Методическое пособие к выполнению задания № 1

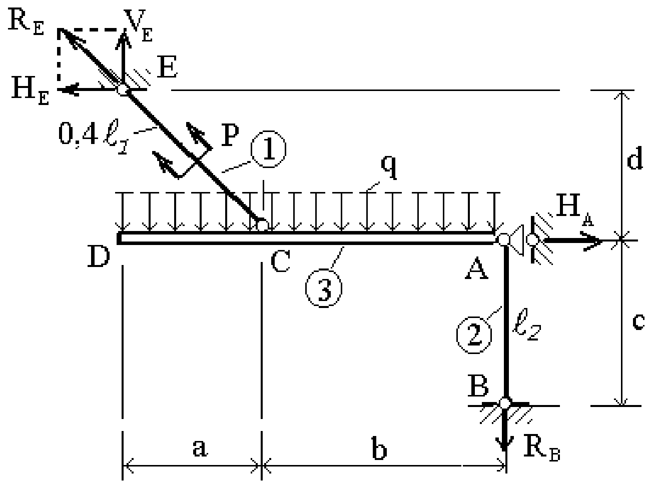
Рассмотрим № 00.

С х е м а I Дано: a = 1,0 м, b = 1,5 м, c = 1,8 м, d = 1,2 м,
q = 20 kH/ м, P = 8 kH,
$[\sigma] = 160\, МПа$. $E = 2{,}1 \cdot 10^5\ МПа$.

1. <u>Определение реакции во внешних и внутренних связях конструкции.</u>
- внутренние усилия в стержнях 1 и 2.

Изобразим систему в масштабе и покажем реакции в опорных устройствах, как это принято в "теоретической механике".

Система имеет 3 опоры *(внешние связи)*:



A - шарнирно-подвижная,
B и **E** – шарнирно-неподвижные.
Примем обозначения реакций:
H – горизонтальная (**H**orisontale),
V – вертикальная (**V**erticale).

Для опоры **E** показаны горизонтальная, вертикальная составляющие реакции и полная результирующая реакция $\mathbf{R_E}$.

Известно, что*, если стержень имеет шарнирные опоры и нагружен силами, направленными вдоль его оси, то реакции в его опорах действуют также вдоль оси*. Поэтому составляющие $\mathbf{H_E}$ и $\mathbf{V_E}$ в опоре **E** можно не изображать, достаточно указать полную реакцию $\mathbf{R_E}$, как это показано для опоры **B**.

Реакции в связях обычно определяются из условий равновесия. Для плоской системы сил можно записать три уравнения равновесия:

$$\Sigma X = 0,\ \Sigma У = 0,\ \Sigma M_Z = 0.$$

Читаются они так:- сумма проекций всех сил на ось X равна нулю,
- сумма проекций всех сил на ось У равна нулю,
- сумма моментов всех сил относительно оси Z равна нулю.

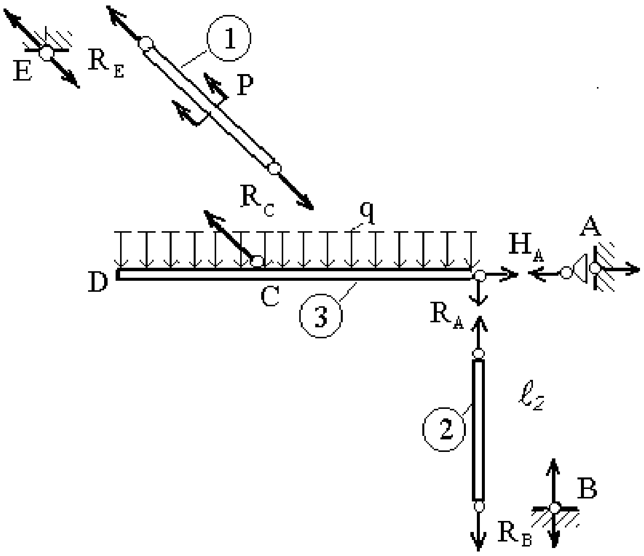
Ортогональные оси X, У находятся в плоскости чертежа, ось Z. перпендикулярна им. Начало координат может быть в любой точке плоскости, ось X может иметь направление не обязательно по горизонтали и только слева направо.

Уравнения можно трактовать ещё, как отсутствие линейных движений конструкции по направлениям осей X, У и её вращения относительно оси Z.

Для заданной системы при известных внешних силах по уравнениям равновесия можно определить реакции в опорных устройствах.

