 760 |

## Вариант 18.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 310 | 321 | 832 | 542 | 540 | 121 | 220 |
| 434 | 219 | 373 | 451 | 344 | 262 | 924 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 107 | 406 | 140 | 132 | 342 | 601 | 261 |
| 632 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 613 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 117 |
| 738 | 732 | 645 | 761 | 304 | 931 | 360 |

## Вариант 19.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 319 | 321 | 132 | 542 | 540 | 121 | 520 |
| 434 | 219 | 373 | 451 | 344 | 262 | 924 |
| 756 | 776 | 443 | 602 | 632 | 500 | 209 |
| 107 | 406 | 140 | 132 | 342 | 601 | 261 |
| 632 | 112 | 532 | 762 | 544 | 200 | 331 |
| 113 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 117 |
| 238 | 732 | 545 | 361 | 304 | 931 | 660 |

## Вариант 20.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 321 | 102 | 242 | 530 | 121 | 820 |
| 434 | 219 | 373 | 451 | 344 | 262 | 924 |
| 156 | 770 | 403 | 112 | 132 | 560 | 289 |
| 107 | 406 | 140 | 132 | 342 | 601 | 261 |
| 672 | 112 | 532 | 762 | 544 | 200 | 331 |
| 103 | 722 | 773 | 533 | 721 | 652 | 117 |
| 238 | 702 | 545 | 361 | 304 | 431 | 160 |

## Вариант 21.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 388 | 321 | 102 | 242 | 530 | 101 | 420 |
| 434 | 219 | 373 | 451 | 344 | 262 | 924 |
| 156 | 770 | 403 | 112 | 132 | 560 | 289 |
| 107 | 406 | 140 | 132 | 342 | 601 | 261 |
| 600 | 112 | 532 | 762 | 544 | 200 | 331 |
| 103 | 722 | 773 | 533 | 721 | 652 | 117 |
| 238 | 702 | 545 | 361 | 304 | 131 | 760 |

## Вариант 22.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 230 | 321 | 432 | 442 | 533 | 621 | 320 |
| 334 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 633 | 422 | 773 | 533 | 721 | 652 | 567 |
| 238 | 232 | 645 | 761 | 354 | 631 | 562 |

## Вариант 23.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 200 | 305 | 532 | 442 | 533 | 621 | 110 |
| 334 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 224 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 299 |
| 877 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 761 |
| 432 | 112 | 532 | 762 | 544 | 226 | 331 |
| 603 | 122 | 711 | 503 | 441 | 652 | 217 |
| 208 | 932 | 645 | 761 | 354 | 231 | 462 |

## Вариант 24.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 300 | 665 | 532 | 442 | 453 | 621 | 190 |
| 304 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 250 |
| 456 | 776 | 443 | 622 | 632 | 511 | 209 |
| 337 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 161 |
| 400 | 112 | 532 | 762 | 504 | 226 | 181 |
| 603 | 122 | 711 | 503 | 441 | 652 | 217 |
| 258 | 932 | 145 | 761 | 354 | 631 | 162 |

Вариант 25.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 370 | 611 | 532 | 402 | 453 | 621 | 190 |
| 304 | 219 | 673 | 651 | 344 | 762 | 250 |
| 556 | 716 | 443 | 102 | 632 | 511 | 269 |
| 330 | 446 | 840 | 332 | 542 | 631 | 161 |
| 400 | 112 | 532 | 700 | 504 | 226 | 180 |
| 303 | 122 | 211 | 503 | 441 | 652 | 207 |
| 203 | 932 | 145 | 761 | 754 | 631 | 102 |

**ЗАДАНИЕ 5**

Разработать программу на алгоритмическом языке для перечисления всех различных слов, полученных перестановкой букв данного слова. Перечислить все различные перестановки букв. Для данных множеств составить производящую функцию сочетаний элементов и перечислить эти сочетания. Для множества $A =\{a, b, c, d, e, f, g\}$- перечислить сочетания по четыре элемента. Для множества $B =\{a, b, c, d\}$- перечислить сочетания с повторениями по четыре элемента, в которых элемент $a$ может встречаться не более трех раз, элемент $b$ – не более двух раз, элемент $c$ – не более трех раз, элемент $d$ – не более четырех раз.

Вариант 1.

1) $A$= «башня»; $B$= «сессия».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $k$=3; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=5, $k_1$ =2, $k_2$ =2, $k_3$ =3, $k_4$=1.

Вариант 2.

1) $A$= «музыка»; $B$= «студент».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f\}$, $k$=4; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=3, $k_1$ =2, $k_2$ =4, $k_3$ =4, $k_4$=3.

Вариант 3.

1) $A$= «весна»; $B$= «гномон».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $k$=5; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=6, $k_1$ =1, $k_2$ =3, $k_3$ =3, $k_4$=4.

Вариант 4.

1) $A$= «песня»; $B$= «город».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $k$=6; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=4, $k_1$ =3, $k_2$ =3, $k_3$ =1, $k_4$=3.

Вариант 5.

1) $A$= «танец»; $B$= «облако».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $k$=4; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=5, $k_1$ =3, $k_2$ =4, $k_3$ =2, $k_4$=2.

Вариант 6.

