Задача 1. *Решить систему линейных уравнений :*

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 6 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение: Расширенной матрицей этой системы уравнений является

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & 6 \end{array}\right).$$

Напоминание: для нахождения решения системы линейных уравнений с данной расширенной матрицей последнюю следует подвергать элементарным преобразованиям над строками. При этом множества решений систем уравнений, соответствующих матрице до применения элементарного преобразования и после - совпадают.

Элементарные преобразования над строчками матрицы бывают трёх типов:

(a) Обмен местами рядов с номерами i и j (сокращённо $R_i \leftrightarrow R_j$),
(b) Умножение ряда с номером i на ненулевое число r (сокращённо $R_i \to rR_i$),
(c) Замена ряда с номером i на него минус кратное ряда j (сокращённо $R_i \to R_i - rR_j$),

Цель заключается в приведении расширенной матрицы системы к трапециевидной форме, причём так, чтобы в каждой строчке первым ненулевым элементом была единица, и все элементы матрицы над этой единицей были нулями. Из такой приведённой трапециевидной формы расширенной матрицы системы легко получается её решение.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -10 & 15 & 10 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2/5} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -10 & 15 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 5R_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Систему уравнений с последней матрицей в качестве расширенной можно записать как

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2x_4 + x_3 \\ 2 - 3x_4 + 2x_3 \\ 0 + x_3 \\ 0 + x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где x_3, x_4 – произвольные вещественные числа.

Ответ: система совместна и имеет бесконечное количество решений вида

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где x_3, x_4 – произвольные вещественные числа.

Решение выполнено автоматически.
Программу – учебное пособие разработал Артемий Берлинков.
Web-интерфейс Павла Лапина.