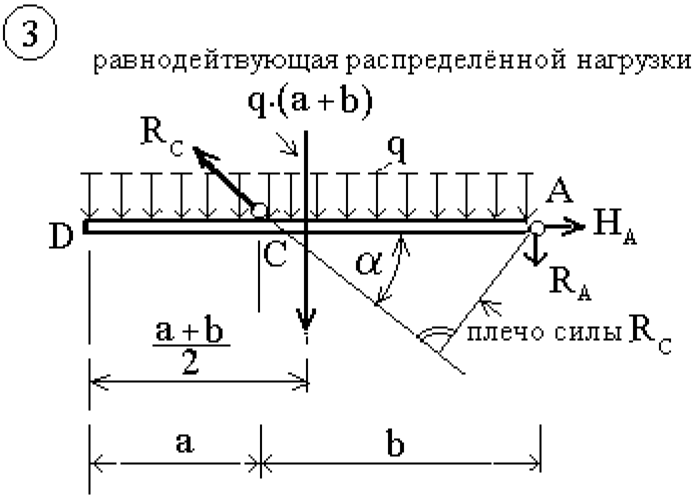
<u>*Внутренние связи - это устройства для соединения элементов одной конструкции между собой*</u>.

В нашей конструкции имеется три элемента 1, 2, 3 соединённые шарнирами в точках **C** и **A**. В этих точках один элемент по отношению к другому можно рассматривать как опорный. Соответствующие шарниры при этом представляют собой шарнирно-неподвижные опоры.



Показать реакции в них можно, но, так как "*<u>действие равно противодействию</u>"*, это будут две равные силы, приложенные в одной точке, противоположного направления. Проще будет, если изобразить конструкцию, разъединив её элементы. В этом изображении реакции внешних и внутренних связей имеют наглядное представление и очевиден алгоритм их определения. *Любой элемент конструкции находится в равновесии и для определения неизвестных сил, действующих на него, можно записать для каждого уравнения равновесия.*

Расчёт следует начинать с того элемента, где определяемые силы можно вычислить. В нашем задании таковым является 3-ий элемент.



Заметим, что изначально мы не знаем направления реакций (куда направить стрелки?). Ранее, исходя из конструктивных особенностей опорных устройств, мы определили только точки приложения и линии действия сил. Поэтому указанные направления сил являются произвольными, действительные направления устанавливаются расчётом. В уравнениях равновесия силы имеют направления, которые изображены на схеме.

Для упрощения расчёта при записи уравнений равновесия следует придерживаться очевидной **рекомендации**: *записывать то уравнение, из которого непосредственно можно определить какую-либо реакцию. Каждое уравнение должно содержать одно неизвестное. Предусмотреть уравнение для проверки полученного решения.*

Хаотичная запись уравнений обычно приводит к необходимости решать систему уравнений, при этом обычно забывается о проверке её решения. При неверно определённых реакциях дальнейший расчёт не имеет смысла.

Этой рекомендации несложно следовать, если определять реакции из уравнения $\Sigma M_Z = 0$, записывая его относительно точки, где пересекаются линии действия двух других реактивных сил.

Так, помещая ось Z в точку A, получаем уравнение:

$$\Sigma M_A = R_C \cdot b \cdot \sin\alpha - q \cdot (a+b) \cdot \frac{a+b}{2} = 0.$$

При записи уравнений равновесия не следует смешивать "алгебру с арифметикой", т.е. в уравнениях числами могут быть только безразмерные коэффициенты.

Из схемы конструкции (треугольник EDC):

$$\sin\alpha = \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}} = \frac{1{,}2}{\sqrt{1^2 + 1{,}2^2}} = 0{,}768.$$

Реакция $R_C = \dfrac{q \cdot (a+b)^2}{2 \cdot b \cdot \sin\alpha} = \dfrac{20 \cdot (1+1{,}5)^2}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}768} = 54{,}25347..(54{,}3)\ кН.$

Рекомендация: *при вычислениях в окончательном результате удерживать не более трех значащих цифры с округлением*, как это показано при определении реакции R_C.

Аналогичным образом, помещая ось Z в точку C, записываем уравнение:

$$\Sigma M_C = R_A \cdot b + q \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{a+b}{2} - a\right) = 0.$$

$$R_A = -\frac{q \cdot (a+b)}{b} \cdot \left(\frac{a+b}{2} - a\right) = -\frac{20 \cdot (1{,}0 + 1{,}5)}{1{,}5} \cdot \left(\frac{1{,}0 + 1{,}5}{2} - 1{,}0\right) = -8{,}33\,kH.$$

Знак (-) в результате означает, что реакция R_A в действительности имеет противоположное направление.