1) $A$= «стрела»; $B$= «ворота».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f\}$, $k$=2; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=6, $k_1$ =2, $k_2$ =3, $k_3$ =4, $k_4$=2.

Вариант 7.

1) $A$= «улица»; $B$= «ворона».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $k$=3; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=5, $k_1$ =3, $k_2$ =5, $k_3$ =1, $k_4$=2.

Вариант 8.

1) $A$= «сироп»; $B$= «молоко».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f \}$, $k$=4; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=6, $k_1$ =2, $k_2$ =3, $k_3$ =3, $k_4$=4.

Вариант 9.

1) $A$= «книга»; $B$= «топот».

2) $A =\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $k$=5; $B =\{a, b, c, d\}$, $k$=3, $k_1$ =3, $k_2$ =4, $k_3$ =4, $k_4$=1.

Вариант 10.

1) $A$= «рябина»; $B$= «олово».

2) $A=\{a, b, c, d, e, g\}$, $k$=3; $B=\{a, b, c, d\}$, $k$=5, $k_1$ =2, $k_2$ =3, $k_3$ =3, $k_4$=4.

<u>Вариант 11.</u>

1) $A$= «столица»; $B$= «огород».

2) $A=\{a, b, d, e, f, g\}$, $k$=4; $B=\{a, b, c, e\}$, $k$=6, $k_1$ =3, $k_2$ =4, $k_3$ =2, $k_4$=2.

<u>Вариант 12.</u>

1) $A$= «дворник»; $B$= «космос».

2) $A=\{a, b, c, e, f, g\}$, $k$=5; $B=\{a, b, c, f\}$, $k$=4, $k_1$ =2, $k_2$ =2, $k_3$ =3, $k_4$=4.

<u>Вариант 13.</u>

1) $A$= «огурец»; $B$= «колонна».

2) $A=\{a, c, d, e, f, g\}$, $k$=3; $B=\{a, b, e, d\}$, $k$=7, $k_1$ =4, $k_2$ =1, $k_3$ =2, $k_4$=3.

<u>Вариант 14.</u>

1) $A$= «мечта»; $B$= «яблоня».

2) $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $k$=6; $B=\{a, b, c, d\}$, $k$=5, $k_1$ =3, $k_2$ =3, $k_3$ =3, $k_4$=1.

<u>Вариант 15.</u>

1) $A$= «платок»; $B$= «колокол».

2) $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $k$=5; $B=\{a, b, c, e\}$, $k$=6, $k_1$ =2, $k_2$ =3, $k_3$ =4, $k_4$=3.

<u>Вариант 16.</u>

1) $A$= «интеграл»; $B$= «заноза».

2) $A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $k$=5; $B=\{a, b, c, f\}$, $k$=7, $k_1$ =4, $k_2$ =4, $k_3$ =2, $k_4$=2.

<u>Вариант 17.</u>

1) $A$= «пряник»; $B$= «глагол».

2) $A=\{a, b, c, e, f, g\}$, $k$=6; $B=\{a, b, c, h\}$, $k$=5, $k_1$ =3, $k_2$ =2, $k_3$ =3, $k_4$=2.

<u>Вариант 18.</u>

1) $A$= «солдат»; $B$= «голова».

2) $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $k$=7; $B=\{a, b, c, e\}$, $k$=3, $k_1$ =2, $k_2$ =3, $k_3$ =4, $k_4$=1.

<u>Вариант 19.</u>

1) $A$= «крыша»; $B$= «основания».

2) $A=\{a, b, c, d, e, g\}$, $k$=5; $B=\{a, b, c, h\}$, $k$=6, $k_1$ =3, $k_2$ =4, $k_3$ =2, $k_4$=4.

<u>Вариант 20.</u>

1) $A$= «балет»; $B$= «болото».

2) $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $k$=6; $B=\{a, b, c, d\}$, $k$=5, $k_1$ =2, $k_2$ =3, $k_3$ =4, $k_4$=3.

<u>Вариант 21.</u>

1) $A$= «нитка»; $B$= «долото».

2) $A=\{a, c, d, e, f, g\}$, $k$=5; $B=\{a, b, c, d\}$, $k$=5, $k_1$ =3, $k_2$ =4, $k_3$ =4, $k_4$=2.

<u>Вариант 22.</u>

1) $A$= «зарево»; $B$= «дерево».

2) $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $k$=6; $B=\{a, b, e, h\}$, $k$=7, $k_1$ =2, $k_2$ =3, $k_3$ =3, $k_4$=4.

<u>Вариант 23.</u>

1) $A$= «свеча»; $B$= «золото».

2) $A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $k$=3; $B=\{a, e, c, d\}$, $k$=8, $k_1$ =4, $k_2$ =3, $k_3$ =4, $k_4$=2.

<u>Вариант 24.</u>

1) $A$= «цветок»; $B$= «зарница».

2) $A=\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $k$=5; $B=\{a, b, c, h\}$, $k$=6, $k_1$ =2, $k_2$ =2, $k_3$ =4, $k_4$=3.

<u>Вариант 25.</u>

1) $A$= «функция»; $B$= «шалаш».

2) $A=\{a, b, c, d, e, g\}$, $k$=6; $B=\{a, b, c, d\}$, $k$=5, $k_1$ =3, $k_2$ =5, $k_3$ =2, $k_4$=2.