Расчёты можно проверить, спроектировав все силы на вертикальную ось:

$$\Sigma У = R_C \cdot \sin\alpha - R_A - q \cdot (a+b) = 54{,}3 \cdot 0{,}768 + 8{,}33 - 20 \cdot (1{,}0 + 1{,}5) = -0{,}0324.$$

Не следует надеяться, что проверочное уравнение будет совершенно выполняться. Получили абсолютную погрешность из-за округления результатов вычислений, а они неизбежны.

Точность произведённого расчёта характеризуется относительной погрешностью в процентах.

Определяется она следующим образом.

Заметим, что абсолютная погрешность есть разность двух сумм: положительной $A = 54{,}3 \cdot 0{,}768 + 8{,}33 = 50{,}0324$ и отрицательной $B = 50{,}0$.

Погрешность $\dfrac{A-B}{A} \cdot 100\%$ или $\dfrac{A-B}{B} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}0324}{50} \cdot 100 \approx 0{,}065\%$.

Можно удовлетворится такой погрешностью вычислений и несколько большей, учитывая, что при проверке соответствия между теорией и реальностью и при экспериментальном определении механических характеристик материалов погрешность $(3 \div 5)\%$ считается удовлетворительной.

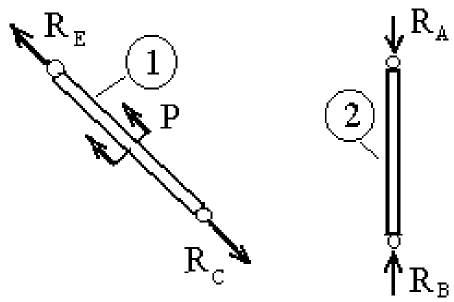
При проверенных значениях двух определённых реакций, третья определяется из простого уравнения, где ошибиться трудно:

$$\Sigma X = H_A - R_C \cdot \cos\alpha = 0, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} = \frac{1{,}0}{\sqrt{1{,}0^2 + 1{,}2^2}} = 0{,}640.$$

$$H_A = 54{,}3 \cdot 0{,}640 = 34{,}75\, kH.$$

Рассмотрим элементы 1 и 2.

Заметим, что <u>в дальнейших расчётах целесообразно оперировать реальными направлениями сил</u>.



Здесь R_A имеет изменённое направление и её значение +8,33 кН., R_C имеет прежнее направление, поскольку расчётом подтверждена его истинность.

Из уравнений равновесия стержней $\Sigma X = 0$, где ось направлена вдоль стержня,

$\Sigma X_1 = R_E + P - R_C = 0, \qquad \Sigma X_2 = R_B - R_A = 0$,

находим

$R_E = -8{,}0 + 54{,}3 = 46{,}3\, kH, \qquad R_B = 8{,}33\, kH$.

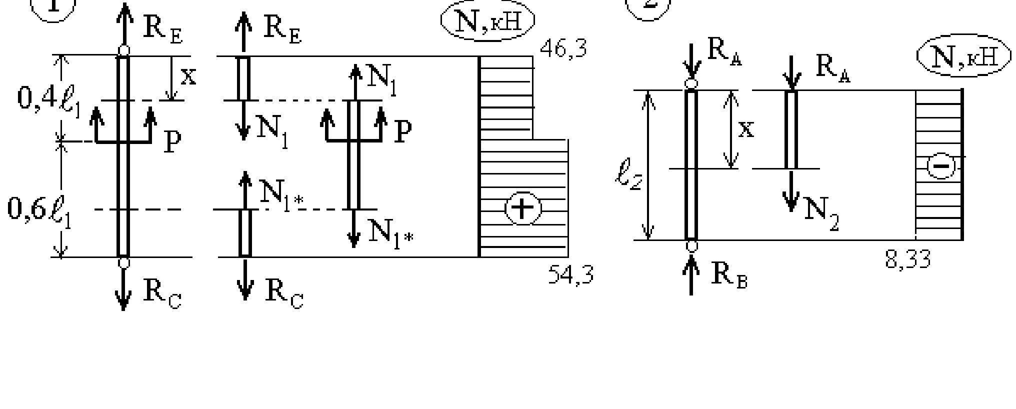
После вычисления всех сил, внешних по отношению к элементам, можно приступить к определению внутренних усилий в них (они называются также внутренними силовыми факторами).

3-й элемент (горизонтальный стержень) сопротивляется изгибу. Его расчёт может быть осуществлён после изучения "теории изгиба".
В этом задании считаем его недеформируемым (абсолютно жёстким).

2. <u>Определение внутренних усилий в стержнях</u>

Внутренние усилия в стержнях обусловлены внешними силами и определяются также из уравнений равновесия, аналогично тому, как определялись реакции во внутренних связях, соединяющих элементы конструкции между собой. Стержень можно представить как совокупность частей, ограниченных двумя поперечными сечениями, удерживаемых силами межатомного взаимодействия от взаимного смещения при действии внешних сил.
В любом поперечном сечении эти силы можно изобразить и вычислить, рассматривая равновесие выделенной части.

Распределение внутренних усилий по длине стержня показывается диа-



граммами. Изображения диаграмм называют ещё эпюрами - заимствование из французского языка (L'épure –чертёж, диаграмма).

Для построения их первоначально получают аналитическое выражение. Так, для получения функциональной зависимости $N_1 = f(x)$, из уравнения равновесия части стержня 1 от точки E до сечения с координатой X, находим

$$\Sigma X = N_1 - R_E = 0, \qquad N_1 = R_E = 46{,}3\,kH$$

Внутреннее усилие является постоянной величиной (не зависит от текущей координаты) и действительно в пределах изменения x от 0 до $0{,}5\ell_1$.

Аналогична процедура определения внутренних усилий для других поперечных сечений стержня.

Рекомендация: при определении внутренних усилий в стержне на чертеже выделенной части его их следует изображать положительными, учитывая принятое соглашение о знаках. *Нормальная внутренняя сила считается положительной, когда она направлена от сечения.* Это соглашение (правило) необходимо для оценки сопротивления материала стержня. Положительная сила вызывает растяжение стержня, отрицательная свидетельствует о сжатии.

3. Определить площади поперечных сечений.

В общей формулировке условие прочности ограничивает величину максимальных напряжений в стержнях. При растяжении и сжатии оно имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma].$$

В задании указано, что материал стержней – сталь. Стали практически одинаково сопротивляются растяжению и сжатию, поэтому назначается одно значение допускаемого напряжения для растяжения и сжатия.

Согласно условию прочности, площади поперечных сечений стержней определяются выражением:

$$A \ge \frac{N}{[\sigma]}.$$

Из диаграмм внутренних усилий в стержнях следуют их расчётные значения:

N_1 = 54,3 kH, N_2 = - 8,33 kH.

Примечание: 1-ый стержень имеет разные значения усилий по длине. В расчёт принимаем максимальное значение, проектируя стержень с постоянным сечением по длине. (Можно спроектировать ступечатый стержень, если согласится с усложнением технологии его изготовления.).

$$A_1 \ge \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{54{,}3 \cdot 10^3\ H}{160 \cdot 10^6\ H/м^2} = 3{,}39 \cdot 10^{-4}\, м^2 \approx 3{,}4\, см^2,$$

$$A_2 \ge \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{8{,}33 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}520 \cdot 10^{-4}\, м^2.$$

4. Определить поворот горизонтального стержня и перемещение точки D.

Система искажается в результате изменения длин стержней 1 и 2.

Общее изменение длины 1-го стержня определяется суммой изменения длин его двух частей с различными внутренними силами:

$$\ell_1 = \sqrt{a^2 + d^2} = \sqrt{1{,}0^2 + 1{,}2^2} = 1{,}56\, м$$

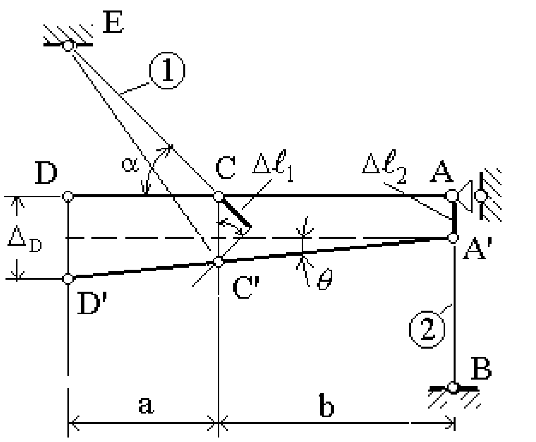
$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1 \cdot 0{,}4\ell_1}{E \cdot A_1} + \frac{N_1^* \cdot 0{,}6\ell_1}{E \cdot A_1} = \frac{\ell_1}{E \cdot A_1} \cdot \left(N_1 \cdot 0{,}4 + N_1^* \cdot 0{,}6\right),$$

$$\Delta\ell_1 = \frac{1{,}56}{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 3{,}4 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(46{,}3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4 + 54{,}3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6\right) = 11.2 \cdot 10^{-4}\, м.$$

Изменение длины 2-го стержня: $\ell_2 = c = 1{,}8\, м$,

$$\Delta\ell_2 = \frac{N_2 \cdot \ell_2}{E \cdot A_2} = \frac{-8{,}33 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8}{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}52 \cdot 10^{-4}} = -13{,}7 \cdot 10^{-4}\, м. \text{ (укорочение)}$$

Изобразим систему в деформированном виде, принимая во внимание вычисленные значения изменений длин её стержней.



Заметим, что в реальности система не имеет таких больших искажений, так как изменение длин стержней весьма мало (миллиметры). Для их визуализации на схеме используют разные масштабы для длин стержней и изменений длин, траектории движения точек по дуге окружности заменяют линиями касательными к дуге.

Непосредственно из геометрии находим поворот горизонтального стержня:

$$tg\theta = \frac{CC' - AA'}{b} = \frac{\Delta\ell_1 / \sin\alpha - \Delta\ell_2}{b},$$

Здесь изменения длин при вычислении берутся по абсолютному значению, знаки их учтены в схеме (растяжение 1-го и укорочение 2-го):

$$tg\theta = \frac{11{,}2 / 0{,}768 - 13{,}7}{1{,}5} \cdot 10^{-4} = 0{,}589 \cdot 10^{-4}\, рад.$$

Для малых углов $tg\theta = \theta$. Угол в градусах:

$$\theta = 0{,}589 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{180}{3{,}14} = 33{,}7 \cdot 10^{-4}.$$

Для определения перемещения точки D на схеме проведена от точки A' дополнительная линия параллельная первоначальному положению горизонтального стержня. Из подобия треугольников, образованных при этом, находим

$$\frac{CC' - AA'}{DD' - AA'} = \frac{b}{a+b}, \qquad \rightarrow \qquad DD' = \Delta_D = \frac{a+b}{b} \cdot \left(\Delta\ell_1 / \sin\alpha - \Delta\ell_2\right) + \Delta\ell_2.$$

$$\Delta_D = \frac{1{,}0 + 1{,}5}{1{,}5} \cdot \left(11{,}2 / 0{,}768 - 13{,}7\right) \cdot 10^{-4} + 13{,}7 \cdot 10^{-4} = 15{,}2 \cdot 10^{-4}\, м.$$

Как можно заметить, геометрические искажения конструкции не существенны и вводимые упрощения для оценки искажений её являются оправданными.

С х е м а II

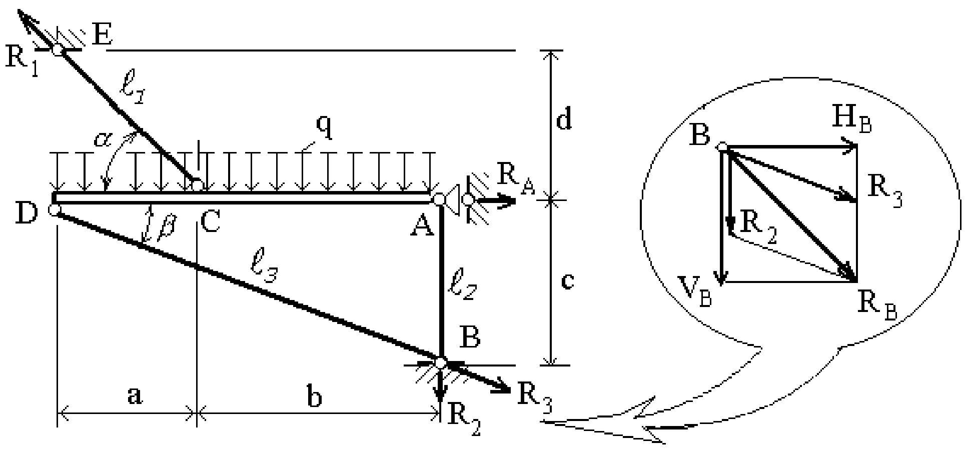
Схема II образована из схемы I включением в конструкцию ещё одного деформируемого стержня.

Требуется:

1. Определить внутренние усилия в стержнях.
2. Подобрать площади поперечных сечений стержней, удовлетворив условие прочности и заданное соотношение площадей: $A_1:A_2:A_3=2:1:1,5$.

На схеме показан предпочтительный вариант изображения реакций в опоре В. Полная реакция R_B разложена на две по осям примыкающих стержней, шарнир В является двойным.

Система находится в равновесии и можно записать три уравнения равно-



весия, в которые войдут четыре неизвестные реакции.

Иногда допускают ошибку, полагая, что можно записать четыре уравнения для определения четырёх реакций: проекции сил на оси X, У и два уравнения моментов относительно разных точек.

Не следует забывать, что *для плоской системы сил в любом случае будет только три линейно независимых уравнения*. При записи четырёх уравнений одно из них будет линейной комбинацией других.

Система статически неопределима (реакции нельзя определить из уравнений равновесия). Разность между числом неизвестных усилий и числом уравнений характеризует степень статической неопределимости. Она может быть любой. Если в систему добавить ещё один стержень, она станет два раза статически неопределимой и т.д.

Для расчёта статически неопределимых систем необходимо, помимо уравнений равновесия, составлять дополнительные уравнения в количестве равном степени статической неопределимости. В сумме уравнений должно быть столько, сколько неизвестных усилий.

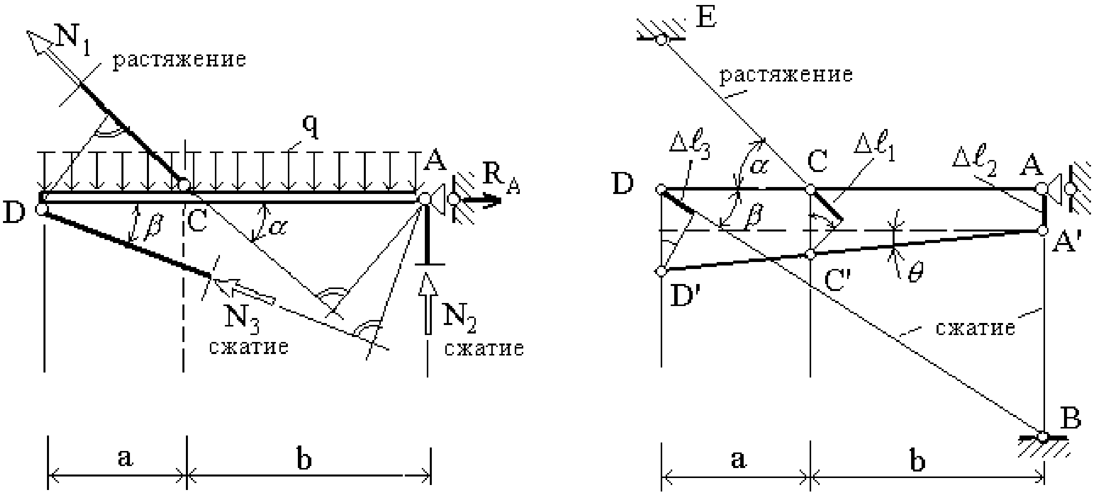
Для расчёта заданной схемы необходимо одно дополнительное уравнение, она один раз статически неопределима.

Дополнительные уравнения являются *геометрическими* и они устанавливаются из очевидного соображения: система деформируется (искажается) в точном соответствии с наложенными на неё связями. Называют их *уравнениями перемещений* или *уравнениями совместности деформации*. Их всегда можно записать столько, сколько раз система статически неопределима.

В заданной конструкции геометрия искажений обусловлена изменениями длин стержней, которые по закону Гука связаны с внутренними усилиями в них и которые, в свою очередь, связаны с реакциями в связях (внешних и внутренних). В большинстве случаев систему в деформированном виде несложно изобразить. Иногда это будет некоторая гипотетическая форма, которая в конечном итоге по результатам расчёта может быть не подтверждена, но по которым всегда можно изобразить реальную схему искажений.

Расчёт будет верен и при гипотетической форме деформирования, если соблюдать очевидное правило: *предполагаемое изменение длин стержней должно соответствовать направлению внутренних усилий в них (соответствие движений действующим силам).*

Обратим внимание на формулировку задачи: **определить внутренние усилия в стержнях.** О реакциях ничего не сказано и, следовательно, их определять не будем. Реакции и внутренние усилия в стержнях связаны посредством уравнений равновесия выделенных частей и при известных внутренних усилиях несложно определить реакции.



1. Определение внутренних усилий в стержнях конструкции.

Изобразим силовую схему системы и соответствующую ей схему деформирования, удовлетворяя требуемое соответствие направлений сил и изменений длин стержней.

Очевидно, принимая предположение о направлении усилий в стержнях, нельзя допустить их все растягивающими, шарниры D, C, A должны находиться на одной прямой линии. Маловероятно также, что жесткий стержень перемещается параллельно самому себе. Все другие предположения возможны.

Можно допустить, что 3-ий стержень растягивается и изобразить соответствующую схему деформировния.
Все варианты дадут одно решение, если соблюдено соответствие двух схем.

Запишем вначале геометрическое уравнение, которое следует из подобия треугольников, одна сторона которых пунктирная линия:

$$\frac{CC'-AA'}{DD'-AA'}=\frac{b}{a+b}, \qquad \frac{\Delta\ell_1/\sin\alpha-\Delta\ell_2}{\Delta\ell_3/\sin\beta-\Delta\ell_2}=\frac{b}{a+b}.$$

Заменим в нём изменения длин их выражениями по закону Гука:

$$\frac{\dfrac{N_1\cdot\ell_1}{E\cdot A_1\cdot\sin\alpha}-\dfrac{N_2\cdot\ell_2}{E\cdot A_2}}{\dfrac{N_3\cdot\ell_3}{E\cdot A_3\cdot\sin\beta}-\dfrac{N_2\cdot\ell_2}{E\cdot A_2}}=\frac{b}{a+b}.$$

Преобразуем, определив длины стержней через исходные данные:

$$\ell_1=d/\sin\alpha, \quad \ell_2=c, \quad \ell_3=c/\sin\beta.$$

$$\frac{N_1\cdot d}{A_1\cdot\sin^2\alpha}=\frac{N_3\cdot c}{A_3\cdot\sin^2\beta}\cdot\frac{b}{a+b}+\frac{N_2\cdot c}{A_2}\cdot\left(1-\frac{b}{a+b}\right),$$

$$N_1=N_3\cdot\frac{A_1}{A_3}\cdot\frac{c\cdot\sin^2\alpha}{d\cdot\sin^2\beta}\cdot\frac{b}{a+b}+N_2\cdot\frac{A_1}{A_2}\cdot\frac{c\cdot\sin^2\alpha}{d}\cdot\frac{a}{a+b}. \qquad (1)$$

Получили уравнение (1), дополнительное к уравнениям равновесия.

Как можно заметить, уравнение включает от площади поперечных сечений стержней (точнее от их соотношеня), которые в проектном расчёте не могут быть известны. Это является особенностью статически неопределимых систем. Поэтому *при проектном расчёте необходимо принимать(задавать) соотношения между площадями поперечных сечений стержней*. Этим самым можно управлять значениями внутренних усилий в стержнях и подбором его можно получать оптимальные системы.

Подставим в уравнение (1) заданные соотношения площадей и численные значения геометрических параметров системы:

$$\frac{A_1}{A_3}=\frac{2}{1{,}5}, \quad \frac{A_1}{A_2}=\frac{2}{1},$$

$$\sin\alpha=0{,}768, \qquad \sin\beta=\frac{c}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}}=\frac{1{,}8}{\sqrt{1{,}8^2+2{,}5^2}}=0{,}4.$$

Рекомендуется *не приводить промежуточные значения вспомогательных вычислений,* необходимо буквенные обозначения заменить числами и указывать только полученный результат. При таком порядке ведения вычислений в случае какой-либо ошибки расчёт всегда несложно проверить.

$$N_1=N_3\cdot\frac{2}{1{,}5}\cdot\frac{1{,}8\cdot0{,}768^2}{1{,}2\cdot0{,}4^2}\cdot\frac{1{,}5}{2{,}5}+N_2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1{,}8\cdot0{,}768^2}{1{,}2}\cdot\frac{1}{2{,}5}$$

$$N_1 = N_3 \cdot 4{,}424 + N_2 \cdot 0{,}708. \qquad (1')$$

Теперь запишем уравнения равновесия.

Не следует их записывать в том порядке, как они обычно читаются. Так, уравнение $\Sigma X = 0$ не будем записывать, оно необходимо только для определения реакции R_A. Уравнение $\Sigma Y = 0$ используем для проверки решения. Остаётся уравнение $\Sigma M_Z = 0$.

$$\Sigma M_A = N_3 \cdot (a+b) \cdot \sin\beta + N_1 \cdot b \cdot \sin\alpha - q \cdot (a+b) \cdot \frac{(a+b)}{2} = 0,$$

$$N_3 = -N_1 \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + q \cdot \frac{(a+b)}{2 \cdot \sin\beta}, \qquad (2)$$

$$\Sigma M_D = N_2 \cdot (a+b) + N_1 \cdot a \cdot \sin\alpha - q \cdot (a+b) \cdot \frac{(a+b)}{2} = 0.$$

$$N_2 = -N_1 \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \sin\alpha + q \cdot \frac{(a+b)}{2}. \qquad (3)$$

Заменим в (2) и (3) буквенные обозначения параметров их числами:

$$N_3 = -N_1 \cdot \frac{1{,}5}{2{,}5} \cdot \frac{0{,}768}{0{,}4} + 20 \cdot \frac{2{,}5}{2 \cdot 0{,}4} = -N_1 \cdot 1{,}152 + 62{,}5. \qquad (2')$$

$$N_2 = -N_1 \cdot \frac{1{,}0}{2{,}5} \cdot 0{,}768 + 20 \cdot \frac{2{,}5}{2} = -N_1 \cdot 0{,}3072 + 25. \qquad (3')$$

Из (1') при подстановке в него (2') и (3'):

$$N_1 = (-N_1 \cdot 1{,}152 + 62{,}5) \cdot 4{,}424 + (-N_1 \cdot 0{,}3072 + 25) \cdot 0{,}708.$$

$$N_1 = \frac{62{,}5 \cdot 4{,}424 + 25 \cdot 0{,}708}{1 + 1{,}152 \cdot 4{,}424 + 0{,}3072 \cdot 0{,}708} = 46{,}6\,kH.$$

Из (2') и (3') следует:

$$N_3 = -46{,}6 \cdot 1{,}152 + 62{,}5 = 8{,}82\,kH, \qquad N_2 = -46{,}6 \cdot 0{,}3072 + 25 = 10{,}7\,kH.$$

Проверка:

$$\Sigma Y = N_1 \cdot \sin\alpha + N_2 + N_3 \cdot \sin\beta - q \cdot (a+b) =$$

$$= 46{,}6 \cdot 0{,}768 + 10{,}7 + 8{,}82 \cdot 0{,}4 - 20 \cdot 2{,}5 = 50{,}017 - 50 = 0{,}017$$

Погрешность $\frac{0{,}017}{50} \cdot 100 = 0{,}034\%$.

Положительные значения определённых внутренних усилий свидетельствуют о корректности предположенной схемы деформирования.

2. Подбор площадей поперечных сечений стержней.

Необходимо удовлетворить условие прочности и принятое соотношение между площадями поперечных сечений стержней:

$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma], \qquad \frac{A_1}{A_3} = \frac{2}{1{,}5}, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{1}.$$

Усилия в стержнях: $N_1 = 46{,}6\,kH$, $N_2 = -10{,}7\,kH$, $N_3 = -8{,}82\,kH$.

(1-ый стержень растягивается, 2-ой и 3-ий сжимаются)

Удовлетворим условие прочности для второго стержня:

$A_2 \geq \dfrac{N_2}{[\sigma]} = \dfrac{10{,}7 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}669 \cdot 10^{-4}\, м^2 = 0{,}699\, см^2$. Примем $A_2 = 0{,}7\, см^2$.

Из соотношений площадей:

$$A_1 = 2 \cdot A_2 = 2 \cdot 0{,}7 = 1{,}4\, см^2, \quad A_3 = \frac{1{,}5}{2} \cdot A_1 = 1{,}5 \cdot A_2 = 1{,}5 \cdot 0{,}7 = 1{,}05\, см^2.$$

Напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{46{,}6 \cdot 10^3}{1{,}4 \cdot 10^{-4}} \approx 333\, МПа, \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10{,}7 \cdot 10^3}{0{,}7 \cdot 10^{-4}} \approx -153\, МПа,$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-8{,}82 \cdot 10^3}{1{,}05 \cdot 10^{-4}} = -84\, МПа.$$

Для данного материала напряжения в 1-ом стержне недопустимы, поэтому удовлетворим для него условие прочности, определив необходимую площадь:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{46{,}6 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 2{,}9125 \cdot 10^{-4}\, м^2 \approx 2{,}9\, см^2.$$

Согласно соотношению площадей, площади сечений других стержней:

$$A_2 = 0{,}5 \cdot A_1 = 0{,}5 \cdot 2{,}9 = 1{,}45\, см^2, \qquad A_3 = \frac{1{,}5}{2} \cdot A_1 = \frac{1{,}5}{2} \cdot 2{,}9 = 2{,}175\, см^2.$$

При этом напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{46{,}6 \cdot 10^3}{2{,}9 \cdot 10^{-4}} = 160{,}7\, МПа, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10{,}7 \cdot 10^3}{1{,}45 \cdot 10^{-4}} \approx -73{,}8\, МПа,$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-8{,}82 \cdot 10^3}{2{,}175 \cdot 10^{-4}} = -40{,}6\, МПа.$$

Условие прочности соблюдено для всех стержней, превышать допускаемое напряжение можно до 5%. 2-й и 3-й стержни недогружены, но с этим надо примириться и это есть также особенность статически неопределимых систем. Только тщательным подбором соотношения площадей можно добиться лучшего результата.

Заметим, что этот расчёт конструкции не окончательный. Длинные сжатые стержни могут искривляться (терять устойчивость) и их надо ещё проверять на условие устойчивости.